

Tese apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Física Nuclear.

Elisa Maria Bernardo Assencio

**TEORIAS DA GRAVITAÇÃO DE ORDEM SUPERIOR
NO CONTEXTO TELEPARALELO**

Tese aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:

Prof. Dr. Pedro José Pompeia

Orientador

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP - Brasil
2024

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Divisão de Informação e Documentação

Assencio, Elisa Maria Bernardo
Teorias da gravitação de ordem superior no contexto teleparalelo / Elisa Maria Bernardo Assencio.
São José dos Campos, 2024.
94f.

Tese de Doutorado – Curso de Física. Área de Física Nuclear – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2024. Orientador: Prof. Dr. Pedro José Pompeia.

1. Gravitação. 2. Espaço-tempo. 3. Geometria. 4. Teoria de gauge. 5. Equações Lineares. 6. Teoria da relatividade. 7. Física nuclear. 8. Física. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Título.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ASSENCIO, Elisa Maria Bernardo. **Teorias da gravitação de ordem superior no contexto teleparalelo**. 2024. 94f. Tese de Doutorado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DA AUTORA: Elisa Maria Bernardo Assencio
TÍTULO DO TRABALHO: Teorias da gravitação de ordem superior no contexto teleparalelo.
TIPO DO TRABALHO/ANO: Tese / 2024

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta tese e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. A autora reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese pode ser reproduzida sem a autorização da autora.

Elisa Maria Bernardo Assencio
Avenida Tivoli, 207
12.245-230 – São José dos Campos–SP

TEORIAS DA GRAVITAÇÃO DE ORDEM SUPERIOR NO CONTEXTO TELEPARALELO

Elisa Maria Bernardo Assencio

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr.	César Henrique Lenzi	Presidente	-	ITA
Prof. Dr.	Pedro José Pompeia	Orientador	-	ITA
Prof. Dr.	Wayne Leonardo Silva de Paula	Membro Interno	-	ITA
Prof. Dr.	Samuel Augusto Wainer	Membro Interno	-	ITA
Dr.	Bruto Max Pimentel Escobar	Membro Externo	-	IFT-UNESP
Dr.	Rodrigo Rocha Cuzinatto	Membro Externo	-	UNIFAL

A àqueles que ofereceram seu apoio, inspiração e encorajamento ao longo desta jornada.

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a todos que contribuíram para a realização deste trabalho.

Primeiramente, agradeço imensamente à minha família pelo apoio e encorajamento ao longo de toda a minha jornada acadêmica.

Aos meus amigos, com os quais compartilhei este caminho, um agradecimento do coração pela amizade constante e pelo suporte em momentos difíceis. Os momentos de descontração, com piadas tolas e café, foram essenciais para manter minha motivação e bem-estar.

Com muito carinho, agradeço também ao meu namorado, Lucas, cuja presença e apoio foram uma fonte constante de força e inspiração. Graças a sua companhia e seu incentivo constante pude me manter firme e acreditando em mim.

Um agradecimento sincero aos professores do Programa de Pós-Graduação em Física do ITA, cujo apoio, orientação e compartilhamento de conhecimentos foram fundamentais para a realização deste trabalho. Em especial, agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Pedro José Pompeia, pela sua dedicação, paciência e comprometimento ao longo de toda a pesquisa.

Agradeço também, aos funcionários do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, que não falharam ao oferecerem todo suporte administrativo e logístico necessário, tornando possível o desenvolvimento deste trabalho.

Por último, mas não menos importante, gostaria de agradecer ao meu cachorro Planck. Sua companhia leal e amor incondicional foram uma fonte constante de alegria e conforto durante os momentos intensos de pesquisa.

A todos, meu sincero obrigado. Este trabalho é o reflexo do apoio e carinho que recebi de cada um de vocês.

Este trabalho contou com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES), sob o Código de Financiamento 001, ao qual sou igualmente grata.

“Na ausência do outro, o homem não se constrói homem.”
— LEV SEMIONOVITCH VIGOTSKI

Resumo

Nesta tese, analisamos duas abordagens distintas da gravidade modificada no contexto teleparalelo. Primeiramente, investigamos extensões de segunda ordem dessas teorias como teorias de *gauge* para o grupo de translação, utilizando a abordagem de Utiyama. Demonstramos que é possível incluir termos de derivada de segunda ordem na Lagrangiana do potencial de *gauge*, preservando a invariância de *gauge* e difeomorfismo. Introduzimos um novo objeto necessário para essa preservação, a partir do qual obtemos quatorze invariantes independentes. Esses invariantes levam a equações lineares na quarta derivada do campo das tetradas. Analisamos um exemplo específico com um desses invariantes e avaliamos o limite de campo fraco, mostrando que o potencial gravitacional efetivo combina os potenciais de Newton e Yukawa. Em seguida, no contexto da gravidade teleparalela modificada, analisamos a equivalência entre teorias escalares-multitensoriais e teorias geométricas do tipo $f(T, B, \nabla_\mu T, \nabla_\mu B)$, onde T e B representam, respectivamente, o escalar de torção e o escalar do termo de superfície. Realizamos essa análise nos *frames* de Jordan e Einstein. No *frame* de Einstein, discutimos dois casos distintos, focando no papel dos termos de superfície. Verificamos a equivalência entre as abordagens geométrica e escalare-multitensoriais para sistemas regulares, que apresentam uma matriz Hessiana regular. Apresentamos um exemplo e realizamos a análise do problema de Cauchy para as diferentes abordagens.

Abstract

In this thesis, we analyze two distinct approaches to modified gravity in the teleparallel context. First, we investigate second-order extensions of these theories as gauge theories for the translation group, using Utiyama's approach. We demonstrate that it is possible to include second-order derivative terms in the Lagrangian of the gauge potential while preserving gauge and diffeomorphism invariance. We introduce a new object necessary for this preservation, from which we obtain fourteen independent invariants. These invariants lead to equations that are linear in the fourth derivative of the tetrad field. We analyze a specific example with one of these invariants and evaluate the weak field limit, showing that the effective gravitational potential combines the Newton and Yukawa potentials. Next, in the context of modified teleparallel gravity, we analyze the equivalence between scalar-multi-tensor theories and geometrical theories of the type $f(T, B, \nabla_\mu T, \nabla_\mu B)$, where T and B represent, respectively, the torsion scalar and the boundary term scalar. We conduct this analysis in the Jordan and Einstein frames. In the Einstein frame, we discuss two distinct cases, focusing on the role of boundary terms. We verify the equivalence between the geometrical and scalar-multi-tensor approaches for regular systems, which present a regular Hessian matrix. We present an example and perform the analysis of the Cauchy problem for the different approaches.

Lista de Figuras

FIGURA 2.1 – Alguns exemplos de variedades diferenciáveis emergentes da variedade afim	20
--	----

Lista de Abreviaturas e Siglas

GR	<i>General Relativity</i>
Λ CDM	<i>Lambda Cold Dark Matter</i>
TEGR	<i>Teleparallel Equivalent General Relativity</i>
dof	<i>Degrees of freedom</i>

Lista de Símbolos

Φ	Campo escalar
$g_{\mu\nu}$	Componentes do tensor métrico
g	Determinante do tensor métrico
$\{\overset{\alpha}{\mu\nu}\}$	Símbolo de Christoffel
$N_{\mu\nu}^{\alpha}$	Tensor de deformidade
$Q_{\alpha\mu\nu}$	Tensor de não-metricidade
$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$	Conexão do espaço-tempo
$R_{\beta\nu\mu}^{\alpha}$	Tensor de curvatura de Riemann
$R_{\nu\mu}$	Tensor de curvatura de Ricci
R	Escalar de curvatura
$T_{\nu\mu}^{\rho}$	Tensor de Torção
T	Escalar de torção
$\Sigma_{\nu\mu}^{\alpha}$	Superpotencial de torção
e_a^{μ}	Tetradas não holônoma
h_a^{μ}	Tetradas holônoma
e	Determinante da tetradas
e_{μ}	Base geral para o espaço-tempo
d^{μ}	Base dual relacionada às coordenadas x^{μ}
∂_{μ}	Base canônica relacionada às coordenadas x^{μ}
∇_{ν}	Símbolo de derivada covariante do espaço-tempo
$\overset{\circ}{\nabla}_{\nu}$	Símbolo de derivada covariante do grupo de simetria
D_{μ}	Símbolo de derivada covariante do grupo de translação

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
2	GRAVITAÇÃO TELEPARELELA E A VARIEDADE DE WEITZENBÖCK	19
2.1	Gravitação Teleparelela	19
2.2	Formalismo de tetradas	21
2.3	Geometrida da Variedade de Weitzenböck	24
2.3.1	Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral na Variedade de Weitzenböck	25
3	TELEPARALELISMO COMO UMA TEORIA DE GAUGE DE SEGUNDA ORDEM	28
3.1	A abordagem de Utiyama	28
3.1.1	Lagrangiana do campo de matéria	29
3.1.2	Lagrangiana do campo livre	32
3.2	O Grupo de translação	35
3.3	Lagrangiana do campo livre para o grupo de translação	39
3.3.1	Lagrangianos Invariantes Quadráticos	44
3.3.2	Exemplo	48
3.4	Considerações Finais	50
4	ABORDAGEM ESCALAR-TENSORIAL PARA A GRAVIDADE TELE- PARALELA $f(T, B, \nabla_\mu T, \nabla_\mu B)$	52
4.1	Teorias teleparalelas de gravidade $f(T)$	53
4.1.1	O Problema de Cauchy	53

4.1.2	<i>Frame</i> de Jordan	57
4.1.3	<i>Frame</i> de Einstein	59
4.2	Teorias teleparalelas de gravidade $f(T, B, \nabla_\mu T, \nabla_\mu B)$	61
4.2.1	<i>Frame</i> geométrico	61
4.2.2	<i>Frame</i> de Jordan	63
4.2.3	O caso particular $f = f(\alpha T + \beta B, \nabla_\mu(\alpha T + \beta B))$	66
4.2.4	<i>Frame</i> de Einstein	68
4.3	Exemplo	72
4.3.1	<i>Frame</i> Geométrico	73
4.3.2	<i>Frame</i> de Jordan	74
4.3.3	<i>Frame</i> de Einstein	78
4.4	Considerações Finais	82
5	CONCLUSÃO	84
	REFERÊNCIAS	86

1 Introdução

Sabemos que, mesmo diante de uma teoria da gravitação tão elegante quanto a Relatividade Geral de Einstein (GR), existem ainda questões tanto teóricas quanto fenomenológicas, como a expansão acelerada do Universo, as curvas de rotação de galáxias e a quantização da GR que carecem de respostas mais conclusivas (BERTONE; HOOPER, 2018; CALDWELL; KAMIONKOWSKI, 2009; ASTIER *et al.*, 2006; RIESS *et al.*, 2004; STELLE, 1977). A busca por essas respostas tem levado a pesquisa nessa área por alguns caminhos.

Dado o sucesso de suas previsões ao longo dos anos junto a recente detecção de ondas gravitacionais e resultados em observação de buracos negros, parte da comunidade científica propõe manter a formulação da GR e reconsiderar apenas o conteúdo de matéria. Uma das principais propostas em relação a conteúdo de matéria é a conjectura do “setor escuro”, constituído por matéria e energia escura, ou seja, matéria não ordinária, que juntos devem corresponder a 95% do conteúdo de energia-matéria do Universo (SLOSAR *et al.*, 2019; HUTERER; SHAFER, 2017; LANGLOIS, 2019; KASE; TSUJIKAWA, 2019; FINCH; SAID, 2018; MOTTA *et al.*, 2021; RAHAMAN *et al.*, 2014; BERTONE; TAIT, 2018; IOCCO *et al.*, 2015; CLOWE *et al.*, 2006; BRAX, 2017). Dentro deste contexto o modelo Λ CDM (constante cosmológica e matéria escura fria) é o atual modelo vigente. Nesta proposta, acredita-se que a matéria escura permeia o universo, concentrando-se em torno de galáxias e aglomerados, o que explicaria fenômenos como as curvas de rotação. Enquanto isso, a energia escura assume o papel de agente cósmico, que possui uma pressão negativa e impulsiona a aceleração do Universo. Uma característica um pouco questionável a respeito da matéria e energia escura é que estes entes mesmo atuando como fonte gravitacional, supostamente não interageriam com a radiação o que dificulta a sua detecção. De fato, apesar dos esforços dos físicos de partículas, os únicos indicadores de sua potencial existência estão confinados apenas aos efeitos gravitacionais. Além dessa questão, o modelo também traz consigo alguns problemas que precisam de maior atenção (FREEDMAN, 2021; MELIA, 2023; LANGE *et al.*, 2019). Outro ponto importante a se mencionar sobre o modelo Λ CDM é que, do ponto de vista teórico, este não apresenta soluções para algumas questões como o aparecimento de singularidades no espaço-tempo da GR, ou a dificuldade na renormalização da gravitação.

Constatações como as citadas levantam a questão se esses efeitos gravitacionais não

poderiam ser explicados por modificações na teoria subjacente da gravidade, ao invés de considerar tais entidades desconhecidas. Nessa perspectiva, surge a proposta de modificar a gravidade alterando o conteúdo geométrico das equações de campo. Nesse tipo de abordagem há uma gama de possibilidades para modificações. Uma dessas possibilidades é manter a variedade subjacente da Relatividade Geral (a variedade de Riemann), onde o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é o campo fundamental, e modificar o Lagrangiano gravitacional. Essas modificações vão desde considerar uma dependência funcional do Lagrangiano com os tensores de Riemann, Ricci ou Weyl, e eventualmente suas derivadas até a uma extensão mínima como substituir o escalar de curvatura R por uma função $f(R)$ (NOJIRI; ODINTSOV, 2011; NOJIRI *et al.*, 2017; CAPOZZIELLO; LAURENTIS, 2011; AFONSO *et al.*, 2018; ABRAMO *et al.*, 2010; SOTIRIOU; FARAONI, 2010; STAROBINSKY, 1980; SHAHID-SALESS, 1987; SOTIRIOU; LIBERATI, 2007; OLMO, 2011; PUCHEU *et al.*, 2016a; PUCHEU *et al.*, 2016b; NOVELLO *et al.*, 2013; BITTENCOURT *et al.*, 2014; BITTENCOURT *et al.*, 2016; BERGLIAFFA, 2006; BERGLIAFFA; NUNES, 2011; FABRIS *et al.*, 2012; RODRIGUES *et al.*, 2016; MIRANDA *et al.*, 2017; LOPES *et al.*, 2018; RINALDI *et al.*, 2014; CALZÀ *et al.*, 2018; BISWAS; TALAGANIS, 2015; BISWAS *et al.*, 2017; MODESTO *et al.*, 2018; SHAPIRO, 2015; ACCIOLY *et al.*, 2017; MODESTO; SHAPIRO, 2016; SALLES; SHAPIRO, 2014; DECANINI; FOLLACCI, 2007; CUZINATTO *et al.*, 2008; CUZINATTO *et al.*, 2011; CUZINATTO *et al.*, 2015; WANDS, 1994; CUZINATTO *et al.*, 2016; CUZINATTO *et al.*, 2019; CUZINATTO *et al.*, 2019; CASTELLANOS *et al.*, 2018; MYRZAKULOV *et al.*, 2013).

Além das possibilidades citadas podemos também construir uma teoria em uma variedade não-riemanniana. Vários modelos foram analisados na variedade de Riemann-Cartan (NASCIMENTO *et al.*, 2022; BENISTY *et al.*, 2018; ALDROVANDI; PEREIRA, 2012; SABBATA; GASPERINI, 1986), na variedade de Lyra e outros (CUZINATTO *et al.*, 2021; CASANA *et al.*, 2007). Esta é a linha de raciocínio que exploraremos aqui. Em particular, estamos interessados em analisar teorias construídas na variedade de Weitzenböck, as chamadas teorias teleparalelas da gravidade, onde a tetrada e^a_μ desempenha o papel de campo fundamental.

Na variedade de Weitzenböck, a curvatura é nula e a gravitação se manifesta por meio da torção do espaço-tempo. A teoria mais conhecida na variedade de Weitzenböck é a Equivalente Teleparalela da Relatividade Geral (TEGR), que, como o nome sugere, é equivalente em muitos aspectos à GR (ARCOS; PEREIRA, 2004; ALDROVANDI; PEREIRA, 2012; KRŠŠÁK *et al.*, 2019; HAYASHI; SHIRAFUJI, 1979a; MALUF, 1994; MALUF; ROCHA-NETO, 1999; MALUF; ROCHA-NETO, 2001; PIMENTEL *et al.*, 2005). Enquanto na GR o argumento da integral de ação é o escalar de curvatura, noTEGR o argumento é o escalar de torção (T), um objeto que é definido como uma combinação linear de todos os invariantes quadráticos independentes construídos com o tensor de torção. De maneira semelhante ao que é feito na variedade de Riemann, também são propostas teorias modificadas com a substituição do argumento da ação integral por uma função arbitrária da torção esca-

lar, $T \rightarrow f(T)$ (TAMANINI; BOEHMER, 2012; KRŠŠÁK *et al.*, 2019; KRŠŠÁK; SARIDAKIS, 2016; TAMANINI; BÖHMER, 2015; VILHENA *et al.*, 2023). Embora exista equivalência entre TEGR e a GR, o mesmo não acontece quando consideramos extensões como $f(R)$ e $f(T)$. A razão reside no fato de que a equivalência entre GR e TEGR é verificada por meio de uma comparação das respectivas Lagrangianas, a saber, $R = -T + B$, que diferem por um termo de superfície (B), que por sua vez é negligenciado ao considerarmos condições iniciais específicas, como a variação nula do campo na superfície. No entanto, esse termo de superfície carrega as derivadas de segunda ordem do campo de tetrada. Como consequência, enquanto em teorias $f(R)$ são obtidas equações de quarta ordem, em teorias $f(T)$ apenas equações de campo de segunda ordem emergem (KRŠŠÁK; SARIDAKIS, 2016).

Dito isso, além da formulação do ponto de vista puramente geométrico, podemos abordar teorias gravitacionais como teorias de campo, na qual a presença de termos de derivadas superiores é notável, pois podem ser usados para regularizar algumas divergências que aparecem nas versões quânticas das teorias. Eles são de particular interesse no que diz respeito à gravidade quântica, especialmente no contexto de teorias efetivas. A ausência de derivadas superiores nas extensões $f(T)$ nos motiva a procurar outras modificações do TEGR envolvendo a segunda derivada da tetrada, para que toda a maquinaria das teorias de ordem superior e efetivas também possa ser implementada na gravidade teleparalela.

Uma tentativa nesse sentido foi feita por teorias $f(T, B)$ (WRIGHT, 2016; BAHAMONDE *et al.*, 2020; FARRUGIA *et al.*, 2020). Uma consideração importante ao propor modificações ao TEGR é o fato de que a teoria teleparalela pode ser considerada como uma teoria de gauge para o grupo de translação.

A abordagem de gauge para uma teoria de segunda ordem geral foi explorada em (CUZINATTO *et al.*, 2007) e sua aplicação ao grupo de Lorentz foi feita em (CUZINATTO *et al.*, 2011). Em ambos os casos, os cálculos foram baseados na abordagem de Utiyama para a teoria de gauge (UTIYAMA, 1956a). Uma grande vantagem dessa metodologia reside no fato de que as estruturas invariantes/covariantes de gauge que são usadas na teoria de gauge (por exemplo, derivada covariante, força do campo) emergem naturalmente como soluções de um conjunto de equações que a Lagrangiana deve obedecer para garantir a invariância de gauge da teoria. Dessa forma, no procedimento de Utiyama, as estruturas não são adivinhadas - elas são derivadas de equações. A partir dessa perspectiva, entendemos que a abordagem de Utiyama é uma das ferramentas mais apropriadas a serem usadas ao lidar com qualquer tipo de extensão de teorias de gauge.

Retomando a ordem da teoria, fica claro que, para formular uma teoria de máxima generalidade, torna-se imperativo considerar todos os invariantes relevantes. Na verdade, B constitui um invariante de ordem superior nas derivadas dos campos de tetradas, e permanece independente das derivadas da torção escalar T . Tipicamente, como dito

anteriormente, o significado físico de B é negligenciado quando escolhemos ignorá-lo com base em condições iniciais específicas, como a variação nula do campo na superfície, porém essas condições nem sempre serão verdadeiras, como indicado em (OSHITA; WU, 2017).

Uma outra questão importante em se mencionar em teorias de teleparalelismo modificadas é a determinação de seus graus de liberdade dinâmicos (d.d.o.f.). Como discutido em Ref. (FERRARO; GUZMÁN, 2018b; BLAGOJEVIĆ; NESTER, 2020; GOLOVNEV; GUZMÁN, 2021; GOLOVNEV; GUZMÁN, 2020), existem diferentes pontos de vista sobre essa questão, mostrando que não é uma tarefa trivial devido à invariância de Lorentz global existente nessas teorias. A análise dos d.d.o.f. pode ser feita por diferentes abordagens, por exemplo, por meio da análise do problema de Cauchy (MORALES; SANTILLÁN, 2019; SABBATA; GASPERINI, 1986; POMPEIA, 2021), pela determinação da estrutura hamiltoniana e seus vínculos (MALUF, 1994; MALUF; ROCHA-NETO, 1999; MALUF; ROCHA-NETO, 2001; BLAGOJEVIĆ; NIKOLIĆ, 2000; BLAGOJEVIĆ; NESTER, 2020; FERRARO; GUZMÁN, 2018a; FERRARO; GUZMÁN, 2018b), via formalismo de Hamilton-Jacobi (PIMENTEL *et al.*, 2003; PIMENTEL *et al.*, 2005; BERTIN *et al.*, 2010; BERTIN *et al.*, 2008) e assim por diante. Em qualquer uma dessas abordagens, reformular a teoria nos *frames* de Jordan e Einstein pode ser muito útil.

Teorias nos *frames* de Jordan e Einstein pertencem à categoria de teorias escalares-tensoriais, que podem ser interpretadas como variantes das teorias de Brans-Dicke. Essa extensão surge da inclusão de campos auxiliares, expandindo o conceito original da teoria de Brans-Dicke. O uso desse tipo de teoria pode resultar em uma análise simplificada dos d.d.o.f. e torná-la mais compreensível. Isso ocorre porque na transição do referencial geométrico para os referenciais de Jordan e Einstein, são introduzidas variáveis auxiliares, de modo que a ordem da derivada da teoria possa ser reduzida. Claro, há um preço a ser pago: Os graus de liberdade auxiliares exigem equações de campo próprias - o resultado final é um conjunto de equações de campo acopladas que são em número maior do que aquelas no *frame* geométrico (CUZINATTO *et al.*, 2016; CUZINATTO *et al.*, 2019; POMPEIA, 2021). Mas essa não é a única questão, a transição do *frame* de Jordan para o *frame* de Einstein no espaço-tempo de Weitzenböck é realizada por meio de uma transformação conforme do campo de tetrada. Neste procedimento, a teoria tipo escalar-tensorial obtida no *frame* de Jordan é mapeada em uma teoria tipo TEGR com um tensor de energia-momento efetivo no *frame* de Einstein. A estrutura das equações de campo em cada caso é diferente e isso é refletido na dinâmica dos campos em cada abordagem, o que lança dúvidas sobre a existência da transformação inversa. Isso levanta a questão da (in)equivalência entre os dois *frames*, em particular, sobre qual deles é o *frame* “físico”(RINALDI, 2018; BHADRA *et al.*, 2007; YANG, 2011; HOHMANN, 2018; WRIGHT, 2016). Já adiantamos que, aqui, não fornecemos uma resposta para essa pergunta, mas realizamos a análise em ambos os *frames* em ordem e apontamos as características de cada um deles.

Na presente tese apresentamos duas propostas dentro do estudo das teorias teleparalelas. A primeira é a proposição das teorias teleparalelas de ordem superior como teorias de *gauge*. E a segunda, é o estudo das versões escalares-tensoriais.

Para isso, no capítulo 2, estudamos as teorias teleparalelas na variedade de Weitzenböck junto ao equivalente teleparalelo da Relatividade Geral e também o campo fundamental destas teorias, a tetrada. No capítulo 3, apresentamos a formulação de uma teoria de gauge através da metodologia de Utiyama, e como essa metodologia é aplicada ao grupo de translação. Além disso, assumimos que a Lagrangiana do campo livre não possui dependência apenas no campo de gauge e sua primeira derivada, como proposto inicialmente por Utiyama, o que nos conduz a um número de invariantes de ordem superior. Veremos um exemplo destes invariantes sendo aplicado. No capítulo 4, abordamos as teorias escalares-tensoriais no contexto dos *frames* de Jordan e Einstein para as teorias Teleparalelas de ordem superior. No capítulo 5, apresentamos as considerações finais à respeito do trabalho.

2 Gravitação Teleparalela e a Variedade de Weitzenböck

Neste capítulo nosso principal objetivo é estudar as teorias teleparalelas da gravitação formuladas na variedade de Weitzenböck. Para isto, na seção 2.1, apresentamos as noções básicas sobre variedades e como a escolha de uma variedade implica em uma teoria de gravitação diferente. Apresentamos também o formalismo de tetradas, campo fundamental utilizado em nossa variedade de interesse. Na seção 2.3 abordamos a gravitação teleparalela na variedade de Weitzenböck junto a construção de um equivalente à Relatividade Geral nesta variedade.

2.1 Gravitação Teleparalela

Ao formularmos uma teoria de gravitação, do ponto de vista geométrico, é necessário escolhermos o palco no qual esta será desenvolvida. O palco em questão se trata de uma variedade diferenciável \mathcal{M} , munida de uma métrica \mathbf{g} , com componentes $g_{\mu\nu}$, e uma conexão $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$. Propriedades como, curvatura, torção e condição de metricidade são todas propriedades da conexão. Veja,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = N_{\mu\nu}^{\alpha} + \{\alpha_{\mu\nu}\} + K_{\mu\nu}^{\alpha}. \quad (2.1)$$

Na equação acima podemos observar a representação irreduzível da conexão, os objetos que aparecem em (2.1) são nomeados tensor de deformidade, $N_{\mu\nu}^{\alpha}$, tensor de contorção, $K_{\mu\nu}^{\alpha}$, e símbolo de Christoffel, $\{\alpha_{\mu\nu}\}$. Por definição

$$\begin{cases} N_{\mu\nu}^{\alpha} \equiv \frac{1}{2} (Q_{\mu\nu}^{\alpha} - Q_{\mu\nu}^{\alpha} - Q_{\nu\mu}^{\alpha}), \\ \{\alpha_{\mu\nu}\} \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_{\mu} g_{\nu\beta} + \partial_{\nu} g_{\beta\mu} - \partial_{\beta} g_{\mu\nu}), \\ K_{\mu\nu}^{\alpha} \equiv \frac{1}{2} [T_{\nu\mu}^{\alpha} - T_{\nu\mu}^{\alpha} - T_{\mu\nu}^{\alpha}], \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} Q_{\alpha\mu\nu} = \nabla_{\alpha}g_{\mu\nu}, \\ T^{\rho}_{\nu\mu} = \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}, \end{cases}$$

são nomeados tensor de não-metricidade e tensor de torção. Como pode ser visto, $Q_{\alpha\mu\nu}$ está diretamente relacionado a condição de metricidade, enquanto $T^{\rho}_{\nu\mu}$ sendo a torção, é definido pela parte antissimétrica da conexão. A variedade que preserva todas estas propriedades é nomeada “variedade afim”.

