

Tese apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Física na área de Física Nuclear.

Silas Guida Vilhena

**OBJETOS ASTROFÍSICOS NA GRAVIDADE
TELEPARALELA MODIFICADA**

Tese aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:

Documento assinado digitalmente



PEDRO JOSE POMPEIA

Data: 24/07/2025 16:03:34-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Pedro José Pompeia
Orientador

Documento assinado digitalmente



MARIANA DUTRA DA ROSA LOURENCO

Data: 24/07/2025 16:41:10-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Mariana Dutra da Rosa Lourenço
Coorientadora

Prof. Dr. Sérgio José Barbosa Duarte
Coorientador

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP – Brasil
2025

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Divisão de Informação e Documentação

Vilhena, Silas Guida
Objetos Astrofísicos na Gravidade Teleparalela Modificada / Silas Guida Vilhena.
São José dos Campos, 2025.
77f.

Tese de Doutorado— Curso de Física, Área de Nuclear – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2025. Orientador: Prof. Dr. Pedro José Pompeia. Coorientadores: Profª. Dra. Mariana Dutra da Rosa Lourenço; Prof. Dr. Sérgio José Barbosa Duarte

1. Gravitação. 2. Estrelas de nêutrons. 3. Ondas gravitacionais. 4. Teoria da relatividade. 5. Astrofísica. 6. Física nuclear. 7. Física. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Título.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

VILHENA, Silas Guida. **Objetos Astrofísicos na Gravidade Teleparalela Modificada**. 2025. 77f. Tese de Doutorado em Física – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2025.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Silas Guida Vilhena

TÍTULO DO TRABALHO: Objetos Astrofísicos na Gravidade Teleparalela Modificada

TIPO DO TRABALHO/ANO: Tese / 2025

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta tese e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação ou tese pode ser reproduzida sem a sua autorização do autor.

Silas Guida Vilhena
R. Tiradentes, 296
CEP: 37890-000, Muzambinho-MG

OBJETOS ASTROFÍSICOS NA GRAVIDADE TELEPARALELA MODIFICADA

Silas Guida Vilhena

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr.	César Henrique Lenzi	Presidente	-	ITA
Prof. Dr.	Pedro José Pompeia	Orientador	-	ITA
Profa. Dra.	Mariana Dutra da Rosa Lourenço	Coorientadora	-	ITA
Prof. Dr.	Sérgio José Barbosa Duarte	Coorientador	-	CBPF
Prof. Dr.	Wayne Leonardo de Paula	Membro Interno	-	ITA
Dr.	José Carlos Neves de Araújo	Membro Externo	-	INPE
Dr.	Márcio Eduardo da Silva Alves	Membro Externo	-	UNESP

Aos amigos e professores do ITA por mostrar-me, mais uma vez, que Sócrates é, e sempre será, atual. Quanto mais eu estudo, mais descubro novas áreas do conhecimento que me eram veladas. Logo, a conclusão socrática é um convite à humildade, pois só sei que nada sei.

Agradecimentos

Agradeço a todos os professores que fizeram parte da minha trajetória e, em especial, agradeço, alguns professores mais recentes da caminhada e cito alguns desses:

Ao Prof. Rodrigo Cuzinatto por ter me incentivado a entrar no Doutorado do ITA, indicando-me ao meu orientador.

Ao Prof. César Lenzi, pela sua gentileza, e por ter me acompanhado em várias horas de banca!

Ao Prof. Odilon Lourenço, por seu trabalho, conversas e paciência para comigo.

Ao Prof. Sérgio Duarte, por suas conversas, carinho, dicas e histórias intrigantes da vida.

À Profa. Mariana Dutra, a mais famosa professora do ITA, que com paciência de Jó, passou horas e horas em consertos de códigos e gráficos comigo.

Ao Prof. Pedro Pompeia, que ao longo de anos, ouviu-me proferir inúmeras “groselhas”, ofendendo os conhecimentos da Física de forma ímpar. Agradeço às conversas diversas, que permeavam os minutos anteriores às reuniões. Peço, ainda, perdão por provocar a inexistência da viagem de férias, mesmo que tenha sido por uma boa causa.

Por último, o mais importante professor que tive, agradeço ao Prof. Paulo Vilhena da Silva, o homem que me colocou no mundo, me ensinou, além de caráter, o amor à sabedoria. Terminando agradecendo esta breve lista de professores citando Bias de Priene “omnia mea mecum porto”.

Agradeço aos meus irmãos: Thales, Hermes, Balmes, Ísis, Paulo Emílio, Leonardo e Peres.

Agradeço aos meus avós: Bráz Antônio da Silva, Maria Nazareth de Vilhena e Silva, Geralda dos Santos Guida e Rafael Guida Filho.

Agradeço às minhas sobrinhas e sobrinhos.

Agradeço ao Guilherme Bruneri e sua falta de beleza, Elisa Assencio e sua entidade, Reinaldo Caraça e seu filhote, e Regiley Pimenta— o meu stalker, além dos outros amigos de Doutorado, em especial, ao Everson, pela nossa conversa em linguagem desconhecida de outros membros, e à Isabella, seu graveto nunca será esquecido.

Agradeço ao ITA por ter proporcionado a possibilidade de conhecer todas as pessoas citadas. Agradeço também, ao Prof. José Carlos de Araujo, ao Prof. Wayne Leonardo e ao Prof. Márcio Eduardo por contruibuírem com melhorias deste trabalho.

Agradeço o apoio financeiro à agência de fomento CNPq.

*“Fui aos médicos, esperando ser curado; porém,
quanto mais eles punham remédios nos meus olhos, mais eles pioravam,
até que fiquei completamente cego.
Passei quatro anos sem poder ver nada,
e todos os meus irmãos tinham pena de mim.
Durante dois anos Aicar tomou conta de mim,
até partir para o país de Elimaida.*

— TOBIAS 2,10

*“Há um bípede sobre a terra, também quadrúpede,
de voz única, também com três patas;
só ele muda de forma, dentre os animais que vivem sobre a terra,
acima, no céu e abaixo, no mar.
Quando, porém, se firma e anda com o maior número de pés,
a força de suas pernas se torna muito menor..”*

— O ENIGMA DA ESFINGE

*“A tout le monde
A tous mes amis
Je vous aime
Je dois partir”*

— DAVE MUSTAINE

“Go ahead, make my day!”

— CLINT EASTWOOD

*“Saudade é sofrer contente
Porque é ter um bem ausente
É ter na mente lembrança
É ter no coração esperança”*

— PAULO VILHENA DA SILVA

Resumo

Este trabalho propõe investigar objetos compactos na gravidade teleparalela modificada. Esta gravidade consiste na mudança da lagrangiana do Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral acoplando parâmetros livres nos invariantes quadráticos que compõem a lagrangiana. A partir das equações de campo encontradas pela variação da ação, verificamos como tais parâmetros modificam e impactam objetos e eventos astrofísicos, como estrelas de nêutrons e ondas gravitacionais.

Abstract

This work proposes to investigate compact objects in modified teleparallel gravity. This gravity consists of changing the Lagrangian of the Teleparallel Equivalent of General Relativity by coupling free parameters in the quadratic invariants that make up the Lagrangian. From the field equations found by varying the action, we examine how these parameters modify and impact astrophysical objects and events, such as neutron stars and gravitational waves.

Lista de Figuras

FIGURA 4.1 – Diagrama massa-raio para a parametrização Z271v6 com diferentes valores de β_3	46
FIGURA 4.2 – Diagrama massa-raio para a parametrização FSUGold2 com diferentes valores de β_3	47
FIGURA 4.3 – Massa máxima em função do β_3 para as parametrizações FSUGold2 e Z271v6.	47
FIGURA 4.4 – Raio em função do β_3 para as parametrizações FSUGold2 e Z271v6.	48
FIGURA 4.5 – Diagrama massa-raio construído para FSUGold2 em azul e Z271v6 em preto para diferentes valores de β_3 . Os contornos estão relacionados aos dados da missão NICER, a saber, PSRJ0030+0451(RILEY <i>et al.</i> , 2019; MILLER <i>et al.</i> , 2019) e PSRJ0740+6620(RILEY <i>et al.</i> , 2021; MILLER <i>et al.</i> , 2021), o evento GW170817 (ABBOTT <i>et al.</i> , 2017; ABBOTT <i>et al.</i> , 2018), e o evento GW190425 (ABBOTT <i>et al.</i> , 2020a), todos eles com 90% de nível de confiança. As linhas horizontais vermelhas estão relacionadas ao PSRJ0740+6620(FONSECA <i>et al.</i> , 2021). As linhas horizontais marrons estão relacionadas ao PSRJ0952-0607(ROMANI <i>et al.</i> , 2022). As linhas horizontais violetas referem-se às restrições observacionais recentes sobre a massa da estrela de nêutrons GW190814 (ABBOTT <i>et al.</i> , 2020b).	49

FIGURA 4.6 – Diagramas massa-raio construídos a partir da parametrização NL3* para diferentes valores de k_F^{DM} e β_3 , nomeadamente (a) $\beta_3 = 0,82$, (b) $\beta_3 = 1,00$, e (c) $\beta_3 = 1,18$. Os contornos estão relacionados com os dados da missão NICER, nomeadamente, PSR J0030+0451 (RILEY *et al.*, 2019; MILLER *et al.*, 2019) e PSR J0740+6620 (RILEY *et al.*, 2021; MILLER *et al.*, 2021), o evento GW170817 (ABBOTT *et al.*, 2017; ABBOTT *et al.*, 2018) e o evento GW190425 (ABBOTT *et al.*, 2020a), todos eles com um nível de confiança de 90%. As linhas horizontais vermelhas (castanhas) estão relacionadas com PSR J0740+6620 (FONSECA *et al.*, 2021) (PSR J0952+0607 (ROMANI *et al.*, 2022)). A recente restrição observacional na massa da estrela de nêutrons, GW190814 (ABBOTT *et al.*, 2020b), é mostrada como linhas horizontais violetas. 51

FIGURA 4.7 – Diagramas massa-raio construídos a partir da parametrização NL3* para diferentes valores de β_3 e k_F^{DM} , nomeadamente (a) $k_F^{\text{DM}} = 0$ (nenhum DM incluído), (b) $k_F^{\text{DM}} = 0,02$ GeV, e (c) $k_F^{\text{DM}} = 0,04$ GeV, e (d) $k_F^{\text{DM}} = 0,06$ GeV. Os contornos são os mesmos que os exibidos na Fig 4.6. 52

Lista de Tabelas

TABELA 2.1 – O quadro sintetiza as características de cada variedade em função dos tensores de não-metricidade, torção e de curvatura	21
TABELA 4.1 – A tabela mostra os intervalos de β_3 que acomodam os dados observacionais dos eventos astrofísicos	48
TABELA 4.2 – Valores mín e máx da estrela de nêutrons de β_3 para diferentes contribuições de DM.	53

Lista de Abreviaturas e Siglas

RG	Relatividade Geral
TEGR	Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral
STEGR	Equivalente Simétrico Teleparalelo da Relatividade Geral
GTEGR	Equivalente Teleparalelo Geral da Relatividade Geral
MTG	Gravidade Teleparalela Modificada
NGR	Nova Relatividade Geral
TOV	Tolman-Oppenheimer-Volkoff
GW	Onda Gravitacional
BH	Buraco Negro
NS	Estrelas de Nêutrons

Lista de Símbolos

Assinatura da métrica:

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) .$$

Os índices gregos se referem aos índices de espaço-tempo, já os latinos aos do espaço tangente. Tanto os índices gregos e latinos variam de 0 a 3.

Definição da Torção:

$$T_{\nu\mu}^{\alpha} = \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} . \quad (1)$$

O vetor torção é definido por:

$$T_{\mu} = T_{\alpha\mu}^{\alpha} , \quad (2)$$

onde assumimos neste trabalho a convenção de soma de Einstein.

Definição dos símbolos de Christoffel:

$$\{\lambda_{\mu\nu}\} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_{\mu}g_{\rho\nu} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}) . \quad (3)$$

Definição do tensor de Riemann:

$$R_{\alpha\nu\mu}^{\rho}(\Gamma) = \partial_{\alpha}\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\alpha\mu}^{\rho} + \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\rho} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda}\Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} .$$

Definição da derivada covariante:

$$\nabla_{\rho}A^{\mu}_{\nu} = \partial_{\rho}A^{\mu}_{\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^{\beta}A^{\mu}_{\beta} + \Gamma_{\rho\beta}^{\mu}A^{\beta}_{\nu} . \quad (4)$$

Os resultados encontrados neste trabalho usam como constantes $\chi = 8\pi$ e, $G = \hbar = c = 1$ onde G é a constante gravitacional universal, c é velocidade da luz e $\hbar$ é a constante reduzida de Planck. Ainda, $M_{\odot}$ é a massa solar.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
2	GEOMETRIA	20
2.1	Variedades	20
2.1.1	Conexão	22
2.2	Variedade de Weitzenböck	24
3	EQUIVALENTE TELEPARALELO DA RELATIVIDADE GERAL	31
3.1	Equação de Força	32
3.2	Objetos Compactos	33
4	GRAVIDADE TELEPARALELA MODIFICADA	38
4.1	Nova Relatividade Geral	39
4.2	Objetos Compactos na MTG	41
4.2.1	Equação de Estado e Lagrangiana do modelo RMF	44
5	CONCLUSÃO	54
	REFERÊNCIAS	56
	APÊNDICE A – VARIAÇÕES	63
	APÊNDICE B – MOVIMENTO PLANETÁRIO E O PERIÉLIO DE MER- CÚRIO	67
	APÊNDICE C – ONDAS GRAVITACIONAIS NO TEGR	69
	APÊNDICE D – ONDAS GRAVITACIONAIS NA MTG	72

1 Introdução

No começo do século XX, Einstein publica *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* (Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento), esse trabalho dá início à Relatividade Especial (RE), ou Relatividade Restrita. Como consequência desse trabalho, ele publicaria no mesmo ano *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?* (A Inércia de um Corpo Depende da sua Quantidade de Energia?), de onde a fórmula $E = mc^2$ derivaria. Ele escreve em seu trabalho “se um corpo libera uma energia L na forma de radiação, sua massa diminui de L/V^2 ”¹. Com tais trabalhos, Einstein introduziu na Física a quebra dos conceitos absolutos de espaço e de tempo, portanto, o espaço e tempo passam a ser relativos. Seu trabalho considerava apenas sistemas inerciais, e em anos posteriores, Einstein e Grossmann tentam formular uma generalização da relatividade especial, que, por erro de cálculo não chegam a relacionar o espaço-tempo com a matéria e energia. Contudo, a ideia da força gravitacional ser uma manifestação da curvatura do espaço-tempo estava concretizada e Einstein, que discutira suas ideias com o matemático David Hilbert, corrigiu o seu erro encontrando as equações corretas, isso ocorreu poucos dias após Hilbert ter encontrado-as de modo independente, via variação da integral de ação com a lagrangiana. Em 1916, é publicado o trabalho *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie* (Os Fundamentos da Teoria da Relatividade Geral), nesse trabalho, Einstein já incorpora o procedimento via variação da integral de ação para encontrar as equações de campo (EINSTEIN, 1905a; EINSTEIN, 1905b; EINSTEIN, 2017; BOHM, 2015; HAWKING, 2012; THORNE, 1994; EINSTEIN, 1916a).

Ainda nesse trabalho de 1916, Einstein propõe que a gravidade de um objeto massivo desviaria a luz, calculando para o caso do Sol um valor de 1,7”. Esse resultado foi posto a prova por duas expedições. As expedições lideradas por Andrew Crommelin e Arthur Eddington em Ilha do Príncipe e em Sobral (Ceará/Brasil) confirmaram a teoria de Einstein em 1919. No fim daquele ano, J. J. Thomson, como presidente da Royal Society expressa a grandeza da Relatividade Geral dizendo “Esse é o resultado mais importante na teoria da gravitação desde os dias de Newton”(EINSTEIN, 1916a; LENZI *et al.*, 2019).

Assim, Einstein constrói uma teoria gravitacional que consegue explicar problemas da

¹Einstein não escreve $E = mc^2$ em seu trabalho. A sua notação no trabalho é: L = Energia e V = Velocidade da Luz

Física do início do Séc. XX. Ela possibilitou a idealização de objetos astrofísicos compactos, como os buracos negros e estrelas de nêutrons, e ainda propõe a existência de ondas gravitacionais, no artigo *Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation*. (Integração aproximada das Equações de Campo da Gravitação) e em mais ênfase no artigo *On Gravitational Waves* publicado com Nathan Rosen. Além disso, as equações de Einstein nos apresentam uma estrutura interessante, que é a relação entre geometria do espaço-tempo e matéria, ou seja, temos de um lado a parte geométrica e de outro lado, a parte de conteúdo de matéria. Essa estrutura e o cálculo das equações de campo, via método de Hilbert, possibilitaram ao longo do último século diversas modificações (SABBATA, 1985; WEINBERG, 1972; EINSTEIN, 1916b; EINSTEIN; ROSEN, 1937).

Algumas modificações são mais conhecidas, como é o caso das teorias $f(R)$, onde R é o escalar de curvatura. Elas são construídas dentro da variedade riemanniana e consistem numa modificação do argumento da integral de ação. A variação que origina a RG é dada por

$$\delta S = \delta \left\{ -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R \right\} = 0,$$

e para o caso das teorias $f(R)$ se dá através da seguinte variação

$$\delta S = \delta \left\{ -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) \right\} = 0,$$

onde um caso conhecido é o modelo de Starobinsky, que toma a forma $f(R) = R + \alpha R^2$. Apesar do sucesso que a RG obteve na explicação de problemas da Física no séc. XX, observações astronômicas levam físicos a questionarem se a RG não é a teoria gravitacional final como apresentada por Einstein. O estudo da cosmologia mostra que ela claudica em explicar o universo primordial e o universo recente, além, do problema relacionado à rotação de curvas de galáxia. Ainda, a falta de sucesso na quantização da RG corrobora com o questionamentos desses físicos. Uma modificação que tenta explicar alguns desses questionamentos se encontra no chamado “setor escuro”, que consiste em uma modificação no lado direito das equações de Einstein, ou seja, o conteúdo de matéria e energia (SOTIRIOU; FARAONI, 2010; GIRONES *et al.*, 2010; NAF; JETZER, 2011; CAPOZZIELLO; TSUJIKAWA, 2008; CHIBA *et al.*, 2007; STAROBINSKY, 1980; UTIYAMA; DEWITT, 1962; STELLE, 1977; HOOFT; VELTMAN, 1974; WOODARD, 2015; RYDEN, 2003).

Portanto, temos acima dois tipos de abordagens de modificação da RG. A segunda delas nos dá o modelo padrão da cosmologia, também conhecido como Modelo Λ CDM, onde o Λ representa a energia escura e CDM é a sigla para Cold Dark Matter (Matéria Escura Fria). Por outro lado, o primeiro tipo de modificação nos leva a inúmeros modelos. O modelo mencionado anteriormente, o de Starobinsky, é construído na variedade riemanniana, porém, pode-se construir modelos em distintas variedades, elas serão brevemente

apresentadas no Capítulo II (Geometria). Uma variedade de interesse é a de Weitzenböck, onde é possível construir uma teoria equivalente à Relatividade Geral, que é chamada de Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral (TEGR).² Essa teoria reproduz os mesmos resultados da RG, que serão abordados no Capítulo III (Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral) em mais detalhes. Entretanto, uma vez que ele reproduz os mesmos resultados da RG, ele também possui os mesmos problemas mencionados no parágrafo anterior, o que nos motiva a modificar o TEGR a nível de lagrangiana e estudar as consequências dessas mudanças (RYDEN, 2003; D'INVERNO, 1992; SABBATA, 1985; BERTONE; HOOPER, 2018; BAHAMONDE *et al.*, 2023; HEISENBERG, 2023; KRSSAK, 2024; MALUF; ROCHA-NETO, 2001; MALUF, 2013; ARCOS; PEREIRA, 2004; PIMENTEL *et al.*, 2003; CAI *et al.*, 2016; CAPOZZIELLO *et al.*, 2022).

A lagrangiana do TEGR é construída com três termos multiplicados por três constantes distintas bem definidas, a saber $-1/4$, $-1/2$, 1 , que são encontradas pela manipulação do tensor de Riemann na variedade de Weitzenböck. Portanto, é possível generalizar essa lagrangiana, de modo que as constantes não sejam definidas *a priori*. Em outras palavras, é possível construir uma lagrangiana onde o TEGR é um caso específico de um modelo mais geral, que denominamos de gravidade teleparalela modificada (MTG), nesta situação a lagrangiana que é usada na integral de ação é modificada acoplando parâmetros livres, este procedimento é explorado no Capítulo IV (Gravidade Teleparalela Modificada) (BAHAMONDE *et al.*, 2023; HEISENBERG, 2023; JIMENEZ *et al.*, 2020; KRSSAK, 2024; MALUF; ROCHA-NETO, 2001; MALUF, 2013; ARCOS; PEREIRA, 2004; PIMENTEL *et al.*, 2003; CAI *et al.*, 2016; CAPOZZIELLO *et al.*, 2022; HAYASHI; SHIRAFUJI, 1979).

Assim, para compreendermos melhor esse modelo é essencial analisarmos o impacto dessa modificação nos resultados conhecidos da RG, e um passo natural a ser seguido é o estudo de objetos compactos. Um objeto compacto de particular interesse é a estrela de nêutrons, e três trabalhos merecem ser mencionados aqui por importância histórica. O primeiro deles é o trabalho de Landau, *On the Theory on Stars*, em que ele introduz a ideia da compressão da massa pela gravidade. O segundo é o *Remarks on Super-Novae and Cosmic Rays* de W. Baade e F. Zwicky, onde eles sugerem a ideia que as estrelas de nêutrons são uma etapa posterior a supernovas, e por último *On Massive Neutron Cores* de Oppenheimer e Volkoff, trabalho que origina a denominada equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV). Esta última, a equação de conservação da massa e uma equação de estado (EoS).³ são essenciais para descrever relações de massa-raio de uma estrela de nêutrons. Enquanto a TOV relaciona a pressão em função do raio, temos que uma EoS relaciona a pressão com a densidade de energia no interior da estrela (LANDAU, 1932; BAADE; ZWICKY, 1934; OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939).

²A abreviação TEGR vem de Teleparallel Equivalent of General Relativity. Usamos essa abreviação por ser consagrada na literatura.

³Abreviação de Equation of State

Um tipo de EoS é a politrópica, que é um modo simplificado de descrever essa relação, onde é costume definir a pressão como uma função da densidade elevada a uma potência, $p = K\rho^\Gamma$, onde p é a pressão, K é uma constante, ρ é a densidade de massa e $\Gamma = 1 + 1/n$, sendo n o índice politrópico (HORVATH, 2022; CARVALHO *et al.*, 2015; ILIJIC; SOSSICH, 2018; KPADONOU *et al.*, 2016).