Impor nulidade a uma das propriedades citadas nos conduz a geometrias distintas, por exemplo, na variedade Riemanniana a conexão do espaço-tempo é equivalente ao símbolo de Christoffel, $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \{\rho_{\mu\nu}\}$, uma vez que é válida a condição de metricidade nula e não há torção, e isto torna a conexão simétrica. No entanto, independentemente da conexão ser simétrica ou não, a curvatura do espaço-tempo é definida como

$$R_{\nu\rho\mu}^{\lambda} = \partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} - \partial_{\rho}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} + \Gamma^{\sigma}_{\rho\mu}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma},$$

e é importante ter em mente que impor curvatura nula não é o mesmo que anular o símbolo de Christoffel; veremos isso melhor mais a frente. Alguns outros exemplos de variedades podem ser vistos na figura 2.1.

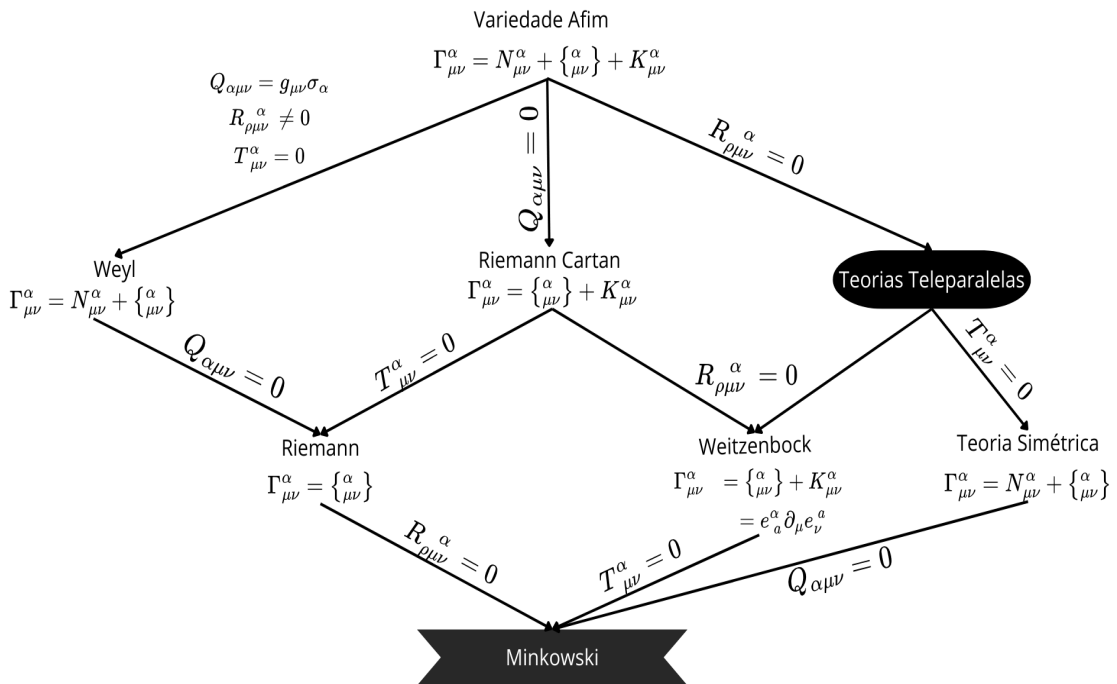


FIGURA 2.1 – Alguns exemplos de variedades diferenciáveis emergentes da variedade afim

Em algumas variedades diferenciáveis, a geometria é comumente estudada através de um outro campo, nomeado campo de tetradas e^a_{μ} e por isso faremos uma apresentação

deste campo. Mas antes, gostaríamos de salientar que existe uma análise matemática muito mais criteriosa, na qual deve-se levar em conta a topologia global da variedade bem como algumas condições específicas (ISHAM, 1978). No entanto, para o que propomos aqui, consideraremos que nossa variedade obedece aos requisitos mencionados.

2.2 Formalismo de tetradas

Como mencionado anteriormente, algumas variedades têm como campo fundamental a tetrada. O formalismo de tetradas foi introduzido por Einstein (EINSTEIN, 1928), em 1928, na tentativa de unificar gravitação e eletromagnetismo. De forma genérica, podemos dizer que o campo de tetradas é um campo que conecta dois espaços. Contudo, a aplicação desse formalismo mostrou-se útil não apenas para conectar espaços distintos, mas também para descrever objetos como os espinores em espaços curvos (O'RAIFEARTAIGH, 1997; WIGNER, 1929; WEYL, 1929). A seguir, fazemos uma apresentação um pouco mais detalhada do formalismo.

Assumimos que um espaço-tempo genérico é uma variedade diferenciável de 4 dimensões, indicada como $\mathbb{R}^{3,1}$. E que, o espaço tangente definido em cada ponto do espaço-tempo é um espaço-tempo de Minkowski, cuja métrica de Lorentz assume a assinatura

$$\eta_{ab} = \text{diag}(-, +, +, +). \quad (2.2)$$

Para que não haja confusão entre os espaços, escolhemos os índices latinos para que estejam relacionados às coordenadas do espaço tangente (com exceção de i, j e k que serão reservados para índices espaciais), enquanto os índices gregos para que estejam relacionados ao espaço-tempo. Conseqüentemente, as coordenadas do espaço-tempo serão denotadas por x^μ , enquanto as coordenadas do espaço tangente serão denotadas por x^a . Tais sistemas de coordenadas determinam, em seus domínios, bases locais para campos vetoriais,

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \text{ e } \partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a}, \quad (2.3)$$

e campos covetoriais,

$$dx^\mu \text{ e } dx^a. \quad (2.4)$$

Essas bases são duais, de forma que

$$dx^\mu \partial_\nu = \delta_\nu^\mu \text{ e } dx^a \partial_b = \delta_b^a. \quad (2.5)$$

Nos respectivos domínios de definição, qualquer vetor ou covetor pode ser expresso em termos dessas bases, que além disso podem ser estendidas pelo produto direto para

constituir bases para campos tensoriais gerais de qualquer ordem, como veremos mais adiante.

Considerando as métricas \mathbf{g} (espaço-tempo) e Minkowski η (espaço tangente), com componentes $g_{\alpha\beta}$ e η_{ab} em uma base dual holônoma,

$$\mathbf{g} = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad \eta = \eta_{ab} dx^a dx^b, \quad (2.6)$$

é possível relacionar \mathbf{g} e η através de uma base linear,

$$\eta_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta, \quad (2.7)$$

a qual denominamos tetradas,

$$e_a = e_a^\mu \partial_\mu, \quad e^a = e^a_\mu dx^\mu. \quad (2.8)$$

Segundo o teorema de Helmholtz, podemos decompor este campo em uma parte holônoma e uma parte não holônoma. A parte não holônoma da tetrada é parte que carrega a gravitação. Enquanto a parte holônoma também conhecida como tetrada trivial h_b^β pode ser entendida como uma base de mudança de coordenadas. Veja, se o espaço-tempo e o tangente são ambos definidos como um espaço-tempo de Minkowski descritos por uma métrica η , com componentes $\eta_{\alpha\beta}$ e η_{ab} , podemos relacionar estes dois espaços através da expressão

$$\eta_{ab} = \eta_{\alpha\beta} h_a^\alpha h_b^\beta. \quad (2.9)$$

Pela relação acima podemos ver que, para este caso, $e^b_\nu \rightarrow h^b_\nu$.

Como estamos falando em uma teoria de gravitação iremos nos ater a tetrada não trivial e^b_ν . Notem que ao fixarmos o índice grego μ , a tetrada e^a_μ representará um vetor sob transformações de Lorentz no espaço tangente. Dessa forma, podemos utilizar a métrica de Minkowski para levantar e abaixar os índices latinos. No entanto, se fixarmos o índice latino, a , teremos um vetor sob transformações gerais de coordenadas no espaço-tempo de mundo. Além disso, por constituir uma base desta variedade, a tetrada pode ser utilizada para decompor vetores e tensores, como podemos ver no exemplo abaixo.

Decomposição de um tensor de ordem n ,

$$T_{\alpha\beta\dots\sigma} = [T_{\mu\nu\dots\rho} e_a^\mu e_b^\nu \dots e_n^\rho] e_\alpha^a e_\beta^b \dots e_\nu^n. \quad (2.10)$$

Da equação acima sob a validade de (2.9), segue a relação

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{ab} e_\alpha^a e_\beta^b. \quad (2.11)$$

Dos resultados das Eqs. (2.9) e (2.11) fica claro que, ao escolhermos um determinado conjunto de tetradas, determinamos univocamente uma métrica. No entanto, o contrário não é possível, uma vez que a determinação da tetrada também está relacionada às transformações de Lorentz no espaço tangente (O'RAIFEARTAIGH, 1997; ISHAM, 1978; ALDROVANDI *et al.*, 2003).

Voltando para (2.10), ainda podemos extrair algumas informações desta equação. Note que a propriedade da tetrada de representar um invariante por transformações locais de Lorentz ou transformações gerais de coordenadas dependendo do índice fixado, se estende a objetos do espaço-tempo de mundo, uma vez que são contraídos com tetradas. Vejamos, o objeto a seguir

$$T_{ab\dots n} = T_{\mu\nu\dots\rho} e_a^\mu e_b^\nu \dots e_n^\rho,$$

é um escalar sob transformações gerais de coordenadas no espaço-tempo, mas passa a ser um tensor sob transformações de Lorentz no espaço tangente. O contrário pode ser obtido pela ortogonalidade das tetradas

$$T_{\mu\nu\dots\rho} = T_{ab\dots n} e_\mu^a e_\nu^b \dots e_\rho^n.$$

A partir dos referidos exemplos fica evidenciada a propriedade da tetrada em converter objetos do espaço-tempo para o espaço tangente, e vice-versa. Outra informação importante é que um escalar sob transformações gerais de coordenadas também será um escalar sob transformações de Lorentz:

$$A_\mu B^\mu = e_\mu^a e^{\mu b} A_a B_b = A_a B^a.$$

No entanto, se considerarmos a derivada espaço-temporal de mundo de um vetor de Lorentz no tangente, $\partial_\mu A^a(x)$, e realizarmos uma transformação de Lorentz sobre o referido objeto, $(\partial_\mu A^a(x))'$, este não será um vetor sob transformações de Lorentz. Mas por que isto acontece se o índice grego faz referência apenas à variedade espaço-temporal? Bom, a resposta é um tanto quanto simples, isto se deve ao fato da transformação de Lorentz depender do ponto do espaço-tempo. Dessa forma, faz-se necessária uma derivada no espaço-tempo que seja covariante por transformações de Lorentz no espaço tangente. Assim como a derivada covariante para o espaço-tempo de mundo, a derivada covariante para o espaço tangente deve conter um termo de conexão, como pode ser visto na expressão abaixo

$$\mathcal{D}_\mu A^a(x) = \partial_\mu A^a(x) + \bar{\omega}_{\mu b}^a(x) A^b(x). \quad (2.12)$$

Esta conexão, nomeada conexão de spin deve possuir a seguinte lei de transformação

$$\bar{\omega}_{\mu b'}^{a'} = \Lambda_a^{a'}(x) \Lambda_{b'}^b(x) \bar{\omega}_{\mu b}^a - \Lambda_{b'}^b(x) \left(\partial_\mu \Lambda_b^{a'}(x) \right), \quad (2.13)$$

que garantirá a covariância desta derivada. Para um objeto que representa um vetor tanto no espaço-tempo de mundo quanto no espaço tangente, ou seja, possui índices gregos e latinos, A^a_μ . É necessário considerarmos uma derivada covariante total que leve em conta não apenas as variações devido às transformações de Lorentz no espaço tangente, mas também as ocasionadas pelo transporte paralelo no espaço-tempo de mundo. Assim, uma derivada covariante total deve incorporar ambas as conexões,

$$\hat{\nabla}_\mu A^a_\nu(x) = \partial_\mu A^a_\nu(x) - \Gamma_{\mu\nu}^\rho A^a_\rho + \bar{\omega}_{\mu b}^a(x) A^b_\nu(x).$$

Note que, a derivada covariante total também pode ser expressa como

$$\hat{\nabla}_\mu A^a_\nu(x) = \nabla_\mu A^a_\nu(x) + \bar{\omega}_{\mu b}^a(x) A^b_\nu(x) = \mathcal{D}_\mu A^a_\nu(x) - \Gamma_{\mu\nu}^\rho A^a_\rho$$

Da equação acima podemos concluir que a derivada total é covariante tanto pelas transformações gerais de coordenadas quanto pelas transformações de Lorentz. E isso é válido para qualquer tensor, logo,

$$\hat{\nabla}_\mu e^a_\nu(x) = \partial_\mu e^a_\nu(x) + \bar{\omega}_{\mu b}^a(x) e^b_\nu(x) - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e^a_\rho.$$

2.3 Geometria da Variedade de Weitzenböck

A variedade de Riemann-Cartan é uma variedade que possui curvatura e torção, mas condição de não-metricidade nula, $\nabla_\mu g_{\alpha\nu} = 0$. Em relação à tetrada, é imposto que sua derivada total se anule,

$$\hat{\nabla}_\mu e^a_\nu(x) = 0. \quad (2.14)$$

Esta condição, junto a $\nabla_\mu g_{\alpha\nu} = 0$, implica em uma conexão de spin antisimétrica, $\bar{\omega}_{\mu(ab)}(x) = 0$, como podemos ver a seguir,

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_\rho g_{\mu\nu} &= e^a_\mu e^b_\nu \hat{\nabla}_\rho \eta_{ab} \\ &= -2e^a_\mu e^b_\nu \bar{\omega}_{\rho(ab)} = 0. \end{aligned}$$

E nos fornece a relação entre conexão de espaço-tempo, conexão de spin, tetradas e suas derivadas,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho e^a_\rho = \partial_\mu e^a_\nu(x) + \bar{\omega}_{\mu b}^a(x) e^b_\nu(x).$$

No entanto, estamos interessados na variedade de Weitzenböck (WEITZENBÖCK, 1928), uma variedade que possui condição de metricidade e curvatura nulas. Nesta variedade, a condição de metricidade nula pode ser enunciada através da condição de paralelismo absoluto

$$\nabla_{\mu} e^a_{\nu}(x) = 0. \quad (2.15)$$

Esta condição garante que as tetradas $e^a_{\nu}(x)$ são transportadas paralelamente ao longo de toda a variedade de espaço-tempo. Além disso, estabelece um vínculo entre a conexão e as derivadas da tetrada.

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = e^{\rho}_a \partial_{\mu} e^a_{\nu}. \quad (2.16)$$

À conexão do espaço-tempo, expressa em termos das tetradas e suas derivadas, nomeamos conexão de Weitzenböck. Diferentemente da variedade de Riemann-Cartan, quando admitimos a validade da Eq. (2.14), não obtemos uma conexão de spin antissimétrica, mas sim uma conexão de spin nula, $\bar{\omega}_{\mu}^a{}_b = 0$.

Outro ponto importante é que, na variedade de Weitzenböck, os comutadores das derivadas covariantes são respectivamente

$$\begin{cases} [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] \phi &= (\Gamma^{\rho}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}) \partial_{\rho} \phi, \\ [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] \phi_{\beta} &= (\Gamma^{\rho}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}) \nabla_{\rho} \phi_{\beta}. \end{cases} \quad (2.17)$$

Como mencionado anteriormente, a parte antissimétrica da conexão do espaço-tempo é reconhecida como torção, logo,

$$\begin{cases} [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] \phi &= T^{\rho}_{\nu\mu} \partial_{\rho} \phi, \\ [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] \phi_{\beta} &= T^{\rho}_{\nu\mu} \nabla_{\rho} \phi_{\beta}. \end{cases} \quad (2.18)$$

2.3.1 Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral na Variedade de Weitzenböck

Assim como na Relatividade Geral, na qual a interação gravitacional se dá como consequência da curvatura, poderíamos pensar em uma teoria que tivesse a torção como ente geométrico responsável pela manifestação gravitacional. Dessa forma, nossa teoria teria como base não a variedade Riemanniana, mas sim a variedade de Weitzenböck W_4 (WEITZENBÖCK, 1928). Ao propormos uma nova formulação para teoria de gravitação, devemos fazer de tal forma que esta proposta reproduza com sucesso todos os resultados já obtidos pela GR, além de dar conta das limitações desta. Nesse sentido, quando propomos teorias na variedade de Weitzenböck, espera-se que exista ao menos uma equivalente à GR. A teoria da gravitação na variedade de Weitzenböck equivalente à GR é comumente referida como Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral (TEGR), ou simplesmente

Teleparalelismo, e foi desenvolvida ao longo das décadas de 60 e 70 do século (HAYASHI; SHIRAFUJI, 1979b).

Como dito anteriormente, a geometria da variedade de Weitzenböck é estudada através dos campos de tetradas e é este o campo fundamental da TEGR, ou seja, são as tetradas que possuem caráter dinâmico. Começaremos então, com o princípio variacional para obter as equações de campo e a prescrição do acoplamento mínimo para a interação entre os campos de matéria e a gravitação. Mas antes disso, primeiro precisamos definir uma densidade lagrangiana para o campo gravitacional e para isso precisamos escolher um invariante. Na GR temos como invariante o escalar de Ricci, que é obtido através da saturação dos índices do tensor de curvatura $R = g^{\mu\nu} R_{\alpha\mu\nu}^{\alpha}$, no entanto o mesmo não é possível com a torção $T_{\mu\nu}^{\alpha}$, pois como podemos observar o número de índices da Torção é ímpar.

Uma possibilidade é partirmos de uma forma análoga à densidade lagrangiana proposta pela Relatividade Geral,

$$\mathcal{L}_{GR} = -\frac{1}{2\chi}\sqrt{-g}R(\{\}) \rightarrow \mathcal{L}_W = -\frac{1}{2\chi}\sqrt{-g}R(\Gamma). \quad (2.19)$$

no qual $g = \det g_{\mu\nu}$, $R(\{\})$ é o escalar de curvatura referente a variedade Riemanniana e $R(\Gamma)$ é o escalar de curvatura referente a a variedade de Weitzenböck.. Na variedade de Weitzenböck, sabemos que a conexão do espaço-tempo 2.1 se reduz a Christoffel mais contorção,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \{\}_{\mu\nu}^{\alpha} + K_{\mu\nu}^{\alpha}. \quad (2.20)$$

Substituindo 2.20 em 2.19

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}R(\Gamma) &= \sqrt{-g}g^{\nu\mu} [\partial_{\alpha} \{\}_{\nu\mu}^{\alpha} - \partial_{\nu} \{\}_{\alpha\mu}^{\alpha} + \{\}_{\alpha\beta}^{\alpha} \{\}_{\nu\mu}^{\beta} - \{\}_{\nu\beta}^{\alpha} \{\}_{\alpha\mu}^{\beta} \\ &+ \partial_{\nu} K_{\alpha\mu}^{\alpha} - \partial_{\alpha} K_{\nu\mu}^{\alpha} - \{\}_{\alpha\beta}^{\alpha} K_{\nu\mu}^{\beta} - K_{\alpha\beta}^{\alpha} \{\}_{\nu\mu}^{\beta} + \{\}_{\nu\beta}^{\alpha} K_{\alpha\mu}^{\beta} \\ &+ K_{\nu\beta}^{\alpha} \{\}_{\alpha\mu}^{\beta} + K_{\alpha\beta}^{\alpha} K_{\nu\mu}^{\beta} - K_{\nu\beta}^{\alpha} K_{\alpha\mu}^{\beta}]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Observe que os termos na primeira linha da Eq. 2.21 podem ser identificados como o tensor de Ricci da Relatividade Geral¹. Depois de algumas manipulações algébricas, sendo $\sqrt{-g} = e = \det e_{\nu}^{\alpha}$, obtemos

$$eR(\{\}) = e[B - T]$$

¹ $R_{\alpha\nu\mu}^{\alpha}(\{\}) = \partial_{\alpha} \{\}_{\nu\mu}^{\alpha} - \partial_{\nu} \{\}_{\alpha\mu}^{\alpha} + \{\}_{\alpha\beta}^{\alpha} \{\}_{\nu\mu}^{\beta} - \{\}_{\nu\beta}^{\alpha} \{\}_{\alpha\mu}^{\beta}$

onde,

$$B = 2(\nabla_\nu - T_\nu) T^\nu = \frac{2}{e} \partial_\nu (eT^\nu), \quad (2.22)$$

e

$$T = \left[\frac{1}{4} T_\beta^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^\beta - \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^\beta T^{\mu\nu}_\beta - T^\nu T_\nu \right], \quad (2.23)$$

$$T_\nu = T_{\theta\nu}^\theta.$$

O escalar de torção T também pode ser expresso através do produto

$$T = \Sigma_\beta^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^\beta, \quad (2.24)$$

onde $\Sigma_\beta^{\mu\nu} = -\Sigma_\beta^{\nu\mu}$ é nomeado superpotencial de torção,

$$\Sigma_\beta^{\mu\nu} = \frac{1}{4} (T_\beta^{\mu\nu} + T_\beta^{\nu\mu} - T_\beta^{\nu\mu}) + \frac{1}{2} (\delta_\beta^\nu T^\mu - \delta_\beta^\mu T^\nu). \quad (2.25)$$

Como podemos observar em 2.22, B é um divergente e quando integrado na ação, sua contribuição como termo de superfície será nula em relação às equações de campo. Dessa forma, a densidade lagrangiana do equivalente teleparalelo é assumido como,

$$eR(\{\}) = eT(\Gamma).$$

A variação da ação integral,

$$S = \int d^4x eT,$$

nos conduz as equações de campo,

$$E_a^\alpha = \frac{4}{e} \partial_\sigma (e \Sigma_a^{\sigma\alpha}) + 4 \Sigma^{\sigma\rho\alpha} T_{\sigma\rho a} - e_a^\alpha T = 0, \quad (2.26)$$

que devem ser equivalentes as equações de campo obtidas na variedade Riemanniana.

3 Teleparalelismo como uma teoria de gauge de segunda ordem

No capítulo anterior, vimos a formulação de uma teoria gravitacional do ponto de vista puramente geométrico, agora utilizaremos uma abordagem de teoria de gauge. Embora hajam muitos trabalhos nesse segmento (teoria de gauge), até onde os autores sabem, não há abordagem na literatura que analise teorias teleparalelas de ordem superior como teorias de gauge a partir de princípios básicos. Esse é o principal objetivo deste capítulo, onde teorias teleparalelas de segunda ordem são construídas por meio da metodologia proposta por Utiyama. Na Seção 3.1, revisamos brevemente a teoria de gauge conforme proposta por Utiyama, partindo de uma transformação de campo de matéria infinitesimal genérica sob um grupo de Lie geral. Em seguida, particularizamos os resultados para o grupo de translação. Na Seção 3.3, analisamos a invariância da Lagrangiana para o campo de gauge livre, considerando que ela pode depender de termos até a segunda ordem da derivada do campo de gauge. Na Seção 3.3.1, avaliamos todos os invariantes quadráticos que levam a equações de campo lineares na quarta derivada do campo de gauge. Na Seção 3.3.2, analisamos um caso particular como exemplo, onde linearizamos as equações de campo e obtemos o potencial gravitacional efetivo. Finalmente, na Seção VI, as considerações finais são apresentadas.

3.1 A abordagem de Utiyama

Na teoria desenvolvida por Utiyama, considera-se alguns sistemas de campos de matéria, inicialmente sem interação, que devem ser invariantes sob um determinado grupo de transformações G_n dependentes de n parâmetros ϵ^a . Estes parâmetros ϵ^a não dependem do ponto, ou seja, são constantes com respeito às coordenadas x . E por isso G_n é dito um grupo onde as transformações são globais. Em seguida se considera um grupo mais amplo $G_{\infty n}$, no qual as transformações são locais, ou seja, o parâmetro de transformação depende do ponto, $\epsilon^a \rightarrow \epsilon^a(x)$. Para manter-se a invariância postulada, uma vez que a transformação global é um caso particular das transformações locais, é introduzido um

novo campo A_μ , que possui um tipo definido de interação com os campos originais. É também A_μ o responsável por trazer interação para os campos. A seguir, detalhamos melhor todo esse processo. No entanto, caso o leitor ainda sinta a necessidade de uma referência mais detalhada acerca da metodologia desenvolvida por Utiyama, além do trabalho original, recomendamos a referência (ACEVEDO *et al.*, 2018), na qual os autores mostram de forma bastante didática e construtiva o passo a passo por trás do desenvolvimento da metodologia.

3.1.1 Lagrangiana do campo de matéria

Inicialmente, consideraremos um conjunto de campos de matéria $\Phi^A(u)$, onde ($A = 1, 2, \dots, N$) definido em uma região Ω , cuja densidade Lagrangiana é dada por:

$$\mathcal{L}_M = \mathcal{L}_M [\Phi^A, \partial_\mu \Phi^A] (x), \quad (3.1)$$

com a seguinte equação de movimento,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \Phi^A} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (\partial_\mu \Phi^A)} = 0. \quad (3.2)$$

Em seguida, postulamos que a ação integral

$$S[\Phi] = \int_{\Omega} d^4u \mathcal{L}_M [\Phi^A, \partial_\mu \Phi^A] (x), \quad (3.3)$$

é invariante sob transformações infinitesimais globais,

$$\begin{aligned} \Phi^A &\rightarrow \Phi^A + \delta\Phi^A, \\ \delta\Phi^A &= \epsilon^a I_{(a)B}^A \Phi^B, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde ϵ^a ($a = 1, 2, \dots, n$) são parâmetros infinitesimais constantes e $I_{(a)B}^A$ são coeficientes constantes. Assumiremos também o conjunto de transformações (3.4) como pertencendo a um grupo de Lie G_n dependente dos n parâmetros ϵ^a e com geradores $I_{(a)B}^A$ na representação dos campos Φ^A . Portanto, deve haver um conjunto de constantes independentes f_{ab}^c chamadas de “constantes de estrutura”, definidas com base nas relações de comutação entre os geradores

$$[I_{(a)}, I_{(b)}]_B^A = f_{ab}^c I_{(c)B}^A.$$

Estas devem obedecer à condição de ciclicidade¹:

$$f_{ab}^m f_{mc}^l + f_{ca}^m f_{mb}^l + f_{bc}^m f_{ma}^l = 0. \quad (3.5)$$

e possuir ainda antisimetria na troca de seus índices inferiores,

$$f_{ab}^c = -f_{ba}^c. \quad (3.6)$$

É a constante de estrutura a responsável por determinar se um grupo é abeliano ou não. Um grupo é dito abeliano se $f_{ab}^c = 0$, caso contrário, quando $f_{ab}^c \neq 0$, este grupo é dito não-abeliano.