Uma EoS politrópica é útil, pois permite soluções de forma analítica de modelos simplificados, porém, para estrelas reais é necessário usar EoS realísticas, que são mais complexas e levam em consideração as propriedades físicas reais da matéria nuclear sob condições extremas, como as que existem no interior das estrelas de nêutrons. Para o caso dessas EoS, que se baseiam os modelos relativísticos de campo médio (RMF), possuímos na literatura diversas parametrizações que descrevem o interior das estrelas, dentre essas parametrizações há algumas de nosso interesse, como a FSUGold2 e Z271v6. Além dessas, temos ainda a parametrização NL3, que nos permite estudar possíveis efeitos da matéria escura nas estrelas de nêutrons. No Capítulo IV as lagrangianas associadas a essas EoS serão apresentadas (RING PETER ; SCHUCK, 1980; DUTRA *et al.*, 2016; WALECKA, 1974; LI *et al.*, 2008a; CHEN; PIEKAREWICZ, 2014a; DUTRA *et al.*, 2014; LALAZISSIS *et al.*, 2009).

Com as parametrizações das EoS, teremos todo o arcabouço para o estudo dos objetos compactos no contexto da MTG. Com isso, podemos analisar os impactos que os parâmetros livres possuem nas massas máximas e nos raios das estrelas de nêutrons. Podemos, ainda, entender o efeito deles na solução de onda gravitacional. Dito isso, relato como a estrutura do trabalho está disposta. No Capítulo II, discutimos as estruturas das variedades onde as teorias gravitacionais são construídas. No Capítulo III, discutimos o TEGR e mostramos como ele recupera os resultados previstos da RG. No Capítulo IV, discutimos a modificação ocorrida no TEGR, que resulta na MTG e todos os impactos dos parâmetros livres nesse modelo dentro do contexto de estrelas de nêutrons. Além disso, nos apêndices há um complemento do Capítulo III, mostrando outros resultados que o TEGR recupera da RG e, também, um estudo prévio das ondas gravitacionais no contexto da MTG.

2 Geometria

A RG mostra uma relação entre geometria do espaço-tempo e a matéria e energia, nas palavras de John Wheeler “o espaço-tempo diz à matéria como se mover; a matéria diz ao espaço-tempo como se curvar”. Essa relação da RG permitiu que inúmeras teorias gravitacionais surgissem. O desenvolvimento a partir da integral de ação possibilitou modificar a parte geométrica da teoria gravitacional, o que aflorou uma avenida de possibilidades a serem investigadas. Características peculiares de cada geometria nos permitem agrupá-las em categorias chamadas variedades (manifolds). Na seção abaixo, faremos um resumo das variedades existentes, explorando, em particular, a conexão em cada uma delas. Na seção (??), apresentaremos melhor a variedade de nosso interesse, a de Weitzenböck.¹

2.1 Variedades

Como dito, as teorias gravitacionais possuem características diferentes. Algumas teorias possuem particularidades em comum entre si, e podemos classificá-las de acordo com a presença ou não de determinados tensores, como os tensores de curvatura, torção e o tensor de não-metricidade. Para relembrar, a RG possui apenas o tensor de curvatura em sua construção. (SABBATA, 1985)

Agora, tomemos os tensores citados

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Tensor de não-metricidade} & \Rightarrow N_{\rho\mu\nu} \\ \text{Torção} & \Rightarrow T^\alpha_{\nu\mu} \\ \text{Curvatura} & \Rightarrow R_{\alpha\nu\mu}{}^\rho \end{array} \right., \quad (2.1)$$

onde o tensor de não-metricidade é definido por $N_{\rho\mu\nu} \equiv \nabla_\rho g_{\mu\nu}$, ou seja, quando o postulado da metricidade é respeitado teremos $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow N_{\rho\mu\nu} = 0$. Assim, de acordo com as relações acima, teremos diferentes variedades para quando os diferentes tensores forem nulos, quando impusermos um determinado tensor nulo, cairemos em uma outra variedade

¹Em alguns momentos, por abuso de linguagem, o leitor se deparará apenas com o termo Weitzenböck designando Variedade de Weitzenböck. Porém, não haverá dúvidas que não estaremos nos referindo ao austríaco Roland Weitzenböck, falecido três meses após Albert Einstein.

Variedades	$N_{\rho\mu\nu} = 0$	$T^\alpha_{\nu\mu} = 0$	$R_{\alpha\nu\mu}{}^\rho = 0$
Afim	-	-	-
Riemann-Cartan	✓	-	-
Riemann	✓	✓	-
Weitzenböck	✓	-	✓
Minkowski	✓	✓	✓
Weyl	-	✓	-
Teleparalela	-	-	✓
Teleparalela Simétrica	-	✓	✓

TABELA 2.1 – O quadro sintetiza as características de cada variedade em função dos tensores de não-metricidade, torção e de curvatura

mais restrita. Para exemplificar a afirmação anterior, tomemos a variedade mais geral possível, a variedade afim, dizemos isso pois esta variedade não possui nenhum tensor acima nulo, ou seja, $N_{\rho\mu\nu} \neq 0, T^\alpha_{\nu\mu} \neq 0, R_{\alpha\nu\mu}{}^\rho \neq 0$. Porém, quando a variedade respeita o postulado da metricidade, a variedade afim é restringida, e esta restrição dá origem à variedade de Riemann-Cartan. Em um abuso de linguagem:

$$\text{Variedade Afim} + \text{Postulado da metricidade} = \text{Variedade de Riemann-Cartan}.$$

Da Variedade de Riemann-Cartan, encontramos com duas condições possíveis: torção nula ou curvatura nula. A imposição de uma destas características, nos leva à uma outra variedade, uma esquemática pode ser melhor compreendida:

$$\text{Variedade de Riemann-Cartan} + \begin{cases} \text{Torção nula} \Rightarrow & \text{Variedade de Riemann} \\ \text{Curvatura nula} \Rightarrow & \text{Variedade de Weitzenböck} \end{cases}$$

Uma observação importante é que se tomarmos na Variedade de Riemann a curvatura nula, ou se tomarmos em Weitzenböck a torção nula, cairemos em outra variedade,

$$\begin{cases} \text{Variedade de Riemann} + \text{Curvatura nula} \Rightarrow \text{Variedade de Minkowski} \\ \text{Variedade de Weitzenböck} + \text{Torção nula} \Rightarrow \text{Variedade de Minkowski} \end{cases}$$

Existem outras variedades, que estão esquematizadas na Tabela 2.1.

As variedades descritas na Tabela 2.1 são classificadas de acordo com o tensor de não-metricidade, de torção e de curvatura. Porém, existe outro objeto importante de ser analisado nestas variedades, que é a conexão. Os tensores de torção e de curvatura dependem intrinsecamente da conexão. Portanto, devemos entender o que acontece com a conexão em cada uma dessas variedades.

2.1.1 Conexão

Ao tomarmos o transporte paralelo de um vetor $\mathbf{v}$ no espaço-tempo percorrendo um caminho de a até b e comparando com o vetor calculado no ponto b , ou seja, $\mathbf{v}'$, teremos, em regra geral, uma diferença entre esses vetores. O que nos permite *conectar* esses vetores é a quantidade conexão. Apresentaremos a seguir as conexões nas variedades que já mencionamos no quadro acima. No início da seção, apresentamos na Eq. (2.1) alguns objetos de interesse. Em especial, com a torção e com o postulado de não metricidade é possível tomarmos uma soma desses objetos em uma ciclicidade de índices. Essas somas podem ser definidas como contorção e o tensor de disformação, ou seja,

$$K_{\nu\mu}{}^{\beta} \equiv \frac{1}{2} (T_{\mu\nu}{}^{\beta} - T_{\nu\mu}{}^{\beta} - T^{\beta}_{\nu\mu}) , \quad (2.2)$$

e,

$$V_{\mu\nu}{}^{\beta} \equiv \frac{1}{2} (N_{\mu\nu}{}^{\beta} - N_{\nu\mu}{}^{\beta} - N^{\beta}_{\mu\nu}) . \quad (2.3)$$

Dada essas definições juntamente com os símbolos de Christoffel, previamente definidos na Eq. (3), podemos construir quase todas as conexões das variedades apresentadas. Portanto, passamos a apresentá-las. (SABBATA, 1985)

2.1.1.1 Conexão na variedade afim

A conexão mais geral é dada pela conexão na variedade afim, ela é expressa por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \{\beta_{\mu\nu}\} - K_{\mu\nu}{}^{\beta} - V_{\mu\nu}{}^{\beta} . \quad (2.4)$$

Nessa conexão há a presença da contorção, disformação e dos símbolos de Christoffel.

2.1.1.2 Riemann-Cartan

Nesta variedade, o postulado da metricidade é respeitada e, portanto, temos uma modificação na conexão. Assim, teremos que o tensor de disformação, apresentada pela Eq. (2.3) é nulo. Logo, encontramos que a conexão na variedade de Riemann-Cartan é dada por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \{\beta_{\mu\nu}\} - K_{\mu\nu}{}^{\beta} , \quad (2.5)$$

temos que a conexão em Riemann-Cartan é dada pelos símbolos de Christoffel, $\{\beta_{\mu\nu}\}$, e pelo tensor de contorção, $K_{\mu\nu}{}^{\beta}$.

2.1.1.3 Variedade de Riemann

O termo de contorção [Eq. (2.2)] apresentado na Eq. (2.5) está intimamente relacionado à torção do espaço-tempo, por ser construído a partir de torções, portanto, numa variedade onde não há torção, este termo é nulo, e este é o caso da variedade de Riemann, assim a conexão nesta variedade é dada por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \{\beta_{\mu\nu}\}. \quad (2.6)$$

A variedade de Riemann é a variedade onde a RG é construída. Logo, a conexão na RG pode ser entendida apenas como os símbolos de Christoffel.

2.1.1.4 Variedade de Weitzenböck

Para o caso onde há torção e não há curvatura, temos a mesma situação da variedade de Riemann-Cartan[Cf. Eq.(2.5)],

$$\Gamma_{\nu\mu}^{\beta} = \{\beta_{\nu\mu}\} - K_{\nu\mu}^{\beta}. \quad (2.7)$$

Neste caso, que é a variedade de interesse, temos que a curvatura é nula, ou seja, teremos que $R_{\alpha\nu\mu}^{\rho}(\Gamma) = 0$, enfatizamos que esse objeto é diferente de $R_{\alpha\nu\mu}^{\rho}(\{\})$, os dois objetos são iguais apenas na variedade riemanniana.

2.1.1.5 Variedade Teleparalela

Veremos mais adiante que o TEGR nasce na variedade de Weitzenböck, porém, ela é um caso de uma teoria mais geral dada pelo Equivalente Teleparalelo Geral da Relatividade Geral, GTEGR. Nesta variedade, a conexão toma a seguinte forma(HEISENBERG, 2023)

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \{\beta_{\mu\nu}\} - K_{\mu\nu}^{\beta} - V_{\mu\nu}^{\beta}.$$

2.1.1.6 Variedade Teleparalela Simétrica

Ao olharmos a Tabela construída com os tensores de curvatura, torção e de não-metricidade, percebemos que a variedade Teleparalela Simétrica não possui torção e apenas o tensor de não-metricidade, assim é esperado que sua conexão não tenha o termo de contorção e apenas o termo de distorção e os símbolos de Christoffel (KRSSAK, 2024; HEISENBERG, 2023).

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \{\beta_{\mu\nu}\} - V_{\mu\nu}{}^{\beta}.$$

2.1.1.7 Variedade de Weyl

A última conexão a ser apresentada é a de Weyl

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \{\mu_{\nu\lambda}\} + g_{\mu\nu}W^{\lambda} - \delta_{\nu}^{\lambda}W_{\mu} - \delta_{\mu}^{\lambda}W_{\nu},$$

onde o objeto W é o campo de Weyl (SCHOLZ, 2011).

2.2 Variedade de Weitzenböck

Para compreender a variedade de Weitzenböck é necessário um conhecimento prévio do formalismo de tetradas. Esse estudo prévio em certa medida é geral, não restringindo-se à Weitzenböck, porém, mais adiante neste trabalho, estaremos imersos na variedade de nosso interesse. Portanto, é necessário entender que uma tetrada é o objeto que faz uma ponte entre o espaço-tempo de mundo e um espaço tangente, pois, dado um ponto no espaço-tempo de mundo, podemos ter um conjunto de quatro vetores ortonormais geram um espaço-tempo tangente a esse ponto. Essa estrutura ficará ainda mais claro no final desta Seção. Com isso, quando fixamos o índice μ do objeto e^a_{μ} teremos uma representação de um vetor no espaço tangente. (WEINBERG, 1972; POMPEIA *et al.*, 2003; SABBATA, 1985)

Da ortonormalidade da tetrada seguem as seguintes relações:

$$\begin{cases} g_{\mu\nu}e_a{}^{\mu}e_b{}^{\nu} = \eta_{ab} \\ g^{\mu\nu}e_a{}^{\mu}e_b{}^{\nu} = \eta^{ab} \end{cases}, \quad (2.8)$$

e

$$\begin{cases} g_{\mu\nu} = \eta_{ab}e_a{}^{\mu}e_b{}^{\nu} \\ g^{\mu\nu} = \eta^{ab}e_a{}^{\mu}e_b{}^{\nu} \end{cases}. \quad (2.9)$$

Da relação acima, temos que a escolha de um conjunto de tetradas determina univocamente uma métrica, já o inverso não é verdadeiro.²

²Vários conjuntos de tetradas podem determinar a mesma métrica. Pois, há infinitas tetradas que, sob transformações de Lorentz, definem uma métrica. Segue dois exemplos dessas possibilidades:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{ab}e_a{}^{\alpha}e_b{}^{\beta}$$

Apresentemos algumas propriedades das tetradas. Para isso, vamos considerar que o objeto $B_\mu B_\nu$ é um tensor de mundo, ou seja, no espaço-tempo curvo. Conseguimos correlacioná-lo com um objeto no espaço tangente usando a Eq. (2.9) como segue:

$$\begin{aligned} B_\mu B^\mu &= g^{\mu\nu} (B_\mu B_\nu) = \eta^{ab} e_a^\mu e_b^\nu (B_\mu B_\nu) \\ &= \eta^{ab} [(e_a^\mu B_\mu) (e_b^\nu B_\nu)] = \eta^{ab} B_a B_b = B_a B^a. \end{aligned}$$

Assim, percebemos que a tetrada cumpre aqui a sua função de correlacionar o espaço tangente com o espaço curvo, como é expresso abaixo:³

$$B_\nu = e^i_\nu B_i. \quad (2.10)$$

Da relação de contração direta explícita acima, podemos usar a seguinte generalização:

$$T_{\alpha\beta\dots\rho} = e^a_\alpha e^b_\beta \dots e^r_\rho T_{ab\dots r}. \quad (2.11)$$

De um modo geral, a relação (2.11) permite-nos usar as tetradas para converter objetos do espaço-tempo curvo para o espaço tangente e vice-versa.

Um passo natural do nosso estudo é o comportamento da derivada espaço-temporal de um vetor A^a . É fácil lembrar que do estudo desse objeto é introduzido a conexão na RG, a fim de obtermos um objeto no qual sua transformação por coordenadas gerais se comporte como um tensor. Lembrando que da Eq. (2.9), a métrica é invariante, $g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}$, se tomarmos a transformação

$$e^a_\mu \rightarrow e'^a_\mu,$$

sendo

$$e'^a_\mu = \Lambda^a_b e^b_\mu,$$

onde Λ^a_b é a transformação de Lorentz. Porém, aqui, faremos uma transformação de Lorentz sobre a derivada, ou seja, $(\partial_\nu A^a(x))'$. A sua transformação não nos dá um vetor, mesmo que o índice que estamos utilizando na derivada seja o grego, ou seja, a derivada faz referência apenas à variedade espaço-temporal. Entretanto, a transformação de Lorentz depende do ponto do espaço-tempo, e como vimos, a tetrada conecta os espaços curvo e tangente por um ponto definido. Assim, para definirmos uma derivada espaço-temporal, no espaço tangente, que seja covariante por transformações de Lorentz, faz-se necessário a introdução de uma conexão. Esta, por sua vez, é chamada de conexão de spin, e a

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{cd} e^c_\alpha e^d_\beta$$

³Nessa frase foi usado uma notação mais informal. Tomamos a escrita “espaço” para designar “espaço-tempo”. Ao longo da tese, haverá momentos que as duas formas se intercambiarão.

derivada covariante é dada pela forma

$$\mathcal{D}_\nu A^a \equiv \partial_\nu A^a + \varpi_\nu^a{}_b A^b, \quad (2.12)$$

e a conexão de spin tem a sua lei de transformação dada por

$$\varpi_\nu^{a'}{}_{b'} = \Lambda^{a'}{}_a(x) \Lambda^c{}_{b'}(x) \varpi_\nu^a{}_c(x) - \Lambda^c{}_{b'}(x) \left[\partial_\nu \Lambda^{a'}{}_c(x) \right], \quad (2.13)$$

garantindo a covariância da derivada. A Eq. (2.12) é a derivada covariante total para o objeto no espaço-tempo tangente, ou seja, com índices latinos apenas. Na derivada covariante total mista aparece um objeto extra. Além da conexão de spin, teremos a conexão Γ , logo a derivada total é

$$\bar{\nabla}_\nu A^a{}_\mu \equiv \partial_\nu A^a{}_\mu + \varpi_\nu^a{}_b A^b{}_\mu - \Gamma_{\nu\mu}^\beta A^a{}_\beta, \quad (2.14)$$

por outro lado, observa-se que a Eq. (2.14) pode ser escrita de dois modos ainda, substituindo a Eq. (2.12):

$$\bar{\nabla}_\nu A^a{}_\mu \equiv \mathcal{D}_\nu A^a{}_\mu - \Gamma_{\nu\mu}^\beta A^a{}_\beta,$$

ou ainda,

$$\bar{\nabla}_\nu A^a{}_\mu = \nabla_\nu A^a{}_\mu + \varpi_\nu^a{}_b A^b{}_\mu.$$

A derivada total acima possui a conexão de spin. Porém, em Weitzenböck nós impomos o que é conhecido como paralelismo absoluto, que estabelece que a tetrada $e^a{}_\mu$ deve ser transportada paralelamente ao longo da variedade espaço-temporal. Esse conceito nos leva a (MALUF, 2013)

$$\nabla_\rho e^a{}_\nu = \partial_\rho e^a{}_\nu - \Gamma_{\rho\nu}^\beta e^a{}_\beta = 0, \quad (2.15)$$

aliado a essa condição, temos que a derivada total da tetrada também deve ser nula, o que nos leva a uma conexão de spin nula. Da relação 2.15 encontramos que

$$\Gamma_{\nu\mu}^\alpha = e_a{}^\alpha \partial_\nu e^a{}_\mu. \quad (2.16)$$

Essa conexão, em termos das tetradas, é a conexão de Weitzenböck, e caracteriza-se por apresentar a parte antissimétrica da conexão não nula

$$\Gamma_{[\nu\mu]}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = e_a{}^\alpha (\partial_\nu e^a{}_\mu - \partial_\mu e^a{}_\nu), \quad (2.17)$$

e é esse objeto que chamamos de torção, ou seja,

$$T^\alpha_{\nu\mu} = e_a^\alpha (\partial_\nu e^a_\mu - \partial_\mu e^a_\nu) . \quad (2.18)$$

Como vimos na Eq. (2.7), a conexão de Weitzenböck é escrita termos dos símbolos de Christoffel e pelo termos de contorção, que por sua vez é uma combinação de torções. Por conseguinte, os símbolos de Christoffel podem ser escritos como

$$\{\rho_{\mu\nu}\} = \Gamma^\rho_{\mu\nu} + K_{\mu\nu}^\rho . \quad (2.19)$$

Dada a Eq. (2.19), podemos reconstruir o tensor de Riemann. Porém, lembramos que na variedade de Weitzenböck não temos curvatura. Faz-se necessário ressaltar que o tensor de Riemann escrito em função da conexão de Weitzenböck é nulo, ou seja, $R(\Gamma) = 0$, o que não implica que a estrutura do tensor de Riemann escrito em função dos símbolos de Christoffel ($R(\{\})$) seja nulo. Assim, vamos tomar a forma do tensor de Riemann escrito em função dos símbolos de Christoffel,

$$R_{\alpha\nu\mu}^\rho(\{\}) = \partial_\alpha \{\rho_{\nu\mu}\} - \partial_\nu \{\rho_{\alpha\mu}\} + \{\rho_{\nu\mu}\} \{\rho_{\alpha\beta}\} - \{\rho_{\alpha\mu}\} \{\rho_{\nu\beta}\} , \quad (2.20)$$

substituindo a Eq. (2.19) em (2.20), temos termos que se agrupam na estrutura da derivada covariante para o termo de contorção, ou seja,

$$\nabla_\sigma K_{\nu\mu}^\rho = \partial_\sigma K_{\nu\mu}^\rho - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda K_{\lambda\mu}^\rho - \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda K_{\nu\lambda}^\rho + \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho K_{\nu\mu}^\lambda , \quad (2.21)$$

porém, é fácil verificar que há falta de um termo para que a estrutura acima se encontre efetivamente. Assim, com a devida manipulação, via soma e subtração de termos, podemos encontrar uma equação que é dependente da derivada covariante da contorção, de termos quadráticos da contorção, e um termo do tipo torção-contorção, que se origina da manipulação mencionada, onde se usa a Eq. (2.17). Além desses, percebemos que aparece uma estrutura do tensor de Riemann em função da conexão de Weitzenböck, ou seja,

$$\begin{aligned} R_{\alpha\nu\mu}^\rho(\{\}) &= \nabla_\alpha K_{\nu\mu}^\rho - \nabla_\nu K_{\alpha\mu}^\rho + (\partial_\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\alpha\mu}^\rho + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\rho - \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\rho) \\ &\quad + K_{\alpha\lambda}^\rho K_{\nu\mu}^\lambda - K_{\nu\lambda}^\rho K_{\alpha\mu}^\lambda + T_{\alpha\nu}^\lambda K_{\lambda\mu}^\rho , \end{aligned}$$

o tensor de Riemann em função da conexão, expressa pelos parênteses acima, é nulo, e portanto temos que

$$R_{\alpha\nu\mu}^\rho(\{\}) = \nabla_\alpha K_{\nu\mu}^\rho - \nabla_\nu K_{\alpha\mu}^\rho + K_{\alpha\lambda}^\rho K_{\nu\mu}^\lambda - K_{\alpha\mu}^\lambda K_{\nu\lambda}^\rho + T_{\alpha\nu}^\lambda K_{\lambda\mu}^\rho . \quad (2.22)$$

Finalmente, apresenta-se na equação acima o tensor de Riemann de interesse. Por completeza, passamos a apresentar o tensor de Ricci e o escalar de curvatura, para isso basta a contração interna de índices. Assim, o tensor de Ricci é

$$R_{\nu\mu}(\{\}) = R_{\alpha\nu\mu}{}^{\alpha}(\{\}) = \nabla_{\alpha}K_{\nu\mu}{}^{\alpha} - \nabla_{\nu}K_{\alpha\mu}{}^{\alpha} + K_{\alpha\lambda}{}^{\alpha}K_{\nu\mu}{}^{\lambda} - K_{\alpha\mu}{}^{\lambda}K_{\nu\lambda}{}^{\alpha} + T^{\lambda}{}_{\alpha\nu}K_{\lambda\mu}{}^{\alpha}. \quad (2.23)$$

Por fim, o escalar de curvatura

$$R(\{\}) = g^{\nu\mu}R_{\nu\mu}(\{\}) = \nabla_{\alpha}K^{\mu}{}_{\mu}{}^{\alpha} - \nabla_{\mu}K_{\alpha}{}^{\mu\alpha} + K_{\alpha\lambda}{}^{\alpha}K^{\mu}{}_{\mu}{}^{\lambda} - K_{\alpha\mu}{}^{\lambda}K^{\mu}{}_{\lambda}{}^{\alpha} + T^{\lambda}{}_{\alpha}{}^{\mu}K_{\lambda\mu}{}^{\alpha}.$$

Multiplicando a expressão acima por $\sqrt{-g}$, e renomeando índices, é possível tomarmos expansão da derivada covariante. Com isso, obteremos uma derivada ordinária aplicada a combinação de contorções, que com o devido uso da regra de Leibniz, encontramos

$$\sqrt{-g}R(\{\}) = \partial_{\mu}[\sqrt{-g}(K^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{\mu} - K_{\alpha}{}^{\mu\alpha})] - (K^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{\mu} - K_{\alpha}{}^{\mu\alpha})\partial_{\mu}\sqrt{-g} \quad (2.24)$$

$$+ \sqrt{-g}\Gamma_{\mu\rho}^{\mu}(K^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{\rho} - K_{\alpha}{}^{\rho\alpha}) + \sqrt{-g}K_{\alpha\lambda}{}^{\alpha}K^{\mu}{}_{\mu}{}^{\lambda} \quad (2.25)$$

$$- \sqrt{-g}K_{\alpha\mu}{}^{\lambda}K^{\mu}{}_{\lambda}{}^{\alpha} + \sqrt{-g}T^{\lambda}{}_{\alpha}{}^{\mu}K_{\lambda\mu}{}^{\alpha}. \quad (2.26)$$

Usando a definição da contorção, a contração interna de índices apresentada na equação anterior nos permite simplificar a estrutura. Essa simplificação nos leva ao nosso equivalente do escalar de curvatura, dado por

$$R(\{\}) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}[\sqrt{-g}(K^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{\mu} - K_{\alpha}{}^{\mu\alpha})] - \frac{1}{4}T^{\alpha\beta\mu}T_{\alpha\beta\mu} - \frac{1}{2}T^{\alpha\beta\mu}T_{\beta\alpha\mu} + T^{\mu}T_{\mu}. \quad (2.27)$$

O primeiro termo da Eq. (2.27) acima é um termo de superfície, logo, a nível de equação de campo, apenas os três termos seguintes são relevantes. Podemos reescrever a Eq. (2.27) como

$$R(\{\}) = B + T, \quad (2.28)$$

onde

$$B \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}[\sqrt{-g}(K^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{\mu} - K_{\alpha}{}^{\mu\alpha})], \quad (2.29)$$

e

$$T \equiv -\frac{1}{4}T^{\alpha\beta\mu}T_{\alpha\beta\mu} - \frac{1}{2}T^{\alpha\beta\mu}T_{\beta\alpha\mu} + T^{\mu}T_{\mu}. \quad (2.30)$$

A variação da Eq. (2.30) nos fornece a equação de campo do TEGR.

É interessante lembrar que as teorias teleparalelas são teorias gravitacionais por invariância de gauge para grupos de translação. No trabalho (ASSENCIO *et al.*, 2023) foi demonstrado que a invariância de gauge se preserva mesmo com termos de ordem superior a nível de Lagrangiana. Mas aqui, não exploraremos tal nível.

Tomemos dois sistemas de coordenadas diferentes, o primeiro representado por $\{u^\mu\}$ e um outro sendo cartesiano $\{x^a\}$, onde podemos mapear os pontos em qualquer sistema, ou seja, $u^\mu(x^a) \leftrightarrow x^a(u^\mu)$. Assim, podemos construir um objeto definido como

$$h^c{}_\mu \equiv \partial x^c / \partial u^\mu. \quad (2.31)$$

A transformação global de translação para os campos é dado por

$$x^a \rightarrow x'^a = x^a + \epsilon^a, \quad \delta \phi^B = \epsilon^a \delta_C^B \partial_a \phi^C, \quad (2.32)$$

onde $\phi^B(u)$ é um campo com $B = 1, 2, \dots, N$. Usando as Eqs. (2.31) e (2.32) teremos que

$$h'^c{}_\mu = \partial x'^c / \partial u^\mu = h^c{}_\mu + \partial_\mu \epsilon^c. \quad (2.33)$$

Com isso, postulamos que a integral abaixo, numa região Ω do espaço-tempo, é invariante sob transformação infinitesimal

$$S = \int_\Omega d^4u \mathcal{L}_M [\phi^A(u), \partial_\mu \phi^A(u), h^c{}_\mu, A^c{}_\mu], \quad (2.34)$$

onde $A^c{}_\mu$ é chamado de potencial de gauge, sendo sua variação dada por $\delta A^c{}_\mu = \partial_\mu \epsilon^c$. Assim, pela invariância de S e com o auxílio das Eqs. (2.31), (2.32) e (2.33) teremos

$$\delta \mathcal{L}_M = \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \Phi^A} \partial_a \Phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \partial_\mu \Phi^A} \partial_\mu \partial_a \Phi^A \right) \epsilon^a + \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \partial_\mu \Phi^A} \partial_a \Phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial h^a{}_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial A^a{}_\mu} \right) \partial_\mu \epsilon^a = 0.$$

Pela independência dos $\partial_\mu \epsilon^a$ e ϵ^a , teremos ainda

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial \partial_\mu \Phi^A} \partial_a \Phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A^a{}_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial h^a{}_\mu} = 0,$$

a solução dessa equação implica na dependência do $\mathcal{L}_M$ com $A^a{}_\mu$. Isso ocorre para

$$D_\mu \Phi^A \equiv \partial_\mu \Phi^A - A^a{}_\mu \partial_a \Phi^A, \quad (2.35)$$

$$e^a{}_\mu \equiv h^a{}_\mu - A^a{}_\mu. \quad (2.36)$$

Aqui é importante explicar a Eq.(2.36), seu lado esquerdo é o termo que usualmente é chamado de tetrada, a qual todo este trabalho se refere, porém, ele é constituído de dois outro objetos. O termo $h^a{}_\mu$, chamada de parte holônoma da tetrada, relaciona os sistemas de coordenadas cartesiano e o sistema curvilíneo geral, o sistema de coordenadas do espaço-tempo de mundo. Já o objeto $A^a{}_\mu$, que é denominado de parte não-holônoma da tetrada está intrinsecamente ligada à deformação do espaço-tempo, ou seja, é responsável

por descrever a gravitação.

É possível ainda, reescrever a Eq. (2.35) usando a Eq. (2.36) para o caso de um campo vetorial de modo a obtermos uma estrutura conhecida, vejamos

$$e_a{}^\nu D_\mu \Phi^a = \partial_\mu \Phi^\nu + e_a{}^\nu \partial_\mu e^a{}_\rho \Phi^\rho. \quad (2.37)$$

O lado direito da Eq.(2.37) acima nos lembra a estrutura da derivada covariante, de onde podemos relacionar e observar que o objeto que acompanha o vetor Φ^ρ é a estrutura da conexão de Weitzenböck, que se apresenta na Eq. (2.16).

3 Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral

A variação do escalar de curvatura na variedade riemanniana em relação ao tensor métrico (campo fundamental) nos leva à equação de campo da RG. No caso do TEGR, temos uma mudança em se tratar do campo fundamental, que agora é a tetrada, e^a_μ . Com os comentários feitos no final da seção anterior, podemos dizer que a variação do escalar de curvatura em relação à tetrada nos leva à equação de campo do TEGR. Porém, a Eq. (2.29) pode ser previamente descartada sem efeitos, pois se trata apenas de um termo de superfície. Tomando a lagrangiana sem esse termo implica que a lagrangiana é dada apenas pelas componentes de torção, que é equivalente ao termo de escalar de curvatura, de onde provém que os resultados da RG e do TEGR são equivalentes. Ainda, é válido mencionar sobre a trindade geométrica da gravidade, além do TEGR, a RG possui um outro equivalente, chamado de Equivalente Simétrico Teleparalelo da Relatividade Geral, STEGR, que reproduz os mesmos resultados da RG (JIMENEZ *et al.*, 2020). No contexto do TEGR, a lagrangiana a ser variada é dada pela Eq. (2.30) tomando que $\sqrt{-g} = e$, assim

$$L = -\frac{1}{2\chi}e \left(-\frac{1}{4}T^{\alpha\beta\mu}T_{\alpha\beta\mu} - \frac{1}{2}T^{\alpha\beta\mu}T_{\beta\alpha\mu} + T^\mu T_\mu \right). \quad (3.1)$$

O cálculo da variação pode ser feita termo a termo na Eq. (3.1), contudo, podemos reescrevê-la a fim de facilitar a variação, como feito na Eq. (3.2). Porém, antes de passarmos para o cálculo em si, devemos fazer uma consideração a respeito da lagrangiana, que é o fato de que os objetos que a compõem são os únicos invariantes quadráticos possíveis de serem construídos com a torção. Em outras palavras, todas as outras combinações invariantes quadráticas da torção nos levam a essas três combinações específicas presentes na Eq. (3.1), a menos de um fator negativo.

Podemos manipular a lagrangiana (3.1) colocando uma combinação da torção em evidência, com isso a integral de ação se torna

$$S_T = -\frac{1}{2\chi} \int dx^4 e \left(-\frac{1}{4} g^{\kappa\rho} g^{\mu\sigma} g_{\beta\alpha} - \frac{1}{2} \delta_\alpha^\kappa \delta_\beta^\rho g^{\mu\sigma} + \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\kappa g^{\sigma\mu} \right) T^\alpha_{\rho\sigma} T^\beta_{\kappa\mu} + S_m, \quad (3.2)$$

o termo S_m origina o conteúdo de matéria, cuja variação é dada por

$$\delta S_m = \int e d^4 x \delta e^a_\mu T_a^\mu,$$

onde

$$T_a^\mu = \frac{1}{e} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta e^a_\mu}. \quad (3.3)$$

Dada que a extremização da ação é

$$\delta S_T = 0,$$

e com as variações apresentadas no Apêndice, conseguimos finalmente encontrar a equação de campo expressa abaixo

$$\partial_\rho \left(4e S_f^{\rho\lambda} \right) + 4e S^{\mu\lambda\rho} T_{\mu f\rho} - e e_f^\lambda S_{\mu\nu\rho} T^{\mu\nu\rho} = -2\chi e e_f^\rho T^\lambda_\rho, \quad (3.4)$$

onde

$$S^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{4} (T^{\mu\nu\rho} + T^{\nu\mu\rho} - T^{\rho\mu\nu}) + \frac{1}{2} (g^{\mu\rho} T^\nu - g^{\mu\nu} T^\rho). \quad (3.5)$$

Observa-se que a Eq. (3.4) é a equação de campo do Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral desacoplada do tensor de energia-momento. Para corroborar com o nome do TEGR e confirmar o que foi comentado, apresentaremos soluções conhecidas da RG.

3.1 Equação de Força

Elemento de linha é dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.6)$$

O procedimento para encontrarmos a equação da Geodésica na RG, passa pela minimização da raiz quadrada do elemento de linha, ou seja,

$$\delta \int ds = 0, \quad (3.7)$$

onde caímos na equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial F(y)}{\partial \dot{x}^\rho} - \frac{\partial F(y)}{\partial x^\rho} = 0, \quad (3.8)$$

com

$$F(y) = y^2 \equiv g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (3.9)$$

onde $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$. Isso nos levará à

$$\ddot{x}^\lambda + \left\{ \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \right\} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \quad (3.10)$$

o termo em chaves é identificado como os símbolos de Christoffel, ou seja,

$$\{\lambda_{\mu\nu}\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (3.11)$$

Assim, a Eq. (3.10) é reescrita como

$$\ddot{x}^\lambda + \{\lambda_{\mu\nu}\} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (3.12)$$

A expressão acima é a equação da geodésica, e como vimos é proveniente da extremização do termo ds . Porém, temos ainda, a curva autoparalela que é definida por um vetor $\mathbf{b}$ transportado ao longo dela via transporte paralelo, esta curva é o caminho mais “reto” entre dois pontos no espaço-tempo. Para o caso da RG, temos que ambas as equações se coincidem, ou seja, obtemos a Eq. (3.12), expressas com os símbolos de Christoffel. Para o caso do TEGR, essa situação não é verdadeira. Contudo, para descrever o movimento de partículas no TEGR a expressão a ser usada é equivalente à geodésica, que é a equação de força, dada por

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -K_{\mu\nu}{}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \quad (3.13)$$

Ela é encontrada tomando a substituição da Eq. (2.19), $\{\lambda_{\mu\nu}\} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + K_{\mu\nu}{}^\lambda$, na Eq. (3.12). Observamos que a estrutura acima é ligeiramente diferente da geodésica, porém, o seu resultado é o mesmo.

3.2 Objetos Compactos

Um último estudo que podemos fazer sobre o TEGR é a solução de Schwarzschild. Para isso, consideramos um campo gravitacional estático e isotrópico produzido por uma massa esférica e estática. Isso nos permite descrever a geometria dos espaço-tempo fora da fonte, a solução de Schwarzschild. Sob a ótica das características mencionadas do objeto, implica-se em uma tetrada como abaixo, mas nesta situação temos nove graus de

liberdade representados pelos parâmetros $g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7$ e g_8

$$e^a_{\mu} = \begin{pmatrix} g_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_1 \sin \theta \cos \phi & g_4 r \cos \theta \cos \phi & -g_7 r \sin \theta \sin \phi \\ 0 & g_2 \sin \theta \sin \phi & g_5 r \cos \theta \sin \phi & g_8 r \sin \theta \cos \phi \\ 0 & g_3 \cos \theta & -g_6 r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

Porém, uma análise a mais percebemos que o elemento de linha dessa tetrad é dada por

$$\begin{aligned} ds^2 = & g_0^2 dt^2 + [-g_1^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi - g_2^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta - g_3^2 \cos^2 \theta] dr^2 + \\ & + [r^2 (-g_4^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta - g_5^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta - g_6^2 \sin^2 \theta)] d\theta^2 \\ & + [r^2 (-g_7^2 \sin^2 \phi - g_8^2 \cos^2 \phi) \sin^2 \theta] d\phi^2 \\ & + 2r [-g_1 g_4 \cos^2 \phi - g_2 g_5 \sin^2 \phi + g_3 g_6] \sin \theta \cos \theta dr d\theta \\ & + 2r (g_1 g_7 - g_2 g_8) \sin \phi \sin^2 \theta \cos \phi dr d\phi \\ & + 2 \left[\frac{r^2 (g_4 g_7 - g_5 g_8) (\cos (2\phi - 2\theta) - \cos (2\phi + 2\theta))}{8} \right] d\theta d\phi \end{aligned}$$

Com isso, temos que

$$\left\{ \begin{array}{ll} [-g_1^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi - g_2^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta - g_3^2 \cos^2 \theta] dr^2 \rightarrow & C_r dr^2 \\ + [r^2 (-g_4^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta - g_5^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta - g_6^2 \sin^2 \theta)] d\theta^2 \rightarrow & C_\theta r^2 d\theta^2 \\ + [r^2 (-g_7^2 \sin^2 \phi - g_8^2 \cos^2 \phi) \sin^2 \theta] d\phi^2 \rightarrow & C_\phi r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \\ + 2r [-g_1 g_4 \cos^2 \phi - g_2 g_5 \sin^2 \phi + g_3 g_6] \sin \theta \cos \theta dr d\theta \rightarrow & 0 \\ + 2r (g_1 g_7 - g_2 g_8) \sin \phi \sin^2 \theta \cos \phi dr d\phi \rightarrow & 0 \\ + 2 \left[\frac{r^2 (g_4 g_7 - g_5 g_8) (\cos (2\phi - 2\theta) - \cos (2\phi + 2\theta))}{8} \right] d\theta d\phi \rightarrow & 0 \end{array} \right.$$

Com C_r, C_θ, C_ϕ parâmetros auxiliares a serem definidos, dependentes apenas dos parâmetros $g_0, g_1, \dots, g_8$. É necessário que para o termo de dr^2 tenhamos $g_1^2 = g_2^2 = g_3^2$, pois

$$-g_1^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi - g_2^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta - g_3^2 \cos^2 \theta \Rightarrow -g_1^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) - g_1^2 \cos^2 \theta \Rightarrow -g_1^2$$

Logo, podemos identificar o $C_r = -g_1^2$. O mesmo raciocínio é válido para o caso do $d\theta^2$, assim $g_4^2 = g_5^2 = g_6^2$. Vamos identificar como $C_\theta = -g_4^2$. Para o termo de $d\phi^2$, temos $C_\phi = -g_7^2$, onde $g_7^2 = g_8^2$. Com isso em mente, temos que os parâmetros dos termos cruzados ficam com a seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{ll} -g_1 g_4 \cos^2 \phi - g_2 g_5 \sin^2 \phi + g_3 g_6 & \Rightarrow -g_1 g_4 \cos^2 \phi - g_1 g_4 \sin^2 \phi + g_1 g_4 \\ g_1 g_7 - g_2 g_8 & \Rightarrow g_1 g_7 - g_1 g_7 \\ g_4 g_7 - g_5 g_8 & \Rightarrow g_4 g_7 - g_4 g_7 \end{array} \right.$$

ou seja, os termos se anulam. Porém, a simetria esférica só é garantida quando temos o ângulo sólido, logo, podemos renomear os parâmetros $C_\theta = C_\phi = 1$, assim, dos oito graus de liberdade anteriores, ficamos apenas com dois graus, a saber: g_0 e g_1 , sendo os termos γ_{00} e γ_{11} da expressão (3.14). Assim, tomamos a tetrada

$$e^a{}_\mu = \begin{pmatrix} \gamma_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{11} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ 0 & \gamma_{11} \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ 0 & \gamma_{11} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

com $\sqrt{g_{00}} = \gamma_{00}$ e $\sqrt{-g_{11}} = \gamma_{11}$ e a contração das tetradas nos dá uma delta, ou seja, $e^a{}_\mu e_b{}^\mu = \delta_b^a$. Antes de prosseguir com o nosso estudo para encontrar os valores de γ_{00} e γ_{11} que formaliza a solução de Schwarzschild, precisamos fazer mais uma consideração com a tetrada acima. A Eq. 3.14 é considerada uma boa tetrada. O estudo de boas e más tetradas foi desenvolvido devido a não invariância sob transformações locais de Lorentz, o que implica que a tetrada desempenha um papel importante em modelos que são generalizações do TEGR, do tipo $f(T)$. Com Mas para ela ser considerada uma boa tetrada é necessário que ela estabeleça a alguns critérios, o primeiro é que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu$$

seja satisfeito. A outra é que $e^a{}_\mu$ seja solução das equações de campo de $f(T)$, onde a função $f(T)$ pode ser escolhida arbitrariamente. (TAMANINI; BÖHMER, 2012; TAMANINI; BÖHMER, 2015)

Agora, tomemos as equações de campo desacopladas do tensor energia momento, ou seja, tomemos o lado direito da Eq. (3.4) como nulo:

$$\partial_\rho \left(4e S_f{}^{\rho\lambda} \right) + 4e S^{\mu\lambda\rho} T_{\mu f\rho} - e e_f^\lambda S_{\mu\nu\rho} T^{\mu\nu\rho} = 0,$$

Quando substituimos a tetrada (3.14) e sua inversa na equação de campo, encontramos as equações na ausência de matéria:

$$\begin{cases} 2\gamma'_{11}r + \gamma_{11}^3 - \gamma_{11} = 0 \\ 2\gamma'_{00}r + \gamma_{00} - \gamma_{00}\gamma_{11}^2 = 0 \\ \gamma'_{00}\gamma'_{11}r - \gamma''_{00}\gamma_{11}r + \gamma_{00}\gamma'_{11} - \gamma'_{00}\gamma_{11} = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Dada as equações acima, podemos manipulá-las. Das duas primeiras equações encontramos duas relações importantes, a primeira delas provém da manipulação conjunta das equações, e é

$$\gamma_{11} = \frac{1}{\gamma_{00}}.$$

Da segunda equação do conjunto e com a relação previamente encontrada, temos também que

$$\gamma_{00} = \sqrt{1 - \frac{c}{r}},$$

onde conseguimos correlacionar o fator $c = 2m$. Assim, conseguimos reescrever apropriadamente os valores de γ_{11} e de γ_{00} , como sendo

$$\gamma_{00} = \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}, \quad \text{e} \quad \gamma_{11} = \frac{1}{\gamma_{00}}.$$

Porém, se não estamos interessados em soluções no vácuo, precisamos tomar a Eq. (3.4) e usaremos o tensor de energia momento de fluido perfeito, ou seja, $T^\lambda_\rho = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p)$., com o uso da tetrada (3.14) nos levará novamente a um conjunto de três equações, que diferem do conjunto (3.15) apenas pelos termos de densidade, ρ , na primeira equação na Eq. (3.16) e pelos termos de pressão, p , como apresentado do conjunto abaixo

$$\begin{cases} 2r\gamma'_{11} + \gamma_{11}^3 - \gamma_{11} = \chi\gamma_{11}^3\rho r^2 \\ 2r\gamma'_{00} + \gamma_{00} - \gamma_{00}\gamma_{11}^2 = \chi\gamma_{00}\gamma_{11}^2 pr^2 \\ \gamma'_{00}\gamma_{11}r - \gamma''_{00}\gamma_{11}r + \gamma_{00}\gamma'_{11} - \gamma'_{00}\gamma_{11} = -\chi\gamma_{00}\gamma_{11}^3 pr \end{cases} \quad (3.16)$$

Concomitantemente, acoplamos ao conjunto a equação provinda da conservação do tensor energia momento, expressa por

$$p' = -(p + \rho) \frac{1}{\gamma_{00}} \gamma'_{00}. \quad (3.17)$$

Porém, temos que esse novo conjunto de quatro equações não são independentes, pois se tomarmos a derivada em relação a r da segunda equação, substituindo a Eq. (3.17) e usando as duas primeiras equações do conjunto (3.16) é possível encontrar a terceira equação do conjunto, assim construímos um novo conjunto de equações dado por

$$\begin{cases} 2r\gamma'_{11} + \gamma_{11}^3 - \gamma_{11} = \chi\gamma_{11}^3\rho r^2 \\ 2r\gamma'_{00} + \gamma_{00} - \gamma_{00}\gamma_{11}^2 = \chi\gamma_{00}\gamma_{11}^2 pr^2 \\ p' = -(p + \rho) \frac{1}{\gamma_{00}} \gamma'_{00} \end{cases} \quad (3.18)$$

As equações (3.18) foram construídas partindo de uma lagrangiana com parâmetros bem definidos, o que não acontece na Seção 4.2. Entretanto, sabemos que a solução das equações de campo no exterior de um objeto é dada pela solução de Schwarzschild, ou

seja,

$$\gamma_{00} = \frac{1}{\gamma_{11}} = \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}.$$

Para o caso interior da estrela, a solução de Schwarzschild não é válida, mas na superfície da estrela, devemos reavê-la, pelo limite de continuidade. Ou seja, as relações apresentadas em (3.2), onde teremos os valores de γ_{00} em função do raio na superfície da estrela, ou seja, $\gamma_{00}(r_b)$, além de termos $\rho(r_b) = 0$ e $p(r_b) = 0$. Contudo, para modelar o interior da estrela a densidade e a pressão não são nulas e é necessário encontramos uma relação de equilíbrio entre essas grandezas. Para isso começamos com a mudança de variável

$$\frac{1}{\gamma_{11}^2} = 1 - \frac{2u}{r}, \quad (3.19)$$

onde pela devida manipulação, chegaremos em

$$\gamma_{11}^3 + 2\gamma_{11}'r - \gamma_{11} = 2\gamma_{11}^3 u'.$$

Comparando a expressão acima com a primeira equação de (3.18), encontramos que

$$u' = \frac{1}{2}\chi\rho r^2, \quad (3.20)$$

onde a equação acima representa a taxa de variação de massa acumulada em relação ao raio. Tomando a combinação das duas últimas equações de (3.18) é possível encontrar a equação abaixo

$$-\frac{2r}{\gamma_{11}^2} \frac{p'}{(p + \rho)} + \frac{1}{\gamma_{11}^2} - 1 = \chi p r^2,$$

e resgatando a mudança de variável expressa por (3.19), e isolando a derivada da pressão, encontraremos a equação de equilíbrio hidrostático para objetos simétricos, estáticos e esféricos. Em homenagem, ela é chamada de equação de TOV (Tolman-Oppenheimer-Volkoff), e é apresentada abaixo:

$$p' = -\frac{p + \rho}{r^2 - 2ur} \left(\frac{1}{2}\chi p r^3 + u \right). \quad (3.21)$$

Para encontrar uma solução para o conjunto de equação dados por (3.20) e (3.21) é necessário mais uma equação que relacione as variáveis ρ e p , essa nova expressão é a chamada equação de estado.