Pela invariância postulada em S sob as transformações infinitesimais do campo em qualquer domínio do espaço-tempo Ω , temos:

$$\delta\mathcal{L}_M = \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\Phi^A} \delta\Phi^A + \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu\Phi^A)} \delta(\partial_\mu\Phi^A) = 0, \quad (3.7)$$

e isto deve ser válido para qualquer ponto do espaço-tempo, ou seja, essa relação não está relacionada ao caráter do campo. Em seguida, considerando a independência dos parâmetros ϵ^a , concluímos que,

$$\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\Phi^A} I_{(a)B}^A \Phi^B + \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu\Phi^A)} I_{(a)B}^A \partial_\mu\Phi^B = 0. \quad (3.8)$$

Uma observação interessante e que traz consistência para a teoria é que, ao fazermos algumas manipulações algébricas na Eq. (3.7) podemos reescrevê-la como,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_M &= \left(\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\Phi^A} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu\Phi^A)} \right) \delta\Phi^A \\ &+ \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu\Phi^A)} \delta\Phi^A \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Uma vez que são válidas as equações de movimento (3.2), podemos observar que uma corrente é conservada.

$$\partial_\mu J_a^\mu = 0, \quad J_a^\mu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu\Phi^A)} I_{(a)B}^A \Phi^B.$$

Este resultado está de acordo com o teorema de Noether.

¹A condição 3.5 vem da identidade de Jacobi para o comutador,

$$\begin{aligned} &[[I_{(a)}, I_{(b)}], I_{(c)}] + [[I_{(c)}, I_{(a)}], I_{(b)}] \\ &+ [[I_{(b)}, I_{(c)}], I_{(a)}] = 0, \end{aligned}$$

Finalizado o estudo para as transformações infinitesimais globais. Agora, iremos considerar uma transformação infinitesimal local $\epsilon^a \rightarrow \epsilon^a(x)$, ou seja, agora os parâmetros de transformação ϵ^a dependem das coordenadas, x^μ . O que nos leva a

$$\delta\Phi^A = \epsilon^a(x) I_{(a)B}^A \Phi^B. \quad (3.10)$$

Neste caso, quando tomamos a variação da Lagrangiana de matéria e assumimos a validade da Eq. (3.8), um termo de derivada do parametro de transformação aparece, fazendo com que a invariância seja perdida,

$$\delta\mathcal{L}_M = \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu\Phi^A)} I_{(a)B}^A \Phi^B \partial_\mu\epsilon^a(x). \quad (3.11)$$

Para recuperar a invariância de \mathcal{L}_M sob Eq.(3.10), introduzimos um novo campo A_μ^c , chamado potencial de gauge, cuja lei de transformação é dada por

$$\delta A_\mu^c = \epsilon^a f_{ab}^c A_\mu^b + \partial_\mu\epsilon^c. \quad (3.12)$$

Conseqüentemente, a lagrangiana de matéria passa a ter dependência com este novo campo,

$$\mathcal{L}_M [\Phi^A, \partial_\mu\Phi^A] \rightarrow \bar{\mathcal{L}}_M [\Phi^A, \partial_\mu\Phi^A, A_\mu^a],$$

e sua variação sob as transformações 3.10 e 3.12 resulta em

$$\begin{aligned} \delta\bar{\mathcal{L}}_M &= \frac{\partial\bar{\mathcal{L}}_M}{\partial\Phi^A} I_{(a)B}^A \Phi^B \epsilon^a + \frac{\partial\bar{\mathcal{L}}_M}{\partial\partial_\mu\Phi^A} I_{(a)B}^A \partial_\mu\Phi^B \epsilon^a + \frac{\partial\bar{\mathcal{L}}_M}{\partial\partial_\mu\Phi^A} I_{(a)B}^A \Phi^B \partial_\mu\epsilon^a \\ &+ \frac{\partial\bar{\mathcal{L}}_M}{\partial A_\mu^a} f_{cb}^a A_\mu^b \epsilon^c + \frac{\partial\bar{\mathcal{L}}_M}{\partial A_\mu^a} \partial_\mu\epsilon^a. \end{aligned}$$

Considerando independência dos parâmetros ϵ^a e de suas derivadas $\partial_\mu\epsilon^a$, obtemos um conjunto de equações hierarquicas

$$\begin{cases} \frac{\partial\bar{\mathcal{L}}_M}{\partial\Phi^A} I_{(a)B}^A \Phi^B + \frac{\partial\bar{\mathcal{L}}_M}{\partial(\partial_\mu\Phi^A)} I_{(a)B}^A \partial_\mu\Phi^B + \frac{\partial\bar{\mathcal{L}}_M}{\partial A_\mu^c} f_{ab}^c A_\mu^b = 0, \\ \frac{\partial\bar{\mathcal{L}}_M}{\partial(\partial_\mu\Phi^A)} I_{(a)B}^A \Phi^B + \frac{\partial\bar{\mathcal{L}}_M}{\partial A_\mu^a} = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Aqui temos uma característica importante da abordagem de Utiyama. A solução da última equação implica que a dependência funcional \mathcal{L}_M com o campo de gauge e a derivada de Φ^A ocorre apenas através da combinação:

$$\overset{\circ}{\nabla}_\mu\Phi^A = \partial_\mu\Phi^A - I_{(c)B}^A \Phi^B A_\mu^c. \quad (3.14)$$

Ou seja,

$$\bar{\mathcal{L}}_M [\Phi^A, \partial_\mu \Phi^A, A_\mu^a] \rightarrow \bar{\mathcal{L}}_M [\Phi^A, \overset{\circ}{\nabla}_\mu A_\mu^a]$$

A título de curiosidade, o resultado em 3.14 foi obtido a partir do argumento de d'Alembert, que se aplica da seguinte forma:

Assumimos uma função $f(x, y)$ que satisfaz a

$$\frac{\partial f}{\partial x} + a \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

É fácil observar, fazendo uma simples substituição, que qualquer função diferenciável do tipo $f(x, y) = h(y - ax)$ é solução da equação acima. Este tipo de metodologia recebe o nome de argumento de d'Alembert, pois este mesmo tipo de construção pode ser empregado quando estudamos a equação da onda se propagando na direção do eixo z com velocidade v ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

cujas soluções envolvem qualquer função do tipo

$$f(z, t) = h(z \pm vt).$$

Voltando para Eq. (3.14), esta é essencialmente a derivada covariante de Φ^A sob a transformação do grupo. O caráter covariante deste objeto é imediatamente verificado pela sua lei de transformação,

$$\delta \left(\overset{\circ}{\nabla}_\mu \Phi^A \right) = I_{(a)B}^A \overset{\circ}{\nabla}_\mu \Phi^B \epsilon^a(x). \quad (3.15)$$

Quando usamos a derivada covariante e reescrevemos a primeira equação em 3.13, o que obtemos é essencialmente a Eq.(3.8), com a substituição $\partial_\mu \Phi^A \rightarrow \overset{\circ}{\nabla}_\mu \Phi^A$. Isso mostra que a prescrição de acoplamento mínimo é consequência das equações que emergem da hipótese de invariância.

3.1.2 Lagrangiana do campo livre

Originalmente, assume-se que a Lagrangiana \mathcal{L}_A do campo de gauge contém até derivadas de primeira ordem de A_μ^a .

$$\mathcal{L}_A [A_\mu^a, \partial_\mu A_\mu^a] (x), \quad \partial_\nu A_\mu^a \equiv \frac{\partial A_\mu^a}{\partial x^\nu}. \quad (3.16)$$

Admitimos que esta é invariante pela transformação (3.12)

$$\delta \mathcal{L}_A = \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A_\mu^a} \delta A_\mu^a + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial (\partial_\nu A_\mu^a)} \delta (\partial_\nu A_\mu^a) = 0$$

o que nos leva a,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_A = & \left(\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A_\mu^a} f_{cb}^a A_\mu^b + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial (\partial_\nu A_\mu^a)} f_{cb}^a \partial_\nu A_\mu^b \right) \epsilon^c + \left(\frac{1}{g} \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A_\nu^c} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial (\partial_\nu A_\mu^a)} f_{cb}^a A_\mu^b \right) \partial_\nu \epsilon^c \\ & + \left(\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial (\partial_\nu A_\mu^a)} \right) \partial_\nu \partial_\mu \epsilon^a = 0. \end{aligned}$$

Da independência e não nulidade dos parâmetros ϵ^a e suas derivadas, $\partial_\nu \epsilon^a$ e $\partial_\mu \partial_\nu \epsilon^a$, obtém-se as seguintes equações hierárquicas

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A_\mu^a} f_{cb}^a A_\mu^b + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial (\partial_\nu A_\mu^a)} f_{cb}^a \partial_\nu A_\mu^b = 0, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A_\nu^c} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial (\partial_\nu A_\mu^a)} f_{cb}^a A_\mu^b = 0, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial (\partial_\nu A_\mu^a)} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial (\partial_\mu A_\nu^a)} = 0. \quad (3.19)$$

A última equação hierárquica é obtida utilizando a simetria de troca $\mu \leftrightarrow \nu$ em $\partial_\nu \partial_\mu \epsilon^a = \partial_\mu \partial_\nu \epsilon^a$. Partindo da Eq. (3.19), utilizando o argumento de d'Alembert, temos que a derivada do campo de gauge $\partial_\mu A_\nu^a$ está contida em 3.16 através da relação

$$A_{[\mu, \nu]}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a. \quad (3.20)$$

Dado que a dependência de \mathcal{L}_A em relação as suas derivadas acontece através de $A_{[\mu, \nu]}^a$,

$$\mathcal{L}_A [A_\mu^a, \partial_\nu A_\mu^a] \rightarrow \mathcal{L}'_A [A_\mu^a, A_{[\mu, \nu]}^a]$$

é fácil obter

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \partial_\mu A_\nu^a} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A_{[\rho, \sigma]}^b} \frac{\partial A_{[\rho, \sigma]}^b}{\partial \partial_\mu A_\nu^a} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A_{[\mu, \nu]}^a} - \frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A_{[\nu, \mu]}^a} \right). \end{aligned}$$

O fator $\frac{1}{2}$ é considerado para compensar a dupla contagem de termos iguais. Da definição da Eq. (3.20), verificamos a Eq. (3.19).

A partir dos resultados obtidos acima, tomamos a liberdade de reescrever a Eq. (3.18) como

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A^a_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A^c_{[\mu,\nu]}} f^c_{ab} A^b_\nu = 0. \quad (3.21)$$

Resolvendo a Eq. (3.21), após algumas manipulações, é possível observar que, $\partial_\mu A^a_\nu$ está contida na lagrangiana livre através do objeto

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - \frac{1}{2} f^a_{bc} (A^b_\mu A^c_\nu - A^b_\nu A^c_\mu), \quad (3.22)$$

nomeado *field strength* ou tensor de intensidade do campo, cuja transformação se dá como

$$\delta F^a_{\mu\nu} = e^c f^a_{cb} F^b_{\mu\nu}. \quad (3.23)$$

Observação: É verdade que, se estivéssemos considerando um grupo em particular e que este fosse abeliano, teríamos

$$F^a_{\mu\nu} = A^a_{[\mu,\nu]}.$$

Após definir este novo objeto, passamos a escrever

$$\mathcal{L}'_A [A^a_\mu, A^a_{[\mu,\nu]}] \rightarrow \mathcal{L}''_A [A^a_\mu, F^a_{\mu\nu}].$$

Podemos observar que, realmente, $F^a_{\mu\nu}$ verifica a Eq. (3.21), através de

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A^a_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A^c_{[\mu,\nu]}} f^c_{ab} A^b_\nu = -\frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial F^c_{\mu\nu}} f^c_{ab} A^b_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial F^c_{\mu\nu}} f^c_{ab} A^b_\nu = 0.$$

Por último nos resta a análise da Eq. (3.17) que, realizando-se substituições a partir dos resultados obtidos e algumas manipulações algébricas, obtemos (ACEVEDO *et al.*, 2018)

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a_{\mu\nu}} f^a_{cb} F^b_{\mu\nu} \equiv 0.$$

Em termos desses novos objetos, segue a relação de equivalência

$$\mathcal{L}_A [A^a_\mu, \partial_\nu A^a_\mu] = \mathcal{L}'_A [A^a_\mu, A^a_{[\mu,\nu]}] = \mathcal{L}''_A [A^a_\mu, F^a_{\mu\nu}],$$

uma vez que são equivalentes, suas variações também as são, logo,

$$\delta \mathcal{L}_A \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^a_\mu} \delta A^a_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a_{\mu\nu}} \delta F^a_{\mu\nu} = 0. \quad (3.24)$$

Substituindo as variações das Eq's. (3.12) e (3.23) na Eq. (3.24) e juntando a independência e não nulidade dos parâmetros, ϵ^a , e suas derivadas, $\partial_\nu \epsilon^a$ e $\partial_\mu \partial_\nu \epsilon^a$, segue que,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^a} = 0. \quad (3.25)$$

Este resultado nos conduz a uma lagrangiana livre que depende apenas do seu *field strength*

$$\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_A [F_{\mu\nu}^a].$$

Da equação Eq. (3.25), podemos concluir que termos do tipo $A_\mu^a A_a^\mu m^2$, sendo m uma constante, não estão presentes na Lagrangiana livre, uma vez que sua presença viola a invariância de gauge. Isto nos conduz a ideia de que campos de gauge não devem ser massivos, já que termos como esse são aqueles que dão massa ao potencial de gauge. No entanto, modificações na metodologia, como apresentada em (CUZINATTO *et al.*, 2023), podem levar a presença de massa no campo de *gauge*.

3.2 O Grupo de translação

Nesta seção, assumimos que a integral de ação na Eq.(3.3) é invariante sob uma transformação de translação global. A análise do teleparalelismo como uma teoria de gauge para o grupo de translação já foi realizada anteriormente na literatura - veja, por exemplo, Refs. (CHO, 1976a; CHO, 1976b; ALDROVANDI; PEREIRA, 1995; KRŠŠÁK *et al.*, 2019). Nossa proposta nesta seção é obter, via abordagem de Utiyama, a maioria dos resultados já conhecidos das teorias teleparalelas (para uma boa revisão sobre vários aspectos relacionados à gravidade teleparalela, consulte Ref. (MALUF, 2013)). Isso será usado para validar a metodologia de Utiyama, que estendemos a teorias de ordem superior na próxima seção.

Uma operação de translação no espaço de Minkowski é mais adequadamente caracterizada em coordenadas cartesianas, o que não é necessariamente o caso das coordenadas x^μ usadas na seção anterior. Para evitar confusão daqui em diante, definimos o sistema de coordenadas x^a , como sendo necessariamente cartesiano e introduzimos um novo sistema de coordenadas curvilíneas u^μ . Para consistência, há um mapa inversível, $u^\mu(x^a) \leftrightarrow x^a(u^\mu)$. Com esses dois sistemas de coordenadas, temos a seguinte convenção: objetos rotulados com índices latinos correspondem a quantidades expressas no sistema cartesiano x^a , enquanto objetos com índices gregos representam quantidades no sistema de coordenadas gerais u^μ . Por exemplo, considere a quantidade escalar dada pelo elemento de linha,

$$ds^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b = g_{\mu\nu} du^\mu du^\nu,$$

Acima, $\eta_{ab} = \text{diag}(- + ++)$ é o tensor métrico de Minkowski no sistema de coordenadas

cartesianas e $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(u)$ é o mesmo tensor descrito nas coordenadas gerais u^μ . Este último pode ser mapeado no primeiro, através de um conjunto de funções,

$$h^a{}_\mu \equiv \frac{\partial x^a}{\partial u^\mu} \quad (3.26)$$

com inversa,

$$h_a{}^\mu(x) \equiv \frac{\partial u^\mu}{\partial x^a}. \quad (3.27)$$

De forma que,

$$g_{\mu\nu}(u) = h^a{}_\mu h^b{}_\nu \eta_{ab}(x). \quad (3.28)$$

A transformação global por translação dos campos é caracterizada pela seguinte transformação,

$$x^a \rightarrow x'^a = x^a + \epsilon^a, \quad \delta\Phi^A = \epsilon^a \delta^A_B \partial_a \Phi^B. \quad (3.29)$$

E, como esperado, nos mostra que o grupo de translação é abeliano, uma vez que seu gerador é uma derivada ordinária. Com essa lei de transformação, podemos destacar a importância das coordenadas cartesianas auxiliares - se tivéssemos considerado $\delta\Phi^A = \epsilon^\mu \delta^A_B \partial_\mu \Phi^B$, poderíamos ter considerado uma rotação em vez de uma translação se, por exemplo, $u^\mu \rightarrow \theta$ estivesse descrevendo uma variável angular. Para abordar adequadamente o procedimento de Utiyama da seção anterior ao caso presente, devemos considerar que o índice A, B, \dots que caracteriza o campo de matéria (escalar, espinorial, vetorial, \dots) pode ser representado em coordenadas cartesianas e gerais. Para a representação correta dos campos em cada sistema de coordenadas e para descrever adequadamente a variação da integral de ação, devemos estender a dependência funcional da ação dada na Eq. (3.3) para

$$S = \int_\Omega d^4u \mathcal{L}_M [\Phi^A(u), \partial_\mu \Phi^A(u), h^c{}_\mu].$$

Esse procedimento segue a mesma linha de raciocínio proposta por Utiyama ao analisar a teoria de gauge para o grupo de Lorentz em (UTIYAMA, 1956a). O uso dos dois sistemas de coordenadas para descrever adequadamente a transformação global, tanto aqui quanto no artigo de Utiyama, pode ser interpretado da seguinte forma. Embora fisicamente o espaço-tempo descrito tanto pelas coordenadas u^μ , quanto x^a , seja o mesmo, matematicamente, podemos interpretá-los como dois espaços independentes mapeados um no outro por $h^a{}_\mu$ e $h_a{}^\mu$. Esses objetos, por sua vez, desempenham o papel de tetradas mapeando esses dois espaços distintos - essas tetradas são compostas apenas por uma parte holônoma, já que são definidos por um gradiente. O espaço de coordenadas cartesianas, do ponto de vista do espaço com coordenadas gerais, pode ser visto como um espaço “interno” onde ocorre a transformação de translação (ou, no caso de Utiyama, de Lorentz). Essa transformação mapeia o espaço de coordenadas cartesianas em outro espaço também

com coordenadas cartesianas e o conjunto de todos os espaços que caracterizam todas as transformações possíveis pode ser interpretado como o fibrado onde a teoria de gauge é construída.

Para consistência, h^a_μ deve obedecer à mesma lei de transformação do grupo, ou seja,

$$h'^a_\mu = \frac{\partial}{\partial u^\mu} (x^a + \epsilon^a(u)) = h^a_\mu + \partial_\mu \epsilon^a,$$

$$\delta h^a_\mu = h'^a_\mu - h^a_\mu = \partial_\mu \epsilon^a. \quad (3.30)$$

Note que, para a translação global, ou seja, $\epsilon^a = \text{constante}$, temos $\delta h^a_\mu = 0$.

Agora tomamos a transformação local, pela prescrição $\epsilon^a \rightarrow \epsilon^a(u)$. A invariância do sistema original é perdida e a recuperamos introduzindo o campo de gauge, que para o caso presente (grupo abeliano) é reduzido da Eq.(3.12) para:

$$\delta A^c_\mu = \partial_\mu \epsilon^c. \quad (3.31)$$

Agora reescrevemos a integral de ação Eq. (3.3) em coordenadas curvilíneas e introduzimos o campo de gauge

$$S = \int_{\Omega} d^4u \mathfrak{L}_M [\Phi^A(u), \partial_\mu \Phi^A(u), h^c_\mu, A^c_\mu]. \quad (3.32)$$

Quando postulamos a invariância para S , temos

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{L}_M &= \frac{\partial \mathfrak{L}_M}{\partial \Phi^A} \delta \Phi^A + \frac{\partial \mathfrak{L}_M}{\partial \partial_\mu \Phi^A} \partial_\mu (\delta \Phi^A) \\ &+ \frac{\partial \mathfrak{L}_M}{\partial h^c_\mu} \delta h^c_\mu + \frac{\partial \mathfrak{L}_M}{\partial A^c_\mu} \delta A^c_\mu = 0. \end{aligned}$$

Usando as Eqs. (3.29), (3.30) e (3.31),

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{L}_M &= \left(\frac{\partial \mathfrak{L}_M}{\partial \Phi^A} \partial_a \Phi^A + \frac{\partial \mathfrak{L}_M}{\partial \partial_\mu \Phi^A} \partial_\mu \partial_a \Phi^A \right) \epsilon^a \\ &+ \left(\frac{\partial \mathfrak{L}_M}{\partial \partial_\mu \Phi^A} \partial_c \Phi^A + \frac{\partial \mathfrak{L}_M}{\partial h^c_\mu} + \frac{\partial \mathfrak{L}_M}{\partial A^c_\mu} \right) \partial_\mu \epsilon^c = 0. \end{aligned}$$

Da independência de ϵ^a e $\partial_\mu \epsilon^a$, segue:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}'_M}{\partial \partial_\mu \Phi^A} \delta^A_B \partial_c \Phi^B + \frac{\partial \mathfrak{L}'_M}{\partial A^c_\mu} + \frac{\partial \mathfrak{L}'_M}{\partial h^c_\mu} = 0. \quad (3.33)$$

Note que, diferentemente dos outros casos em que utilizamos o método de d'Alembert,

a Eq. (3.33) possui três termos e não dois. No entanto, ainda assim podemos utilizar esta ferramenta, para observar a dependência de \mathcal{L}_M com A^c_μ , basta combinarmos pares dos termos da Eq. (3.33) e aplicar o método. E com isso, obtemos que a dependência funcional de cada par ocorre através dos seguintes objetos:

$$D_\mu \Phi^A \equiv \partial_\mu \Phi^A - A^c_\mu \partial_c \Phi^A, \quad (3.34)$$

$$e^c_\mu \equiv h^c_\mu - A^c_\mu. \quad (3.35)$$

$$\partial_\mu \Phi^A - h^c_\mu \partial_c \Phi^A = 0. \quad (3.36)$$

A Eq. (3.34) pode ser identificada como a derivada covariante do grupo de translação e pode ser reescrita de forma mais conveniente usando a Eq. (3.35):

$$D_\mu \Phi^A = e^c_\mu \partial_c \Phi^A. \quad (3.37)$$

Até este ponto, consideramos os resultados obtidos apenas do ponto de vista de uma teoria de campo. Agora começamos a discutir como podemos interpretar os resultados acima a partir de um ponto de vista geométrico. Enquanto a Eq. (3.34) implica que a derivada ordinária deve ser substituída pela derivada covariante, Eq. (3.35), da mesma forma, afirma que a tetrada holônoma deve ser substituído pela nova tetrada e^c_μ , que agora possui uma parte holônoma (h^c_μ) e uma anolônoma (A^c_μ). A contribuição holônoma é responsável por descrever efeitos inerciais, enquanto a anolonôma é responsável por descrever a gravitação (ALDROVANDI *et al.*, 2003).

A prescrição $h^c_\mu \rightarrow e^c_\mu$ implica que objetos em coordenadas cartesianas são mapeados para coordenadas curvilíneas de acordo com a nova regra:

$$T^\nu_\mu(u) = e^\nu_b e^a_\mu T^b_a(x).$$

Como consequência, a Eq. (3.28) torna-se

$$g_{\mu\nu} = e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab}. \quad (3.38)$$

Além disso, na Eq. (3.37), se tomarmos o caso particular onde Φ^A é um campo vetorial, temos:

$$e^\nu_a D_\mu \Phi^a = \partial_\mu \Phi^\nu + e^\nu_a \partial_\mu e^a_\rho \Phi^\rho. \quad (3.39)$$

No lado direito da Eq. (3.39), identificamos a derivada covariante do grupo de transfor-

mações de coordenadas gerais,

$$\nabla_{\mu}\Phi^{\nu} = \partial_{\mu}\Phi^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\rho}\Phi^{\rho}, \quad (3.40)$$

desde que identifiquemos a conexão espaço-tempo como

$$\Gamma^{\nu}_{\mu\rho} \equiv e_a^{\nu}\partial_{\mu}e_{\rho}^a. \quad (3.41)$$

Essa conexão descreve um espaço-tempo com torção, mas curvatura nula, uma vez que

$$T^{\nu}_{\mu\rho}(\Gamma) \equiv \Gamma^{\nu}_{\mu\rho} - \Gamma^{\nu}_{\rho\mu} = e_a^{\nu}(\partial_{\mu}e_{\rho}^a - \partial_{\rho}e_{\mu}^a), \quad (3.42)$$

e

$$R_{\nu\mu\beta}{}^{\sigma}(\Gamma) \equiv \partial_{\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\beta} - \partial_{\mu}\Gamma^{\sigma}_{\nu\beta} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\beta} = 0, \quad (3.43)$$

onde $T^{\nu}_{\mu\rho}(\neq 0, \text{ em geral})$ é o tensor de torção e $R_{\nu\mu\beta}{}^{\sigma}(\Gamma)$ é o tensor de curvatura.

Outro resultado importante é obtido a partir da Eq. (3.41):

$$\nabla_{\mu}e_{\rho}^b = \partial_{\mu}e_{\rho}^b - \Gamma^{\nu}_{\mu\rho}e_{\nu}^b = 0. \quad (3.44)$$

Esta é a condição de paralelismo absoluto, que vimos no capítulo anterior.

Diante dos resultados apresentados nas Eqs.(3.38), (3.42), (3.43) e (3.44), concluímos que a conexão espaço-tempo na Eq. (3.41) é a Conexão de Weitzenböck e a teoria de gauge para o grupo de translação é esperada ser uma teoria de gravitação teleparalela. Isso será verificado na próxima seção, onde a Lagrangiana para o campo de gauge livre será analisada.