4 Gravidade Teleparalela Modificada

O nosso estudo segue por uma modificação na lagrangiana do TEGR. Esta modificação consiste na inclusão de parâmetros livres na Eq. (3.1), chamados de β_1 , β_2 e β_3 , como expresso pela Eq. (4.1).

$$L = -\frac{1}{2\chi}e \left(-\frac{\beta_1}{4}T^{\alpha\beta\mu}T_{\alpha\beta\mu} - \frac{\beta_2}{2}T^{\alpha\beta\mu}T_{\beta\alpha\mu} + \beta_3 T^\mu T_\mu \right). \quad (4.1)$$

A modificação implica que no limite em que os parâmetros tendem à unidade, nós recuperamos o TEGR. A inserção dos parâmetros tem o intuito de generalizar a lagrangiana do TEGR, que é composta pelos três invariantes quadráticos possíveis de serem construídos com a torção. Em outras palavras, a lagrangiana (4.1) é a forma mais geral possível de ser construída com os três invariantes quadráticos da torção. Podemos, ainda, redefinir a lagrangiana, 4.1, como

$$L = -\frac{1}{2\chi}e \left(\check{T} \right), \quad (4.2)$$

com

$$\check{T} \equiv -\frac{\beta_1}{4}T^{\alpha\beta\mu}T_{\alpha\beta\mu} - \frac{\beta_2}{2}T^{\alpha\beta\mu}T_{\beta\alpha\mu} + \beta_3 T^\mu T_\mu. \quad (4.3)$$

A redefinição acima, Eq.(4.2) é útil para diferenciarmos a notação usual do escalar torção, que é definido na literatura apenas como T .

Com a nova lagrangiana definida na Eq.(4.1), seguimos para o processo de extremização, da mesma forma como foi feito na Seção 3. Embora o procedimento permaneça o mesmo, a introdução dos parâmetros livres β_1 , β_2 e β_3 adiciona uma liberdade ao sistema. No entanto, como mostramos a seguir, essa generalização não altera a estrutura da equação de campo.

$$\partial_\rho \left(4e\Sigma_f^{\rho\lambda} \right) + 4e\Sigma^{\mu\lambda\rho}T_{\mu f\rho} - ee^\lambda_f \Sigma_{\mu\nu\rho}T^{\mu\nu\rho} = -2\chi ee^\rho_f T^\lambda_\rho, \quad (4.4)$$

a estrutura é exatamente a mesma que a encontrada na Eq. (3.4), porém, teremos uma modificação no objeto S , que passa a ser reescrito como Σ . Essa modificação foi o preço pago pela introdução dos parâmetros livres β_1 , β_2 e β_3 . A modificação se dá pelo apa-

recimento dos parâmetros e pela separação dos primeiros termos de torção no objeto S . Mais uma vez, observamos que quando os parâmetros tendem à unidade, o fator $1/4$ fica em evidência nos primeiros três termos e assim a Eq. (3.5) é recuperada. Eis a definição deste novo objeto:

$$\Sigma^{\mu\nu\rho} = \frac{\beta_1}{4} T^{\mu\nu\rho} + \frac{\beta_2}{4} (T^{\nu\mu\rho} - T^{\rho\mu\nu}) + \frac{\beta_3}{2} (g^{\mu\rho} T^\nu - g^{\mu\nu} T^\rho). \quad (4.5)$$

Com isso, podemos entender que o TEGR é o limite da Gravidade Teleparalela Modificada (MTG) quando os parâmetros são $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$. Reforçamos que neste limite temos

$$\Sigma^{\mu\nu\rho} \xrightarrow{\beta_1=\beta_2=\beta_3=1} S^{\mu\nu\rho}.$$

Portanto, o TEGR é um caso específico da MTG, assim todos os resultados encontrados no TEGR também são encontrados na MTG, quando os parâmetros tendem à unidade.

A Eq. (4.4) não está em sua forma tensorial. Portanto, por completude de nosso estudo mostramos essa forma, onde faz-se o uso da definição da derivada covariante e que $\partial_\rho e = \Gamma^\sigma_{\rho\sigma} e$. Isso nos levará a uma equação em que a tetrada estará explícita no lado direito da expressão, como em (4.4). Com o intuito de simplificação dessa estrutura, poderemos reescrever o lado esquerdo de modo que a tetrada torna-se evidente. Assim, por cancelamento de termos, com renomeações de índices e usando propriedades de antissimetria, é permitido escrevermos a equação de campo como

$$\nabla_\rho \Sigma_\kappa^{\rho\lambda} + \Sigma_\kappa^{\sigma\lambda} T^\rho_{\sigma\rho} - \frac{1}{2} \Sigma_\kappa^{\rho\sigma} T^\lambda_{\rho\sigma} + \Sigma^{\mu\lambda\rho} T_{\mu\kappa\rho} - \frac{1}{4} \delta_\kappa^\lambda \Sigma_{\mu\nu\rho} T^{\mu\nu\rho} = -\frac{1}{2} \chi T^\lambda_\kappa. \quad (4.6)$$

A Eq. (4.6) é a forma tensorial da equação de campo da gravidade teleparalela modificada.

4.1 Nova Relatividade Geral

A MTG possui um análogo conhecido que é a Nova Relatividade Geral (NGR), que também é uma teoria construída na variedade de Weitzenböck, esta foi a primeira modificação do TEGR proposta na literatura (BAHAMONDE *et al.*, 2023). A NGR possui uma lagrangiana que difere da MTG por ser construída pelas decomposições irreduzíveis da torção

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{\lambda\mu\nu} &= \frac{1}{2} (T_{\lambda\mu\nu} + T_{\mu\lambda\nu}) + \frac{1}{6} (g_{\nu\lambda} v_\mu + g_{\nu\mu} v_\lambda) - \frac{1}{3} g_{\lambda\mu} v_\nu \\ \mathbf{v}_\mu &= T^\lambda_{\lambda\mu} \\ \mathbf{a}_\mu &= \frac{1}{6} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} T^{\nu\rho\sigma} \end{aligned}$$

A torção pode ser construída utilizando as três componentes acima, às quais damos os nomes de decomposição tensorial ao objeto $t_{\lambda\mu\nu}$ ¹, de decomposição vetorial ao $\mathbf{v}_\mu$, e de decomposição axial ao objeto $\mathbf{a}_\mu$. Com eles, a torção pode ser construída como

$$T_{\lambda\mu\nu} = \frac{2}{3}(t_{\lambda\mu\nu} - t_{\lambda\nu\mu}) + \frac{1}{3}(g_{\lambda\mu}v_\nu + g_{\lambda\nu}v_\mu) + \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}a^\rho.$$

Com essas informações, podemos introduzir a forma da lagrangiana da NGR, que é dada por

$$L_{ngr} = a_1 \mathbf{t}_{\lambda\mu\nu} \mathbf{t}^{\lambda\mu\nu} + a_2 \mathbf{v}_\mu \mathbf{v}^\mu + a_3 \mathbf{a}_\mu \mathbf{a}^\mu + a_0,$$

onde a_1, a_2, a_3 são parâmetros livres e a_0 é um termo de constante cosmológica.

Com essas combinações escalares das decomposições da torção podemos reconstruir a lagrangiana. Usando que

$$T_{vec} = \mathbf{v}_\mu \mathbf{v}^\mu, T_{axi} = \mathbf{a}_\mu \mathbf{a}^\mu, T_{ten} = \mathbf{t}_{\lambda\mu\nu} \mathbf{t}^{\lambda\mu\nu}, \quad (4.7)$$

temos,

$$L_{ngr} = v_{vec} T_{vec} + v_{axi} T_{axi} + v_{ten} T_{ten}, \quad (4.8)$$

onde negligenciamos o termo cosmológico da equação. Com o intuito de relacionarmos, mais diretamente, a MTG com a NGR é necessário analisarmos a integral de ação (4.8) à luz das componentes apresentadas na Eq. (4.7). Assim, passamos a entender os objetos de (4.7). Primeiro, tomamos a contração da parte tensorial da decomposição irreduzível apresentada abaixo,

$$t_{\lambda\mu\nu} t^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} T^{\lambda\mu\nu} T_{\lambda\mu\nu} + \frac{1}{2} T^{\lambda\mu\nu} T_{\mu\lambda\nu} - \frac{1}{2} T_\nu T^\nu$$

Para o caso $\mathbf{a}_\mu \mathbf{a}^\mu$, temos

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} \delta_\mu^\alpha & \delta_\mu^\beta & \delta_\mu^\gamma & \delta_\mu^\delta \\ \delta_\nu^\alpha & \delta_\nu^\beta & \delta_\nu^\gamma & \delta_\nu^\delta \\ \delta_\rho^\alpha & \delta_\rho^\beta & \delta_\rho^\gamma & \delta_\rho^\delta \\ \delta_\sigma^\alpha & \delta_\sigma^\beta & \delta_\sigma^\gamma & \delta_\sigma^\delta \end{vmatrix}$$

que nos leva a sucessivas combinações de deltas que devem ser aplicados à combinação de torção dada pela Eq. (4.7) em sua forma T_{axi} . Tal combinação, respeitando os índices,

¹A decomposição tensorial possui as seguintes propriedades

- 1) $t_{\lambda\mu\nu} = t_{\mu\lambda\nu}$
- 2) $g^{\mu\nu} t_{\lambda\mu\nu} = 0 = g^{\lambda\mu} t_{\mu\lambda\nu}$
- 3) $t_{\lambda\mu\nu} + t_{\mu\nu\lambda} + t_{\nu\lambda\mu} = 0$

nos leva a

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}T^{\nu\rho\sigma}T_{\alpha\beta\gamma} = 2T^{\nu\rho\sigma}T_{\nu\rho\sigma} - 4T^{\nu\sigma\rho}T_{\sigma\nu\rho}$$

Portanto, a lagrangiana equivalente se torna

$$L_{ngr} = v_{ten} \left(\frac{1}{2} T^{\lambda\mu\nu} T_{\lambda\mu\nu} + \frac{1}{2} T^{\lambda\mu\nu} T_{\mu\lambda\nu} - \frac{1}{2} T_\nu T^\nu \right) + v_{vec} (T_\mu T^\mu) + \frac{v_{axi}}{18} (T^{\nu\rho\sigma} T_{\nu\rho\sigma} - 2T^{\nu\sigma\rho} T_{\sigma\nu\rho})$$

ou

$$L_{ngr} = \left(\frac{v_{ten}}{2} + \frac{v_{axi}}{18} \right) T^{\lambda\mu\nu} T_{\lambda\mu\nu} + \left(\frac{v_{ten}}{2} - \frac{2v_{axi}}{18} \right) T^{\lambda\mu\nu} T_{\mu\lambda\nu} + \left(v_{vec} - \frac{v_{ten}}{2} \right) T_\nu T^\nu.$$

Lembrando da Eq. (4.1), temos que

$$\begin{cases} \beta_1 = -2v_{ten} - \frac{2v_{axi}}{9} \\ \beta_2 = -v_{ten} + \frac{2v_{axi}}{9} \\ \beta_3 = v_{vec} - \frac{v_{ten}}{2} \end{cases}$$

Assim, temos que nessas teorias há uma relação. Na próxima seção, veremos que há um vínculo na MTG para objetos compactos dado pela Eq. (4.10).

4.2 Objetos Compactos na MTG

O conjunto de equações encontradas na Seção 3.2, [Eq.(3.18)], foi obtido a partir da lagrangiana (4.1) com os parâmetros livres iguais à unidade. Nesta seção, conforme apresentado na referência (VILHENA *et al.*, 2023a), vamos construir as nossas equações com os parâmetros livres β_1 , β_2 e β_3 . O processo de obtenção dessas equações é igual ao que acontece na Seção 3.2. Portanto, a partir da equação de campo (4.4) da MTG, usaremos a tetrada para objetos esfericamente simétricos e estáticos. A aplicação da tetrada Eq.(3.14) também nos levará a um conjunto de três equações. Essas, por sua vez, serão adaptadas devido à presença dos parâmetros livres. Assim, temos uma releitura do conjunto (3.18)

para

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi \gamma_{11}^3 \rho r^2 = 2\beta_3 \gamma'_{11} r + \beta_3 \gamma_{11}^3 - \frac{1}{2} (\beta_2 + \beta_1) \gamma_{11} \\ + (2\beta_3 - \beta_2 - \beta_1) \left[\frac{\gamma'_{00}}{\gamma_{00}} \gamma'_{11} r^2 + \frac{\gamma''_{00}}{4\gamma_{00}^2} \gamma_{11} r^2 - \frac{\gamma'_{00}}{\gamma_{00}} \gamma_{11} r - \frac{\gamma''_{00}}{2\gamma_{00}} \gamma_{11} r^2 - \gamma_{11}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{11}^3 \right] \\ - \chi \gamma_{00} \gamma_{11}^2 \rho r^2 = \beta_3 (2\gamma'_{00} r - \gamma_{00} \gamma_{11}^2 + \gamma_{00}) \\ + (2\beta_3 - \beta_2 - \beta_1) \left[\gamma_{00}'^2 r^2 - \frac{1}{2} \gamma_{00} \gamma_{11}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{00} \right] \\ - \chi \gamma_{00} \gamma_{11}^3 \rho r = \beta_3 (\gamma'_{00} \gamma'_{11} r - \gamma''_{00} \gamma_{11} r + \gamma_{00} \gamma'_{11} - \gamma'_{00} \gamma_{11}) \\ + (2\beta_3 - \beta_2 - \beta_1) \left[\frac{1}{2} \gamma'_{00} \gamma_{11}^2 + \frac{\gamma_{00}'^2 \gamma_{11}}{4\gamma_{00}} r + \frac{1}{2} (\gamma_{00} \gamma'_{11} - \gamma'_{00} \gamma_{11}) \right] \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Percebemos na Eq. (4.9), que a segunda linha de cada expressão desaparece se aplicarmos o vínculo

$$2\beta_3 - \beta_2 - \beta_1 = 0. \quad (4.10)$$

Destaca-se que a solução de Schwarzschild só é solução de fato para a equação de campo da MTG quando a relação acima é aplicada. Ainda, é interessante observar que esse vínculo, na NGR, é expresso pelas relações dos parâmetros, v_{vec} e v_{ten} , ou seja, o parâmetro relacionado ao termo axial da decomposição da torção torna-se efetivamente livre e não vinculado. O que encontramos para NGR é dado pela relação abaixo

$$v_{vec} + v_{ten} = 0. \quad (4.11)$$

Com o vínculo da Eq. (4.10), percebemos que todas as equações de (4.9) se reduzem de modo significativo, além de obtermos que elas se tornam dependentes apenas do parâmetro β_3 . Como explicitamos abaixo

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi \gamma_{11}^3 \rho r^2 = \beta_3 (2\gamma'_{11} r + \gamma_{11}^3 - \gamma_{11}) \\ - \chi \gamma_{00} \gamma_{11}^2 \rho r^2 = \beta_3 (2\gamma'_{00} r - \gamma_{00} \gamma_{11}^2 + \gamma_{00}) \\ - \chi \gamma_{00} \gamma_{11}^3 \rho r = \beta_3 (\gamma'_{00} \gamma'_{11} r - \gamma''_{00} \gamma_{11} r + \gamma_{00} \gamma'_{11} - \gamma'_{00} \gamma_{11}) \end{array} \right. . \quad (4.12)$$

Porém, a imposição do vínculo até aqui é opcional, o que já não acontece quando no conjunto (4.9) inserimos a lei de conservação. Opostamente ao que foi feito na Seção 3.2, onde encontramos que a terceira equação do conjunto inserindo a lei de conservação, podemos fazer o caminho inverso e encontrar a lei de conservação a partir do conjunto de

três equações já encontradas. Esse processo inverso nos leva a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\chi\gamma_{11}^3r^2[\gamma_{00}p' + \gamma'_{00}(p + \rho)] = \\ & + (2\beta_3 - \beta_2 - \beta_1) \left[\gamma_{00}^2\gamma_{11}r + \gamma_{00}''\gamma'_{00}\gamma_{11}r^2 + \frac{\gamma_{00}'^2\gamma_{11}}{4\gamma_{00}}r - \gamma_{00}^2\gamma'_{11}r^2 \right] \\ & + (2\beta_3 - \beta_2 - \beta_1) \left[\frac{1}{2}\frac{\gamma_{00}'^2}{\gamma_{00}}\gamma'_{11}r^2 + \frac{\gamma_{00}''}{8\gamma_{00}^2}\gamma'_{00}\gamma_{11}r^2 - \frac{\gamma_{00}'^2\gamma_{11}}{2\gamma_{00}}r - \frac{\gamma_{00}''}{4\gamma_{00}}\gamma'_{00}\gamma_{11}r^2 \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Na Eq.(4.13) observamos que só encontramos a lei de conservação conhecida da Eq. (3.17) se o vínculo expresso pela Eq. (4.10) for aplicado. Através dele teremos que o termo entre colchetes do lado esquerdo da equação deve ser zero e assim com uma manipulação simples obtemos a Eq. (3.17). Logo, só temos que a lei de conservação é respeitada quando a Eq. (4.10) é aplicada e com isso, o conjunto que obtemos é a Eq. (4.12). Este conjunto de equação nos permite uma nova redefinição, dada por

$$\bar{\chi} \equiv \frac{\chi}{\beta_3},$$

com essa nova redefinição, o conjunto (4.12) passa a ser

$$\begin{cases} \bar{\chi}\gamma_{11}^3\rho r^2 & = 2\gamma'_{11}r + \gamma_{11}^3 - \gamma_{11} \\ -\bar{\chi}\gamma_{00}\gamma_{11}^2\rho r^2 & = 2\gamma'_{00}r - \gamma_{00}\gamma_{11}^2 + \gamma_{00} \\ p' & = -(p + \rho)\frac{1}{\gamma_{00}}\gamma'_{00} \end{cases},$$

já utilizando, e respeitando, a lei de conservação. O procedimento a seguir é o mesmo já feito, com a diferença que temos uma redefinição $\bar{\chi}$, assim sendo as equações (3.20) e (3.21) obtidas na Seção 3.2 são reescritas como

$$u' = \frac{1}{2}\bar{\chi}\rho r^2, \quad (4.14)$$

e,

$$p' = -\frac{p + \rho(p)}{(r^2 - 2ur)} \left(\frac{1}{2}\bar{\chi}pr^3 + u \right). \quad (4.15)$$

Portanto, quando β_3 tende a 1, o termo $\bar{\chi}$ tende a χ . Ademais, β_3 tendendo a 1, nós recuperamos a equação de TOV, além de recuperarmos todos os resultados previstos na RG, a nível de simetridade esférica. Além disso, observamos que a renormalização do χ , pela definição 4.2, ou seja, pela incorporação do parâmetro β_3 pode ser lida como uma renormalização da própria constante da gravitação universal. Esta renormalização da constante implica no aumento e diminuição da massa do objeto compacto, uma vez que valores menores de G nos mostra valores maiores de massa máxima de objetos compactos.

4.2.1 Equação de Estado e Lagrangiana do modelo RMF

Para encontrarmos relações de massa-raio para estrelas de nêutrons, além das Eqs. (4.14) e (4.15) apresentadas na seção anterior, é necessário usarmos uma EoS. Como mencionado anteriormente, essa equação estabelece relações entre pressão e densidade no interior dessas estrelas. O interior de tais objetos não é plenamente conhecido, porém, as propriedades da matéria nuclear podem ser descritas por versões de modelos relativísticos e não relativísticos. Os primeiros modelos tem a versão mais simples dada por Walecka, em uma aproximação conhecida como Relativística de Campo Médio (RMF). Apesar de descrever bem determinadas propriedades da matéria nuclear, o modelo não obtém sucesso na descrição da incompressibilidade e massa efetiva. Com o intuito de sanar tal empecilho, foi desenvolvida a versão Walecka não linear, que considera termos de ordem cúbica e quártica de autointeração do campo mesônico escalar, essa versão é utilizada neste trabalho. Cabe ressaltar que as interações nucleon-nucleon são descritas por parâmetros ajustados a partir de observáveis da matéria nuclear na saturação, como por exemplo, energia de ligação. A combinação desses ajustes define diferentes parametrizações da EoS, como as apresentadas nas subseções seguintes. A densidade lagrangiana que descreve o modelo de Walecka não linear (DUTRA *et al.*, 2014; LI *et al.*, 2008b), levando em consideração os léptons (elétron e múon), é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M_{\text{nuc}})\psi + g_\sigma \bar{\psi}\psi - g_\omega \bar{\psi}\gamma^\mu \omega_\mu \psi - \frac{g_\rho}{2} \bar{\psi}\gamma^\mu \vec{\rho}_\mu \vec{\tau} \psi \\
& + \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma \partial_\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{A}{3}\sigma^3 - \frac{B}{4}\sigma^4 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\
& + \frac{1}{2}m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu + \frac{C}{4}(g_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu)^2 - \frac{1}{4}\vec{B}^{\mu\nu}\vec{B}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \vec{\rho}^\mu \\
& + g_\sigma g_\rho^2 \sigma \vec{\rho}_\mu \vec{\rho}^\mu \left(\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha'_2 g_\sigma \sigma \right) + \frac{1}{2}\alpha'_3 g_\omega^2 g_\rho^2 \omega_\mu \omega^\mu \vec{\rho}_\mu \vec{\rho}^\mu \\
& + g_\sigma g_\omega^2 \sigma \omega_\mu \omega^\mu \left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha'_1 g_\sigma \sigma \right) \\
& + \sum_{l=e,\mu} \bar{\psi}_l(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_l)\psi_l,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

onde a massa de repouso do nucleon é M_{nuc} e as massas dos mésons são m_σ , m_ω , e m_ρ . $F_{\mu\nu} = \partial_\nu \omega_\mu - \partial_\mu \omega_\nu$ e $\vec{B}_{\mu\nu} = \partial_\nu \vec{\rho}_\mu - \partial_\mu \vec{\rho}_\nu - g_\rho(\vec{\rho}_\mu \times \vec{\rho}_\nu)$. Além disso, a primeira linha representa a parte cinética dos nucleons e interação entre nucleons e mésons, a segunda e terceira linha são termos livre e de auto-interação entre os mésons, a quarta e quinta são termos que levam em conta as interações cruzadas entre os campos de méson, e por fim, o último termo da Eq.(4.16) representa a parte dos léptons, com $l = e(\mu)$ para o elétron (múon). Com as equações de Euler-Lagrange e a aproximação de campo médio

para os campos, encontramos as equações para pressão e energia (DUTRA *et al.*, 2014), dadas respectivamente por

$$\begin{aligned}
p = & -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 - \frac{A}{3}\sigma^3 - \frac{B}{4}\sigma^4 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{C}{4}(g_\omega^2\omega_0^2)^2 \\
& + g_\sigma g_\omega^2\sigma\omega_0^2 \left(\alpha_1 + \frac{\alpha'_1 g_\sigma \sigma}{2} \right) + g_\sigma g_\rho^2\sigma\bar{\rho}_{0(3)}^2 \left(\alpha_2 + \frac{\alpha'_2 g_\sigma \sigma}{2} \right) \\
& + \frac{1}{2}m_\rho^2\bar{\rho}_{0(3)}^2 + \frac{1}{2}\alpha_3' g_\omega^2 g_\rho^2\omega_0^2\bar{\rho}_{0(3)}^2 + p_{kin}^p + \frac{\mu_e^4}{12\pi^2} \\
& + \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{\sqrt{\mu_\mu^2 - m_\mu^2}} \frac{dk k^4}{(k^2 + m_\mu^2)^{1/2}}, \tag{4.17}
\end{aligned}$$

com

$$p_{kin}^{p,n} = \frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^{k_{F_{p,n}}} \frac{k^4}{(k^2 + (M^*)^2)^{1/2}} dk \tag{4.18}$$

e

$$\begin{aligned}
\rho = & \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 + \frac{A}{3}\sigma^3 + \frac{B}{4}\sigma^4 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 - \frac{C}{4}(g_\omega^2\omega_0^2)^2 \\
& + g_\omega\omega_0\rho - \frac{1}{2}m_\rho^2\bar{\rho}_{0(3)}^2 + \frac{g_\rho}{2}\bar{\rho}_{0(3)}\rho_3 - \frac{1}{2}\alpha_3' g_\omega^2 g_\rho^2\omega_0^2\bar{\rho}_{0(3)}^2 \\
& - g_\sigma g_\omega^2\sigma\omega_0^2 \left(\alpha_1 + \frac{\alpha'_1 g_\sigma \sigma}{2} \right) - g_\sigma g_\rho^2\sigma\bar{\rho}_{0(3)}^2 \left(\alpha_2 + \frac{\alpha'_2 g_\sigma \sigma}{2} \right) \\
& + \varepsilon_{kin}^{p,n} + \frac{\mu_e^4}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\sqrt{\mu_\mu^2 - m_\mu^2}} dk k^2 (k^2 + m_\mu^2)^{1/2}, \tag{4.19}
\end{aligned}$$

onde

$$\varepsilon_{kin}^{p,n} = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_{F_{p,n}}} k^2 (k^2 + (M^*)^2)^{1/2} dk. \tag{4.20}$$

Neste trabalho, usamos a massa do múon $m_\mu = 105,7$ MeV, elétrons sem massa e momento k . As quantidades $p_{kin}^{p,n}$, Eq. (4.18), e $\varepsilon_{kin}^{p,n}$, Eq. (4.20), são os termos cinéticos para pressão e densidade de energia, respectivamente. Os índices p, n representam prótons (p) e nêutrons (n), $k_{F_{p,n}}$ é o momento de Fermi e γ é o fator de degenerescência ($\gamma = 2$ para matéria assimétrica). A massa efetiva do nucleon é $M^* = M - g_\sigma \sigma$. Além disso, o sistema é submetido à neutralidade de carga e ao equilíbrio químico, condições representadas por

$$n_p - n_e = n_\mu, \tag{4.21}$$

e

$$\mu_n - \mu_p = \mu_e, \tag{4.22}$$

onde $\mu_e = (3\pi^2 n_e)^{1/3}$, $n_\mu = [(\mu_\mu^2 - m_\mu^2)^{3/2}]/(3\pi^2)$ e $\mu_\mu = \mu_e$. As densidades de elétrons

e de múons são denotadas por n_e e n_μ . Nas subseções a seguir, nós usamos um código construído com a linguagem Fortran para efetuarmos a análise numérica. Nesta análise, é necessário a entrada de dados para obtermos a solução do conjunto de equações, tais dados correlacionam a densidade de energia e pressão de um sistema. Assim, usamos as tabelas provenientes das parametrizações das equações de estado, que são explicadas nas subseções abaixo.

4.2.1.1 Parametrização FSUGold2 e Z271v6

Nesta subseção, as parametrizações usadas são do tipo $\sigma^3 + \sigma^4 + \omega^4 + \text{termos cruzados}$ (DUTRA *et al.*, 2014), conhecidas como FSUGold2 (CHEN; PIEKAREWICZ, 2014b) e Z271v6 (HOROWITZ; PIEKAREWICZ, 2002), tais parametrizações foram utilizadas com o intuito de estabelecer as relações massa-raio para objetos compactos, como estrelas de nêutrons, relações de massa-raio. Para isso, é necessário solucionar as equações numericamente.

As figuras 4.1 e 4.2 mostram as relações massa-raio em função do parâmetro β_3 , onde ressaltamos que o valor de $\beta_3 = 1$ é a curva equivalente aos resultados da TEGR, ou seja, é a curva que encontraríamos para o caso da RG. Na Fig. 4.1, observamos cinco curvas referentes à parametrização Z271v6. A curva inferior correspondente a $\beta_3 = 0,8$, apresenta massa máxima em torno de $1,43M_\odot$, enquanto a curva superior, com $\beta_3 = 1,2$, atinge cerca de $1,75M_\odot$.

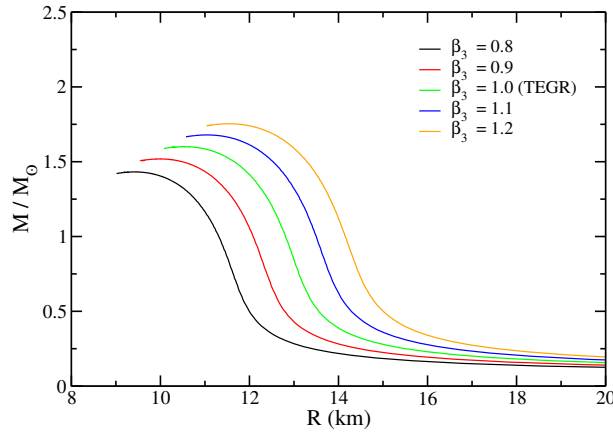
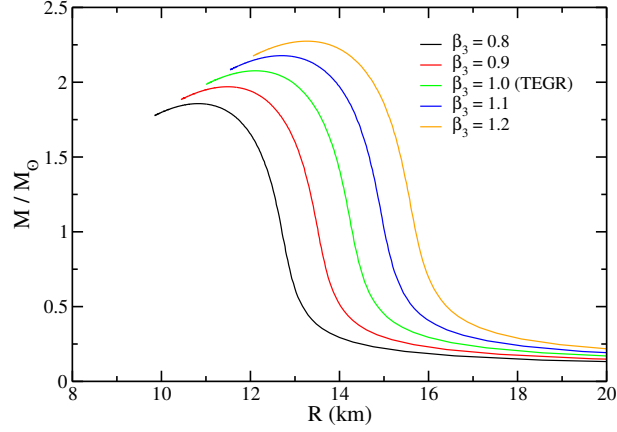


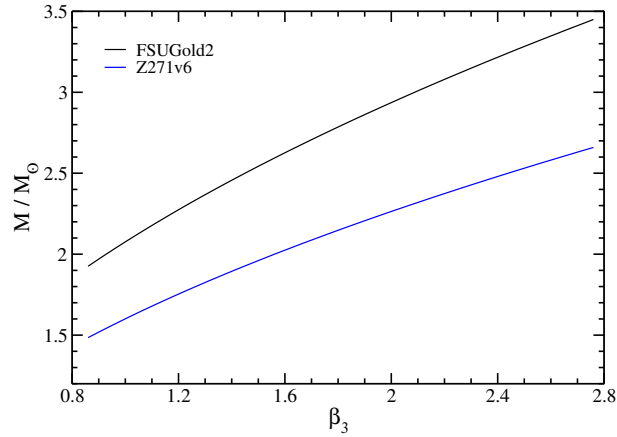
FIGURA 4.1 – Diagrama massa-raio para a parametrização Z271v6 com diferentes valores de β_3 .

A Fig. 4.2, mostra o mesmo comportamento para a parametrização FSUGold2, com massas variando de $1,85M_\odot$ para $\beta_3 = 0,8$ até $2,27M_\odot$ para $\beta_3 = 1,2$.

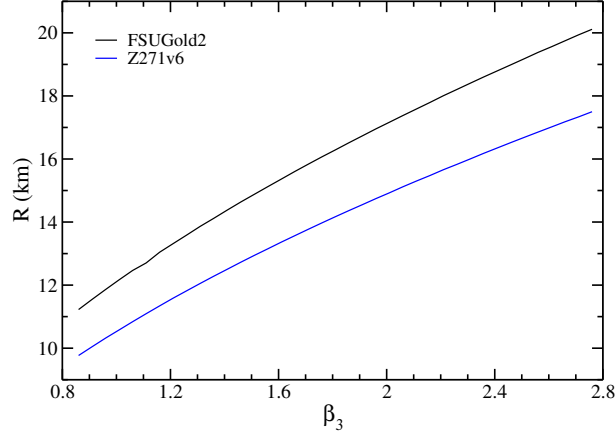
Como já mencionado nos gráficos anteriores, o valor $\beta_3 = 1$ recupera o valor da RG, permitindo compreender o impacto desse parâmetro sobre as propriedades dos observáveis dos objetos compactos. Na figura 4.3 mostramos como a massa varia em função do β_3 no intervalo de $[0,86; 2,76]$ para as duas parametrizações utilizadas. Em ambos os casos,

FIGURA 4.2 – Diagrama massa-raio para a parametrização FSUGold2 com diferentes valores de β_3 .

valores maiores de β_3 implica em valores maiores para as massas máximas. Já na figura 4.4 percebemos que o raio e o nosso parâmetro livre também são correlacionados. O raio aumenta com valores maiores para β_3 em ambas EoS. Este incremento no raio é esperado, uma vez que massa e raio são correlacionados. O intervalo de $\beta_3 = 0,86$ a $\beta_3 = 2,76$ nos mostra o raio variando de 9,76 km a 17,49 km para Z271v6 e de 11,23 km a 20,11 km para FSUGold2.

FIGURA 4.3 – Massa máxima em função do β_3 para as parametrizações FSUGold2 e Z271v6.

Um passo natural de nossa análise é comparar os resultados com os dados observacionais (ABBOTT *et al.*, 2020b; MILLER *et al.*, 2021; RILEY *et al.*, 2021; FONSECA *et al.*, 2021), onde podemos assimilar a importância do β_3 . Na figura 4.5, comparamos os resultados obtidos para FSUGold2 e Z271v6 com os dados observacionais disponíveis, incluindo as missões NICER (RILEY *et al.*, 2019; MILLER *et al.*, 2019; RILEY *et al.*, 2021; MILLER *et al.*, 2021), e dos eventos de ondas gravitacionais GW170817, GW190425 e GW190814 (ABBOTT *et al.*, 2017; ABBOTT *et al.*, 2018; ABBOTT *et al.*, 2020a; ABBOTT *et al.*, 2020b). O gráfico mostra que para FSUGold2, por exemplo, os valores de β_3 compatíveis com os dados variam entre 0,43 e 2,17. Para Z271v6, o intervalo de valores para β_3 é $0,58 \leq \beta_3 \leq 2,79$ —sendo, portanto, valores superiores aos obtidos no caso da EoS FSUGold2.

FIGURA 4.4 – Raio em função do β_3 para as parametrizações FSUGold2 e Z271v6.

Eventos	FSUGold2	Z271v6
GW190814	$1,48 \leq \beta_3 \leq 1,66$	$2,48 \leq \beta_3 \leq 2,79$
PSR J0952-0607	$1,10 \leq \beta_3 \leq 1,45$	$1,85 \leq \beta_3 \leq 2,44$
PSR J0704+6620	$0,93 \leq \beta_3 \leq 1,06$	$1,57 \leq \beta_3 \leq 1,80$
ContornoPSR J0704+6620	$0,82 \leq \beta_3 \leq 2,17$	$1,36 \leq \beta_3 \leq 2,79$
GW170817	$0,43 \leq \beta_3 \leq 0,92$	$0,58 \leq \beta_3 \leq 1,19$
PSR J0030+0451	$0,50 \leq \beta_3 \leq 1,33$	$0,64 \leq \beta_3 \leq 1,72$
GW190425	$0,71 \leq \beta_3 \leq 1,25$	$0,59 \leq \beta_3 \leq 1,64$

TABELA 4.1 – A tabela mostra os intervalos de β_3 que acomodam os dados observacionais dos eventos astrofísicos

É importante discutir os eventos observacionais mais detalhadamente. O evento GW190814 foi uma detecção de ondas gravitacionais de dois objetos, sendo um BH de $23,25 \pm 1,05 M_\odot$ e um outro objeto de massa entre $2,58 \pm 0,08 M_\odot$, este último se debate se é um BH de pequena massa ou uma NS de grande massa, por isso, apresentado aqui. O objeto PSR J0952-0607 é um pulsar de um sistema binário com massa de $2,35 \pm 0,17 M_\odot$, considerada a NS mais massiva confirmada. Já PSR J0704+6620 é uma NS com valores de massa $2,08 \pm 0,07 M_\odot$, onde a faixa horizontal vermelha apresenta apenas os valores da massa dessa NS, já o contorno também apresenta os valores para o raio desta NS, avaliada em $12,39^{+1,30}_{-0,98}$ km. O evento GW170817 foi uma fusão de duas NS com massa total calculada de $2,82^{+0,47}_{-0,09}$. O PSR J0030+0451 é uma NS com massa $1,34^{+0,15}_{-0,16} M_\odot$ e com raio $12,71^{+1,14}_{-1,19}$ km. Por fim, o evento GW190425, que foi produzido por uma binária de objetos compactos de massa total $3,4^{+0,3}_{-0,1} M_\odot$, apesar das massas serem compatíveis com estrelas nêutrons, não se pode descartar que um destes seja um BH. (ABBOTT *et al.*, 2017; ABBOTT *et al.*, 2018; ABBOTT *et al.*, 2020b; ABBOTT *et al.*, 2020a; ROMANI *et al.*, 2022; FONSECA *et al.*, 2021; RILEY *et al.*, 2021; MILLER *et al.*, 2021). Detalhados os eventos, passamos para a análise da tabela 4.1, onde apresentamos os intervalos separados por eventos. A tabela apresenta os valores mínimos de máximos de β_3 possíveis para os eventos selecionados.

Os valores de β_3 fora deste intervalo nos dizem que para a respectiva parametrização, a MTG não comporta os dados observacionais. Assim, para o candidato a NS do evento GW190814 com a parametrização FSUGold2, os valores de β_3 que acomodam o objeto compacto como NS estão entre $1,48 \leq \beta_3 \leq 1,66$.

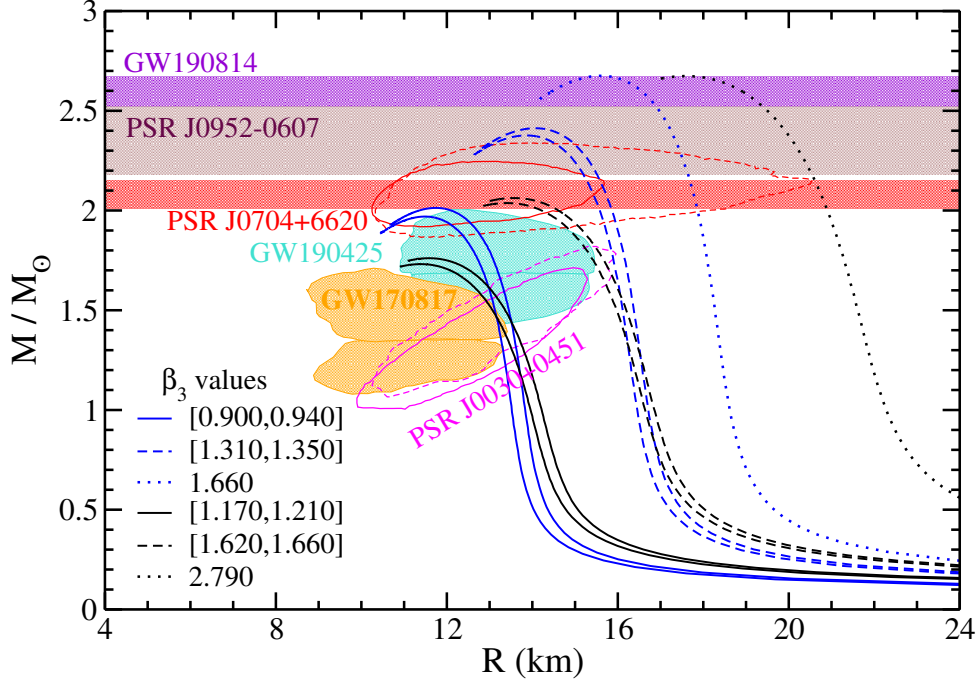


FIGURA 4.5 – Diagrama massa-raio construído para FSUGold2 em azul e Z271v6 em preto para diferentes valores de β_3 . Os contornos estão relacionados aos dados da missão NICER, a saber, PSRJ0030+0451(RILEY *et al.*, 2019; MILLER *et al.*, 2019) e PSRJ0740+6620(RILEY *et al.*, 2021; MILLER *et al.*, 2021), o evento GW170817 (ABBOTT *et al.*, 2017; ABBOTT *et al.*, 2018), e o evento GW190425 (ABBOTT *et al.*, 2020a), todos eles com 90% de nível de confiança. As linhas horizontais vermelhas estão relacionadas ao PSRJ0740+6620(FONSECA *et al.*, 2021). As linhas horizontais marrons estão relacionadas ao PSRJ0952-0607(ROMANI *et al.*, 2022). As linhas horizontais violetas referem-se às restrições observacionais recentes sobre a massa da estrela de nêutrons GW190814 (ABBOTT *et al.*, 2020b).

4.2.1.2 Parametrização NL3*

Apesar de grande parte das teorias gravitacionais alternativas ser motivada como uma alternativa do setor escuro, como mencionado na introdução deste trabalho, é importante destacar que o estudo conjunto de ambos conceitos não é excludente. Eles podem ser complementares. Esta subseção se dedica a mostrar essa complementariedade com base no estudo (VILHENA *et al.*, 2023b). Para isso, usaremos uma parametrização denominada NL3*, que é um modelo compatível com algumas propriedades das estrelas de nêutrons (LALAZISSIS *et al.*, 2009; CARLSON *et al.*, 2023). A densidade lagrangiana utilizada nesse caso, $\mathcal{L}_{\text{HAD}}$, é dada pela Eq. (4.16) com $C = \alpha_i = \alpha'_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$).

Considerando a matéria escura (DM), uma possibilidade de acoplamento com a matéria comum provém do setor de Higgs. Neste cenário, propõe-se que partículas de DM e nucleons interajam simultaneamente via bósons de Higgs. Esta estrutura tem sido

explorada recentemente em diversos estudos teóricos (DAS *et al.*, 2022; DAS *et al.*, 2022; PANOTOPOULOS; LOPES, 2017; DAS *et al.*, 2019; QUDDUS *et al.*, 2020; DAS *et al.*, 2020; DAS *et al.*, 2021a; DAS *et al.*, 2021b; DAS *et al.*, 2021b; DAS *et al.*, 2021a; KUMAR *et al.*, 2022; LOURENCO *et al.*, 2022a; LOURENCO *et al.*, 2022b; DUTRA *et al.*, 2022; DENGLER *et al.*, 2022; GIANGRANDI *et al.*, 2022; KARKEVANDI *et al.*, 2022; SHAKERI; KARKEVANDI, 2022).

Nesse caso, todo o sistema, ou seja a contribuição hadrônica e a contribuição da DM, é descrito pela seguinte densidade lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\chi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - M_\chi)\chi + \xi h\bar{\chi}\chi + \frac{1}{2}(\partial^\mu h\partial_\mu h - m_h^2 h^2) \\ & + f\frac{M_{\text{nuc}}}{v}h\bar{\psi}\psi + \mathcal{L}_{\text{HAD}}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde o campo de Dirac χ representa o férmion escuro de massa $M_\chi = 200$ GeV, e o campo escalar h é o bóson de Higgs com massa $m_h = 125$ GeV. A força da interação Higgs-nucleon é regulada pela quantidade fM_{nuc}/v , sendo $v = 246$ GeV o valor esperado do vácuo de Higgs. O acoplamento partícula escura de Higgs é controlado pela constante ξ . Para a lagrangiana dada pela Eq. (4.23) é possível construirmos as principais equações de estado do sistema hadrônico com conteúdo de DM, a saber, densidade de energia e pressão, ρ e p . Essas equações são equivalentes às Eqs. (4.19) e (4.17), com os parâmetros $C = \alpha_i = \alpha'_i = 0$, adicionando a contribuição do conteúdo de DM proveniente da Eq. (4.23) que são

$$\rho_{DM} = \frac{m_h^2 h^2}{2} + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F^{\text{DM}}} k^2 (k^2 + M_\chi^{*2})^{1/2} dk, \quad (4.24)$$

e

$$p_{DM} = -\frac{m_h^2 h^2}{2} + \frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^{k_F^{\text{DM}}} \frac{k^4 dk}{(k^2 + M_\chi^{*2})^{1/2}}. \quad (4.25)$$

onde, $M_\chi^* = M_\chi - \xi h$. Assim, tendo os parâmetros de entrada, conseguimos plotar os diagramas massa-raio para analisarmos como as propriedades das estrelas de nêutrons se comportam com o aumento da contribuição da matéria escura no sistema. Para isso, faremos duas abordagens. A primeira, tomamos alguns valores fixos de com valores fixos β_3 , onde encontramos a Fig. 4.6.