3.3 Lagrangiana do campo livre para o grupo de translação

Agora analisamos a estrutura da Lagrangiana para o campo de gauge livre, ou seja, sem interação com campo de matéria. Em particular, estendemos a análise para teorias de ordem superior. Consideremos que a Lagrangiana do campo de gauge contenha até derivadas de segunda ordem em A_{μ}^c ,

$$\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_A [h_{\mu}^c, \partial_{\nu}h_{\mu}^c, A_{\mu}^c, \partial_{\nu}A_{\mu}^c, \partial_{\rho}\partial_{\nu}A_{\mu}^c].$$

Como antes, consideramos a integral de ação em coordenadas curvilíneas, o que justifica a presença de h_{μ}^c e sua derivada na dependência funcional de \mathcal{L}_A . Supomos que esta

Lagrangiana seja invariante sob translações locais, o que significa:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_A &= \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial h_\mu^c}\partial_\mu\epsilon^c + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial A_\mu^c}\partial_\mu\epsilon^c \\ &+ \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\partial_\nu h_\mu^c}\partial_\nu\partial_\mu\epsilon^c + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\partial_\nu A_\mu^c}\partial_\nu\partial_\mu\epsilon^c \\ &+ \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\partial_\rho\partial_\nu A_\mu^c}\partial_\rho\partial_\nu\partial_\mu\epsilon^c = 0.\end{aligned}$$

Usando a independência dos parâmetros e suas derivadas, obtemos as seguintes equações:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial A_\mu^c} + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial h_\mu^c} = 0, \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\partial_\nu A_\mu^c} + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\partial_\mu A_\nu^c} + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\partial_\nu h_\mu^c} + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\partial_\mu h_\nu^c} = 0, \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\rho\partial_\nu A_\mu^c} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\partial_\rho A_\nu^c} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\partial_\mu A_\rho^c} = 0. \quad (3.47)$$

Como podemos ver, a última equação apresenta apenas a derivada de \mathcal{L}_A em relação às segundas derivadas do campo de gauge; na segunda equação, vemos apenas a derivada de \mathcal{L}_A em relação às primeiras derivadas de A_μ^c e h_μ^c ; a primeira equação mostra apenas a derivada de \mathcal{L}_A em relação a A_μ^c e h_μ^c . Essencialmente, as equações acima estão desacopladas, ou seja, podemos resolver a dependência de \mathcal{L}_A em relação a A_μ^c , h_μ^c e suas derivadas independentemente de cada equação e elas podem ser resolvidas em qualquer ordem.

Da Eq. (3.45), podemos ver que a dependência explícita de \mathcal{L}_A com o campo de gauge e a tetrada trivial deve ocorrer apenas através da combinação

$$e_\mu^a \equiv h_\mu^a - A_\mu^a.$$

Isso é semelhante ao que foi obtido na seção anterior, quando a interação dos campos de gauge e de matéria foi descrita.

Da Eq. (3.46), vemos que a dependência de \mathcal{L}_A em relação a $\partial_\mu A_\nu^c$ e $\partial_\mu h_\nu^c$ deve ser apenas através dos dois novos objetos definidos abaixo:

$$F_{\nu\mu}^c \equiv \partial_\mu A_\nu^c - \partial_\nu A_\mu^c, \quad (3.48)$$

como visto anteriormente, o *field strength* ou tensor de intensidade do campo, e

$$\Upsilon_{\mu\nu}^c \equiv \partial_\mu h_\nu^c - \partial_\nu h_\mu^c = \partial_\mu e_\nu^c. \quad (3.49)$$

Este novo objeto na Eq. (3.49) pode ser imediatamente identificado com a Conexão de Weitzenböck dada na Eq. (3.41).

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\omega} = e_c^{\omega} (\partial_{\mu} h_{\nu}^c - \partial_{\nu} A_{\mu}^c) = \Upsilon_{\mu\nu}^{\omega}. \quad (3.50)$$

O tensor de intensidade do campo definida na Eq. (3.48), por sua vez, pode ser imediatamente identificada com o tensor de torção Eq. (3.42), uma vez que a integrabilidade da tetrada trivial implica $\partial_{\mu} h_{\nu}^c - \partial_{\nu} h_{\mu}^c = 0$. Assim,

$$T_{\nu\mu}^{\rho} = e_c^{\rho} F_{\nu\mu}^c. \quad (3.51)$$

Finalmente, a Eq. (3.47) indica que a segunda derivada do campo de gauge deve estar contida em \mathcal{L}_A através de um novo objeto composto por uma combinação linear das segundas derivadas do campo de gauge, que deve simultaneamente satisfazer a Identidade de Jacobi - este é um requisito da permutação cíclica apresentada pela equação. A solução mais simples que atende a esses requisitos é o objeto:

$$\partial_{\rho} F_{\nu\mu}^c = \partial_{\rho} \partial_{\mu} A_{\nu}^c - \partial_{\rho} \partial_{\nu} A_{\mu}^c = \partial_{\rho} T_{\nu\mu}^c. \quad (3.52)$$

Até este ponto, concluímos que a Lagrangiana do campo de gauge é uma quantidade com a seguinte dependência funcional:

$$\mathcal{L}_A \rightarrow \mathcal{L}'_A = \mathcal{L}'_A [e_{\mu}^c, T_{\nu\mu}^c, \Gamma_{\mu\nu}^{\omega}, \partial_{\rho} T_{\nu\mu}^c].$$

Este é de fato o resultado que decorre do requisito de simetria/invariância da translação. É interessante notar que a presença explícita da conexão e da derivada do tensor de torção na dependência funcional de \mathcal{L}_A nos permite propor Lagrangianos que são invariantes de gauge, mas que não levam a equações covariantes por transformações gerais de coordenadas. É claro que o princípio da covariância geral (princípio da relatividade) é completamente independente do princípio do gauge (pelo menos para o caso presente). Se quisermos que a teoria resultante obedeça ao princípio da covariância geral, devemos impor novas condições sobre a Lagrangiana.

Talvez, a solução ingênua seria simplesmente propor a combinação da derivada da torção com uma contração específica da torção e da conexão, definindo uma derivada covariante da torção de modo que $\mathcal{L}'_A \rightarrow \mathcal{L}''_A = \mathcal{L}''_A [e_{\mu}^c, T_{\nu\mu}^c, \nabla_{\rho} T_{\nu\mu}^c]$. A desvantagem dessa proposta é que a derivada covariante da torção não satisfaz a identidade de Jacobi e a solução da Eq. (3.47) pode ser comprometida. Esse fato é forte o suficiente para nos fazer acreditar que a dependência funcional em \mathcal{L}_A deve ocorrer através de um novo objeto covariante, digamos $G_{\rho\mu\nu}^c$, que incorpora a Eq. (3.50) e a Eq. (3.52) em sua estrutura,

mas que também satisfaz a propriedade cíclica desejada. Sob essa perspectiva, vamos começar com a Identidade de Jacobi aplicada ao comutador de comutadores da derivada covariante:

$$\begin{aligned}
 X_{\mu\nu\rho} &= [\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\rho]] \phi + [\nabla_\nu, [\nabla_\rho, \nabla_\mu]] \phi \\
 &\quad + [\nabla_\rho, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]] \phi = 0.
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Como resultado, segue:

$$X_{\mu\nu\rho} = -e_c^\omega (G_{\rho\mu\nu}^c + G_{\nu\rho\mu}^c + G_{\mu\nu\rho}^c) \nabla_\omega \phi = 0,$$

onde definimos

$$G_{\rho\mu\nu}^c \equiv \nabla_\rho T_{\mu\nu}^c + T_{\mu\rho}^\alpha T_{\nu\alpha}^c. \tag{3.54}$$

Este objeto é um tensor, incorpora a conexão, a derivada da torção e satisfaz a identidade de Jacobi. Em outras palavras, este novo objeto obedece a todas as condições estabelecidas tanto pelas condições de simetria, quanto de covariância. Portanto, reescrevemos a dependência funcional da densidade Lagrangiana com o potencial de gauge e sua derivada como

$$\mathcal{L}_A \rightarrow \mathcal{L}''_A = \mathcal{L}''_A [e_\mu^c, T_{\nu\mu}^c, G_{\rho\mu\nu}^c]. \tag{3.55}$$

Para verificar a Eq. (3.55), iniciamos por verificar a Eq. (3.45)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A_\mu^c} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial h_\mu^c} &= \frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial e_\nu^a} \frac{\partial e_\nu^a}{\partial A_\mu^c} + \frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial e_\nu^a} \frac{\partial e_\nu^a}{\partial h_\mu^c} \\
 &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial e_\nu^a} \frac{\partial}{\partial A_\mu^c} + \frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial e_\nu^a} \frac{\partial}{\partial h_\mu^c} \right] (h_\nu^a - A_\nu^a) \\
 &= -\frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial e_\nu^a} \delta_c^a \delta_\nu^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial e_\nu^a} \delta_c^a \delta_\nu^\mu \\
 &= -\frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial e_\mu^c} + \frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial e_\mu^c} = 0.
 \end{aligned}$$

Em seguida, verificamos a Eq. (3.46),

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \partial_\nu A_\mu^c} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \partial_\nu h_\mu^c} &= \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G_{\rho\beta\alpha}^a} \frac{\partial G_{\rho\beta\alpha}^a}{\partial T_{\lambda\omega}^b} \frac{\partial T_{\lambda\omega}^b}{\partial \partial_\nu A_\mu^c} \\
 &\quad + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G_{\rho\beta\alpha}^a} \frac{\partial G_{\rho\beta\alpha}^a}{\partial \Gamma_{\theta\gamma}^\sigma} \left(\frac{\partial \Gamma_{\theta\gamma}^\sigma}{\partial \partial_\nu A_\mu^c} + \frac{\partial \Gamma_{\theta\gamma}^\sigma}{\partial \partial_\nu h_\mu^c} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \partial_\nu A_\mu^c} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \partial_\nu h_\mu^c} &= -\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G_{\rho\mu\alpha}^c} \Gamma_{\rho\alpha}^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G_{\rho\nu\alpha}^c} \Gamma_{\rho\alpha}^\mu \\ &\quad - \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G_{\rho\beta\nu}^c} \Gamma_{\beta\rho}^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G_{\rho\beta\mu}^c} \Gamma_{\beta\rho}^\nu, \end{aligned}$$

renomeando índices mudos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \partial_\nu A_\mu^c} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \partial_\nu h_\mu^c} &= -\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G_{\rho\mu\beta}^c} \Gamma_{\rho\beta}^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G_{\rho\nu\beta}^c} \Gamma_{\rho\beta}^\mu \\ &\quad - \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G_{\rho\beta\nu}^c} \Gamma_{\beta\rho}^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G_{\rho\beta\mu}^c} \Gamma_{\beta\rho}^\nu. \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \partial_\mu A_\nu^c} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \partial_\mu h_\nu^c} &= -\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G_{\rho\nu\beta}^c} \Gamma_{\rho\beta}^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G_{\rho\mu\beta}^c} \Gamma_{\rho\beta}^\nu \\ &\quad - \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G_{\rho\beta\mu}^c} \Gamma_{\beta\rho}^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G_{\rho\beta\nu}^c} \Gamma_{\beta\rho}^\mu. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \partial_{(\nu} A_{\mu)}^c} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \partial_{(\nu} h_{\mu)}^c} = 0.$$

Por último, verificamos a Eq. (3.47)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \partial_\rho \partial_\nu A_\mu^c} &= \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G_{\omega\beta\alpha}^a} \frac{\partial G_{\omega\beta\alpha}^a}{\partial \partial_\rho \partial_\nu A_\mu^c} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G_{\omega\beta\alpha}^a} \frac{\partial}{\partial \partial_\rho \partial_\nu A_\mu^c} (\partial_\omega \partial_\alpha A_\beta^a - \partial_\omega \partial_\beta A_\alpha^a) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G_{\omega\beta\alpha}^a} \frac{\partial}{\partial \partial_\rho \partial_\nu A_\mu^c} (\delta_\omega^\rho \delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\mu \delta_c^a - \delta_\omega^\rho \delta_\beta^\nu \delta_\alpha^\mu \delta_c^a) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G_{\rho\mu\nu}^c} - \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G_{\rho\nu\mu}^a}. \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \partial_\mu \partial_\rho A_\nu^c} = \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G_{\mu\nu\rho}^c} - \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G_{\mu\rho\nu}^a},$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \partial_\nu \partial_\mu A_\rho^c} = \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G_{\nu\rho\mu}^c} - \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G_{\nu\mu\rho}^a}.$$

Tomando

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \partial_{(\rho} \partial_{\nu} A^c_{\mu)}} = \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G^c_{\rho\mu\nu}} - \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G^a_{\rho\nu\mu}} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G^c_{\mu\nu\rho}} - \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G^a_{\mu\rho\nu}} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G^c_{\nu\rho\mu}} - \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G^a_{\nu\mu\rho}},$$

que pela identidade de Jacobi,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \partial_{(\rho} \partial_{\nu} A^c_{\mu)}} = 0.$$

Todos os termos de ordem superior na derivada da tetrada que aparecem nas equações de campo surgem da contribuição deste objeto $G^c_{\rho\mu\nu}$ para a Lagrangiana. Na próxima seção, construímos diversos invariantes a partir de diferentes combinações e contrações de $G^c_{\rho\mu\nu}$.

3.3.1 Lagrangianos Invariantes Quadráticos

Nesta seção, analisamos os invariantes que levam a equações de ordem superior. Em particular, estamos interessados em objetos que nos darão equações de campo lineares na quarta derivada da tetrada. Essa condição impõe algumas restrições às Lagrangianas que podemos construir. Por exemplo, se considerarmos contribuições lineares de $G^c_{\rho\mu\nu}$, obteríamos equações principalmente de terceira ordem. Isso significa que devemos considerar pelo menos contrações quadráticas de $G^c_{\rho\mu\nu}$. No entanto, se tomarmos contrações cúbicas, quartas ou superiores, as equações de campo não seriam lineares na quarta derivada de e^{μ}_c . Se tomarmos contrações quadráticas de $G^c_{\rho\mu\nu}$ também contraídas com a torção, novamente não obtemos equações lineares. Portanto, estamos restritos a considerar apenas objetos que são construídos com contrações quadráticas de $G^c_{\rho\mu\nu}$ e nenhum outro objeto. No entanto, como será visto abaixo, algumas contrações particulares resultam em termos que são combinações quadráticas da torção - esses termos também serão negligenciados, pois resultam em equações de segunda ordem. Além disso, algumas contrações são apenas combinações lineares de outras contrações. Nosso objetivo é mapear todas as contribuições quadráticas independentes que levam a equações lineares na quarta derivada da tetrada.

Começamos encontrando os possíveis escalares construídos com contração interna dos índices de $G^c_{\rho\mu\nu}$:

$$\text{G-scalar} \begin{cases} G^{[1]} = \nabla_{\mu} T^{\nu\mu}_{\nu}; \\ G^{[2]} = T^{\alpha}_{\nu\mu} T^{\mu\nu}_{\alpha}; \\ G^{[3]} = \nabla_{\mu} T^{\nu}_{\nu}{}^{\mu} + T^{\alpha}_{\nu\mu} T^{\nu\mu}_{\alpha}. \end{cases} \quad (3.56)$$

Dos escalares apresentados na Eq. (3.56), apenas $G^{[1]}$ é relevante para nós, devido ao fato de que $G^{[2]}$ não contém derivadas de ordem superior e $G^{[3]}$ pode ser obtido a partir da soma de $G^{[1]}$ e $G^{[2]}$ - os termos de ordem superior são equivalentes tanto com $G^{[1]}$ quanto

com $G^{[3]}$. Isso significa que temos apenas um único invariante de interesse nesta categoria, a saber:

$$\text{Invariantes quadráticos de G - escalar } \left\{ G^{[1]}G^{[1]} \right. \quad . \quad (3.57)$$

Outra possibilidade é considerar invariantes que são obtidos a partir de contrações dos tensores de ordem 2 obtidos de contrações internas de dois índices de G :

$$\text{Tensores de rank-2 de G } \left\{ \begin{array}{l} G_{\mu\nu}^{[1]} = \nabla_{\mu}T^{\beta}_{\nu\beta} + T^{\alpha}_{\nu\mu}T^{\beta}_{\beta\alpha}; \\ G_{\mu\nu}^{[2]} = \nabla_{\mu}T^{\alpha}_{\alpha\nu} + T^{\alpha}_{\beta\mu}T^{\beta}_{\nu\alpha}; \\ G_{\mu\nu}^{[3]} = \nabla_{\alpha}T^{\alpha}_{\mu\nu} + T^{\alpha}_{\mu\beta}T^{\beta}_{\nu\alpha}; \\ G_{\mu\nu}^{[4]} = \nabla_{\alpha}T_{\mu}^{\alpha}_{\nu}; \\ G_{\mu\nu}^{[5]} = \nabla_{\alpha}T_{\mu\nu}^{\alpha} + T^{\alpha}_{\nu\beta}T_{\mu}^{\beta}_{\alpha}; \\ G_{\mu\nu}^{[6]} = T^{\alpha}_{\beta\nu}T_{\mu}^{\beta}_{\alpha}. \end{array} \right. \quad (3.58)$$

No entanto, como afirmado anteriormente, estamos apenas interessados em invariantes quadráticos que nos dão termos de quarta ordem na tetraedra nas equações de campo. Como podemos ver, a contribuição de ordem superior de $G_{\mu\nu}^{[1]}$ é equivalente à contribuição de $G_{\mu\nu}^{[2]}$; o mesmo acontece com $G_{\mu\nu}^{[4]}$ e $G_{\mu\nu}^{[5]}$. Quando consideramos a identidade de Jacobi, restam apenas três contrações independentes:

$$\text{Tensores de rank-2 de G } \left\{ \begin{array}{l} G_{\mu\nu}^{[1]}G^{\mu\nu}_{[1]}; \\ G_{\mu\nu}^{[1]}G^{\mu\nu}_{[4]}; \\ G_{\mu\nu}^{[4]}G^{\mu\nu}_{[4]}. \end{array} \right. \quad (3.59)$$

Finalmente, temos que considerar os invariantes quadráticos obtidos das contrações de $G_{\sigma\rho\mu\nu}$ sem contração interna, como mostrado abaixo:

$$\text{Invariantes quadráticos de G } \left\{ \begin{array}{l} G_{\sigma\rho\mu\nu} \quad G^{\sigma\rho\mu\nu}; \\ G_{\sigma\rho\mu\nu} \quad G^{\sigma\rho\nu\mu}; \\ G_{\sigma\rho\mu\nu} \quad G^{\sigma\mu\rho\nu}; \\ G_{\sigma\rho\mu\nu} \quad G^{\rho\sigma\mu\nu}; \\ G_{\sigma\rho\mu\nu} \quad G^{\rho\mu\nu\sigma}; \\ G_{\sigma\rho\mu\nu} \quad G^{\rho\sigma\nu\mu}; \\ G_{\sigma\rho\mu\nu} \quad G^{\mu\sigma\rho\nu}; \\ G_{\sigma\rho\mu\nu} \quad G^{\mu\rho\nu\sigma}; \\ G_{\sigma\rho\mu\nu} \quad G^{\mu\rho\sigma\nu}; \\ G_{\sigma\rho\mu\nu} \quad G^{\nu\rho\mu\sigma}. \end{array} \right. \quad (3.60)$$

Para encontrar esses invariantes quadráticos, seguimos um procedimento semelhante ao apresentado em (CUZINATTO *et al.*, 2008), que consiste em: Escrever todos os tensores fixando o primeiro índice e variando os outros.

$$\begin{array}{cccc}
 \textit{Fix.a} & \textit{Fix.b} & \textit{Fix.c} & \textit{Fix.d} \\
 (abcd) & (bacd) & (cabd) & (dabc) \\
 (acdb) & (bcda) & (cbda) & (dbca) \\
 (adbc) & (bdac) & (cdab) & (dcab) \\
 (abdc) & (badc) & (cadb) & (dacb) \\
 (acbd) & (bcad) & (cbad) & (dbac) \\
 (adcb) & (bdca) & (cdba) & (dcba)
 \end{array}$$

Alguns desses tensores são equivalentes, pois sabemos que a Identidade de Bianchi é válida devido à construção do tensor, Eq.(3.53). Podemos eliminar a terceira e a sexta linha da Eq. (3.3.1), assim temos:

$$\begin{array}{cccc}
 \textit{Fix.a} & \textit{Fix.b} & \textit{Fix.c} & \textit{Fix.d} \\
 (abcd) & (bacd) & (cabd) & (dabc) \\
 (acdb) & (bcda) & (cbda) & (dbca) \\
 (abdc) & (badc) & (cadb) & (dacb) \\
 (acbd) & (bcad) & (cbad) & (dbac)
 \end{array}$$

Agora, a contração dos termos pode ser escrita como:

$$(abcd) \begin{bmatrix} (abcd) & (bacd) & (cabd) & (dabc) \\ (acdb) & (bcda) & (cbda) & (dbca) \\ (abdc) & (badc) & (cadb) & (dacb) \\ (acbd) & (bcad) & (cbad) & (dbac) \end{bmatrix}.$$

Então, é possível manipular os invariantes quadráticos e descobrir que alguns deles são equivalentes, portanto, podemos reduzir o total de invariantes quadráticos. Abaixo, damos um exemplo dessas manipulações renomeando os índices mudos. Tomamos a contração com o terceiro tensor na primeira linha.

$$\begin{aligned}
 (abcd) (cabd) &= (abcd) (cabd)c \leftrightarrow a \\
 &= (cbad) (acbd)c \leftrightarrow b \\
 &= (bcad) (abcd),
 \end{aligned}$$

onde $c \leftrightarrow b$ indica os termos a serem permutados naquela passagem.

Portanto,

$$(abcd)(cabd) = (bcad)(abcd).$$

Eliminando os invariantes quadráticos que são equivalentes, encontramos 10 invariantes quadráticos.

$$(abcd) \begin{bmatrix} (abcd) & (bacd) & (cabd) & & & \\ & (bcda) & (cbda) & (dbca) & & \\ (abdc) & (badc) & & & & \\ (acbd) & & (cbad) & & & \end{bmatrix}.$$

Esses invariantes quadráticos são apresentados na Eq. (3.60).

Outro resultado importante no contexto dos invariantes é que uma manipulação apropriada da Eq. (3.54) nos permite expressar o tensor de Riemann da conexão de Levi-Civita, Γ_{LC} , como uma função de $G^c_{\rho\mu\nu}$ e termos quadráticos de torção, como podemos ver abaixo:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\nu\mu\rho}(\Gamma_{LC}) = & \frac{1}{2} \{ G_{\nu\alpha\mu\rho} + G_{\rho\nu\alpha\mu} + G_{\mu\nu\rho\alpha} \\ & - G_{\alpha\nu\mu\rho} - G_{\rho\alpha\nu\mu} - G_{\mu\alpha\rho\nu} \\ & + T^{\beta}_{\alpha\nu} (T_{\beta\mu\rho} - T_{\mu\rho\beta} - T_{\rho\mu\beta}) \\ & + \frac{1}{2} T^{\beta}_{\mu\nu} (T_{\alpha\rho\beta} - T_{\rho\alpha\beta} - T_{\beta\rho\alpha}) \\ & + \frac{1}{2} T_{\mu\nu}{}^{\beta} (T_{\alpha\beta\rho} - T_{\rho\alpha\beta} + T_{\beta\rho\alpha}) \\ & + \frac{1}{2} T_{\nu\mu}{}^{\beta} (T_{\alpha\beta\rho} - T_{\rho\alpha\beta} - T_{\beta\rho\alpha}) \\ & + \frac{1}{2} T^{\beta}_{\alpha\mu} (T_{\nu\rho\beta} - T_{\rho\nu\beta} - T_{\beta\rho\nu}) \\ & - \frac{1}{2} T_{\alpha\mu}{}^{\beta} (T_{\nu\beta\rho} - T_{\rho\nu\beta} - T_{\beta\rho\nu}) \\ & + \frac{1}{2} T_{\mu}{}^{\beta}{}_{\alpha} (T_{\nu\beta\rho} - T_{\rho\nu\beta} + T_{\beta\rho\nu}) \}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

A partir desse tensor de Riemann, é possível construir o tensor de Ricci e a curvatura escalar como de costume. Esse resultado implica que todas as teorias construídas no espaço-tempo de Riemann com invariantes construídos com os tensores de Riemann e Ricci e o escalar de curvatura têm uma versão teleparalela análoga no contexto apresentado. Além do espaço-tempo de Riemann, a partir da Eq. (3.61) podemos obter o termo de superfície B , presente no teleparalelismo. Isto porque, como visto no capítulo anterior $R(\{\}) = B - T$.

Utilizando a Eq. (3.61) junto as definições de G , obtemos:

$$B = -2 (G^{[1]} + T_\mu T^\mu). \quad (3.62)$$

Conseqüentemente, podemos mapear os objetos aqui apresentados em teorias de gravidade teleparalela $f(T, B)$.

Na seção seguinte, escolhemos um dos invariantes encontrados e aplicamos a um exemplo.

3.3.2 Exemplo

Nesta seção, apresentamos um modelo simplificado e calculamos as equações de campo e o potencial gravitacional no limite estático de campo fraco. Nossa Lagrangiana é composta por dois termos, o primeiro é o escalar de torção e o segundo vem da Eq. (3.57). A integral de ação é dada por:

$$S_T = -\frac{1}{2\chi} \int dx^4 \left(eT + 2e\beta^2 (G^{[1]})^2 \right) + S_m, \quad (3.63)$$

onde β é um parâmetro real positivo. Variando Eq.(3.63) em relação à tetrada, obtemos a seguinte equação de campo

$$\begin{aligned} & \partial_\nu (4e\Sigma_f^{\rho\nu}) - ee_f^\rho \Sigma_{abc} T^{abc} + 4e\Sigma_d^{\rho\nu} T_{f\nu}^d \\ & + 2\beta^2 ee_f^\rho (G^{[1]})^2 + \beta ee_f^\mu g^{\nu\rho} G^{[1]} \nabla_\mu T_\nu \\ & + 4\beta^2 ee_f^\rho g^{\mu\nu} (\nabla_\nu - T_\nu) (\nabla_\mu - T_\mu) G^{[1]} \\ & - 4\beta^2 ee_f^\nu g^{\mu\rho} \nabla_\nu (\nabla_\mu - T_\mu) G^{[1]} = 2\chi e T_f^\rho. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Na Eq. (3.64), vemos que a primeira linha representa os termos fornecidos pelo escalar de torção e as últimas linhas são a contribuição da Eq. (3.57). É claro que quando o parâmetro $\beta \rightarrow 0$, recuperamos a equação de campo da TEGR, Eq. (2.26). Para encontrar o potencial gravitacional, linearizamos Eq.(3.64) usando a expansão da tetrada como

$$e^a{}_\mu = \delta^a{}_\mu + \mathcal{E}^a{}_\mu, \quad \text{onde } |\mathcal{E}^a{}_\mu| \ll 1. \quad (3.65)$$

O objeto $E^a{}_\mu$ não é simétrico. No entanto, é possível construir um objeto simétrico,

$$\mathfrak{E}_{\mu\nu} = \mathcal{E}_{\mu\nu} + \mathcal{E}_{\nu\mu}, \quad (3.66)$$

cuja traço é

$$\mathfrak{E} = 2\mathcal{E}, \quad (3.67)$$

e

$$\mathcal{E}_\mu^\nu = \mathcal{E}_\mu^a \delta_a^\nu. \quad (3.68)$$

Nós enfatizamos que $\mathfrak{E}_{\mu\nu}$ na Eq. (3.66) é o mesmo objeto que aparece na expansão do tensor métrico no regime de campo fraco. Também podemos definir

$$\bar{\mathfrak{E}}_{\mu\nu} = \mathfrak{E}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\mathfrak{E}, \quad (3.69)$$

e

$$\mathfrak{E} = -\bar{\mathfrak{E}}. \quad (3.70)$$

O processo de linearização da Eq. (3.64) usando as Eqs. (3.65 - 3.70) nos leva a

$$\square \bar{\mathfrak{E}}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\beta \square (\partial_\mu \partial_\nu - \eta_{\mu\nu} \square) \bar{\mathfrak{E}} + \mathcal{O}(E^2) = 2\chi T_{\mu\nu}, \quad (3.71)$$

quando a seguinte fixação de gauge é aplicada: $\partial_\mu \bar{\mathfrak{E}}^{\mu\nu} = 0$.