A partir da Fig. 4.6, é possível verificar que a massa máxima da estrela de nêutrons diminui quando se inclui mais conteúdo de matéria escura no sistema, para todos os valores de β_3 apresentados. Esta característica é observada mesmo para o caso de $\beta_3 = 1$ (Fig. 4.6b) essa estrutura é encontrada na literatura recente [como em (PANOTOPOULOS; LOPES, 2017; DAS *et al.*, 2019; QUDDUS *et al.*, 2020; DAS *et al.*, 2020; DAS *et al.*, 2021b; DAS *et al.*, 2021b; DAS *et al.*, 2021a)]. Uma vez que o conteúdo de DM, dada pela sua contribuição

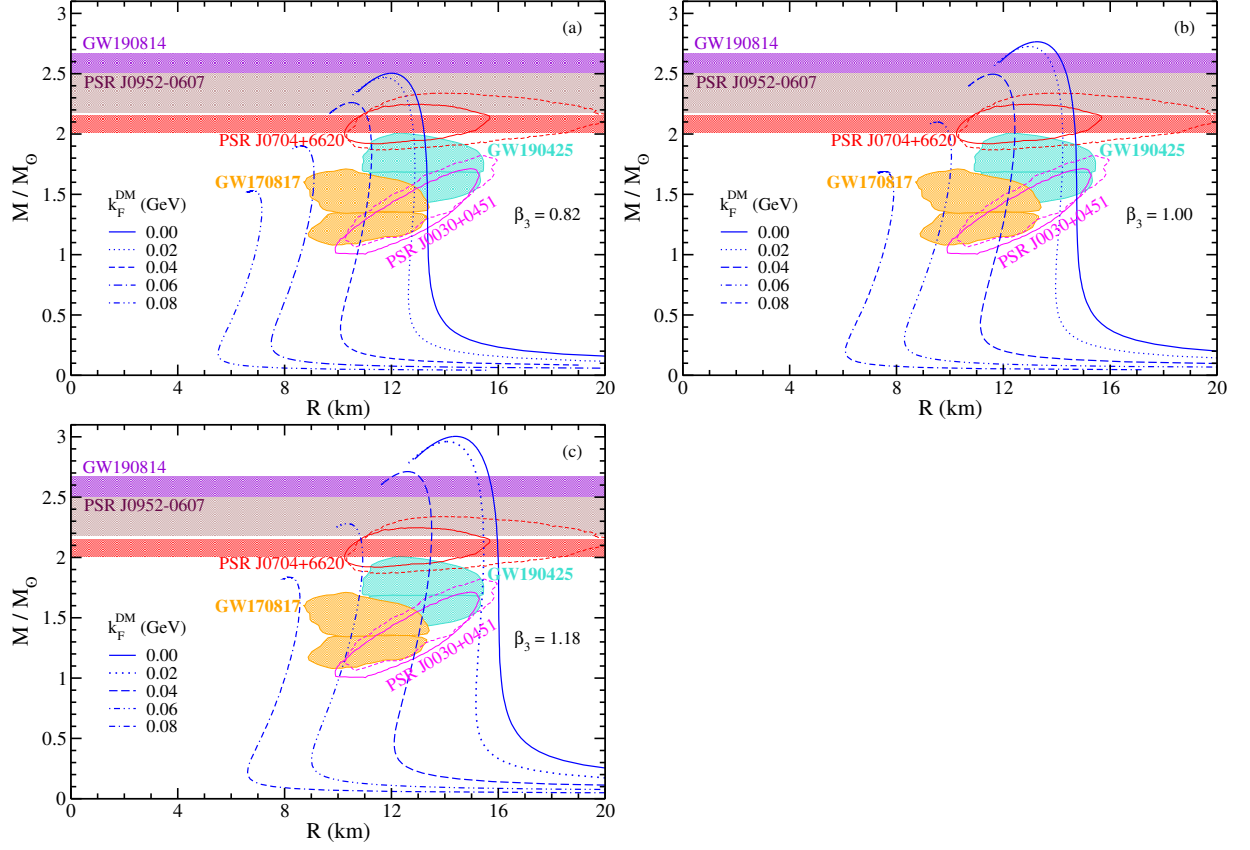


FIGURA 4.6 – Diagramas massa-raio construídos a partir da parametrização NL3* para diferentes valores de k_F^{DM} e β_3 , nomeadamente (a) $\beta_3 = 0,82$, (b) $\beta_3 = 1,00$, e (c) $\beta_3 = 1,18$. Os contornos estão relacionados com os dados da missão NICER, nomeadamente, PSR J0030+0451 (RILEY *et al.*, 2019; MILLER *et al.*, 2019) e PSR J0740+6620 (RILEY *et al.*, 2021; MILLER *et al.*, 2021), o evento GW170817 (ABBOTT *et al.*, 2017; ABBOTT *et al.*, 2018) e o evento GW190425 (ABBOTT *et al.*, 2020a), todos eles com um nível de confiança de 90%. As linhas horizontais vermelhas (castanhas) estão relacionadas com PSR J0740+6620 (FONSECA *et al.*, 2021) (PSR J0952+0607 (ROMANI *et al.*, 2022)). A recente restrição observacional na massa da estrela de nêutrons, GW190814 (ABBOTT *et al.*, 2020b), é mostrada como linhas horizontais violetas.

na EoS, coopera na suavização na EoS final. Assim, encontramos valores de massa máxima menores do que os encontrados quando apenas consideradas as parametrizações da seção anterior. Consequentemente, os raios, em relação às massas máximas, das estrelas de nêutrons diminuem com k_F^{DM} e haverá um limite natural para esta quantidade para permitir o acordo entre os perfis massa-raio e os dados astrofísicos observacionais recentes.

Além disso, ao analisar o efeito do $\beta_3 \neq 1$ na relações de massa-raio, reparamos que um aumento de β_3 induz um aumento tanto na massa como no raio das estrelas de nêutrons. Esse comportamento, que também foi encontrada na seção anterior, pode ser identificado mais facilmente na Fig. 4.7.

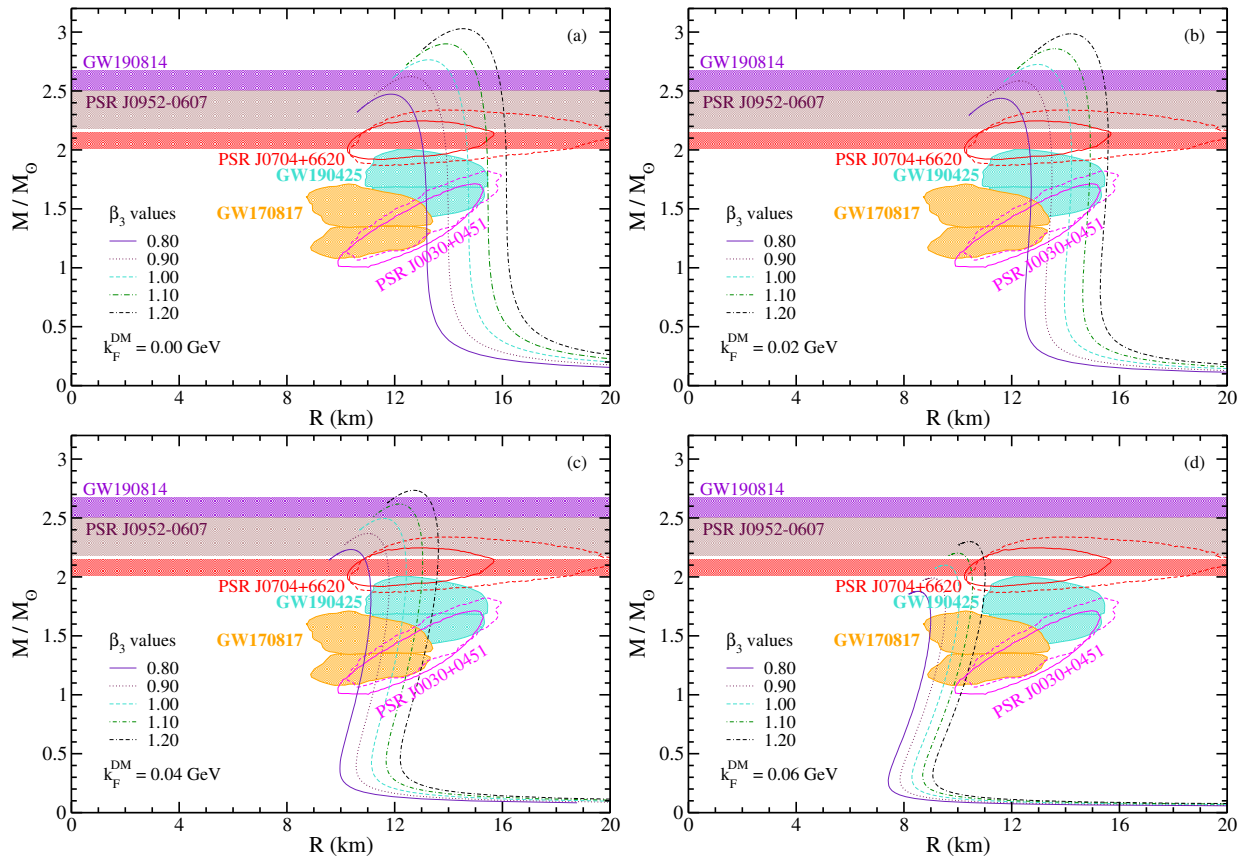


FIGURA 4.7 – Diagramas massa-raio construídos a partir da parametrização NL3* para diferentes valores de β_3 e k_F^{DM} , nomeadamente (a) $k_F^{\text{DM}} = 0$ (nenhum DM incluído), (b) $k_F^{\text{DM}} = 0,02$ GeV, e (c) $k_F^{\text{DM}} = 0,04$ GeV, e (d) $k_F^{\text{DM}} = 0,06$ GeV. Os contornos são os mesmos que os exibidos na Fig 4.6.

TABELA 4.2 – Valores mín e máx da estrela de nêutrons de β_3 para diferentes contribuições de DM.

Eventos	β_3		$M_{\max}$ ($M_{\odot}$)		$R_{\max}$ (km)		$R_{1.4}$ (km)		$R_{1.6}$ (km)	
	min	max	min	max	min	max	min	max	min	max
$k_F^{\text{DM}} = 0$										
GW190814	0.82	0.93	2.50	2.67	12.02	12.79	13.35	14.22	13.34	14.21
PSR J0952-0607	0.62	0.83	2.18	2.52	10.45	12.09	11.60	13.43	11.56	13.42
Linhas PSR J0704+6620	0.53	0.61	2.01	2.16	9.65	10.36	10.70	11.50	10.63	11.46
Elipses PSR J0704+6620	0.54	1.94	2.03	3.85	9.75	18.48	10.81	20.61	10.75	20.57
GW170817	0.36	0.83	1.66	2.52	7.96	12.09	8.71	13.43	7.34	13.42
PSR J0030+0451	0.45	1.17	1.857	2.99	8.89	14.35	9.83	15.96	9.71	15.95
GW190425	0.56	1.10	2.07	2.90	9.93	13.91	11.02	15.47	10.95	15.47
$k_F^{\text{DM}} = 0.02$ (GeV)										
GW190814	0.84	0.96	2.50	2.67	11.88	12.70	12.99	13.86	13.02	13.90
PSR J0952-0607	0.64	0.85	2.18	2.51	10.37	11.95	11.37	13.05	11.37	13.10
Linhas PSR J0704+6620	0.54	0.62	2.00	2.15	9.53	10.21	10.45	11.19	10.42	11.19
Elipses PSR J0704+6620	0.56	2.11	2.04	3.96	9.70	18.85	10.64	20.32	10.62	20.39
GW170817	0.39	0.90	1.70	2.58	8.09	12.29	8.83	13.43	7.22	13.48
PSR J0030+0451	0.49	1.27	1.91	3.07	9.07	14.61	9.96	15.87	9.89	15.94
GW190425	0.59	1.19	2.09	2.97	9.95	14.14	10.93	15.38	10.91	15.43
$k_F^{\text{DM}} = 0.04$ (GeV)										
GW190814	1.01	1.15	2.51	2.68	11.66	12.44	12.17	12.90	12.33	13.07
PSR J0952-0607	0.76	1.02	2.18	2.52	10.12	11.71	10.70	12.23	10.80	12.38
Linhas PSR J0704+6620	0.650	0.750	2.01	2.16	9.35	10.05	9.95	10.64	10.01	10.73
Elipses PSR J0704+6620	0.70	2.94	2.09	4.28	9.71	19.90	10.30	19.74	10.38	19.97
GW170817	0.52	1.26	1.80	2.80	8.37	13.03	8.95	13.45	8.93	13.63
PSR J0030+0451	0.68	1.75	2.06	3.30	9.57	15.36	10.16	15.60	10.24	15.80
GW190425	0.77	1.64	2.19	3.20	10.18	14.86	10.76	15.15	10.87	15.34
$k_F^{\text{DM}} = 0.06$ (GeV)										
GW190814	1.42	1.62	2.50	2.67	11.36	12.12	11.41	12.07	11.63	12.31
PSR J0952-0607	1.08	1.45	2.18	2.53	9.91	11.48	10.15	11.52	10.33	11.74
Linhas PSR J0704+6620	0.92	1.05	2.01	2.15	9.14	9.76	9.47	10.03	9.60	10.20
Elipses PSR J0704+6620	1.04	4.86	2.14	4.63	9.71	21.02	9.99	19.34	10.16	19.68
GW170817	0.76	2.09	1.83	3.03	8.31	13.77	8.69	13.46	8.76	13.73
PSR J0030+0451	1.12	2.89	2.22	3.57	10.09	16.20	10.31	15.45	10.49	15.76
GW190425	1.19	2.70	2.29	3.45	10.40	15.66	10.59	15.00	10.78	15.31
$k_F^{\text{DM}} = 0.08$ (GeV)										
GW190814	2.19	2.50	2.50	2.67	11.16	11.92	10.97	11.58	11.22	11.86
PSR J0952-0607	1.66	2.23	2.18	2.52	9.71	11.27	9.78	11.05	9.99	11.31
Linhas PSR J0704+6620	1.41	1.62	2.01	2.15	8.96	9.60	9.14	9.69	9.30	9.89
Elipses PSR J0704+6620	1.69	8.42	2.20	4.90	9.80	21.89	9.85	19.14	10.07	19.55
GW170817	1.23	3.63	1.87	3.22	8.36	14.37	8.61	13.49	8.74	13.82
PSR J0030+0451	1.93	4.98	2.35	3.77	10.48	16.83	10.41	15.37	10.65	15.73
GW190425	1.96	4.68	2.37	3.66	10.56	16.31	10.48	14.97	10.72	15.33

5 Conclusão

Neste trabalho, apresentamos brevemente as variedades geométricas em que as teorias gravitacionais são construídas. Em seguida, aprofundamos na variedade de Weitzenböck apresentando o Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral, teoria que possui os mesmos resultados da RG. Para corroborar com essa afirmação mostramos que o TEGR recupera os mesmos resultados para os testes clássicos da RG, além, do estudo de eventos e objetos astrofísicos, onde pudemos ver a equivalência entre ambas teorias.

Em seguida, passamos para o estudo da Gravidade Teleparalela Modificada. Este modelo é proposto com a modificação da lagrangiana do TEGR com o acoplamento de parâmetros livres β_1, β_2 e β_3 , em que destacamos que os parâmetros recuperam o TEGR quando tendem à unidade. Além disso, mostramos que para soluções simetricamente esféricas e estáticas, os parâmetros livres obedecem uma relação entre si, $2\beta_3 - \beta_2 - \beta_1 = 0$, na qual permite que reescrevamos a equação de TOV de forma a renormalizar a constante gravitacional universal, tal impacto permite que objectos compactos atingissem valores de massa máxima maiores que os obtidos via RG. Com isso, analisamos os efeitos do parâmetro β_3 quando usamos as parametrizações FSUGold2 e Z271v6 nos diagramas de massa-raio para os objetos compactos, a análise apenas do parâmetro β_3 ocorreu devido ao vínculo, previamente estabelecido, reescrevendo os parâmetros β_1 e β_2 na forma apenas do β_3 . Ademais, pudemos também ver os efeitos da matéria escura e do parâmetro livre com a parametrização NL3*, onde pudemos ver que a interação do conteúdo de DM suavizada a EoS final e atingíssemos níveis maiores para a massa máxima e para os raios das massas máximas dos objetos compactos.

Já na área das ondas gravitacionais, que se encontra no apêndice, pudemos analisar que a decomposição em uma parte simétrica e antissimétrica pode levar à solução análoga à RG quando os parâmetros livres tendem à unidade provocando a inexistência de ondas para a parte antissimétrica, porém, há muito o que investigar em desdobramentos desses estudos, como um estudo mais apropriado das ondas gravitacionais, usando como inspiração o trabalho (VILHENA *et al.*, 2021), avaliando o possível impacto modos de polarizações $h_{\times}$ e h_{+} . Além de estudar quaisquer mudanças que os parâmetros possam vir a influenciar no redshift..

Além desse aprofundamento do estudo de ondas gravitacionais, buscaremos nos próximos passos desse trabalho, a compreensão sobre objetos compactos em uma extensão da nossa teoria modificada, onde faremos um análogo das chamadas teorias $f(T)$, para isso substituiremos a escalar torção usual pelo nosso $\check{T}$, que é indicado pela expressão (4.3) ou seja, trataremos de teorias $f(\check{T})$. Com isso, conseguiremos comparar os nossos resultados com trabalhos já presentes na literatura, pois as teorias $f(\check{T})$ devem apresentar os mesmos resultados das teorias $f(T)$ no limite em que os nossos parâmetros tendem à unidade.

Ainda, os físicos não compreendem em completude a gravitação, e este trabalho é parte de um conjunto de estudos de abordagens alternativas à teoria da Relatividade Geral. Numa perspectiva futura, estudos sobre o comportamento de uma determinada parametrização em diversos modelos gravitacionais podem ser feitos. Além disso, o caminho contrário pode ser feito, como o estudo de diversas parametrizações se manifestam nos resultados dessas teorias alternativas.

Referências

ABBOTT, B. P. *et al.* GW170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. **Physical Review Letters**, v. 119, p. 161101, Out. 2017. American Physical Society.

ABBOTT, B. P. *et al.* GW170817: Measurements of neutron star radii and equation of state. **Physical Review Letters**, v. 121, p. 161101, Out. 2018. American Physical Society.

ABBOTT, B. P. *et al.* GW190425: Observation of a compact binary coalescence with total mass $3.4 M_{\odot}$. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 892, n. 1, p. L3, Mar. 2020. The American Astronomical Society.

ABBOTT, R. *et al.* GW190814: Gravitational waves from the coalescence of a 23 solar mass black hole with a 2.6 solar mass compact object. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 896, n. 2, p. L44, Jun. 2020. The American Astronomical Society.

ARCOS, H. I.; PEREIRA, J. G. Torsion gravity: A reappraisal. **International Journal of Modern Physics D**, v. 13, n. 10, p. 2193–2240, 2004.

ASSENÇIO, E. M. B. *et al.* Second-order teleparallel gauge theory. **Classical and Quantum Gravity**, v. 40, n. 20, p. 205015, 2023.

VARGAS AUCCALLA, Teófilo. **Equivalente teleparalelo de algumas soluções da relatividade geral**. 2002. 60 f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Física Teórica, 2002.

BAADE, W.; ZWICKY, F. Remarks on Super-Novae and Cosmic Rays. **Physical Review**, v. 46, n. 1, p. 76, 1934.

BAHAMONDE, S. *et al.* Teleparallel gravity: from theory to cosmology. **Reports on Progress in Physics**, v. 86, n. 2, p. 026901, fev. 2023. IOP Publishing.

BERTONE, G.; HOOPER, D. History of dark matter. **Reviews of Modern Physics**, v. 90, p. 045002, out. 2018. American Physical Society.

BOHM, D. **A teoria da relatividade restrita** 1. ed. São Paulo: Editora Unesp, 2015.

CAI, Y.-F. *et al.* F(t) teleparallel gravity and cosmology. **Reports on Progress in Physics**, v. 79, n. 10, p. 106901, set. 2016. IOP Publishing.

CAPOZZIELLO, S.; FALCO, V. D.; FERRARA, C. Comparing equivalent gravities: common features and differences. **The European Physical Journal C**, v. 82, n. 10, p. 865, 2022.

CAPOZZIELLO, S.; TSUJIKAWA, S. Solar system and equivalence principle constraints on $f(R)$ gravity by chameleon approach. **Physical Review D**, v. 77, p. 107501, 2008.

CARLSON, B. V. *et al.* Low-energy nuclear physics and global neutron star properties. **Physical Review C**, v. 107, p. 035805, mar. 2023. American Physical Society.

CARVALHO, G. A.; MARINHO, Jr R. M.; MALHEIRO, M. Mass-Radius diagram for compact stars. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 630, n. 1, p. 012058, 2015.

CHEN, W.-C.; PIEKAREWICZ, J. Building relativistic mean field models for finite nuclei and neutron stars. **Physical Review C**, v. 90, n. 4, p. 044305, 2014.

CHIBA, T.; SMITH, T. L.; ERICKCEK, A. L. Solar System constraints to general $f(R)$ gravity. **Physical Review D**, v. 75, p. 124014, 2007.

DAS, A.; MALIK, T.; NAYAK, A. C. Confronting nuclear equation of state in the presence of dark matter using GW170817 observation in relativistic mean field theory approach. **Physical Review D**, v. 99, p. 043016, fev. 2019. American Physical Society.

DAS, A.; MALIK, T.; NAYAK, A. C. Dark matter admixed neutron star properties in light of gravitational wave observations: A two fluid approach. **Physical Review D**, v. 105, p. 123034, jun. 2022. American Physical Society.

DAS, H. *et al.* Impacts of dark matter on the curvature of the neutron star. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2021, n. 01, p. 007, jan. 2021. IOP Publishing.

DAS, H. C. *et al.* Impacts of dark matter on the f-mode oscillation of hyperon star. **Physical Review D**, v. 104, p. 123006, dez. 2021. American Physical Society.

DAS, H. C. *et al.* Effects of dark matter on the nuclear and neutron star matter. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 495, n. 4, p. 4893–4903, maio 2020. ISSN 0035-8711.

DAS, H. C. *et al.* Dark matter effects on the compact star properties. **Galaxies**, v. 10, n. 1, p. 14, 2022. ISSN 2075-4434.

DAS, H. C.; KUMAR, A.; PATRA, S. K. Dark matter admixed neutron star as a possible compact component in the GW190814 merger event. **Physical Review D**, v. 104, p. 063028, set. 2021. American Physical Society.

DAS, H. C.; KUMAR, A.; PATRA, S. K. Effects of dark matter on the in-spiral properties of the binary neutron stars. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 507, n. 3, p. 4053–4060, ago. 2021. ISSN 0035-8711.

DENGLER, Y.; SCHAFFNER-BIELICH, J.; TOLOS, L. Second love number of dark compact planets and neutron stars with dark matter. **Physical Review D**, v. 105, p. 043013, fev. 2022. American Physical Society.

D'INVERNO, R. **Introducing Einstein's relativity** New York: Oxford University Press, 1998.

DUTRA, M.; LENZI, C. H.; LOURENÇO, O. Dark particle mass effects on neutron star properties from a short-range correlated hadronic model. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 517, n. 3, p. 4265–4274, out. 2022. ISSN 0035-8711.

DUTRA, M. *et al.* Relativistic mean-field hadronic models under nuclear matter constraints. **Physical Review C**, v. 90, p. 055203, nov. 2014. American Physical Society.

DUTRA, M.; LOURENÇO, O.; MENEZES, D. P. Stellar properties and nuclear matter constraints. **Physical Review C**, v. 93, n. 2, p. 025806, 2016. [Erratum: Phys. Rev. C 94, 049901 (2016)].

EINSTEIN, A. Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? **Annalen der Physik**, v. 323, n. 13, p. 639–641, 1905.

EINSTEIN, A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. **Annalen der Physik**, v. 322, n. 10, p. 891–921, 1905.

EINSTEIN, A. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. **Annalen der Physik**, v. 354, n. 7, p. 769–822, 1916.

EINSTEIN, A. **Meus últimos anos** 2. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2017.

EINSTEIN, A. Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. **Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften**, p. 688–696, jan. 1916.

EINSTEIN, A.; ROSEN, N. On gravitational waves. **Journal of the Franklin Institute**, v. 223, p. 43–54, 1937.

FONSECA, E. *et al.* Refined mass and geometric measurements of the high-mass PSR J0740+6620. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 915, n. 1, p. L12, jul. 2021. The American Astronomical Society.

GIANGRANDI, E. *et al.* The effects of self-interacting bosonic dark matter on neutron star properties. **The Astrophysical Journal**, v. 953, n. 1, p. 115, ago. 2023.

GIRONES, Z. *et al.* Cosmological data analysis of $f(R)$ gravity models. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 11, p. 004, 2010.

HAWKING, S. **O universo numa casca de noz** ed. esp. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2012.

HAYASHI, K.; SHIRAFUJI, T. New general relativity. **Physical Review D**, v. 19, p. 3524–3553, jun. 1979. American Physical Society.

HEISENBERG, L. Review on $f(q)$ gravity. arXiv:2309.15958v1 [Preprint]. 2023. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2309.15958>.

HOOFT, G.; VELTMAN, M. J. G. One loop divergencies in the theory of gravitation. **Annales de l'Institut Henri Poincaré, Physique Théorique**, v. 20, p. 69–94, 1974.

HOROWITZ, C. J.; PIEKAREWICZ, J. Constraining URCA cooling of neutron stars from the neutron radius of Pb-208. **Physical Review C**, v. 66, p. 055803, 2002.

HORVATH, J. E. **Astrofísica de altas energias** 1. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2020.

ILIJIC, S.; SOSSICH, M. Compact stars in $f(T)$ extended theory of gravity. **Physical Review D**, v. 98, n. 6, p. 064047, 2018.

JIMENEZ, J. B. *et al.* The geometrical trinity of gravity. arXiv:1903.06830v1 [Preprint]. 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1903.06830>.

KARKEVANDI, D. R. *et al.* Bosonic dark matter in neutron stars and its effect on gravitational wave signal. **Physical Review D**, v. 105, p. 023001, jan. 2022. American Physical Society.

KPADONOU, A. V.; HOUNDJO, M. J. S.; RODRIGUES, M. E. Tolman-Oppenheimer-Volkoff equations and their implications for the structures of relativistic stars in $f(T)$ gravity. **Astrophysics and Space Science**, v. 361, n. 7, p. 244, 2016.

KRSSAK, M. Teleparallel gravity, covariance and their geometrical meaning. arXiv:2401.08106v1 [Preprint]. 2024. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2401.08106>.

KUMAR, A.; DAS, H. C.; PATRA, S. K. Thermal relaxation of dark matter admixed neutron star. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 513, n. 2, p. 1820–1833, abr. 2022. ISSN 0035-8711.

LALAZISSIS, G. *et al.* The effective force NL3 revisited. **Physics Letters B**, v. 671, n. 1, p. 36–41, 2009. ISSN 0370-2693.

LANDAU, L. D. On the theory of stars. **Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion**, v. 1, p. 285, 1932.

LENZI, C. H.; POMPEIA, P. J.; STUDART, N. A. Deflexão gravitacional da luz: De Newton a Einstein. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 41, p. e20190238, 2019. Sociedade Brasileira de Física. ISSN 1806-1117.

LI, B.-A.; CHEN, L.-W.; KO, C. M. Recent progress and new challenges in isospin physics with heavy-ion reactions. **Physics Reports**, v. 464, n. 4, p. 113–281, 2008. ISSN 0370-1573.

LOURENÇO, O.; FREDERICO, T.; DUTRA, M. Dark matter component in hadronic models with short-range correlations. **Physical Review D**, v. 105, p. 023008, jan. 2022. American Physical Society.

LOURENÇO, O. *et al.* Dark matter effects on tidal deformabilities and moment of inertia in a hadronic model with short-range correlations. **Physical Review D**, v. 106, p. 043010, ago. 2022. American Physical Society.

MALUF, J. W. The teleparallel equivalent of general relativity. **Annalen der Physik**, v. 525, n. 5, p. 339–357, 2013.

MALUF, J. W.; ROCHA-NETO, J. F. da. Hamiltonian formulation of general relativity in the teleparallel geometry. **Physical Review D**, v. 64, p. 084014, set. 2001. American Physical Society.

MILLER, M. C. *et al.* PSR J0030+0451 mass and radius from NICER data and implications for the properties of neutron star matter. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 887, n. 1, p. L24, dez. 2019. The American Astronomical Society.

MILLER, M. C. *et al.* The radius of PSR J0740+6620 from NICER and XMM-Newton data. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 918, n. 2, p. L28, set. 2021. The American Astronomical Society.

NAF, J.; JETZER, P. On gravitational radiation in quadratic $f(R)$ gravity. **Physical Review D**, v. 84, p. 024027, 2011.

OPPENHEIMER, J. R.; VOLKOFF, G. M. On massive neutron cores. **Physical Review**, v. 55, p. 374–381, 1939.

PANOTOPOULOS, G.; LOPES, I. Dark matter effect on realistic equation of state in neutron stars. **Physical Review D**, v. 96, p. 083004, out. 2017. American Physical Society.

PIMENTEL, B. M. *et al.* Letter: The teleparallel lagrangian and Hamilton-Jacobi formalism. **General Relativity and Gravitation**, v. 35, n. 5, p. 877–884, mai 2003. ISSN 1572-9532.

POMPEIA, P. J. *et al.* The teleparallel Lagrangian and Hamilton-Jacobi formalism. **General Relativity and Gravitation**, v. 35, p. 877–884, 2003.

QUDDUS, A. *et al.* GW170817 constraints on the properties of a neutron star in the presence of WIMP dark matter. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, v. 47, n. 9, p. 095202, ago. 2020. IOP Publishing.

RILEY, T. E. *et al.* A NICER view of PSR J0030+0451: Millisecond pulsar parameter estimation. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 887, n. 1, p. L21, dez. 2019. The American Astronomical Society.

RILEY, T. E. *et al.* A NICER view of the massive pulsar PSR J0740+6620 informed by radio timing and XMM-Newton spectroscopy. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 918, n. 2, p. L27, set. 2021. The American Astronomical Society.

RING, P.; SCHUCK, P. **The nuclear many-body problem** [S.l.]: Springer, 1980.

ROMANI, R. W. *et al.* PSR J0952-0607: The fastest and heaviest known galactic neutron star. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 934, n. 2, p. L17, jul. 2022. The American Astronomical Society.

RYDEN, B. **Introduction to cosmology** San Francisco: Addison-Wesley, 2003.

SABBATA, V. D.; GASPERINI, M. **Introduction to gravitation**. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 1986.

SCHOLZ, E. Weyl geometry in late 20th century physics. arXiv:1111.3220v1 [Preprint]. 2011. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1111.3220>.

SHAKERI, S.; KARKEVANDI, D. R. Bosonic dark matter in light of the NICER precise mass-radius measurements **Physical Review D**, v. 109, p. 043029, fev. 2024.

SOTIRIOU, T. P.; FARAONI, V. $f(R)$ theories of gravity. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society, v. 82, p. 451–497, mar. 2010.

STAROBINSKY, A. A. A new type of isotropic cosmological models without singularity. **Physics Letters B**, v. 91, p. 99–102, 1980.

STELLE, K. S. Renormalization of higher-derivative quantum gravity. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 16, p. 953–969, ago. 1977.

TAMANINI, N.; BÖHMER, C. G. Good and bad tetrads in $f(T)$ gravity. **Physical Review D**, v. 86, p. 044009, 2012.

TAMANINI, N.; BÖHMER, C. G. Definition of good tetrads for $f(T)$ gravity. In: **13th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics, and Relativistic Field Theories. Proceedings [...]**. [*S.l.*: *s.n.*], 2015. p. 1282–1284.

THORNE, K. **Black holes and time warps: Einstein's outrageous legacy** [*S.l.*]: W. W. Norton Company, 1994.

UTIYAMA, R.; DEWITT, B. S. Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields. **Journal of Mathematical Physics**, v. 3, p. 608–618, 1962.

VILHENA, S. *et al.* Neutron stars in modified teleparallel gravity. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2023, n. 04, p. 044, abr. 2023.

VILHENA, S. G. *et al.* Dark matter effects in modified teleparallel gravity. **Physical Review D**, v. 108, n. 10, p. 104051, 2023.

VILHENA, S. G.; MEDEIROS, L. G.; CUZINATTO, R. R. Gravitational waves in higher-order R^2 gravity. **Physical Review D**, v. 104, n. 8, p. 084061, 2021.

WALECKA, J. D. A theory of highly condensed matter. **Annals of Physics**, v. 83, p. 491–529, 1974.

WOODARD, R. P. Ostrogradsky's theorem on Hamiltonian instability. **Scholarpedia**, v. 10, n. 8, p. 32243, 2015.

Apêndice A - Variações

Dado que

$$g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab} ,$$

temos

$$\delta g_{\mu\nu} = \delta (e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab}) = e^b{}_\nu \eta_{ab} (\delta e^a{}_\mu) + e^a{}_\mu \eta_{ab} (\delta e^b{}_\nu) ,$$

onde usamos que

$$\delta \eta_{ab} = 0 .$$

Portanto, temos:

$$\delta g_{\mu\nu} = \eta_{ab} [e^b{}_\nu (\delta e^a{}_\mu) + e^a{}_\mu (\delta e^b{}_\nu)] . \quad (\text{A.1})$$

Por outro lado,

$$g^{\mu\nu} = e_a{}^\mu e_b{}^\nu \eta^{ab} ,$$

temos analogamente

$$\delta g^{\mu\nu} = \eta^{ab} [e_b{}^\nu (\delta e_a{}^\mu) + e_a{}^\mu (\delta e_b{}^\nu)] \quad (\text{A.2})$$

Tomemos a variação do determinante da métrica

$$\delta (\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} ,$$

com $\sqrt{-g} = e$, temos:

$$\delta e = -\frac{1}{2} e g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} ,$$

usando a Eq. (A.2)

$$\delta e = -\frac{1}{2} e g_{\mu\nu} [\eta^{ab} e_b{}^\nu (\delta e_a{}^\mu) + \eta^{ab} e_a{}^\mu (\delta e_b{}^\nu)] ,$$

logo,

$$\delta e = -\frac{1}{2}ee^a{}_\mu(\delta e_a{}^\mu) - \frac{1}{2}ee_\nu{}^b(\delta e_b{}^\nu) ,$$

com renomeação de índices,

$$\delta e = -ee^a{}_\mu(\delta e_a{}^\mu) . \quad (\text{A.3})$$

Ainda,

$$\delta(e_a{}^\mu e_a{}^\nu) = e_a{}^\nu(\delta e_a{}^\mu) + e_a{}^\mu(\delta e_a{}^\nu) = 0 ,$$

concluimos que

$$e_a{}^\nu(\delta e_a{}^\mu) = -e_a{}^\mu(\delta e_a{}^\nu) \Rightarrow (\delta e_a{}^\mu) = -e_a{}^\nu e_b{}^\mu(\delta e_b{}^\nu) . \quad (\text{A.4})$$

Analogamente,

$$\delta(e_a{}^\mu e_a{}^\nu) = e_a{}^\nu \delta(e_a{}^\mu) + e_a{}^\mu \delta(e_a{}^\nu) \Rightarrow \delta(e_a{}^\mu) = -e_a{}^\nu e_b{}^\mu \delta(e_b{}^\nu) , \quad (\text{A.5})$$

Logo, substituímos a Eq. (A.4) em (A.3) temos

$$\delta e = ee_a{}^\mu(\delta e_a{}^\mu) . \quad (\text{A.6})$$

Tomemos agora a conexão de Weitzenböck

$$\Gamma_{\nu\mu}^\alpha = e_a{}^\alpha \partial_\nu e_a{}^\mu .$$

Assim,

$$\delta \Gamma_{\nu\mu}^\alpha = \delta(e_a{}^\alpha \partial_\nu e_a{}^\mu) = (\delta e_a{}^\alpha) \partial_\nu e_a{}^\mu + e_a{}^\alpha \partial_\nu (\delta e_a{}^\mu) . \quad (\text{A.7})$$

E a torção é definida pela conexão, assim de

$$T_{\nu\mu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha ,$$

e com a variação (A.7)

$$\delta T_{\nu\mu}^\alpha = (\delta e_a{}^\alpha) \partial_\nu e_a{}^\mu + e_a{}^\alpha \partial_\nu (\delta e_a{}^\mu) - (\delta e_a{}^\alpha) \partial_\mu e_a{}^\nu - e_a{}^\alpha \partial_\mu (\delta e_a{}^\nu) ,$$

$$\delta T_{\nu\mu}^\alpha = e_a{}^\alpha [\partial_\nu (\delta e_a{}^\mu) - \partial_\mu (\delta e_a{}^\nu)] + (\delta e_a{}^\alpha) (\partial_\nu e_a{}^\mu - \partial_\mu e_a{}^\nu) ,$$

com

$$(\delta e_a{}^\alpha) = -e_a{}^\sigma e_b{}^\alpha (\delta e_b{}^\sigma) ,$$

então

$$\delta T_{\nu\mu}^{\alpha} = e_a^{\alpha} [\partial_{\nu} (\delta e_{\mu}^a) - \partial_{\mu} (\delta e_{\nu}^a)] - e_b^{\alpha} (\delta e_{\sigma}^b) [e_a^{\sigma} (\partial_{\nu} e_{\mu}^a - \partial_{\mu} e_{\nu}^a)] ,$$

onde identifica-se a torção entre colchetes, logo a variação da torção é dada por

$$\delta T_{\nu\mu}^{\alpha} = e_a^{\alpha} [\partial_{\nu} (\delta e_{\mu}^a) - \partial_{\mu} (\delta e_{\nu}^a)] - e_a^{\alpha} T_{\nu\mu}^{\sigma} (\delta e_{\sigma}^a) . \quad (\text{A.8})$$

Vamos tomar agora algumas variações úteis com a finalidade de encontrarmos a equação de campo. Começemos com

$$\delta \left(-\frac{1}{4} g^{\mu\kappa} g^{\rho\gamma} g_{\beta\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\kappa} \delta_{\nu}^{\gamma} \delta_{\beta}^{\rho} + g^{\rho\gamma} \delta_{\nu}^{\mu} \delta_{\beta}^{\kappa} \right) = \delta \left(-\frac{1}{4} g^{\mu\kappa} g^{\rho\gamma} g_{\beta\nu} \right) + \delta \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\kappa} \delta_{\nu}^{\gamma} \delta_{\beta}^{\rho} \right) + \delta (g^{\rho\gamma} \delta_{\nu}^{\mu} \delta_{\beta}^{\kappa})$$

com as Eqs. (A.1) e (A.2), temos

$$\begin{aligned} \delta \left(-\frac{1}{4} g^{\mu\kappa} g^{\rho\gamma} g_{\beta\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\kappa} \delta_{\nu}^{\gamma} \delta_{\beta}^{\rho} + g^{\rho\gamma} \delta_{\nu}^{\mu} \delta_{\beta}^{\kappa} \right) &= -\frac{1}{4} g^{\rho\gamma} g_{\beta\nu} \eta^{ab} [e_b^{\kappa} (\delta e_a^{\mu}) + e_a^{\mu} (\delta e_b^{\kappa})] \\ &\quad - \frac{1}{4} g^{\mu\kappa} g_{\beta\nu} \eta^{ab} [e_b^{\gamma} (\delta e_a^{\rho}) + e_a^{\rho} (\delta e_b^{\gamma})] \\ &\quad - \frac{1}{4} g^{\mu\kappa} g^{\rho\gamma} \eta_{ab} [e_{\nu}^b (\delta e_{\beta}^a) + e_{\beta}^a (\delta e_{\nu}^b)] \\ &\quad - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\gamma} \delta_{\beta}^{\rho} \eta^{ab} [e_b^{\kappa} (\delta e_a^{\mu}) + e_a^{\mu} (\delta e_b^{\kappa})] \\ &\quad + \delta_{\nu}^{\mu} \delta_{\beta}^{\kappa} \eta^{ab} [e_b^{\gamma} (\delta e_a^{\rho}) + e_a^{\rho} (\delta e_b^{\gamma})] \end{aligned}$$

Percebemos que na expressão acima temos variações da tetrada não padronizadas, assim, usaremos a Eq. (A.4) para realizar esse procedimento. Assim,

$$\begin{aligned} \delta \left(-\frac{1}{4} g^{\mu\kappa} g^{\rho\gamma} g_{\beta\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\kappa} \delta_{\nu}^{\gamma} \delta_{\beta}^{\rho} + g^{\rho\gamma} \delta_{\nu}^{\mu} \delta_{\beta}^{\kappa} \right) &= \frac{1}{4} g^{\rho\gamma} g_{\beta\nu} \eta^{ab} [e_b^{\kappa} e_a^{\lambda} e_c^{\mu} + e_a^{\mu} e_b^{\lambda} e_c^{\kappa}] (\delta e^c_{\lambda}) \\ &\quad + \frac{1}{4} g^{\mu\kappa} g_{\beta\nu} \eta^{ab} [e_b^{\gamma} e_a^{\lambda} e_c^{\rho} + e_a^{\rho} e_b^{\lambda} e_c^{\gamma}] (\delta e^c_{\lambda}) \\ &\quad - \frac{1}{4} g^{\mu\kappa} g^{\rho\gamma} \eta_{ac} [e_{\nu}^a (\delta e^c_{\beta}) + e_{\beta}^a (\delta e^c_{\nu})] \\ &\quad + \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\gamma} \delta_{\beta}^{\rho} \eta^{ab} [e_b^{\kappa} e_a^{\lambda} e_c^{\mu} + e_a^{\mu} e_b^{\lambda} e_c^{\kappa}] (\delta e^c_{\lambda}) \\ &\quad - \delta_{\nu}^{\mu} \delta_{\beta}^{\kappa} \eta^{ab} [e_b^{\gamma} e_a^{\lambda} e_c^{\rho} + e_a^{\rho} e_b^{\lambda} e_c^{\gamma}] (\delta e^c_{\lambda}) \end{aligned}$$

Agora, tomando a variação do termo de torções

$$\begin{aligned}
 \delta (T^\alpha_{\rho\sigma} T^\beta_{\kappa\mu}) &= T^\alpha_{\rho\sigma} (\delta T^\beta_{\kappa\mu}) + T^\beta_{\kappa\mu} (\delta T^\alpha_{\rho\sigma}) \\
 &= T^\alpha_{\rho\sigma} [e_a^\beta [\partial_\kappa (\delta e^a_\mu) - \partial_\mu (\delta e^a_\kappa)] - e_c^\beta T^\lambda_{\kappa\mu} (\delta e^c_\lambda)] \\
 &\quad + T^\beta_{\kappa\mu} [e_a^\alpha [\partial_\rho (\delta e^a_\sigma) - \partial_\sigma (\delta e^a_\rho)] - e_c^\alpha T^\lambda_{\rho\sigma} (\delta e^c_\lambda)]
 \end{aligned}$$

Apêndice B - Movimento Planetário e o Periélio de Mercúrio

A solução de Schwarzschild descreve o espaço-tempo na região externa de uma distribuição esférica e estática de massa, que será estudada na Seção 3.2. O Sol se enquadra nessas configurações e como os planetas possuem uma massa baixa comparada à do Sol, funcionam como partículas-teste, cujo movimento é descrito pela geodésica na RG. Porém, no Teleparalelismo, como discutido na seção 3.1, a equação que descreve o movimento das partículas é a Eq. (3.13). Lembrando que para o sistema de coordenadas esféricas temos que os índices $\lambda = 0, 1, 2, 3$ representam as coordenadas t, r, θ, φ respectivamente. Assim, variando os valores de λ , de μ , e de ν teremos um conjunto de quatro equações diferenciais, de onde é possível retirar relações importantes. Mas, antes de continuarmos a tecer os comentários desta seção e apresentarmos as relações, é importante destacar que não apresentaremos todos os procedimentos aqui, pois as contas seguem a tese (AUCALLA, 2002).

Com isso, consideraremos a escolha $\lambda = 2$ e um planeta transladando no plano equatorial da estrela, em que a velocidade do planeta-teste esteja apenas neste plano, ou seja, temos as relações $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\frac{d\theta}{ds} = \dot{\theta} = 0$. Assim, precisamos construir a equação de órbita, que é obtida a partir do elemento de linha, onde teremos a necessidade de usar as relações provenientes das equações diferenciais citadas no parágrafo anterior, que apresentamos abaixo

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{h}{r^2} \quad \text{e} \quad \frac{dt}{ds} = \frac{k}{\gamma_{00}^2}, \quad (\text{B.1})$$

onde k e h são constantes de integração, com o h representando o momento angular por unidade de massa. O valor do termo γ_{00} que está presente na segunda relação é detalhada na Seção 3.2, como previamente avisamos. Com a manipulação do elemento de linha, substituindo os valores presentes na relação (B.1) e usando a mudança de variável $u = r^{-1}$, encontraremos a equação

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3r_s u^2 + \frac{r_s}{h^2}, \quad (\text{B.2})$$

onde

$$r_s = \frac{GM}{c^2}.$$

Percebemos na Eq. (B.2) é a mesma equação que encontramos na RG, ou seja, a presença do termo proporcional a u^2 é a mesma correção da RG à teoria newtoniana. Com esses resultados, temos que todos outros resultados já conhecidos da RG seguem. Com isso, a precessão do periélio é dado por

$$\Delta\varphi_0 = 6\pi \frac{r'_s}{L}, \quad (\text{B.3})$$

onde L é o *Semilactus Rectum*.

Para o caso clássico do Mercúrio, temos que

$$\begin{cases} L = 55,5 \times 10^6 km \\ r'_s = 1,475 km \end{cases}$$

o que nos leva a um desvio de

$$\Delta\varphi = 43,1'',$$

esse pequeno desvio é calculado a cada século.