No regime de campo fraco, esperamos baixas velocidades e um campo estático. A partir dessas considerações, os termos de segunda ordem nas derivadas temporais e de velocidade são negligenciados. Além disso, assumindo o tensor energia-momento de um fluido perfeito, a Eq. (3.71) se torna:

$$\nabla^2 \left(\bar{\mathfrak{E}}^{00} - \frac{\beta}{4} \nabla^2 \bar{\mathfrak{E}} \right) = 2\chi\rho. \quad (3.72)$$

Observe que recuperamos a equação de Poisson da TEGR quando $\beta \rightarrow 0$. O último passo desta seção é avaliar o potencial. O traço apresentado na Eq. (3.72) pode ser escrito como $\bar{\mathfrak{E}}^{00}$ quando consideramos um fluido sem pressão, o que significa que podemos negligenciar as suas contribuições espaciais (observe que isso é consistente com a fixação de gauge mencionada anteriormente). Portanto, temos:

$$\nabla^2 \left(1 - \frac{\beta}{4} \nabla^2 \right) \bar{\mathfrak{E}}^{00} = 2\chi\rho. \quad (3.73)$$

Para resolver a Eq. (3.73), realizamos transformações de Fourier, o que nos leva a:

$$\bar{\mathfrak{E}}^{00}(\mathbf{x}) = \frac{16\pi G}{(2\pi)^3} \int d^3x' \int d^3k \frac{\rho(\mathbf{x}') \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')] }{-|\mathbf{k}|^2 - \beta^2 |\mathbf{k}|^4}. \quad (3.74)$$

Essa integral pode ser resolvida com o teorema do resíduo quando fazemos uma continuação analítica da variável $k = |\mathbf{k}|$ para o plano complexo. O resultado final mostra que o potencial gravitacional do nosso modelo é:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \bar{\mathfrak{E}}^{00}(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left[1 - \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{\beta}\right) \right] d^3x'. \quad (3.75)$$

Este potencial é uma combinação linear de um potencial newtoniano e um potencial do tipo Yukawa. A mesma estrutura deste potencial é encontrada na literatura (CAPOZZIELLO *et al.*, 2009). Um resultado interessante é que, no limite $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow 0$, a contribuição de Yukawa regulariza o potencial, mostrando que o potencial efetivo é finito em escalas de comprimento curtas. Além disso, enquanto o potencial newtoniano é geralmente associado a um campo sem massa, o potencial de Yukawa é associado a um campo com massa. A combinação de ambas as contribuições para o potencial total indica a existência de dois modos - um modo massivo e um modo sem massa - para o campo gravitacional. O primeiro é de curto alcance, enquanto o segundo pode ser detectado em longo alcance.

3.4 Considerações Finais

Neste capítulo, apresentamos uma gravidade teleparalela modificada como uma teoria de gauge de segunda ordem. Vimos como o princípio do gauge aplicado ao grupo de translação, através da metodologia de Utiyama, implica a presença de um sistema físico identificado como um campo de interação. Esta afirmação se torna bastante clara quando nos deparamos com o objeto e^a_μ definido na seção 3.2, que é composto por uma parte holônoma (tetrada trivial) e uma parte não-holônoma (potencial de gauge), onde esta última carrega todas as informações da interação gravitacional da teoria, enquanto a primeira trata apenas dos efeitos não inerciais.

Além da associação da intensidade de força do campo $F^c_{\nu\mu}$ com o tensor de torção $T^{\rho}_{\nu\mu}$, pudemos ver que a dependência na Lagrangiana do campo de gauge ocorre através de um novo tensor $G^c_{\mu\nu\rho}$, que possui três índices de espaço-tempo e um índice de espaço tangente. A partir desse novo objeto, foi possível construir vários invariantes quadráticos, que levam a equações lineares na quarta derivada de e^a_μ . Além dos invariantes obtidos, vimos que também é possível escrever o tensor de curvatura da conexão de Levi-Civita em termos de $G^c_{\mu\nu\rho}$ e $T^{\rho}_{\nu\mu}$, o que mostra que todas as teorias construídas com os tensores de Riemann e Ricci e a curvatura escalar na variedade de Riemann têm um equivalente teleparalelo no contexto da teoria de gauge. O recíproco não é verdadeiro, ou seja, nem todas as teorias construídas no presente caso têm um equivalente Riemanniano.

O escalar G foi considerado em um exemplo, onde fomos capazes de obter o potencial gravitacional no limite estático de campo fraco como uma combinação dos potenciais de Newton e Yukawa. Este resultado sugere a existência tanto de modos massivos quanto de modos sem massa para o gráviton em uma eventual quantização.

Utilizando a abordagem de Utiyama, desenvolvemos uma teoria de gauge de segunda

ordem na Lagrangiana e de quarta ordem nas equações de campo. No entanto, não há restrições que impeçam a obtenção de teorias com graus ainda maiores tanto no invariante quanto nas equações de campo. É claro que teorias de ordem superior apresentam desafios significativos devido à sua não linearidade. Uma maneira de abordar essas dificuldades é tratar a teoria no *frame* de Jordan, o que resulta em uma teoria escalar-tensorial. No próximo capítulo, abordaremos esse tema com mais detalhes.

4 Abordagem escalar-tensorial para a gravidade teleparalela

$$f(T, B, \nabla_\mu T, \nabla_\mu B)$$

Como mencionado no capítulo anterior, um mecanismo muito interessante para lidar com teorias de ordem superior é o tratamento destas no *frame* de Jordan. Neste *frame*, introduzimos variáveis auxiliares que nos permitem definir novos campos e, a partir dessas definições, reescrever a ação, reduzindo a ordem da teoria. Em alguns casos, como o apresentado na subseção 4.1.2, essa redução não ocorre, mas o *frame* de Jordan ainda oferece a vantagem de estender o espaço das variáveis da teoria, o que é bastante interessante quando trabalhamos com as soluções de equações. Esse tipo de abordagem também é comumente empregado na mecânica clássica, como é o caso da transição do formalismo Lagrangiano para o Hamiltoniano, neste exemplo podemos observar que, quando levado para o formalismo Hamiltoniano a teoria tem sua ordem reduzida e uma extensão no espaço de fase.

Outra implicação importante sobre o *frame* de Jordan é que as teorias tratadas nesse *frame* se mapeiam em uma teoria escalar-tensorial, na qual o campo escalar se acopla ao escalar da teoria de gravitação de forma não mínima. Uma forma de se obter o desacoplamento desses campos é através do *frame* de Einstein, onde é realizado uma transformação conforme no campo fundamental da teoria junto à uma escolha para o fator de transformação conforme.

De fato, cada abordagem trás consigo suas vantagens e desvantagens e gera ainda muitas discussões, uma vez que a distinção entre diferentes representações da mesma teoria é uma questão complexa, principalmente ao que diz respeito a passagem do *frame* de Jordan para o *frame* de Einstein. Embora façamos uma análise dos graus de liberdade da teoria através do problema de Cauchy, determinar a equivalência entre esses *frames* está além do escopo deste capítulo.

Este capítulo, tem como finalidade a extensão dos resultados apresentados em Ref. (POMPEIA, 2021), onde a análise das teorias $f(T, \nabla_\mu T, e_\mu^a)$ e $f(T, \nabla_{\mu_1} T, \dots, \nabla_{\mu_n} \cdots \nabla_{\mu_1} T)$

nos *frames* de Jordan e Einstein foi apresentada (ASSENCIO; POMPEIA, 2024). Portanto, além de considerar a dependência do escalar de torção e sua derivada, introduzimos a dependência de B e sua derivada, ou seja, trabalhamos com $f(T, B, \nabla_\mu T, \nabla_\mu B)$. Para isso, na Seção 4.1, para que o leitor se familiarize com as metodologias empregadas, apresentamos o problema de Cauchy e seu uso para determinar os graus de liberdade de uma teoria e através de um caso simples $f(T)$ mostramos como acontece a transição da teoria de um *frame* para o outro. Em seguida, na Seção 4.2, apresentamos a análise da teoria no *frame* geométrico, seguida pela análise no *frame* de Jordan. A transição deste para o *frame* de Einstein é realizada por uma transformação conforme. Finalmente, na Seção 4.3, apresentamos um exemplo e discutimos os graus de liberdade (dof) por meio da análise do problema de Cauchy.

4.1 Teorias teleparalelas de gravidade $f(T)$

Nesta seção, introduzimos o problema de Cauchy e como acontece a mudança entre os *frames* de Jordan e Einstein. Para isso tomamos alguns exemplos simples da gravitação Teleparalela.

4.1.1 O Problema de Cauchy

O problema de Cauchy refere-se a um problema de condições iniciais (FELSAGER, 2012), cuja aplicação possibilita a análise dinâmica de uma teoria, conforme será explorado adiante.

Tomemos uma partícula que se movimenta em uma dimensão, assim, sua equação de movimento é expressa por

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{dV}{dx}(x). \quad (4.1)$$

O que podemos dizer sobre a evolução dinâmica desse sistema? Por enquanto, baseando-se apenas na equação de movimento, não temos uma resposta precisa para essa pergunta. Isto porque, sem condições iniciais a equação diferencial acima admite mais de uma solução. No entanto, ao fixarmos um tempo t_1 e prescrevermos o valor de x e a sua taxa de variação neste dado momento,

$$x(t_1) = x_1, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_1} = v_1, \quad (4.2)$$

a Eq. (4.1) terá apenas uma única solução. Consequentemente, teremos conhecimento da evolução dinâmica do sistema. É por isso que é dito que x é uma quantidade dinâmica e que o sistema em questão é caracterizado por esta única quantidade dinâmica.

A seguir, mostramos como o problema de Cauchy pode ser utilizado no contexto de

teorias da gravitação Teleparalela.

4.1.1.1 O problema de Cauchy no contexto Teleparalelo

Além da forma habitual apresentada no Capítulo 2 na Eq. (2.26), as equações Teleparalelas também podem ser expressas em sua forma explicitamente covariante

$$E_m^\omega = 4\nabla_\nu \Sigma_m^{\omega\nu} - 4T_\nu \Sigma_m^{\omega\nu} + 4\Sigma_m^{\beta\omega\nu} T_{\beta\nu m} + 2\Sigma_m^{\nu\beta} T_{\nu\beta}^\omega + T e_m^\omega = \chi \mathcal{T}_m^i. \quad (4.3)$$

Lembrando que

$$\Sigma_m^{\omega\nu} \equiv \frac{1}{4} (T_m^{\omega\nu} + T_m^{\omega\nu} - T_m^{\nu\omega}) + \frac{1}{2} (e_m^\nu T^\omega - e_m^\omega T^\nu),$$

e

$$T_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha = e_a^\alpha \partial_\mu e_\nu^a - e_a^\alpha \partial_\nu e_\mu^a.$$

Podemos observar na equação 4.3, que o único termo que pode conter uma derivada de segunda ordem no campo de tetradas é o primeiro termo do lado direito da equação, $4\nabla_\nu \Sigma_m^{\omega\nu}$. Este termo pode ainda ser expandido em

$$4\nabla_\nu \Sigma_m^{\omega\nu} = 4\nabla_0 \Sigma_m^{\omega 0} + 4\nabla_i \Sigma_m^{\omega i}.$$

Como estamos interessados nos termos de segunda derivada temporal no campo de tetradas, uma vez que esta é a maior ordem de derivada temporal da teoria e portanto descreve a sua dinâmica, desprezaremos o segundo termo da direita da equação, onde $\nu = i$.

À respeito do termo de interesse, $4\nabla_0 \Sigma_m^{\omega 0}$, o índice ω pode assumir os seguintes valores

$$\nabla_0 \Sigma_m^{\omega 0} = \begin{cases} \nabla_0 \Sigma_m^{00} & , \omega = 0, \\ \nabla_0 \Sigma_m^{i0} & , \omega = i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

No entanto, assim como o tensor de torção, o tensor de superpotencial, $\Sigma_m^{\omega\nu}$, possui antissimetria nos dois últimos índices, o que nos conduz à

$$\nabla_0 \Sigma_m^{00} = 0.$$

Portanto, nossa análise seguirá sobre

$$4\nabla_0 \Sigma_m^{i0}.$$

que pode ser escrito como

$$4\nabla_0 \Sigma_m^{i0} \equiv \nabla_0 [(T_m^{i0} + T_m^{i0} - T_m^{0i}) + 2(e_m^0 T^i - e_m^i T^0)],$$

ou

$$4\nabla_0 \Sigma_m^{i0} = e_m^\mu g_{\alpha\mu} g^{\rho i} g^{\beta 0} \nabla_0 T_{\rho\beta}^\alpha + e_m^\mu g^{\beta 0} \nabla_0 T_{\mu\beta}^i - e_m^\mu g^{\rho i} \nabla_0 T_{\mu\rho}^0 \\ + 2(e_m^0 g^{\rho i} \nabla_0 T_{\sigma\rho}^\sigma - e_m^i g^{\beta 0} \nabla_0 T_{\sigma\beta}^\sigma).$$

Reescrevendo o tensor de torção em termos da conexão,

$$4\nabla_0 \Sigma_m^{i0} = e_m^\mu g_{\alpha\mu} g^{\rho i} g^{\beta 0} \nabla_0 (\Gamma_{\rho\beta}^\alpha - \Gamma_{\beta\rho}^\alpha) + e_m^\mu g^{\beta 0} \nabla_0 (\Gamma_{\mu\beta}^i - \Gamma_{\beta\mu}^i) - e_m^\mu g^{\rho i} \nabla_0 (\Gamma_{\mu\rho}^0 - \Gamma_{\rho\mu}^0) \\ + 2(e_m^0 g^{\rho i} \nabla_0 (\Gamma_{\sigma\rho}^\sigma - \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma) - e_m^i g^{\beta 0} \nabla_0 (\Gamma_{\sigma\beta}^\sigma - \Gamma_{\beta\sigma}^\sigma)),$$

então em termos da tetrada, obtemos

$$4\nabla_0 \Sigma_m^{i0} = e_m^\mu g_{\alpha\mu} g^{\rho i} g^{\beta 0} \nabla_0 (e_a^\alpha \partial_\rho e_\beta^a - e_a^\alpha \partial_\beta e_\rho^a) + e_m^\mu g^{\beta 0} \nabla_0 (e_a^i \partial_\mu e_{. \beta}^a - e_a^i \partial_\beta e_{. \mu}^a) \\ - e_m^\mu g^{\rho i} \nabla_0 (e_a^0 \partial_\mu e_\rho^a - e_a^0 \partial_\rho e_\mu^a) + 2e_m^0 g^{\rho i} \nabla_0 (e_a^\sigma \partial_\sigma e_\rho^a - e_a^\sigma \partial_\rho e_\sigma^a) \\ - 2e_m^i g^{\beta 0} \nabla_0 (e_a^\sigma \partial_\sigma e_\beta^a - e_a^\sigma \partial_\beta e_\sigma^a).$$

Depois de realizarmos algumas manipulações algébricas na equação acima, temos

$$4\nabla_0 \Sigma_m^{i0} = e_a^\alpha e_m^\mu g_{\alpha\mu} g^{0i} g^{\beta 0} \nabla_0 \partial_0 e_\beta^a - e_a^\alpha e_m^\mu g_{\alpha\mu} g^{\rho i} g^{00} \nabla_0 \partial_0 e_\rho^a \\ + e_a^i e_m^0 g^{\beta 0} \nabla_0 \partial_0 e_\beta^a - e_a^i e_m^\mu g^{00} \nabla_0 \partial_0 e_\mu^a \\ - e_a^0 e_m^0 g^{\rho i} \nabla_0 \partial_0 e_\rho^a + e_a^0 e_m^\mu g^{0i} \nabla_0 \partial_0 e_\mu^a \\ + 2e_a^0 e_m^0 g^{\rho i} \nabla_0 \partial_0 e_\rho^a - 2e_a^\sigma e_m^0 g^{0i} \nabla_0 \partial_0 e_\sigma^a \\ - 2e_a^0 e_m^i g^{\beta 0} \nabla_0 \partial_0 e_\beta^a + 2e_a^\sigma e_m^i g^{00} \nabla_0 \partial_0 e_\sigma^a \\ + e_a^\alpha e_m^\mu g_{\alpha\mu} g^{ji} g^{\beta 0} \nabla_0 \partial_j e_\beta^a - e_a^\alpha e_m^\mu g_{\alpha\mu} g^{\rho i} g^{j0} \nabla_0 \partial_j e_\rho^a \\ + e_a^i e_m^j g^{\beta 0} \nabla_0 \partial_j e_\beta^a - e_a^i e_m^\mu g^{j0} \nabla_0 \partial_j e_\mu^a \\ - e_a^0 e_m^j g^{\rho i} \nabla_0 \partial_j e_\rho^a + e_a^0 e_m^\mu g^{ji} \nabla_0 \partial_j e_\mu^a \\ + 2e_a^j e_m^0 g^{\rho i} \nabla_0 \partial_j e_\rho^a - 2e_a^\sigma e_m^0 g^{ji} \nabla_0 \partial_j e_\sigma^a \\ - 2e_a^j e_m^i g^{\beta 0} \nabla_0 \partial_j e_\beta^a + 2e_a^\sigma e_m^i g^{j0} \nabla_0 \partial_j e_\sigma^a.$$

Sendo nosso interesse as derivadas temporais de segunda ordem, nomeamos os termos com derivadas espaciais como

$$\begin{aligned}
 U_m^i &= e_a^\alpha e_m^\mu g_{\alpha\mu} g^{ji} g^{\beta 0} \nabla_0 \partial_j e_\beta^a - e_a^\alpha e_m^\mu g_{\alpha\mu} g^{\rho i} g^{j 0} \nabla_0 \partial_j e_\rho^a \\
 &\quad + e_a^i e_m^j g^{\beta 0} \nabla_0 \partial_j e_\beta^a - e_a^i e_m^\mu g^{j 0} \nabla_0 \partial_j e_\mu^a \\
 &\quad - e_a^0 e_m^j g^{\rho i} \nabla_0 \partial_j e_\rho^a + e_a^0 e_m^\mu g^{ji} \nabla_0 \partial_j e_\mu^a \\
 &\quad + 2e_a^j e_m^0 g^{\rho i} \nabla_0 \partial_j e_\rho^a - 2e_a^\sigma e_m^0 g^{ji} \nabla_0 \partial_j e_\sigma^a \\
 &\quad - 2e_a^j e_m^i g^{\beta 0} \nabla_0 \partial_j e_\beta^a + 2e_a^\sigma e_m^i g^{j 0} \nabla_0 \partial_j e_\sigma^a.
 \end{aligned}$$

Segue que,

$$\begin{aligned}
 4\nabla_0 \Sigma_m^{i 0} &= \eta_{am} g^{0i} g^{\beta 0} \nabla_0 \partial_0 e_\beta^a - \eta_{am} g^{\rho i} g^{00} \nabla_0 \partial_0 e_\rho^a \\
 &\quad + e_a^i e_m^0 g^{\beta 0} \nabla_0 \partial_0 e_\beta^a - e_a^i e_m^\mu g^{00} \nabla_0 \partial_0 e_\mu^a \\
 &\quad - e_a^0 e_m^0 g^{\rho i} \nabla_0 \partial_0 e_\rho^a + e_a^0 e_m^\mu g^{0i} \nabla_0 \partial_0 e_\mu^a \\
 &\quad + 2e_a^0 e_m^0 g^{\rho i} \nabla_0 \partial_0 e_\rho^a - 2e_a^\sigma e_m^0 g^{0i} \nabla_0 \partial_0 e_\sigma^a \\
 &\quad - 2e_a^0 e_m^i g^{\beta 0} \nabla_0 \partial_0 e_\beta^a + 2e_a^\sigma e_m^i g^{00} \nabla_0 \partial_0 e_\sigma^a \\
 &\quad + U_m^i.
 \end{aligned}$$

Ao abrirmos a derivada covariante, é esperado que surjam termos com a conexão

$$\begin{aligned}
 4\nabla_0 \Sigma_m^{i 0} &= \{ \eta_{am} g^{0i} g^{\rho 0} - \eta_{am} g^{\rho i} g^{00} \\
 &\quad + e_a^i e_m^0 g^{\rho 0} - e_a^i e_m^\mu g^{00} \\
 &\quad + e_a^0 e_m^\rho g^{0i} + e_a^0 e_m^0 g^{\rho i} \\
 &\quad - 2e_a^\rho e_m^0 g^{0i} - 2e_a^0 e_m^i g^{\rho 0} \\
 &\quad + 2e_a^\rho e_m^i g^{00} \} (\partial_0 \partial_0 e_\rho^a + \Gamma_{00}^\sigma \partial_\sigma e_\rho^a + \Gamma_{0\rho}^\sigma \partial_0 e_\sigma^a) \\
 &\quad + U_m^i.
 \end{aligned}$$

No entanto, estes termos não são de segunda ordem, ou seja, podem ser desprezados. Mantendo nossa análise sobre os termos que acompanham $\partial_0 \partial_0 e_\rho^a$, note que, quando $\rho = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
 4\nabla_0 \Sigma_m^{i 0} &\sim \{ \eta_{am} g^{0i} g^{k 0} - \eta_{am} g^{ki} g^{00} \\
 &\quad + e_a^i e_m^0 g^{k 0} - e_a^i e_m^k g^{00} \\
 &\quad + e_a^0 e_m^k g^{0i} + e_a^0 e_m^0 g^{ki} \\
 &\quad - 2e_a^k e_m^0 g^{0i} - 2e_a^0 e_m^i g^{k 0} \\
 &\quad + 2e_a^k e_m^i g^{00} \} \partial_0 \partial_0 e_k^a.
 \end{aligned}$$

Fica evidente, pela abordagem do problema de Cauchy, que apenas as quantidades e_k^a são dinâmicas no Teleparalelismo, enquanto e_0^a possui caráter cinemático. Os resultados obtidos nos informam também, que as equações de campo que determinam a dinâmica da teoria são apenas

$$E_m^i = \chi \mathcal{T}_m^i.$$

4.1.2 *Frame* de Jordan

Tomemos o caso de uma teoria $f(T)$, cuja integral de ação é dada por

$$S_g = -\frac{1}{2\chi} \int d^4x e f(T). \quad (4.4)$$

Para realizarmos a análise desta teoria no *frame* de Jordan, propomos uma integral de ação \bar{S}_g que é equivalente a S_g sob um vínculo,

$$\bar{S}_g = -\frac{1}{2\chi} \int d^4x e [f(\xi) - \phi(\xi - T)], \quad (4.5)$$

introduzido através do multiplicador de Lagrange ϕ . Veja que a minimização de 4.5 em relação aos campos ϕ e ξ , nos conduz as equações

$$\delta_\phi \bar{S}_g = T - \xi = 0,$$

e

$$\delta_\xi \bar{S}_g = \frac{\partial f}{\partial \xi} = \phi.$$

Assumindo que,

$$\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} \neq 0,$$

podemos escrever ξ em função de ϕ ,

$$\xi = \xi(\phi).$$

Dessa forma, a partir de 4.5 reescrevemos uma integral de ação efetiva que é equivalente a 4.4,

$$S_{g_{(eff)}} = -\frac{1}{2\chi} \int d^4x e [f(\xi(\phi)) - \phi(\xi(\phi) - T)]. \quad (4.6)$$

Definindo

$$U(\phi) \equiv \phi \xi(\phi) - f(\xi(\phi)), \quad (4.7)$$

obtemos a seguinte forma para a integral de ação

$$S_{g(eft)} = -\frac{1}{2\chi} \int d^4x e [\phi T - U(\phi)], \quad (4.8)$$

cuja variação em termos dos campos de tetradas e^a_μ e ϕ , nos conduz as equações de campo

$$\begin{cases} 0 &= \frac{4}{e} \partial_\alpha [4\phi \Sigma_{g..}^{\alpha\psi}] + 4\phi \Sigma_{a..}^{\psi\mu} T_{g\mu}^{a..} - e_g^\psi (\phi T - U(\phi)), \\ 0 &= T - \frac{\partial U}{\partial \phi}. \end{cases} \quad (4.9)$$

Repare que o que fizemos nada mais é do que uma transformada de Legendre para o *frame* geométrico, o que nos conduziu a uma teoria Escalar-Tensorial sem o termo cínético. De fato, foram introduzidos novos graus de liberdade a teoria e, conseqüentemente, temos equações a mais a serem resolvidas, o que é bastante interessante para encontrar possíveis soluções. Em outros casos, seria possível observar uma outra característica importante do *frame* de Jordan, que é a redução do grau da Lagrangiana e das equações de campo.

Na referência (SOTIRIOU; FARAONI, 2010), os autores fazem essa mudança de *frames* de uma maneira, inicialmente, diferente, mas que no fundo muito se assemelha ao que já foi discutido acima e que recupera os mesmos resultados apresentados. Como a referência citada já é bastante conhecida na literatura, por motivo de completeza achamos interessante apresentar essa outra abordagem através do multiplicador de lagrange para conhecimento do leitor. No entanto, por conveniência, utilizaremos, nas seções seguintes, a metodologia utilizada em (SOTIRIOU; FARAONI, 2010). Logo, também, faremos uma apresentação sucinta dessa abordagem.

Primeiramente, devemos introduzir variáveis auxiliares independentes, sendo elas escalares ou vetoriais, que substituirão os objetos contidos na função inicial.