Apêndice C - Ondas Gravitacionais no TEGR

Uma outra solução que está presente na RG e no TEGR são as ondas gravitacionais. O procedimento da RG é o processo de linearização da equação de Einstein, onde tomamos uma expansão do tensor métrico pela métrica de Minkowski e por uma pequena perturbação $h_{\mu\nu}$, ou seja,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} ,$$

onde o termo de perturbação é muito menor que a unidade,

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1 . \quad (\text{C.1})$$

Com isso, todos os termos de ordem superior são negligenciados, $\mathcal{O}(h_{\mu\nu})^2 \simeq 0$. Durante esse processo definimos o *traceless reverse tensor*

$$\bar{h}_\mu{}^\nu = h_\mu{}^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu h , \quad (\text{C.2})$$

onde é aplicado o calibre harmônico, que é dado por

$$\partial_\nu \bar{h}_\mu{}^\nu = 0 . \quad (\text{C.3})$$

Assim, o tensor de Einstein se resume a uma equação de onda para o objeto definido na Eq.(C.2), como expressa pela expressão a seguir

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 , \quad (\text{C.4})$$

onde $\square \equiv \eta^{\nu\mu} \partial_\nu \partial_\mu$. A Eq. (C.4) descreve uma perturbação gravitacional propagando-se no vácuo com a velocidade da luz. Agora, vamos ver com mais detalhes como se procede a solução de GW no contexto do Teleparalelismo. Enquanto a expansão da RG parte do tensor métrico, a expansão no TEGR parte da tetrada, assim,

$$e^a{}_\mu = \delta_\mu^a + \psi^a{}_\mu , \quad (\text{C.5})$$

com $|\psi_\mu^a| \ll 1$. Tal qual acontece na RG, os termos de ordem superior em ψ_μ^a são negligenciados, assim $\mathcal{O}(\psi_\mu^a)^2 \simeq 0$. Logo, a Eq. (3.4) no vácuo torna-se simplificada. Uma vez que a conexão em sua forma linearizada é dada por

$$\Gamma_{\nu\mu}^\alpha = \delta_a^\alpha \partial_\nu \psi_\mu^a, \quad (\text{C.6})$$

e como consequência a torção se reescreve como

$$T_{\nu\mu}^\alpha = \delta_a^\alpha (\partial_\nu \psi_\mu^a - \partial_\mu \psi_\nu^a), \quad (\text{C.7})$$

teremos que todos os termos da equação de campo do TEGR sendo produtos de torção serão negligenciados. Portanto, a equação de campo se reduz apenas à

$$4\partial_\rho S_\mu^{\rho\lambda} = 0. \quad (\text{C.8})$$

Com a linearização do S , encontramos

$$-\partial_\rho \partial_\mu (\psi^{\rho\lambda} + \psi^{\lambda\rho}) - \partial_\rho \partial^\lambda (\psi_\mu^\rho + \psi_\mu^\rho) + \square (\psi_\mu^\lambda + \psi_\mu^\lambda) - 2\delta_\mu^\lambda \square \psi + 2\partial_\mu \partial^\lambda \psi + 2\delta_\mu^\lambda \partial_\rho \partial_\alpha \psi^{\alpha\rho} = 0. \quad (\text{C.9})$$

É de observação importante que os termos ψ não são simétricos, porém, com a soma de tais termos é possível construir um objeto simétrico, como demonstrado abaixo

$$\bar{\psi}_{\rho\lambda} = \psi_{\rho\lambda} + \psi_{\lambda\rho}, \quad (\text{C.10})$$

dada a definição $\bar{\psi} \equiv \eta^{\rho\lambda} \bar{\psi}_{\rho\lambda} = \eta^{\rho\lambda} \psi_{\rho\lambda} + \eta^{\rho\lambda} \psi_{\lambda\rho}$, concluímos que o traço da Eq.(C.10) é dado por

$$\bar{\psi} = 2\psi \quad (\text{C.11})$$

É válido a demonstração de que o objeto definido em (C.10) é o mesmo objeto que se encontra em (C.1). Vejamos a expansão

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}.$$

Por outro lado,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b,$$

assim, com o uso da Eq.(C.5), temos que

$$\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \psi_{\nu\mu} + \psi_{\mu\nu}. \quad (\text{C.12})$$

Logo, temos que a definição em (C.10) é o mesmo termo simétrico que aparece na RG ao tomarmos expansão da métrica. Ainda, é possível usar as Eqs.(C.10) e (C.11) para

tomarmos uma nova definição dada por

$$\tilde{\psi}^{\rho a} = \bar{\psi}^{\rho a} - \frac{1}{2}\eta^{\rho a}\bar{\psi}. \quad (\text{C.13})$$

Essa definição nos é útil quando a usamos em conjunto com as Eqs.(C.10) e (C.11). Isso nos permite reescrever a Eq. (C.9) como

$$-\partial_\rho\partial_\mu\tilde{\psi}^{\rho\lambda} - \partial_\rho\partial^\lambda\tilde{\psi}^\rho{}_\mu + \square\tilde{\psi}^\lambda{}_\mu + \delta_\mu^\lambda\partial_\rho\partial_\alpha\tilde{\psi}^{\alpha\rho} = 0.$$

Tomando, por fim, o calibre harmônico aplicado no objeto $\tilde{\psi}$,

$$\partial_\rho\tilde{\psi}^{\rho\lambda} = 0, \quad (\text{C.14})$$

encontramos finalmente,

$$\square\tilde{\psi}^\lambda{}_\mu = 0. \quad (\text{C.15})$$

A expressão acima é equivalente ao demonstrado na Eq. (C.4). Ela possui as mesmas características da equação de onda encontrada na RG. Ela representa uma solução para uma onda gravitacional no vácuo para um objeto simétrico, o que é útil para medirmos a geometria do espaço-tempo.

Apêndice D - Ondas Gravitacionais na MTG

Ondas gravitacionais são estudadas em diversos modelos gravitacionais, como exemplo, podemos citar o trabalho (VILHENA *et al.*, 2021), que é desenvolvido no modelo de Starobinsky de ordem superior. Nesta seção vamos estudar as ondas gravitacionais na MTG, o estudo consiste no processo de linearização da equação de campo. Porém, para diferenciar do estudo mostrado na Seção ??, vamos tomar a expansão da tetrada diferente da expansão da tetrada inversa, assim, o termo para a tetrada será o ψ e para a tetrada inversa será o ϕ , logo

$$\begin{cases} e^a{}_\mu = \delta^a{}_\mu + \psi^a{}_\mu \\ e_a{}^\mu = \delta_a{}^\mu + \phi_a{}^\mu \end{cases}$$

Dadas as relações entre tetradas e o tensor métrico [Cf. Eq.(2.9)], temos que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} \delta^a{}_\mu \delta^b{}_\nu + \eta_{ab} \delta^a{}_\mu \psi^b{}_\nu + \eta_{ab} \psi^a{}_\mu \delta^b{}_\nu + \eta_{ab} \psi^a{}_\mu \psi^b{}_\nu ,$$

ou seja,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \psi_{\mu\nu} + \psi_{\nu\mu} . \quad (\text{D.1})$$

Observamos que a relação acima já nos foi apresentada no apêndice ondas gravitacionais anterior, ela pode ser verificada na Eq. (C.12). E para a tetrada inversa a expansão nos leva a

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \phi^{\nu\mu} + \phi^{\mu\nu} . \quad (\text{D.2})$$

Sabemos que $g_{\mu\nu} g^{\mu\rho} = \delta_\nu^\rho$. Portanto, a contração das Eqs. (D.1) e (D.2) nos levam a

$$\delta_\nu^\rho = \delta_\nu^\rho + \phi^\rho{}_\nu + \phi_\nu{}^\rho + \psi^\rho{}_\nu + \psi_\nu{}^\rho ,$$

ou seja,

$$\phi^\rho{}_\nu + \phi_\nu{}^\rho + \psi^\rho{}_\nu + \psi_\nu{}^\rho = 0 . \quad (\text{D.3})$$

Considerando a contração das tetradas,

$$\delta_\mu^\nu = e_\mu^a e_a^\nu = \delta_\mu^\nu + \phi_\mu^\nu + \psi_\mu^\nu,$$

onde descartamos o termo de ordem superior, temos que

$$\psi_\mu^\nu + \phi_\mu^\nu = 0. \quad (\text{D.4})$$

Assim, percebemos que para a relação (D.3) ser satisfeita, além da Eq. (D.4), é necessária que a transposta dessa relação também seja verdadeira, a saber, $\psi_\nu^\mu + \phi_\nu^\mu = 0$. Por consistência, percebemos que da Eq.(D.1) temos

$$h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \psi_{\nu\mu}, \quad (\text{D.5})$$

e da expansão (D.2) temos

$$-h^{\mu\nu} = \phi^{\nu\mu} + \phi^{\mu\nu}, \quad (\text{D.6})$$

ou seja,

$$\phi^{\rho\nu} + \phi^{\nu\rho} + \psi^{\rho\nu} + \psi^{\nu\rho} = -h^{\mu\nu} + h^{\mu\nu} = 0.$$

Com essas relações satisfeitas, estamos em consistência com o que é apresentado na (HAYASHI; SHIRAFUJI, 1979). Percebemos que a Eq. (D.5) é o $\bar{\psi}_{\mu\nu}$ na Seção ??, expressa pela Eq. (C.10). Neste caso, não seguiremos o mesmo passo, mas tomaremos que o $\psi_{\mu\nu}$ pode ser escrito em uma decomposição de uma parte simétrica e de uma parte antissimétrica, ou seja,

$$\psi_{\mu\nu} = \psi_{(\mu\nu)} + \psi_{[\mu\nu]}, \quad (\text{D.7})$$

onde a parte simétrica é encontrada justamente na Eq. (D.5), logo

$$\psi_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(\psi_{\mu\nu} + \psi_{\nu\mu}) \Rightarrow \psi_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}h_{\mu\nu}, \quad (\text{D.8})$$

e tomaremos como definição a parte antissimétrica como

$$\psi_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(\psi_{\mu\nu} - \psi_{\nu\mu}) \equiv A_{\mu\nu}. \quad (\text{D.9})$$

Com as Eqs. (D.8) e (D.9) bem definidas, a Eq. (D.7) se torna

$$\psi_{\mu\nu} = \frac{1}{2}h_{\mu\nu} + A_{\mu\nu}. \quad (\text{D.10})$$

e o traço da Eq. (D.10) se escreve como

$$\psi = \eta^{\mu\nu} \psi_{\mu\nu} = \frac{1}{2}h + A. \quad (\text{D.11})$$

Contudo, pela antissimetria, temos que $A^{\rho\kappa} = -A^{\kappa\rho}$, assim, o seu traço é nulo, ou seja,

$$A = 0. \quad (\text{D.12})$$

Analogamente ao estudo das ondas gravitacionais no contexto do TEGR, vamos tomar a linearização da equação de campo. Lembremos que previamente, podemos negligenciar os termos que resultarão apenas em termos de ordem superior, o que nos leva a uma simplificação da equação de campo para

$$\partial_\rho \Sigma^{\kappa\rho\lambda} = -\frac{1}{2}\chi T^{\lambda\kappa}.$$

Porém, vamos trabalhar inicialmente, apenas, com a parte geométrica da equação de campo, portanto, é necessário tomar a linearização do termo

$$\Sigma^{\kappa\rho\lambda} = \frac{\beta_1}{4} T^{\kappa\rho\lambda} + \frac{\beta_2}{4} (T^{\rho\kappa\lambda} - T^{\lambda\kappa\rho}) + \frac{\beta_3}{2} (g^{\lambda\kappa} T^\rho - g^{\rho\kappa} T^\lambda),$$

onde vamos usar a linearização do termo de torção dada pela Eq. (C.7). Com isso, o objeto Sigma se lê

$$\begin{aligned} \Sigma^{\kappa\rho\lambda} = & \frac{\beta_1}{4} \eta^{\rho\sigma} \eta^{\lambda\nu} (\partial_\sigma \psi^\kappa_\nu - \partial_\nu \psi^\kappa_\sigma) + \frac{\beta_2}{4} [\eta^{\kappa\sigma} \eta^{\lambda\nu} (\partial_\sigma \psi^\rho_\nu - \partial_\nu \psi^\rho_\sigma) - \eta^{\kappa\sigma} \eta^{\rho\nu} (\partial_\sigma \psi^\lambda_\nu - \partial_\nu \psi^\lambda_\sigma)] \\ & + \frac{\beta_3}{2} [\eta^{\lambda\kappa} \eta^{\rho\mu} (\partial_\nu \psi^\nu_\mu - \partial_\mu \psi) - \eta^{\rho\kappa} \eta^{\lambda\mu} (\partial_\nu \psi^\nu_\mu - \partial_\mu \psi)] . \end{aligned}$$

Porém, uma solução de ondas gravitacionais no vácuo é dada por $\partial_\rho \Sigma^{\kappa\rho\lambda} = 0$, usando as Eqs. (D.10), (D.11) e (D.12) conseguimos separar a linearização para o caso do vácuo em parte simétrica e antissimétrica, como vemos abaixo

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\beta_1}{8} (\square h^{\kappa\lambda} - \eta^{\lambda\nu} \partial_\rho \partial_\nu h^{\kappa\rho}) + \frac{\beta_2}{8} (\eta^{\kappa\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma h^{\rho\lambda} - \eta^{\lambda\nu} \partial_\rho \partial_\nu h^{\rho\kappa} - \eta^{\kappa\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma h^{\lambda\rho} + \square h^{\lambda\kappa}) \\ & + \frac{\beta_3}{4} (\eta^{\lambda\kappa} \partial_\rho \partial_\nu h^{\nu\rho} - \eta^{\lambda\kappa} \square h - \eta^{\rho\kappa} \partial_\rho \partial_\nu h^{\nu\lambda} + \eta^{\rho\kappa} \eta^{\lambda\mu} \partial_\rho \partial_\mu h) \\ & + \frac{\beta_1}{4} (\square A^{\kappa\lambda} - \eta^{\lambda\nu} \partial_\rho \partial_\nu A^{\kappa\rho}) + \frac{\beta_2}{4} (\eta^{\kappa\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma A^{\rho\lambda} - \eta^{\lambda\nu} \partial_\rho \partial_\nu A^{\rho\kappa} - \eta^{\kappa\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma A^{\lambda\rho} + \square A^{\lambda\kappa}) \\ & + \frac{\beta_3}{2} (\eta^{\lambda\kappa} \partial_\rho \partial_\nu A^{\nu\rho} - \eta^{\rho\kappa} \partial_\rho \partial_\nu A^{\nu\lambda}), \end{aligned}$$

onde $\eta^{\rho\mu}\partial_\rho\partial_\mu = \square$. Em seguida, analisamos a parte simétrica, que denominamos abaixo como $S^{\lambda\kappa}$, separadamente da parte antissimétrica.

$$\begin{aligned} S^{\lambda\kappa} = & \frac{1}{8}\square [(\beta_1 + \beta_2) h^{\lambda\kappa} - 2\beta_3\eta^{\lambda\kappa}h] \\ & - \frac{1}{8}\eta^{\lambda\nu}\partial_\rho\partial_\nu (\beta_1 + \beta_2) h^{\rho\kappa} \\ & + \frac{\beta_3}{4} (\eta^{\lambda\kappa}\partial_\rho\partial_\nu h^{\nu\rho} - \eta^{\rho\kappa}\partial_\rho\partial_\nu h^{\nu\lambda} + \eta^{\rho\kappa}\eta^{\lambda\mu}\partial_\rho\partial_\mu h) \end{aligned}$$

porém da definição $\bar{h}^{\lambda\kappa} = h^{\lambda\kappa} - \frac{1}{2}\eta^{\lambda\kappa}h$ temos

$$h^{\lambda\kappa} = \bar{h}^{\lambda\kappa} + \frac{1}{2}\eta^{\lambda\kappa}h$$

e seu traço

$$h = -\bar{h}$$

encontramos

$$\begin{aligned} S^{\lambda\kappa} = & \frac{1}{8}\square \left[(\beta_1 + \beta_2) \left(\bar{h}^{\lambda\kappa} - \frac{1}{2}\eta^{\lambda\kappa}\bar{h} \right) + 2\beta_3\eta^{\lambda\kappa}\bar{h} \right] \\ & - \frac{1}{8}\eta^{\lambda\nu}\partial_\rho\partial_\nu (\beta_1 + \beta_2) \left(\bar{h}^{\rho\kappa} - \frac{1}{2}\eta^{\rho\kappa}\bar{h} \right) \\ & + \frac{\beta_3}{4} \left[\eta^{\lambda\kappa}\partial_\rho\partial_\nu \left(\bar{h}^{\nu\rho} - \frac{1}{2}\eta^{\nu\rho}\bar{h} \right) - \eta^{\rho\kappa}\partial_\rho\partial_\nu \left(\bar{h}^{\nu\lambda} - \frac{1}{2}\eta^{\nu\lambda}\bar{h} \right) - \eta^{\rho\kappa}\eta^{\lambda\mu}\partial_\rho\partial_\mu \bar{h} \right] \end{aligned}$$

Se tomarmos o gauge harmônico, ou seja,

$$\partial_\rho\bar{h}^{\rho\kappa} = 0,$$

teremos

$$S^{\lambda\kappa} = \frac{1}{8}(\beta_1 + \beta_2)\square\bar{h}^{\lambda\kappa} - \frac{1}{16}(\beta_1 + \beta_2 - 2\beta_3)[\square\eta^{\lambda\kappa} - \eta^{\rho\kappa}\eta^{\lambda\nu}\partial_\rho\partial_\nu]\bar{h}, \quad (\text{D.13})$$

porém se tivermos que $\bar{h} = 0$,

$$S^{\lambda\kappa} = \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{8}\square\bar{h}^{\lambda\kappa}. \quad (\text{D.14})$$

A expressão acima, portanto, nada se difere da solução das ondas gravitacionais no vácuo, visto que ela difere apenas em termos de fatores constantes, porém no caso do acoplamento do tensor de energia momento, teremos como solução

$$\square\bar{h}^{\lambda\kappa} = -\frac{4\chi}{(\beta_1 + \beta_2)}T^{(\lambda\kappa)},$$

onde, o termo $T^{(\lambda\kappa)}$ é a decomposição simétrica do tensor de energia momento. Percebemos que os parâmetros tendendo à unidade, recuperamos o resultado do TEGR. Ainda, se usarmos o vínculo (4.10), teremos uma equação dependente apenas do parâmetro β_3 , recuperando, novamente, os resultados do TEGR quando seu valor tende à unidade. Porém, o argumento acima é baseado na construção do *traceless transverse tensor* que recai no seu traço nulo. Porém, a mesma Eq. (D.13) pode ser simplificada impondo o vínculo (4.10), que se reduz à

$$S^{\lambda\kappa} = \frac{\beta_3}{4} \square \bar{h}^{\lambda\kappa}. \quad (\text{D.15})$$

Comparando as Eqs. (D.14) e (D.15) podemos perceber que a diferença entre elas se encontra nos parâmetros livres, onde a segunda equação tem a presença apenas do β_3 . Porém, a leitura entre elas se difere, uma vez que o estudo do *traceless transverse tensor* nos leva a ondas gravitacionais longitudinais, e a imposição desse vínculo flexibiliza essa característica da onda gravitacional, podendo aparecer outros modos de polarização.

Prosseguimos com o estudo da parte antissimétrica do processo de linearização, doravante $\mathcal{A}^{\kappa\lambda}$ que é

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\kappa\lambda} = & \frac{\beta_1}{4} (\square A^{\kappa\lambda} - \eta^{\lambda\nu} \partial_\rho \partial_\nu A^{\kappa\rho}) + \frac{\beta_2}{4} (2\eta^{\kappa\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma A^{\rho\lambda} - \eta^{\lambda\nu} \partial_\rho \partial_\nu A^{\rho\kappa} + \square A^{\lambda\kappa}) \\ & + \frac{\beta_3}{2} (\eta^{\lambda\kappa} \partial_\rho \partial_\nu A^{\nu\rho} - \eta^{\rho\kappa} \partial_\rho \partial_\nu A^{\nu\lambda}), \end{aligned}$$

podemos ainda aplicar o calibre harmônico neste momento, $\partial_\nu A^{\nu\rho} = 0$, com isso a equação acima se reduz para

$$\mathcal{A}^{\kappa\lambda} = \left(\frac{\beta_1}{4} - \frac{\beta_2}{4} \right) \square A^{\kappa\lambda},$$

acoplando a parte antissimétrica do tensor energia momento, temos

$$(\beta_1 - \beta_2) \square A^{\kappa\lambda} = -2\chi T^{[\lambda\kappa]}. \quad (\text{D.16})$$

Para compreendermos melhor essa equação, temos que compreender o que seria um tensor de energia momento antissimétrico e podemos ter duas interpretações possíveis. Primeiro caso é entendermos que a definição presente na Eq. (3.3) prevê uma presença de uma antissimetria no tensor de energia momento. Este caso está associado, no contexto da NGR, com a corrente de spin. (HAYASHI; SHIRAFUJI, 1979)

Dado a lei de conservação $\partial_\kappa T^{[\lambda\kappa]} = 0$, temos uma restrição para o tensor de spin, $D^{\mu\lambda\kappa}$. Tomemos, a fórmula de Tetrode expressa por

$$2T^{[\lambda\kappa]} = \partial_\mu D^{\mu\lambda\kappa}, \quad (\text{D.17})$$

a conservação será satisfeita se tivermos que $D^{\mu\lambda\kappa}$ for totalmente antissimétrico. Isso nos

leva a expressar o tensor de spin por

$$D^{\mu\lambda\kappa} = \epsilon^{\mu\lambda\kappa\sigma} J_{5\sigma}, \quad (\text{D.18})$$

que para o caso das partículas de Dirac, o objeto $J_{5\sigma}$ é dado por

$$J_{5\sigma} = -\frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^5 \gamma_\sigma \psi. \quad (\text{D.19})$$

As Eqs. (D.17), (D.18) e (D.19) juntamente com a lei de conservação para o tensor antissimétrico nos mostra que a corrente de spin é conservada.

Porém, essa não é a única interpretação possível para o caso da Eq. (D.16), dado que *a priori* temos uma equação de ondas gravitacionais para um tensor de energia momento antissimétrico. Contudo, há sistemas em que a dependência da lagrangiana de matéria com a tetrada ocorre somente através do tensor métrico. Isso implica em uma situação em que o tensor de energia momento definido na Eq. (3.3), passa a ser construído utilizando o tensor métrico via a regra da cadeia. Assim, a definição do tensor se reescreve com a aparição da definição usual do tensor energia momento proveniente da RG,

$$T_a{}^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta e^a{}_\mu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\rho\sigma}} \frac{\delta g_{\rho\sigma}}{\delta e^a{}_\mu}. \quad (\text{D.20})$$

Com essa nova definição, temos a simetria nesse tensor, portanto, a parte antissimétrica é nula. Em decorrência disso, caímos que a Eq. (D.16) é uma equação de onda sem fonte. A discussão para essa contenda se divide em duas possíveis respostas. A primeira delas é a mais intuitiva que é a inexistência da parte antissimétrica da onda, ou seja, $A^{\kappa\lambda} = 0$, porém, há outro caminho, que se dá pela imposição dos parâmetros livres, β_1 e β_2 , terem à igualdade entre si. Essa conclusão nos levaria a uma redução de parâmetros livres.

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO			
1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO TD	2. DATA 30 de junho de 2025	3. REGISTRO Nº DCTA/ITA/ TD-021/2025	4. Nº DE PÁGINAS 77
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: Objetos astrofísicos na gravidade teleparalela modificada.			
6. AUTOR(ES): Silas Guida Vilhena			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: Gravitação Alternativa; Objetos Compactos; Ondas Gravitacionais			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Gravitação; Estrelas de nêutrons; Ondas gravitacionais; Teoria da relatividade; Astrofísica; Física nuclear; Física.			
10. APRESENTAÇÃO: (X) Nacional () Internacional ITA, São José dos Campos. Curso de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Física Nuclear. Orientador: Prof. Dr. Pedro José Pompeia; coorientadores: Profa. Dra. Mariana Dutra da Rosa Lourenço; Prof. Dr. Sérgio José Barbosa Duarte. Defesa em 16/05/2025. Publicada em 2025.			
11. RESUMO: Este trabalho propõe investigar objetos compactos na gravidade teleparalela modificada. Esta gravidade consiste na mudança da lagrangiana do Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral acoplando parâmetros livres nos invariantes quadráticos que compõem a lagrangiana. A partir das equações de campo encontradas pela variação da ação, verificamos como tais parâmetros modificam e impactam objetos e eventos astrofísicos, como estrelas de nêutrons e ondas gravitacionais.			
12. GRAU DE SIGILO: (X) OSTENSIVO () RESERVADO () SECRETO			