Tomemos novamente o caso de uma teoria $f(T)$. O primeiro passo é introduzirmos uma variável escalar ξ para substituir T em f . Em seguida, dada a integral de ação

$$S_g = -\frac{1}{2\chi} \int d^4x e f(T), \quad (4.10)$$

propomos uma integral de ação S'_g que é equivalente a S_g sob determinadas condições

$$S'_g = -\frac{1}{2\chi} \int d^4x e \left[f(\xi) - \frac{\partial f}{\partial \xi} (\xi - T) \right]. \quad (4.11)$$

A minimização de 4.11 com respeito a variável independente ξ , produz a equação

$$\frac{\partial f^2(\xi)}{\partial \xi^2} (\xi - T) = 0. \quad (4.12)$$

Sendo assim, para que S'_g retorne a S_g , 4.12 deve ter solução única

$$T - \xi = 0, \quad (4.13)$$

consequentemente,

$$\frac{\partial f^2(\xi)}{\partial \xi^2} \neq 0. \quad (4.14)$$

Assumidas estas condições, introduzimos um campo escalar ϕ definido como,

$$\phi \equiv \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}. \quad (4.15)$$

Então, reescrevemos a integral de ação 4.11 como

$$S' = -\frac{1}{2\chi} \int d^4x e [\phi T - U(\phi)], \quad (4.16)$$

onde U é um potencial definido como

$$U(\phi) \equiv \phi \xi(\phi) - f(\xi(\phi)). \quad (4.17)$$

Minimizando 4.16 com respeito ao campo ϕ e ao campo de tetradas e^a_ν , obtemos as seguintes equações de campo,

$$\begin{cases} 0 &= \frac{4}{e} \partial_\alpha [4\phi \Sigma_{g..}^{\alpha\psi}] + 4\phi \Sigma_{a..}^{\psi\mu} T_{g\mu}^{a..} - e_g^\psi (\phi T - U(\phi)), \\ 0 &= T - \frac{\partial U}{\partial \phi}. \end{cases} \quad (4.18)$$

O leitor pode ver que ambas as abordagens culminam em um mesmo resultado para as equações de campo.

4.1.3 *Frame* de Einstein

Para a análise de $f(T)$ no *frame* de Einstein, devemos primeiramente realizar uma transformação conforme no campo de tetradas e^a_ν . A transformação conforme se dá pelo produto entre o parâmetro de transformação conforme ou fator conforme, $\Omega(x)$, e o campo fundamental da teoria,

$$\tilde{e}^a_\mu(x) = \Omega(x) e^a_\mu(x), \quad \tilde{e}_a^\mu(x) = \Omega^{-1}(x) e_a^\mu(x). \quad (4.19)$$

Uma vez que outros objetos em nossa teoria são dependentes do campo de tetradas, estes também serão transformados, o que nos leva a,

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{e} = \Omega^4 e, \\ \tilde{g}_{\beta\gamma} = \Omega^2 g_{\beta\gamma}, \\ \tilde{g}^{\beta\gamma} = \Omega^{-2} g^{\beta\gamma}, \\ \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha + \delta_\mu^\alpha \partial_\nu \ln \Omega, \\ \tilde{T}_{\nu\mu}^\alpha = T_{\nu\mu}^\alpha + \delta_\mu^\alpha \partial_\nu \ln \Omega - \delta_\nu^\alpha \partial_\mu \ln \Omega, \\ \tilde{T}_\mu = T_\mu - 3\partial_\mu \ln \Omega, \\ \tilde{T} = \Omega^{-2} [T + 4T^\nu \partial_\nu \ln \Omega - 6g^{\mu\nu} \partial_\nu \ln \Omega \partial_\mu \ln \Omega]. \end{array} \right. \quad (4.20)$$

A partir das transformações contidas em 4.20, reescrevemos o escalar de torção como

$$T = \Omega^2 \tilde{T} - \Omega^2 \tilde{g}^{\rho\nu} \left(4\tilde{T}_\rho + 6\partial_\rho \ln \Omega \right) \partial_\nu \ln \Omega. \quad (4.21)$$

Substituindo 4.21 em 4.8, obtemos a integral de ação $S_{g(ef)}$,

$$\tilde{S}_g = \int d^4x \Omega^{-2} \tilde{e} \left[\tilde{T} - \tilde{g}^{\rho\nu} \left(4\tilde{T}_\rho + 6\partial_\rho \ln \Omega \right) \partial_\nu \ln \Omega \right] + \int d^4x \Omega^{-4} \tilde{e} [-U]. \quad (4.22)$$

Se escolhermos o fator de transformação conforme como sendo equivalente ao campo escalar,

$$\Omega^2 = \phi,$$

então,

$$\tilde{S}_g = \int d^4x \tilde{e} \left\{ \left[\tilde{T} - \tilde{g}^{\rho\nu} \left(4\tilde{T}_\rho + 3\partial_\rho \ln \phi \right) \frac{1}{2} \partial_\nu \ln \phi \right] - \phi^{-2} U \right\}. \quad (4.23)$$

Definimos,

$$\Phi \equiv \sqrt{3} \ln \phi \rightarrow \ln \phi = \frac{\Phi}{\sqrt{3}} \rightarrow \phi = \exp \left[\frac{\Phi}{\sqrt{3}} \right]$$

e

$$\tilde{V} \equiv \exp \left[-\frac{2\Phi}{\sqrt{3}} \right] U = \phi^{-2} U.$$

Finalmente, obtemos uma integral de ação representada no *frame* de Einstein

$$\tilde{S}'_g = \int d^4x \tilde{e} \left\{ \tilde{T} - \tilde{g}^{\rho\nu} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \tilde{T}_\rho \partial_\nu \Phi + \frac{1}{2} \partial_\rho \Phi \partial_\nu \Phi \right] - \tilde{V} \right\}. \quad (4.24)$$

A minimização desta ação em termos de \tilde{e}_μ^α e Φ , produz as equações de campo,

$$\begin{cases} 0 = - \left[\frac{4}{\tilde{e}} \partial_\nu \left(\tilde{e} \tilde{\Sigma}_a^{\nu\mu} \right) + 4 \tilde{\Sigma}^{\rho\nu\omega} \tilde{T}_{\rho\nu a} - \tilde{T} \right] \\ \quad + \frac{2}{\sqrt{3}} \tilde{T}^\mu \partial_\nu \Phi \tilde{e}_a^\nu + \tilde{g}^{\rho\mu} \partial_\rho \Phi \partial_\nu \Phi \tilde{e}_a^\nu - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\rho\nu} \partial_\rho \Phi \partial_\nu \Phi \tilde{e}_a^\mu \\ \quad - \frac{2}{\sqrt{3}} \square \Phi \tilde{e}_a^\mu + \frac{2}{\sqrt{3}} g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\nu \Phi \tilde{e}_a^\alpha - \tilde{V} \tilde{e}_a^\mu - \frac{\delta \tilde{V}}{\delta \tilde{e}_a^\alpha}, \\ 0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\nabla_\nu - \tilde{T}_\nu \right] \tilde{T}^\nu - \tilde{T}^\rho \nabla_\rho \Phi + \square \Phi - \frac{\delta \tilde{V}}{\delta \Phi}. \end{cases} \quad (4.25)$$

É interessante observar que a ação obtida na Eq.(4.24) pode ser entendida como uma teoria TEGR acoplada à um campo escalar através de um acoplamento derivativo e isto fica evidente, uma vez que a primeira linha da 4.25 é exatamente a equação de campo do TEGR.

4.2 Teorias teleparalelas de gravidade $f(T, B, \nabla_\mu T, \nabla_\mu B)$

Nesta seção, com o intuito de construir uma teoria mais genérica, estenderemos as abordagens apresentadas acima para o caso $f(T, B, \nabla_\mu T, \nabla_\mu B)$.

4.2.1 *Frame* geométrico

Começamos com um espaço-tempo de Weitzenböck, que como dito anteriormente é uma variedade equipada com uma conexão espaço-temporal que apresenta torção, mas não curvatura. Em cada ponto do espaço-tempo, um espaço tangente é bem definido e tensores definidos tanto no espaço-tempo quanto no espaço tangente podem ser mapeados um para o outro por um campo de tetradas não triviais e_μ^a . Ele é rotulado por índices latinos internos/tangentes do começo do alfabeto $a, b, c, \dots, g = (0), (1), (2), (3)$ e índices gregos do espaço-tempo $\mu, \nu, \rho, \dots = 0, 1, 2, 3$; índices latinos do meio do alfabeto, $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$, serão usados para rotular coordenadas espaciais do espaço-tempo. Na abordagem geométrica para as teorias $f(T, B, \nabla_\mu T, \nabla_\mu B)$, os campos fundamentais são as tetradas, que são campos inversíveis tanto no espaço tangente quanto no espaço-tempo, satisfazendo as relações de dualidade:

$$e_\mu^a e_a^\nu = \delta_\mu^\nu, \quad e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a. \quad (4.26)$$

Eles também estão relacionados ao tensor métrico do espaço tangente (η_{ab}), a métrica do espaço-tempo ($g_{\mu\nu}$), a *conexão de Weitzenböck* ($\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$) e o *tensor de torção* ($T_{\mu\nu}^\alpha$).

Como se pode ver, não fazemos menção à conexão de spin em nossa abordagem. A razão para isso é explicada brevemente aqui. Nos primeiros trabalhos de Utiyama e

Kibble (UTIYAMA, 1956b; KIBBLE, 1961) sobre gravitação como uma teoria de gauge, a conexão de spin é o campo de gauge que é introduzido para recuperar a invariância pelas transformações de Lorentz locais. A teoria teleparalela referida neste trabalho é construída a partir da perspectiva de uma teoria de gauge associada ao grupo de translação, como elucidado em (ASSENCIO *et al.*, 2023) e apresentado na seção 3.2. Isso significa que as transformações de Lorentz são apenas consideradas aqui como uma simetria global. Sob esse ponto de vista, não temos motivos para introduzir a conexão de spin. Claro, a teoria teleparalela poderia ser construída a partir de uma perspectiva geométrica e a transformação de Lorentz local também poderia ser considerada. Nesse caso, a conexão de spin teria que fazer parte das entidades geométricas que consideramos. No entanto, este não será o caminho que tomaremos.

Com T , B e suas primeiras derivadas, temos os ingredientes necessários para propor nossa integral de ação gravitacional como

$$S_g = \int d^4x e f(T, B, \nabla_\mu T, \nabla_\mu B), \quad (4.27)$$

que na verdade deveria ser expressa como

$$S_g = \int d^4x e f(T, B, \nabla_\mu T, \nabla_\mu B, e_\mu^a). \quad (4.28)$$

Note que a dependência explícita de f com o campo de tetrada é necessária para se contrair os índices dos termos derivativos - isso permite que f seja uma quantidade escalar.

O princípio de mínima ação nos leva à seguinte equação de campo:

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{4}{e} \partial_\sigma (F_T e \Sigma_{d..}^{\sigma\alpha}) + 4 F_T \Sigma^{\sigma\rho\alpha} T_{\sigma\rho d} - e_d^\alpha f - \frac{\partial f}{\partial e_\alpha^d} + 2 e_d^\alpha \square F_B \\ & - 2 e_d^\beta \nabla^\alpha \nabla_\beta F_B - 2 e_d^\beta (T^\alpha \delta_\beta^\lambda + T^{\lambda\alpha}_\beta) \nabla_\lambda F_B + F_B B e_d^\alpha, \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde

$$\begin{cases} F_B \equiv \frac{\partial f}{\partial B} - (\nabla_\mu - T_\mu) \frac{\partial f}{\partial (\nabla_\mu B)}, \\ F_T \equiv \frac{\partial f}{\partial T} - (\nabla_\mu - T_\mu) \frac{\partial f}{\partial (\nabla_\mu T)}. \end{cases} \quad (4.30)$$

A ordem superior da derivada do campo de tetrada que podemos esperar dessa equação é seis. Este será o caso se a dependência de f com a derivada de B for pelo menos quadrática (por exemplo, $f \sim \nabla_\mu B \nabla^\mu B + \dots$) e os termos de derivadas superiores serão aqueles presentes no quinto e sexto termos da Eq.(4.29). Se, por outro lado, tivermos uma dependência linear de f com a derivada de B , a ordem da derivada será menor que seis (por exemplo, $f \sim \nabla_\mu B \nabla^\mu T + \dots$ leva a equações de campo de quinta ordem nas

derivadas da tetrada). Determinar a ordem superior da derivada da equação de campo é crucial para definir adequadamente o problema de Cauchy do sistema. Essa análise só pode ser realizada para casos particulares. Finalmente, também observamos que se exigirmos linearidade das equações de campo nos termos de derivadas superiores, então f tem que ser linear ou no máximo quadrático na derivada de B .

4.2.2 *Frame* de Jordan

Agora procedemos com a análise das teorias $f(T, B, \nabla_\mu T, \nabla_\mu B)$ no *frame* de Jordan. Introduzimos variáveis escalares e vetoriais auxiliares, $\xi, \chi, \xi_\mu, \chi_\mu$, que substituem $T, B, \nabla_\mu T, \nabla_\mu B$ em f e são tratadas como variáveis independentes. Como será verificado abaixo, a introdução desses campos auxiliares nos permite trabalhar com um conjunto de equações diferenciais com ordem reduzida de derivada quando comparado ao *frame* geométrico.

Propomos uma integral de ação S'_g que é equivalente a S_g sob certas condições:

$$S'_g = \int d^4x e \left[f(\xi, \chi, \xi_\mu, \chi_\mu) - \frac{\partial f}{\partial \xi} (\xi - T) - \frac{\partial f}{\partial \chi} (\chi - B) \right] + \int d^4x e \left[-\frac{\partial f}{\partial \xi_\mu} (\xi_\mu - \nabla_\mu T) - \frac{\partial f}{\partial \chi_\mu} (\chi_\mu - \nabla_\mu B) \right]. \quad (4.31)$$

A minimização dessa ação com relação às variáveis independentes de $\xi, \chi, \xi_\mu, \chi_\mu$ leva ao seguinte conjunto de equações:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \chi} & \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \xi_\mu} & \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \chi_\mu} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \chi \partial \xi} & \frac{\partial^2 f}{\partial \chi^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \chi \partial \xi_\mu} & \frac{\partial^2 f}{\partial \chi \partial \chi_\mu} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_\nu \partial \xi} & \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_\nu \partial \chi} & \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_\nu \partial \xi_\mu} & \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_\nu \partial \chi_\mu} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \chi_\nu \partial \xi} & \frac{\partial^2 f}{\partial \chi_\nu \partial \chi} & \frac{\partial^2 f}{\partial \chi_\nu \partial \xi_\mu} & \frac{\partial^2 f}{\partial \chi_\nu \partial \chi_\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\xi - T) \\ (\chi - B) \\ (\xi_\mu - \nabla_\mu T) \\ (\chi_\mu - \nabla_\mu B) \end{pmatrix} = 0. \quad (4.32)$$

A ação S'_g na Eq.(4.31) será equivalente a S_g na Eq.(4.28) desde que o sistema acima tenha apenas as soluções triviais:

$$\begin{cases} \xi - T = 0, \\ \chi - B = 0, \\ \xi_\mu - \nabla_\mu T = 0, \\ \chi_\mu - \nabla_\mu B = 0. \end{cases} \quad (4.33)$$

Isso só é possível se

$$\det H \neq 0, \quad H \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \chi} & \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \xi_\mu} & \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \chi_\mu} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \chi \partial \xi} & \frac{\partial^2 f}{\partial \chi^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \chi \partial \xi_\mu} & \frac{\partial^2 f}{\partial \chi \partial \chi_\mu} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_\nu \partial \xi} & \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_\nu \partial \chi} & \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_\nu \partial \xi_\mu} & \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_\nu \partial \chi_\mu} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \chi_\nu \partial \xi} & \frac{\partial^2 f}{\partial \chi_\nu \partial \chi} & \frac{\partial^2 f}{\partial \chi_\nu \partial \xi_\mu} & \frac{\partial^2 f}{\partial \chi_\nu \partial \chi_\mu} \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

ou seja, se a matriz Hessiana H for regular.

No entanto, se $\det H \neq 0$, as quantidades $\frac{\partial f}{\partial \xi}$, $\frac{\partial f}{\partial \chi}$, $\frac{\partial f}{\partial \xi_\mu}$, $\frac{\partial f}{\partial \chi_\mu}$ podem ser tratadas como multiplicadores de Lagrange e, como tal, devem ser tratadas como campos independentes:

$$\begin{cases} \phi_T \equiv \frac{\partial f}{\partial \xi}, & \phi_B \equiv \frac{\partial f}{\partial \chi}, \\ \phi_T^\nu \equiv \frac{\partial f}{\partial \xi_\nu}, & \phi_B^\nu \equiv \frac{\partial f}{\partial \chi_\nu}. \end{cases} \quad (4.35)$$

As quantidades ϕ_T , ϕ_B , ϕ_T^ν , ϕ_B^ν e ξ , χ , ξ_ν , χ_ν , devido à Eq.(4.34), estabelecem uma relação inversível:

$$\begin{cases} \xi = \xi(\phi_T, \phi_B, \phi_T^\mu, \phi_B^\mu), & \chi = \chi(\phi_T, \phi_B, \phi_T^\mu, \phi_B^\mu) \\ \xi_\nu = \xi_\nu(\phi_T, \phi_B, \phi_T^\mu, \phi_B^\mu), & \chi_\nu = \chi_\nu(\phi_T, \phi_B, \phi_T^\mu, \phi_B^\mu). \end{cases} \quad (4.36)$$

É interessante notar que, para teorias onde $f(T, B) = f(-T+B)$, a matriz H Eq.(4.34) é singular. Este resultado se estende a qualquer teoria onde o argumento é uma combinação linear de T , B , ou seja, $f = f(\alpha T + \beta B)$. A partir disso, vemos que a estrutura obtida até agora neste trabalho não é diretamente aplicável às teorias equivalentes de teleparalelismo $f(R)$. Para completude, lidaremos com o caso, $f = f(\alpha T + \beta B, \nabla_\mu(\alpha T + \beta B))$, na subseção 4.2.3. Em particular, como será visto lá, se desconsiderarmos a contribuição das derivadas de T e B , apenas um campo escalar auxiliar deve ser introduzido em vez de dois campos escalares, como em nosso tratamento geral - para $-\alpha = \beta = 1$, ou seja, para a teoria equivalente de $f(R)$, isso está em conformidade com (SOTIRIOU; FARAONI, 2010). Na verdade, para lidar adequadamente com uma matriz Hessiana singular, um tratamento diferente é necessário.

A integral de ação pode ser expressa como:

$$S'_g = \int d^4x e [\phi_T T + \phi_B B + \phi_T^\mu \nabla_\mu T + \phi_B^\mu \nabla_\mu B - \bar{U}(\phi_T, \phi_B, \phi_T^\mu, \phi_B^\mu, e_\mu^a)], \quad (4.37)$$

onde

$$\bar{U}(\phi_T, \phi_B, \phi_T^\mu, \phi_B^\mu, e_\mu^a) \equiv \phi_T \xi + \phi_B \chi + \phi_T^\mu \xi_\mu + \phi_B^\mu \chi_\mu - f(\xi, \chi, \xi_\mu, \chi_\mu), \quad (4.38)$$

onde $\xi, \chi, \xi_\nu, \chi_\nu$ são expressos em termos de $\phi_T, \phi_B, \phi'_T, \phi'_B$, de acordo com a Eq.(4.36). Vemos que a ação na Eq.(4.37) não apresenta termos cinéticos explícitos para os campos escalares ϕ_T e ϕ_B . Por outro lado, eles estão acoplados à torção escalar e ao escalar de superfície, respectivamente. Os campos vetoriais auxiliares apresentam acoplamentos com derivadas de T e B na integral de ação. Curiosamente, esses dois termos (com acoplamentos derivativos) podem ser integrados por partes, permitindo-nos reduzir a ordem da derivada do campo de tetrada em relação ao Lagrangeano. Se procedermos desta forma e negligenciarmos os termos de superfície, acabamos com

$$S'_g = \int d^4 x e [\Phi_T T + \Phi_B B - U], \quad (4.39)$$

onde o potencial U é definido como

$$\begin{aligned} U &\equiv U(\Phi_T, \Phi_B, \phi_T^\mu, \phi_B^\mu, \Delta_\mu \phi_T^\mu, \Delta_\mu \phi_B^\mu, e_\mu^a) \\ &= \bar{U}(\Phi_T + \Delta_\mu \phi_T^\mu, \Phi_B + \Delta_\mu \phi_B^\mu, \phi_T^\mu, \phi_B^\mu, e_\mu^a), \end{aligned} \quad (4.40)$$

e

$$\left\{ \Phi_T \equiv \phi_T - \Delta_\mu \phi_T^\mu, \Phi_B \equiv \phi_B - \Delta_\mu \phi_B^\mu, \right. \quad (4.41)$$

onde o operador

$$\Delta_\mu \equiv \nabla_\mu - T_\mu \quad (4.42)$$

foi introduzido para compactar a notação.

Os novos campos escalares Φ_T e Φ_B são combinações lineares de $\phi_T, \Delta_\mu \phi_T^\mu$ e $\phi_B, \Delta_\mu \phi_B^\mu$, respectivamente, e agora desempenham o papel dos graus de liberdade escalares auxiliares do sistema. A ação na Eq.(4.39) se assemelha a uma teoria tipo escalar-tensor sem termos cinéticos para Φ_T e Φ_B , que por sua vez aparecem acoplados de forma “não mínima” a T e B , nesta ordem. Devemos lembrar que também temos os graus de liberdade vetoriais que permanecem os mesmos antes da introdução de Φ_T e Φ_B . Note que, em princípio, não temos termos cinéticos para os campos vetoriais também. A ausência dos termos cinéticos padrão para os campos auxiliares pode sugerir que eles não constituem um conjunto de variáveis dinâmicas. No entanto, devemos ter cuidado e verificar a dinâmica a partir das equações de campo, já que o acoplamento dos campos auxiliares com as derivadas da tetrada pode resultar em equações dinâmicas. Da Eq.(4.39), obtemos as seguintes equações de campo para variações da ação em relação a $e_\mu^a, \Phi_T, \Phi_B, \phi_T^\mu, \phi_B^\mu$,

respectivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{4}{e} \partial_\sigma (\Phi_T e \Sigma_{a..}^{\sigma\alpha}) + 4\Phi_T \Sigma^{\sigma\rho\alpha} T_{\sigma\rho a} - e_a^\alpha (\Phi_T T - U) \\ \quad - 2 [-\square \Phi_B e_a^\alpha + g^{\rho\alpha} \nabla_\rho \nabla_\beta \Phi_B e_a^\beta] \\ \quad - 2 (T^\alpha \delta_\beta^\lambda + T^{\lambda\alpha}_\beta) \nabla_\lambda \Phi_B e_a^\beta + \frac{\delta U}{\delta e_a^\alpha}, \\ 0 = T - \frac{\delta U}{\delta \Phi_T}, \\ 0 = \frac{\delta U}{\delta \phi_T^\mu}, \\ 0 = B - \frac{\delta U}{\delta \Phi_B}, \\ 0 = \frac{\delta U}{\delta \phi_B^\mu}. \end{array} \right. \quad (4.43)$$

Uma análise rápida das equações de campo mostra alguns resultados importantes. A ordem mais alta das derivadas de todos os campos é dois. As primeiras e quartas equações apresentam segundas derivadas de e_μ^a , enquanto a segunda derivada de Φ_B é explícita na primeira equação. As terceiras e quintas equações podem conter no máximo segundas derivadas dos campos vetoriais e, possivelmente, a primeira derivada dos campos escalares. Como U não tem dependência das derivadas de Φ_T , a segunda equação pode ser interpretada como um vínculo, já que apenas as primeiras derivadas dos campos devem estar presentes. Neste ponto, parece que as segundas derivadas temporais de Φ_B não estão presentes nas equações de campo, indicando que este é provavelmente um grau de liberdade não dinâmico. Uma palavra final sobre este assunto só pode ser estabelecida para casos particulares.

4.2.3 O caso particular $f = f(\alpha T + \beta B, \nabla_\mu(\alpha T + \beta B))$

Aqui, apresentamos os resultados para o caso particular em que f é uma função do tipo:

$$f(T, B, \nabla_\mu T, \nabla_\mu B) = f(\alpha T + \beta B, \nabla_\mu(\alpha T + \beta B)).$$

Em outras palavras, os dois invariantes escalares T e B são combinados linearmente. Este caso é interessante pois abrange uma classe de teorias que inclui o caso equivalente à $f(R, \nabla_\mu R)$ - caso quando $\alpha = -\beta = -1$. Primeiramente, verificamos se a abordagem apresentada ao longo do texto principal é aplicável. Para isso, é suficiente avaliar a matriz

Hessiana, que para o caso presente, é:

$$H = \begin{pmatrix} f_{uu} \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix} & f_{uu\nu} \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix} \\ f_{u_\mu u} \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix} & f_{u_\mu u_\nu} \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

onde usamos as definições $u \equiv \alpha T + \beta B$, $u_\mu \equiv \nabla_\mu (\alpha T + \beta B)$, $f_u \equiv \frac{\partial f}{\partial u}$, $f_{u_\mu} \equiv \frac{\partial f}{\partial u_\mu}$. Esta matriz é singular, ou seja, $\det H = 0$, portanto, o formalismo, conforme desenvolvido anteriormente, não pode ser aplicado diretamente. Abaixo, rederivamos os principais resultados para o caso presente nos *frame* de Jordan e Einstein.

A análise no *frame* de Jordan requer a adição de campos auxiliares, mas agora apenas um campo auxiliar escalar e um campo auxiliar vetorial são necessários, em vez da quantidade dupla requerida no caso geral apresentado no texto principal. A ação gravitacional equivalente é construída analogamente ao que foi feito anteriormente:

$$S'_g = \int d^4 x e \left[f(v, v_\mu) - \frac{\partial f}{\partial v} (v - u) - \frac{\partial f}{\partial v_\mu} (v_\mu - u_\mu) \right].$$

A matriz Hessiana (assumida como regular) e os novos campos auxiliares serão:

$$H \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial v_\mu} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v_\nu \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial v_\nu \partial v_\mu} \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \phi_u \equiv \frac{\partial f}{\partial v}, \\ \phi_u^\nu \equiv \frac{\partial f}{\partial v_\nu}. \end{cases}$$

A integral de ação equivalente apresentada acima pode ser expressa como:

$$S'_g = \int d^4 x e [\Phi_u (\alpha T + \beta B) - U],$$

onde os termos de superfície foram negligenciados, com

$$\begin{cases} U \equiv \phi_u v + \phi_u^\mu v_\mu - f(v, v_\mu), \\ v = v(\Phi_u + \Delta_\mu \phi_u^\mu, \phi_u^\nu), \\ v_\mu = v_\mu(\Phi_u + \Delta_\mu \phi_u^\mu, \phi_u^\nu), \\ \Phi_u \equiv \phi_u - \Delta_\mu \phi_u^\mu. \end{cases}$$

As equações de campo podem ser derivadas pelo princípio da ação mínima, considerando e_μ^a , Φ_u e ϕ_u^μ como os campos fundamentais.

A análise no *frame* de Einstein exige uma transformação conforme do campo de tetrada. Quando o fator conforme Ω é escolhido como $\Omega^2 = \alpha \Phi_u$, a integral de ação (a

menos termos de superfície) pode ser expressa como:

$$S'_g = \int d^4x \tilde{e} \left[\tilde{T} - 2 \frac{(1 + \frac{\beta}{\alpha})}{\sqrt{3(1 + \frac{3\beta}{\alpha})}} \tilde{T}^\nu \partial_\nu \tilde{\phi} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \tilde{\phi} \partial_\mu \tilde{\phi} - \tilde{V} \right],$$

onde

$$\begin{cases} \tilde{\phi} \equiv \sqrt{3(1 + \frac{3\beta}{\alpha})} \ln(\Phi_u \alpha), \\ \tilde{V} \equiv \exp\left(-\frac{2\tilde{\phi}}{\sqrt{3(1 + \frac{3\beta}{\alpha})}}\right) U. \end{cases}$$

Como no *frame* de Jordan, as equações de campo podem ser derivadas a partir do princípio de mínima ação com \tilde{e}_μ^a , $\tilde{\phi}$ e ϕ_u^μ sendo os campos fundamentais da teoria.

Como podemos ver, este caso simplifica significativamente o número de campos auxiliares. Para o caso particular em que $\alpha = -\beta = -1$, que como mencionado anteriormente corresponde ao caso $f(R, \nabla_\mu R)$, vemos que com esta estrutura obtemos consistência com o que é conhecido do correspondente riemanniano: apenas um campo escalar e um campo vetorial são necessários.

4.2.4 *Frame* de Einstein

A transição do *frame* de Jordan para o *frame* de Einstein é realizada por meio de uma transformação conforme do campo de tetrada. Quando essa transformação é realizada, o Lagrangiano do sistema transformado se apresenta como uma combinação da torção escalar e de um termo semelhante à matéria para os campos auxiliares. Isso pode ser interpretado como um Lagrangiano efetivo de uma teoria do tipo TEGR com um Lagrangiano de matéria efetivo. A transformação conforme da tetrada implica em modificações na conexão de Weitzenböck, tensor de torção, tensor escalar e assim por diante. Uma lista

de relações úteis é apresentada

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{e}_\mu^a(x) = \Omega(x) e_\mu^a(x), \\ \tilde{e}_a^\mu(x) = \Omega^{-1}(x) e a^\mu(x), \\ \tilde{e} = \Omega^4 e, \\ \tilde{g}_{\beta\gamma} = \Omega^2 g_{\beta\gamma}, \\ \tilde{g}^{\beta\gamma} = \Omega^{-2} g^{\beta\gamma}, \\ \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha + \delta_\mu^\alpha \partial_\nu \ln \Omega, \\ \tilde{T}^\alpha_{\nu\mu} = T^\alpha_{\nu\mu} + \delta_\mu^\alpha \partial_\nu \ln \Omega - \delta_\nu^\alpha \partial_\mu \ln \Omega, \\ \tilde{T}_\mu = T_\mu - 3\partial_\mu \ln \Omega, \\ \tilde{T} = \Omega^{-2} [T + 4T^\nu \partial_\nu \ln \Omega - 6g^{\mu\nu} \partial_\nu \ln \Omega \partial_\mu \ln \Omega], \\ \tilde{B} = \Omega^{-2} [B - 6\Box \ln \Omega + 10T^\rho \partial_\rho \ln \Omega - 12g^{\rho\sigma} \partial_\rho \ln \Omega \partial_\sigma \ln \Omega], \\ \tilde{\nabla}_\mu^T \phi^\mu = \nabla_\mu^T \phi^\mu + 4\partial_\mu \ln \Omega \phi^\mu. \end{array} \right. \quad (4.44)$$

A integral de ação na Eq.(4.39) em termos da tetrada transformada torna-se:

$$\begin{aligned} S'_g = & \int d^4x \Omega^{-2} \tilde{e} \Phi_T \left[\tilde{T} - 4\tilde{T}^\nu \partial_\nu \ln \Omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \ln \Omega \partial_\mu \ln \Omega \right] \\ & + \int d^4x \Omega^{-2} \tilde{e} \Phi_B \left[\tilde{B} + 6\tilde{\Box} \ln \Omega - 10\tilde{T}^\rho \partial_\rho \ln \Omega \right] \\ & + \int d^4x \Omega^{-2} \tilde{e} \Phi_B \left[-12\tilde{g}^{\rho\sigma} \partial_\rho \ln \Omega \partial_\sigma \ln \Omega \right] + \int d^4x \Omega^{-4} \tilde{e} \left(-\tilde{U} \right), \end{aligned} \quad (4.45)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{U} = & U \left(\Phi_T, \phi_T^{\mu_1}, \tilde{\Delta}_{\mu_1} \phi_T^{\mu_1}, \Phi_B, \phi_B^{\mu_1}, \tilde{\Delta}_{\mu_1} \phi_B^{\mu_1} \right) \\ & - 4\phi_T^\mu (\partial_\mu \ln \Omega) \xi(\phi_T, \phi_B, \phi_T^\nu, \phi_B^\nu) \\ & - 4\phi_B^\mu (\partial_\mu \ln \Omega) \chi(\phi_T, \phi_B, \phi_T^\nu, \phi_B^\nu). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Agora escolhemos o fator conforme para satisfazer a relação

$$\Omega^2 = \Phi_T.$$

A primeira linha da ação na Eq. (4.45) é bastante simplificada. Também introduzimos dois novos campos escalares e um novo potencial que tornam a ação em uma forma mais

adequada; eles são:

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_T \equiv \sqrt{3} \ln \Phi_T, \\ \tilde{\phi}_B \equiv \Phi_B \exp\left(-\frac{\tilde{\phi}_T}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\Phi_B}{\Phi_T}, \\ \tilde{V} \equiv \exp\left(-\frac{2\tilde{\phi}_T}{\sqrt{3}}\right) \tilde{U}, \end{cases} \quad (4.47)$$

com $\tilde{U} = \tilde{U}\left(\Phi_T\left(\tilde{\phi}_T\right), \dots, \Phi_B\left(\tilde{\phi}_T, \tilde{\phi}_B\right), \dots, \Omega\left(\tilde{\phi}_T\right)\right)$.

A integral de ação resultante torna-se:

$$\begin{aligned} S'_g = & \int d^4x \tilde{e} \left[\tilde{T} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \tilde{\phi}_T \partial_\mu \tilde{\phi}_T - \frac{2}{\sqrt{3}} \tilde{T}^\nu \partial_\nu \tilde{\phi}_T \right] + \int d^4x \tilde{e} \tilde{\phi}_B \left[\tilde{B} - \tilde{g}^{\rho\sigma} \partial_\rho \tilde{\phi}_T \partial_\sigma \tilde{\phi}_T \right] \\ & + \int d^4x \tilde{e} \tilde{\phi}_B \left[-\frac{5}{\sqrt{3}} \tilde{T}^\rho \partial_\rho \tilde{\phi}_T + \sqrt{3} \tilde{\square} \tilde{\phi}_T \right] - \int d^4x \tilde{e} \tilde{V}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Esta ação possui uma estrutura interessante. O primeiro termo é o Lagrangiano gravitacional padrão do TEGR para a tetrada \tilde{e}_μ^a , enquanto o segundo é um termo cinético padrão para o campo escalar $\tilde{\phi}_T$. O terceiro termo descreve um acoplamento derivativo entre $\tilde{\phi}_T$ e a torção. No entanto, por uma integração por partes, este termo pode descrever de forma equivalente um acoplamento entre $\tilde{\phi}_T$ e \tilde{B} . Este último, por sua vez, também está acoplado a $\tilde{\phi}_B$, como pode ser visto no primeiro termo da segunda integral. O segundo termo desta integral apresenta um termo cinético para $\tilde{\phi}_T$ acoplado a $\tilde{\phi}_B$ - este termo juntamente com o segundo termo da primeira integral podem ser combinados resultando em

$$-\frac{(1+2\tilde{\phi}_B)}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \tilde{\phi}_T \partial_\mu \tilde{\phi}_T, \quad (4.49)$$

que se assemelha a um termo cinético de Brans-Dicke para $\tilde{\phi}_T$ com $\omega_0 = \frac{(1+2\tilde{\phi}_B)}{2}$. O primeiro termo na terceira linha descreve um acoplamento derivativo de $\tilde{\phi}_T$ com a torção do vetor e $\tilde{\phi}_B$. O último termo da terceira integral descreve um acoplamento entre $\tilde{\phi}_B$ e $\tilde{\square} \tilde{\phi}_T$. O termo na última integral descreve o potencial efetivo dos campos auxiliares.

Se definirmos um tensor de energia-momento efetivo $\tilde{\mathcal{T}}_a^\alpha$ por:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{T}}_a^\alpha \equiv & -2 \left[\frac{1}{\sqrt{3}} (1 + \tilde{\phi}_B) \tilde{\square} \tilde{\phi}_T + \tilde{\square} \tilde{\phi}_B \right] \tilde{e}_a^\alpha - \tilde{g}^{\mu\nu} \left[\left(\frac{1}{2} + \tilde{\phi}_B \right) \partial_\mu \tilde{\phi}_T \partial_\nu \tilde{\phi}_T + \frac{5}{\sqrt{3}} \partial_\mu \tilde{\phi}_B \partial_\nu \tilde{\phi}_T \right] \tilde{e}_a^\alpha \\ & + \sqrt{3} \left[\frac{1}{3} (2 - \tilde{\phi}_B) \tilde{g}^{\alpha\mu} \tilde{e}_a^\nu - \tilde{\phi}_B \tilde{g}^{\alpha\nu} \tilde{e}_a^\mu \right] \tilde{\nabla}_\mu \partial_\nu \tilde{\phi}_T + 2\tilde{g}^{\mu\alpha} \tilde{\nabla}_\mu \partial_\nu \tilde{\phi}_B \tilde{e}_a^\nu \\ & + \left(\frac{1}{2} + \tilde{\phi}_B \right) (\tilde{g}^{\alpha\nu} \tilde{e}_a^\mu + \tilde{g}^{\alpha\mu} \tilde{e}_a^\nu) \partial_\mu \tilde{\phi}_T \partial_\nu \tilde{\phi}_T + \sqrt{3} \left[\frac{5}{3} \tilde{g}^{\alpha\nu} \tilde{e}_a^\mu - \tilde{g}^{\alpha\mu} \tilde{e}_a^\nu \right] \partial_\mu \tilde{\phi}_B \partial_\nu \tilde{\phi}_T \\ & + \frac{2}{\sqrt{3}} \partial_\rho \tilde{\phi}_T (1 + 4\tilde{\phi}_B) \tilde{e}_a^\rho \tilde{T}^\alpha + 2 \left(\tilde{T}^\alpha \delta_\beta^\rho + \tilde{T}^{\rho\alpha} \right) \partial_\rho \tilde{\phi}_B \tilde{e}_a^\beta - \tilde{V} \tilde{e}_a^\alpha - \frac{\delta \tilde{V}}{\delta \tilde{e}_a^\alpha}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

as equações de campo para $\tilde{\phi}_B$, $\tilde{\phi}_T$, ϕ_B^μ , ϕ_T^μ , $\tilde{e}^{\mu a}$ podem ser respectivamente escritas como:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 0 = \tilde{B} + \sqrt{3}\tilde{\square}\tilde{\phi}_T - \frac{5}{\sqrt{3}}\tilde{T}^\rho\partial_\rho\tilde{\phi}_T - \tilde{g}^{\rho\sigma}\partial_\rho\tilde{\phi}_T\partial_\sigma\tilde{\phi}_T - \frac{\delta\tilde{V}}{\delta\tilde{\phi}_B}, \\
 0 = \left(1 + 2\tilde{\phi}_B\right)\tilde{\square}\tilde{\phi}_T + \sqrt{3}\tilde{\square}\tilde{\phi}_B + 2\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\tilde{\phi}_B\partial_\nu\tilde{\phi}_T \\
 \quad + (2 - \sqrt{3})\tilde{T}^\nu\partial_\nu\tilde{\phi}_B - \left(1 + 2\tilde{\phi}_B\right)\tilde{T}^\nu\partial_\nu\tilde{\phi}_T \\
 \quad + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 + \sqrt{3}\tilde{\phi}_B\right)\tilde{B} - \frac{\delta\tilde{V}}{\delta\tilde{\phi}_T}, \\
 0 = \frac{\delta\tilde{V}}{\delta\tilde{\phi}_B^\mu}, \\
 0 = \frac{\delta\tilde{V}}{\delta\tilde{\phi}_T^\mu}, \\
 \tilde{\mathcal{T}}^\alpha_a = \frac{4}{\tilde{\epsilon}}\partial_\sigma\left(\tilde{\epsilon}\tilde{\Sigma}_{a..}^{\sigma\alpha}\right) + 4\tilde{\Sigma}^{\sigma\rho\alpha}\tilde{T}_{\sigma\rho a} - \tilde{\epsilon}_a^\alpha\tilde{T}.
 \end{array} \right. \quad (4.51)$$

Como acontece no *frame* de Jordan, a ordem mais alta de derivada dos campos é dois. Em particular, as segundas derivadas de $\tilde{\phi}_T$ são observadas nas primeira, segunda e quinta equações. O mesmo é verdadeiro para as segundas derivadas da tetrada (lembre-se de que \tilde{B} engloba as segundas derivadas de $\tilde{\epsilon}_\mu^a$). Em relação às segundas derivadas de $\tilde{\phi}_B$, elas estão presentes na segunda e última equações. Não podemos dizer muito sobre as derivadas dos campos vetoriais até que um potencial específico seja definido - neste ponto, tudo o que podemos afirmar é que as derivadas desses campos serão, no máximo, de segunda ordem. Como esperado para o *frame* de Einstein, a equação para a tetrada é uma equação semelhante à TEGR com um tensor de energia-momento efetivo para os campos auxiliares, como observado na Eq. (4.50).

Antes de analisarmos um exemplo, vamos reconsiderar a ação na Eq.(4.45) e ponderar a seguinte questão: E se, em vez de escolhermos $\Omega^2 = \Phi_T$, tivéssemos escolhido $\Omega^2 = \Phi_B$? Nesse caso, a ação se tornaria:

$$\begin{aligned}
 S'_g = & \int d^4x \tilde{\epsilon} \frac{\Phi_T}{\Phi_B} \left[\tilde{T} - 2\tilde{T}^\nu\partial_\nu \ln \Phi_B - \frac{3}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\nu \ln \Phi_B \partial_\mu \ln \Phi_B \right] \\
 & + \int d^4x \tilde{\epsilon} \left[\tilde{B} + 3\tilde{\square} \ln \Phi_B - 3\tilde{T}^\mu\partial_\mu \ln \Phi_B \right] \\
 & - \int d^4x \tilde{\epsilon} \left[2\tilde{T}^\mu + 3\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\nu \ln \Phi_B \right] \partial_\mu \ln \Phi_B - \int d^4x \tilde{\epsilon} \Phi_B^{-2} \tilde{U}. \quad (4.52)
 \end{aligned}$$

Os três termos da segunda linha podem ser expressos como um termo de superfície, o que significa que eles não contribuem para as equações de campo. Poderíamos negligenciar esses termos no Lagrangiano, o que reduziria o número de termos na ação. No entanto, a ação não pareceria uma combinação do Lagrangiano de gravitação TEGR com outras

contribuições provenientes dos campos auxiliares. Poderíamos então realizar uma nova transformação conforme:

$$\bar{e}_\mu^a(x) = \Theta(x) \tilde{e}_\mu^a(x), \quad (4.53)$$

com

$$\Theta^2 = \frac{\Phi_T}{\Phi_B}. \quad (4.54)$$

Com as novas quantidades auxiliares definidas abaixo,

$$\begin{cases} \bar{\phi}_T \equiv \sqrt{3} \ln \Phi_T, \\ \bar{\phi}_B \equiv \Phi_B \exp\left(-\frac{\bar{\phi}_T}{\sqrt{3}}\right), \\ \bar{V} \equiv \exp\left[-\frac{2\bar{\phi}_T}{\sqrt{3}}\right] \tilde{U}, \end{cases} \quad (4.55)$$

a integral de ação se tornaria

$$\begin{aligned} S'_g = & \int d^4x \bar{e} \left[\bar{T} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \bar{\Phi}_T \partial_\nu \bar{\Phi}_T - \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{T}^\nu \partial_\nu \bar{\Phi}_T \right] + \int d^4x \bar{e} \bar{\phi}_B \left[\bar{B} - g^{\mu\nu} \partial_\mu \bar{\Phi}_T \partial_\nu \bar{\Phi}_T \right] \\ & + \int d^4x \bar{e} \bar{\phi}_B \left[-\frac{5\sqrt{3}}{3} \bar{T}^\nu \partial_\nu \bar{\Phi}_T + \sqrt{3} \square \bar{\Phi}_T \right] - \int d^4x \bar{e} \bar{V} + \int d^4x \partial_\nu \bar{S}^\nu. \end{aligned} \quad (4.56)$$

A menos de termos de superfície, esta é exatamente a mesma ação obtida na Eq. (4.48). Isso significa que as equações de campo seriam exatamente as mesmas obtidas na Eq. (4.51). Embora parecesse promissor realizar duas transformações conformes e livrar-se dos termos de superfície entre as duas transformações, o resultado final acabou sendo o mesmo.

A seguir, aplicamos os resultados obtidos até agora a um caso particular.

4.3 Exemplo

Os resultados que foram obtidos nas seções anteriores são bastante gerais para qualquer $f(T, B, \nabla_\mu T, \nabla_\mu B)$ que apresente uma matriz Hessiana regular. Nesta seção, vamos restringir f a ser uma função analítica de seus argumentos. Nesse caso, f pode ser expandida em uma série. Restringimos a análise a termos até contribuições quadráticas dos argumentos, ou seja,

$$\begin{aligned} f(T, B, \nabla_\mu T, \nabla_\mu B) = & f_0 + \alpha_T T + \frac{\beta_T}{2} T^2 + \frac{\gamma_T}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu T \partial_\nu T + \alpha_B B \\ & + \frac{\beta_B}{2} B^2 + \frac{\gamma_B}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu B \partial_\nu B + \beta_{BT} BT + \gamma_{BT} g^{\mu\nu} \partial_\mu T \partial_\nu B, \end{aligned} \quad (4.57)$$

onde $f_0, \alpha_T, \beta_T, \gamma_T, \alpha_B, \beta_B, \gamma_B, \beta_{BT}, \gamma_{BT}$ são constantes.

Este Lagrangeano será analisado no contexto geométrico, bem como nos *frames* de Jordan e Einstein. Começamos com o caso geométrico.

4.3.1 *Frame* Geométrico

Começamos com o cálculo de F_T e F_B conforme definido em Eq.(4.30)

$$\begin{cases} F_T = \alpha_T + \beta_T T + \beta_{BT} B \\ \quad - (\nabla_\nu - T_\nu) (\gamma_T g^{\mu\nu} \partial_\mu T + \gamma_{BT} g^{\mu\nu} \partial_\mu B), \\ F_B = \alpha_B + \beta_B B + \beta_{BT} T \\ \quad - (\nabla_\nu - T_\nu) (\gamma_B g^{\mu\nu} \partial_\mu B + \gamma_{BT} g^{\mu\nu} \partial_\mu T). \end{cases} \quad (4.58)$$

Substituindo esses resultados na Eq.(4.29) e usando a definição do operador Δ dada em Eq.(4.42), as equações de Euler-Lagrange são:

$$\begin{aligned} (EL)_d^\alpha &\equiv e_d^\alpha \left(f_0 + \alpha_T T + \frac{\beta_T}{2} T^2 - \frac{\beta_B}{2} B^2 \right) \\ &- (g^{\alpha\nu} e_d^\mu + g^{\alpha\mu} e_d^\nu - e_d^\alpha g^{\mu\nu}) \times \left(\frac{\gamma_T}{2} \partial_\mu T \partial_\nu T + \frac{\gamma_B}{2} \partial_\mu B \partial_\nu B + \gamma_{BT} \partial_\mu T \partial_\nu B \right) \\ &- 4 [\alpha_T + \beta_T T + \beta_{BT} B - \Delta^\mu (\gamma_T \partial_\mu T + \gamma_{BT} \partial_\mu B)] \times \Sigma^{\sigma\rho\alpha} T_{\sigma\rho d} \\ &- \frac{4}{e} \partial_\sigma \{ e [\alpha_T + \beta_T T + \beta_{BT} B - \Delta^\mu (\gamma_T \partial_\mu T + \gamma_{BT} \partial_\mu B)] \Sigma_d^{\sigma\alpha} \} \\ &- 2 \square [\beta_B B + \beta_{BT} T - \Delta^\mu (\gamma_B \partial_\mu B + \gamma_{BT} \partial_\mu T)] e_d^\alpha \\ &+ B [\Delta^\mu (\gamma_B \partial_\mu B + \gamma_{BT} \partial_\mu T)] e_d^\alpha \\ &+ 2 (T^\alpha \delta_\beta^\lambda + T^{\lambda\alpha}_\beta) e_d^\beta \times \nabla_\lambda [\alpha_B + \beta_B B + \beta_{BT} T - \Delta^\mu (\gamma_B \partial_\mu B + \gamma_{BT} \partial_\mu T)] \\ &+ 2 g^{\rho\alpha} e_d^\beta \nabla_\rho \nabla_\beta [\beta_B B + \beta_{BT} T - \Delta^\mu (\gamma_B \partial_\mu B + \gamma_{BT} \partial_\mu T)] = 0. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Note que, neste formalismo, não temos restrições sobre os valores dos parâmetros f_0, α_T, \dots , como será o caso quando descrevermos este sistema nos *frames* de Jordan e Einstein. No entanto, valores diferentes desses parâmetros resultam em dinâmicas diferentes para o sistema. Se definirmos $\gamma_B \neq 0$, então teremos dois termos apresentando as derivadas mais altas da tetrada que são ambos proporcionais a esse parâmetro:

$$(EL)_d^\alpha \sim 2\gamma_B \square \Delta^\mu \partial_\mu B e_d^\alpha - 2\gamma_B g^{\rho\alpha} \nabla_\rho \nabla_\beta \Delta^\mu (\partial_\mu B) e_d^\beta. \quad (4.60)$$

Lembre-se de que o escalar de superfície é proporcional à segunda derivada da tetrada. Desta forma, as equações de campo para os diferentes componentes do campo de tetrada constituem um conjunto de equações de sexta ordem nas derivadas.

Se estamos interessados em analisar os graus de liberdade dinâmicos do sistema, de

acordo com o problema de Cauchy, devemos observar as derivadas temporais dos campos de tetradas. Vamos considerar $\alpha = 0$ na Eq.(4.60) e analisar apenas a contribuição das derivadas temporais mais altas - temos:

$$(EL)_d^0 \sim (e_d^0 g^{00} g^{00} - e_d^0 g^{00} g^{00}) (\partial_0)^4 B \sim 0,$$

ou seja, os termos de derivadas temporais mais altas que aparecem não são de sexta ordem. Isso significa que as quatro equações obtidas para $\alpha = 0$ não são dinâmicas. Uma análise similar para $\alpha = i = 1, 2, 3$ nos leva a:

$$(EL)_d^i \sim g^{00} (e_d^i g^{00} - g^{0i} e_d^0) (\partial_0)^4 B.$$

Em geral, isso não é nulo. Vamos analisar a estrutura das derivadas temporais no escalar de superfície. Verificamos que

$$B \sim (g^{0j} e_a^0 - g^{00} e_a^j) (\partial_0)^2 e_j^a.$$

Isso significa que as 12 equações de campo obtidas com $\alpha \neq 0$ apresentam derivadas temporais de sexta ordem dos componentes e_j^a . Em outras palavras, do ponto de vista do problema de Cauchy, essas 12 equações são dinâmicas e os campos e_j^a constituem um conjunto de variáveis dinâmicas. Como não aparecem derivadas temporais de sexta ordem dos componentes e_0^a nas equações, essas quantidades não são graus de liberdade dinâmicos do sistema. As equações obtidas com $\alpha = 0$ devem ser interpretadas como vínculos lagrangianos. Em princípio, parece que temos 12 graus de liberdade, no entanto, devemos lembrar que ainda temos alguma liberdade para escolher um sistema de coordenadas. Escolhendo quatro coordenadas apropriadamente, podemos ser capazes de suprimir as sextas derivadas temporais de quatro componentes das variáveis e_j^a . Procedendo assim, somos capazes de eliminar quatro graus de liberdade, deixando-nos com 8 variáveis dinâmicas. Este é o número máximo de graus de liberdade que temos em nosso sistema. Devemos lembrar que ainda temos a liberdade de realizar uma transformação de Lorentz global, o que talvez possa reduzir o número de graus de liberdade para quatro. Se isso for possível, não fica claro a partir da análise realizada aqui. Concluimos esta seção afirmando que o número de variáveis dinâmicas do sistema está entre 4 e 8.

4.3.2 *Frame de Jordan*

A descrição do sistema no *frame* de Jordan começa com a introdução de campos escalares e vetoriais auxiliares que substituem a torção escalar, o escalar de superfície e

suas derivadas na dependência funcional de f , ou seja,

$$\begin{aligned} f(\xi, \chi, \xi_\mu, \chi_\mu) &= f_0 + \alpha_T \xi + \frac{\beta_T}{2} \xi^2 + \frac{\gamma_T}{2} g^{\mu\nu} \xi_\mu \xi_\nu + \alpha_B \chi \\ &+ \frac{\beta_B}{2} \chi^2 + \frac{\gamma_B}{2} g^{\mu\nu} \chi_\mu \chi_\nu + \beta_{BT} \chi \xi + \gamma_{BT} g^{\mu\nu} \xi_\mu \chi_\nu. \end{aligned} \quad (4.61)$$

A matriz Hessiana,

$$H = \begin{pmatrix} \beta_T & 0 & \beta_{BT} & 0 \\ 0 & \gamma_T g^{\mu\nu} & 0 & \gamma_{BT} g^{\rho\nu} \\ \beta_{BT} & 0 & \beta_B & 0 \\ 0 & \gamma_{BT} g^{\mu\sigma} & 0 & \gamma_B g^{\rho\sigma} \end{pmatrix}, \quad (4.62)$$

é regular desde que algumas restrições nos parâmetros $\beta_T, \gamma_T, \beta_B, \gamma_B, \beta_{BT}, \gamma_{BT}$ sejam aplicadas, a saber:

$$\det H \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_T \beta_B - \beta_{BT}^2 \neq 0, \\ \gamma_T \gamma_B - \gamma_{BT}^2 \neq 0. \end{cases} \quad (4.63)$$

Se as duas condições acima forem satisfeitas, somos capazes de introduzir os campos escalares e vetoriais $\phi_T, \phi_T^\nu, \phi_B, \phi_B^\nu$ com relações invertíveis com $\xi, \xi_\mu, \chi, \chi_\mu$:

$$\begin{cases} \phi_T \equiv \frac{\partial f}{\partial \xi} = \alpha_T + \beta_T \xi + \beta_{BT} \chi, \\ \phi_T^\nu \equiv \frac{\partial f}{\partial \xi_\nu} = \gamma_T g^{\mu\nu} \xi_\mu + \gamma_{BT} g^{\mu\nu} \chi_\mu, \\ \phi_B \equiv \frac{\partial f}{\partial \chi} = \alpha_B + \beta_B \chi + \beta_{BT} \xi, \\ \phi_B^\nu \equiv \frac{\partial f}{\partial \chi_\nu} = \gamma_B g^{\mu\nu} \chi_\mu + \gamma_{BT} g^{\mu\nu} \xi_\mu. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = \frac{\beta_B(\phi_T - \alpha_T) - \beta_{BT}(\phi_B - \alpha_B)}{\beta_T \beta_B - \beta_{BT}^2}, \\ \xi_\mu = \frac{\gamma_B \phi_{T\mu} - \gamma_{BT} \phi_{B\mu}}{\gamma_T \gamma_B - \gamma_{BT}^2}, \\ \chi = \frac{\beta_T(\phi_B - \alpha_B) - \beta_{BT}(\phi_T - \alpha_T)}{\beta_T \beta_B - \beta_{BT}^2}, \\ \chi_\mu = \frac{\gamma_T \phi_{B\mu} - \gamma_{BT} \phi_{T\mu}}{\gamma_T \gamma_B - \gamma_{BT}^2}. \end{cases} \quad (4.64)$$

Com esses objetos, construímos os campos escalares auxiliares Φ_T e Φ_B (Eq.(4.41)) que serão utilizados durante a análise, enquanto os campos vetoriais auxiliares permanecem os mesmos, ou seja, $\phi_{B\mu}$ e $\phi_{T\mu}$. Com o conjunto de campos auxiliares estabelecido, o potencial U – conforme dado pela Eq.(4.40) – se torna:

$$U = -f_0 + \frac{1}{2} \frac{(\beta_B X_T^2 + \beta_T X_B^2 - 2\beta_{BT} X_B X_T)}{(\beta_T \beta_B - \beta_{BT}^2)} + \frac{Y_{TB}}{(\gamma_T \gamma_B - \gamma_{BT}^2)}, \quad (4.65)$$

onde definimos:

$$\begin{cases} X_T \equiv \Phi_T + \Delta_\mu \phi_T^\mu - \alpha_T, \\ X_B \equiv \Phi_B + \Delta_\mu \phi_B^\mu - \alpha_B, \\ Y_{TB} \equiv \frac{1}{2} (\gamma_B \phi_{T\mu} \phi_T^\mu + \gamma_T \phi_{B\mu} \phi_B^\mu - 2\gamma_{BT} \phi_{B\mu} \phi_T^\mu). \end{cases} \quad (4.66)$$

As equações de campo (Eq.(4.43)) então se tornam:

$$\begin{aligned}
 (EL_e)_a^\alpha \equiv & 4\Phi_T \Sigma^{\sigma\rho\alpha} T_{\sigma\rho a} + 4\frac{1}{e} \partial_\sigma (\Phi_T e \Sigma_a^{\sigma\alpha}) - e_a^\alpha \Phi_T T - e_a^\alpha f_0 \\
 & - 2 \left[-\square \Phi_B e_a^\alpha + g^{\rho\alpha} \nabla_\rho \nabla_\beta \Phi_B e_a^\beta \right] - 2 (T^\alpha \delta_\beta^\lambda + T^{\lambda\alpha}_\beta) \nabla_\lambda \Phi_B e_a^\beta \\
 & + \frac{e_a^\alpha}{(\beta_T \beta_B - \beta_{BT}^2)} \left\{ \frac{1}{2} (\beta_B X_T^2 + \beta_T X_B^2 - 2\beta_{BT} X_B X_T) \right. \\
 & + X_B (\beta_{BT} \Delta_\nu \phi_T^\nu - \beta_T \Delta_\nu \phi_B^\nu) + X_T (\beta_{BT} \Delta_\nu \phi_B^\nu - \beta_B \Delta_\nu \phi_T^\nu) \\
 & \left. - \phi_T^\nu \partial_\nu [\beta_B X_T - \beta_{BT} X_B] - \phi_B^\nu \partial_\nu [\beta_T X_B - \beta_{BT} X_T] \right\} \\
 & + \frac{(\frac{1}{2} \gamma_B \phi_T^\nu \phi_T^\mu + \frac{1}{2} \gamma_T \phi_B^\nu \phi_B^\mu - \gamma_{BT} \phi_B^\nu \phi_T^\mu)}{(\gamma_T \gamma_B - \gamma_{BT}^2)} (\eta_{ab} e_\nu^b \delta_\mu^\alpha + \eta_{ba} e_\mu^b \delta_\nu^\alpha + e_a^\alpha g_{\mu\nu}) = 0,
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

$$(EL_{\Phi_T}) \equiv T - \frac{\beta_B X_T - \beta_{BT} X_B}{(\beta_T \beta_B - \beta_{BT}^2)} = 0, \tag{4.68}$$

$$(EL_{\phi_T})_\rho \equiv -\frac{\partial_\rho (\beta_B X_T - \beta_{BT} X_B)}{(\beta_T \beta_B - \beta_{BT}^2)} + \frac{(\gamma_B \phi_{T\rho} - \gamma_{BT} \phi_{B\rho})}{(\gamma_T \gamma_B - \gamma_{BT}^2)} = 0, \tag{4.69}$$

$$(EL_{\Phi_B}) \equiv B - \frac{\beta_T X_B - \beta_{BT} X_T}{(\beta_T \beta_B - \beta_{BT}^2)} = 0, \tag{4.70}$$

$$(EL_{\phi_B})_\rho \equiv -\frac{\partial_\rho (\beta_T X_B - \beta_{BT} X_T)}{(\beta_T \beta_B - \beta_{BT}^2)} + \frac{(\gamma_T \phi_{B\rho} - \gamma_{BT} \phi_{T\rho})}{(\gamma_T \gamma_B - \gamma_{BT}^2)} = 0. \tag{4.71}$$

Este é um conjunto de 26 equações de campo acopladas para as variáveis Φ_T , Φ_B , ϕ_T^μ , ϕ_B^μ , e_a^α . Uma rápida conferência dessas equações mostra que elas são no máximo equações diferenciais de segunda ordem para todos os campos. Para comparação com o *frame* geométrico, temos mais 10 equações para lidar no *frame* de Jordan, mas todas as equações são de segunda ordem nas derivadas dos campos, enquanto no *frame* geométrico elas são de sexta ordem.

Para determinar os graus de liberdade dinâmicos do sistema no *frame* de Jordan, analisamos o termo de derivada temporal mais alto de cada equação. As Eqs.(4.69) e (4.71) podem ser usadas para eliminar a contribuição das segundas derivadas dos campos vetoriais na Eq.(4.67). Nesta equação, também usaremos:

$$\Sigma_a^{0\alpha} \sim \delta_j^\alpha N_{ad}^{ij} \partial_0 e_i^d, \tag{4.72}$$

onde

$$\begin{aligned}
 N_{ad}{}^{ij} \equiv & \frac{1}{4} \left[\eta_{ad} (g^{00} g^{\alpha i} - g^{0i} g^{j0}) + (g^{ji} e_d^0 - g^{0i} e_d^j) e_a^0 + (g^{00} e_d^j - g^{j0} e_d^0) e_a^i \right] \\
 & + \frac{1}{2} \left[\eta_{ab} e_\nu^b (g^{0i} g^{j\nu} - g^{0\nu} g^{ji}) e_d^0 + \eta_{ab} e_\nu^b (g^{0\nu} g^{j0} - g^{00} g^{j\nu}) e_d^i \right]. \quad (4.73)
 \end{aligned}$$

Quando restringimos a análise à segunda ordem da derivada temporal, as equações de campo da Eq.(4.67) até a Eq.(4.71) fornecem:

$$(EL_e)_a^\alpha \sim 2e_a^\alpha g^{00} (\partial_0)^2 \Phi_B - 2e_a^0 g^{0\alpha} (\partial_0)^2 \Phi_B + 4\Phi_T \delta_j^\alpha N_{ad}{}^{ij} (\partial_0)^2 e_i^d, \quad (4.74)$$

$$(EL_{\Phi_T}) \sim 0, \quad (4.75)$$

$$(EL_{\phi_T})_\rho \sim -\delta_\rho^0 \left[\frac{\beta_B \partial_0 \Delta_\mu \phi_T^\mu - \beta_{BT} \partial_0 \Delta_\mu \phi_B^\mu}{(\beta_T \beta_B - \beta_{BT}^2)} \right], \quad (4.76)$$

$$(EL_{\Phi_B}) \sim B, \quad (4.77)$$

$$(EL_{\phi_B})_\rho \sim -\delta_\rho^0 \left[\frac{\beta_T \partial_0 \Delta_\nu \phi_B^\nu - \beta_{BT} \partial_0 \Delta_\nu \phi_T^\nu}{(\beta_T \beta_B - \beta_{BT}^2)} \right]. \quad (4.78)$$

Note que os termos $\partial_0 \Delta_\nu \phi_T^\nu$ e $\partial_0 \Delta_\nu \phi_B^\nu$ contêm as segundas derivadas temporais dos componentes nulos dos campos vetoriais e das tetradas quando $\rho = 0$ nas Eqs.(4.76) e (4.78):

$$\partial_0 \Delta_\nu \phi_T^\nu \sim (\partial_0)^2 \phi_T^0 + \phi_T^0 e_a^\rho (\partial_0)^2 e_\rho^a, \quad (4.79)$$

(analogamente para $\partial_0 \Delta_\nu \phi_B^\nu$). Portanto, temos duas equações apresentando as segundas derivadas temporais de 18 graus de liberdade, ou seja, ϕ_T^0 , ϕ_B^0 e e_ρ^a . Isso significa que essas equações só podem ser usadas para estabelecer dois vínculos entre as segundas derivadas temporais dos campos mencionados acima. Algo semelhante acontece na Eq.(4.77), que apresenta a segunda derivada temporal das 12 variáveis e_i^a :

$$B \sim (g^{0i} e_a^0 - g^{00} e_a^i) (\partial_0)^2 e_i^a. \quad (4.80)$$

Esta equação só pode ser usada para estabelecer um vínculo entre as segundas derivadas temporais de e_i^a .

Em resumo, as 10 equações - Eq.(4.68) até Eq.(4.71) - podem ser interpretadas como vínculos, assim como as 4 equações $(EL_e) a^0 = 0$. Isso totaliza 14 vínculos, o que significa que dos 26 graus de liberdade iniciais, apenas 12 podem ser considerados graus de liberdade dinâmicos. Alguns dos graus de liberdade não dinâmicos, que são aquelas quantidades

cujas segundas derivadas temporais não aparecem, podem ser identificados diretamente das equações de campo - são $\Phi_T, \phi_T^i, \phi_B^i$. Das 19 variáveis restantes, $\Phi_B, \phi_T^0, \phi_B^0, e_a^\rho$, 7 ainda serão restringidas pelas equações de campo. Se também lembrarmos que mais 4 graus de liberdade podem ser eliminados por uma escolha conveniente de sistema de coordenadas, então os graus de liberdade dinâmicos são reduzidos para 8. Com a simetria global de Lorentz, talvez 4 graus de liberdade adicionais possam ser classificados como não dinâmicos. Acabamos com um número de variáveis dinâmicas entre 4 e 8, exatamente como no *frame* geométrico. Na verdade, este é um resultado esperado, uma vez que podemos manipular as Eqs.(4.68) até Eq.(4.71) e substituí-las na Eq.(4.67), recuperando Eq.(4.59) obtida no *frame* geométrico.

4.3.3 *Frame* de Einstein

Agora analisamos nosso exemplo no *frame* de Einstein com o fator conforme $\Omega^2 = \Phi_T$. O potencial \tilde{V} , definido na Eq.(4.47), é dado por

$$\tilde{V} = -e^{-\frac{2\tilde{\phi}_T}{\sqrt{3}}} f_0 + \frac{e^{-\frac{3\tilde{\phi}_T}{\sqrt{3}}} \tilde{g}_{\mu\nu} Y_{TB}^{\mu\nu}}{(\gamma_T \gamma_B - \gamma_{BT}^2)} + \frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{2\tilde{\phi}_T}{\sqrt{3}}} (\beta_B \tilde{X}_T^2 + \beta_T \tilde{X}_B^2 - 2\beta_{BT} \tilde{X}_T \tilde{X}_B)}{(\beta_T \beta_B - \beta_{BT}^2)}, \quad (4.81)$$

onde

$$\begin{cases} \tilde{X}_T \equiv e^{\frac{\tilde{\phi}_T}{\sqrt{3}}} + \tilde{\Delta}_\mu \phi_T^\mu - \frac{2}{\sqrt{3}} \phi_T^\mu \partial_\mu \tilde{\phi}_T - \alpha_T, \\ \tilde{X}_B \equiv \tilde{\phi}_B e^{\frac{\tilde{\phi}_T}{\sqrt{3}}} + \tilde{\Delta}_\mu \phi_B^\mu - \frac{2}{\sqrt{3}} \phi_B^\mu \partial_\mu \tilde{\phi}_T - \alpha_B, \\ Y_{TB}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} [\gamma_B \phi_T^\nu \phi_T^\mu - \gamma_{BT} (\phi_B^\nu \phi_T^\mu + \phi_B^\mu \phi_T^\nu) + \gamma_T \phi_B^\nu \phi_B^\mu]. \end{cases} \quad (4.82)$$

A integral de ação é dada por

$$\begin{aligned} S' = & \int d^4 x \tilde{e} \tilde{T} + \int d^4 x \tilde{e} \frac{2}{\sqrt{3}} \tilde{\phi}_T (\tilde{\nabla}_\nu - \tilde{T}_\nu) \left[(1 + \sqrt{3} \tilde{\phi}_B) \tilde{T}^\nu \right] \\ & + \int d^4 x \tilde{e} \frac{2}{\sqrt{3}} \tilde{\phi}_T (\tilde{\nabla}_\nu - \tilde{T}_\nu) \left[\frac{3}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \tilde{\phi}_B \right] \\ & + \int d^4 x \tilde{e} \left[\tilde{\phi}_B \tilde{B} - \left(\frac{1}{2} + \tilde{\phi}_B \right) \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \tilde{\phi}_T \partial_\mu \tilde{\phi}_T \right] - \int d^4 x \tilde{e} \tilde{V}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Observe que esta ação possui uma dependência funcional com derivadas de segunda ordem da tetrada (através de \tilde{B} e $\tilde{\nabla}_\nu \tilde{T}^\nu$) e $\tilde{\phi}_B$. Em princípio, poderíamos esperar que as equações de campo fossem de quarta ordem nas derivadas de \tilde{e}_a^α e $\tilde{\phi}_B$. No entanto, isso não será o caso devido ao fato de que os termos envolvendo as segundas derivadas são lineares com estas últimas - o resultado será a presença de derivadas de segunda ordem de $\tilde{\phi}_B$ e $\tilde{\phi}_T$, que estão acopladas a \tilde{B} e $\tilde{\nabla}_\nu \tilde{T}^\nu$. Esta integral de ação leva às seguintes

equações de campo para variações em relação a $\tilde{\phi}_B$, $\tilde{\phi}_T$, ϕ_B^μ , ϕ_T^μ , \tilde{e}_μ^a , respectivamente:

$$(EL_{\tilde{\phi}_B}) \equiv \tilde{B} + \sqrt{3}\tilde{\square}\tilde{\phi}_T - \frac{5}{\sqrt{3}}\tilde{T}^\rho\partial_\rho\tilde{\phi}_T - \tilde{g}^{\rho\sigma}\partial_\rho\tilde{\phi}_T\partial_\sigma\tilde{\phi}_T + e^{-\frac{\tilde{\phi}_T}{\sqrt{3}}}\frac{(\beta_{BT}\tilde{X}_T - \beta_T\tilde{X}_B)}{(\beta_T\beta_B - \beta_{BT}^2)} = 0, \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} (EL_{\tilde{\phi}_T}) \equiv & \left(1 + 2\tilde{\phi}_B\right)\tilde{\square}\tilde{\phi}_T + \sqrt{3}\tilde{\square}\tilde{\phi}_B + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 + \sqrt{3}\tilde{\phi}_B\right)\tilde{B} \\ & + 2\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\tilde{\phi}_B\partial_\nu\tilde{\phi}_T + \left(2 - \sqrt{3}\right)\tilde{T}^\nu\partial_\nu\tilde{\phi}_B - \left(1 + 2\tilde{\phi}_B\right)\tilde{T}^\nu\partial_\nu\tilde{\phi}_T \\ & - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{e^{-\frac{2\tilde{\phi}_T}{\sqrt{3}}}}{(\beta_T\beta_B - \beta_{BT}^2)}\left(\beta_B\tilde{X}_T\tilde{W}_T + \beta_T\tilde{X}_B\tilde{W}_B - \beta_{BT}\tilde{X}_T\tilde{W}_B - \beta_{BT}\tilde{X}_B\tilde{W}_T\right) \\ & - \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{e^{-\frac{2\tilde{\phi}_T}{\sqrt{3}}}}{(\beta_T\beta_B - \beta_{BT}^2)}\left[(\beta_B\phi_T^\nu - \beta_{BT}\phi_B^\nu)\partial_\nu\tilde{X}_T + (\beta_T\phi_B^\nu - \beta_{BT}\phi_T^\nu)\partial_\nu\tilde{X}_B\right] \\ & + \frac{\sqrt{3}e^{-\frac{3\tilde{\phi}_T}{\sqrt{3}}}}{(\gamma_T\gamma_B - \gamma_{BT}^2)}\tilde{g}_{\mu\nu}Y_{TB}^{\mu\nu} - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{2\tilde{\phi}_T}{\sqrt{3}}}f_0 = 0, \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$(EL_{\tilde{\phi}_B})_\nu \equiv \frac{e^{-\frac{2\tilde{\phi}_T}{\sqrt{3}}}}{(\beta_T\beta_B - \beta_{BT}^2)}\partial_\nu\left(\beta_{BT}\tilde{X}_T - \beta_T\tilde{X}_B\right) + \frac{e^{-\frac{3\tilde{\phi}_T}{\sqrt{3}}}}{(\gamma_T\gamma_B - \gamma_{BT}^2)}\tilde{g}_{\mu\nu}\left(\gamma_T\phi_B^\mu - \gamma_{BT}\phi_T^\mu\right) = 0, \quad (4.86)$$

$$(EL_{\tilde{\phi}_T})_\nu \equiv \frac{e^{-\frac{2\tilde{\phi}_T}{\sqrt{3}}}}{(\beta_T\beta_B - \beta_{BT}^2)}\partial_\nu\left(\beta_B\tilde{X}_T - \beta_{BT}\tilde{X}_B\right) - \frac{e^{-\frac{3\tilde{\phi}_T}{\sqrt{3}}}}{(\gamma_T\gamma_B - \gamma_{BT}^2)}\tilde{g}_{\mu\nu}\left(\gamma_B\phi_T^\mu - \gamma_{BT}\phi_B^\mu\right) = 0, \quad (4.87)$$

$$(EL_{\tilde{e}})^\alpha = \frac{4}{\tilde{e}}\partial_\sigma\left(\tilde{e}\tilde{\Sigma}_a^{\sigma\alpha}\right) + 4\tilde{\Sigma}^{\sigma\rho\alpha}\tilde{T}_{\sigma\rho a} - \tilde{e}_a^\alpha\tilde{T} - \kappa\tilde{\mathcal{T}}_a^\alpha = 0. \quad (4.88)$$

Acima, nós usamos as definições:

$$\begin{cases} \tilde{W}_T \equiv \tilde{\Delta}_\nu\phi_T^\nu - \frac{2}{\sqrt{3}}\phi_T^\nu\partial_\nu\tilde{\phi}_T + \alpha_T, \\ \tilde{W}_B \equiv \tilde{\Delta}_\nu\phi_B^\nu - \frac{2}{\sqrt{3}}\phi_B^\nu\partial_\nu\tilde{\phi}_T + \alpha_B, \end{cases} \quad (4.89)$$

e

$$\begin{aligned}
 \kappa \tilde{\mathcal{T}}_a^\alpha \equiv & -2 \left[\frac{(1 + \tilde{\phi}_B)}{\sqrt{3}} \tilde{\square} \tilde{\phi}_T + \tilde{\square} \tilde{\phi}_B \right] \tilde{e}_a^\alpha + 2\tilde{g}^{\mu\alpha} \tilde{\nabla}_\mu \partial_\nu \tilde{\phi}_B \tilde{e}_a^\nu \\
 & + \sqrt{3} \left[\frac{1}{3} (2 - \tilde{\phi}_B) \tilde{g}^{\alpha\mu} \tilde{e}_a^\nu - \tilde{\phi}_B \tilde{g}^{\alpha\nu} \tilde{e}_a^\mu \right] \tilde{\nabla}_\mu \partial_\nu \tilde{\phi}_T \\
 & - \tilde{g}^{\mu\nu} \left[\left(\frac{1}{2} + \tilde{\phi}_B \right) \partial_\mu \tilde{\phi}_T + \frac{5}{\sqrt{3}} \partial_\mu \tilde{\phi}_B \right] \partial_\nu \tilde{\phi}_T \tilde{e}_a^\alpha \\
 & + \left(\frac{1}{2} + \tilde{\phi}_B \right) (\tilde{g}^{\alpha\nu} \tilde{e}_a^\mu + \tilde{g}^{\alpha\mu} \tilde{e}_a^\nu) \partial_\mu \tilde{\phi}_T \partial_\nu \tilde{\phi}_T \\
 & + \sqrt{3} \left(\frac{5}{3} \tilde{g}^{\alpha\nu} \tilde{e}_a^\mu - \tilde{g}^{\alpha\mu} \tilde{e}_a^\nu \right) \partial_\mu \tilde{\phi}_B \partial_\nu \tilde{\phi}_T \\
 & + \frac{2}{\sqrt{3}} (1 + 4\tilde{\phi}_B) \tilde{T}^\alpha \tilde{e}_a^\rho \partial_\rho \tilde{\phi}_T + 2 (\tilde{T}^\alpha \delta_\beta^\rho + \tilde{T}^{\rho\alpha}) \tilde{e}_a^\beta \partial_\rho \tilde{\phi}_B \\
 & + \frac{e^{-\frac{2\tilde{\phi}_T}{\sqrt{3}}}}{(\beta_T \beta_B - \beta_{BT}^2)} (\beta_B \phi_T^\nu - \beta_{BT} \phi_B^\nu) (\tilde{e}_a^\alpha \partial_\nu \tilde{X}_T + \tilde{e}_a^\rho \tilde{T}^\alpha{}_{\nu\rho} \tilde{X}_T) \\
 & + \frac{e^{-\frac{2\tilde{\phi}_T}{\sqrt{3}}}}{(\beta_T \beta_B - \beta_{BT}^2)} (\beta_T \phi_B^\nu - \beta_{BT} \phi_T^\nu) (\tilde{e}_a^\alpha \partial_\nu \tilde{X}_B + \tilde{e}_a^\rho \tilde{T}^\alpha{}_{\nu\rho} \tilde{X}_B) \\
 & - \frac{e^{-\frac{2\tilde{\phi}_T}{\sqrt{3}}}}{(\beta_T \beta_B - \beta_{BT}^2)} \tilde{Q}_{TB} \tilde{e}_a^\alpha + e^{-\frac{2\tilde{\phi}_T}{\sqrt{3}}} f_0 \tilde{e}_a^\alpha \\
 & - \frac{e^{-\frac{3\tilde{\phi}_T}{\sqrt{3}}}}{(\gamma_T \gamma_B - \gamma_{BT}^2)} (\tilde{g}_{\mu\nu} Y_{TB}^{\mu\nu} \tilde{e}_a^\alpha + 2Y_{TB}^{\alpha\mu} \eta_{ab} \tilde{e}_\mu^b), \tag{4.90}
 \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
 \tilde{Q}_{TB} \equiv & \frac{1}{2} \left(\beta_B \tilde{X}_T^2 + \beta_T \tilde{X}_B^2 - 2\beta_{BT} \tilde{X}_B \tilde{X}_T \right) \\
 & - \left(\beta_B \tilde{X}_T - \beta_{BT} \tilde{X}_B \right) \left(\tilde{W}_T - \alpha_T \right) \\
 & - \left(-\beta_{BT} \tilde{X}_T + \beta_T \tilde{X}_B \right) \left(\tilde{W}_B - \alpha_B \right). \tag{4.91}
 \end{aligned}$$

Chamamos a atenção para a dependência de $\tilde{\mathcal{T}}_a^\alpha$ com as segundas derivadas de $\tilde{\phi}_T$ e $\tilde{\phi}_B$ (como esperado do acoplamento desses campos com \tilde{B} e $\tilde{\nabla}_\nu \tilde{T}^\nu$) e de ϕ_T^μ e ϕ_B^μ (devido aos termos quadráticos $\tilde{X}_T^2, \tilde{X}_B^2, 2\tilde{X}_T \tilde{X}_B$ no potencial \tilde{V}). Com a interpretação de $\tilde{\mathcal{T}}_a^\alpha$ como um tensor de energia-momento efetivo, fica claro que a Eq.(4.88) é uma equação semelhante à TEGR para \tilde{e}_a^α . É um conjunto de 16 equações de segunda ordem com a presença de segundas derivadas de $\tilde{e}_a^\alpha, \tilde{\phi}_T, \tilde{\phi}_B, \phi_T^\mu$ e ϕ_B^μ . As outras 10 equações (Eq.(4.84) a Eq.(4.87)) também são equações diferenciais de segunda ordem para esses campos.

Observe que as derivadas de \tilde{X}_T e \tilde{X}_B estão presentes em todas as equações, exceto na Eq.(4.84). No entanto, a partir de manipulações das Eqs.(4.86) e (4.87), podemos isolar

$\partial_\nu \tilde{X}_T$ e $\partial_\nu \tilde{X}_B$ em termos de ϕ_T^μ , ϕ_B^μ , $\tilde{g}_{\mu\nu}$ e $\tilde{\phi}_T$, o que nos dá:

$$\partial_\nu \begin{pmatrix} \tilde{X}_T \\ \tilde{X}_B \end{pmatrix} = \frac{e^{-\frac{\tilde{\phi}_T}{\sqrt{3}}}}{(\gamma_T \gamma_B - \gamma_{BT}^2)} \tilde{g}_{\mu\nu} \begin{pmatrix} -\beta_{BT} & \beta_T \\ -\beta_B & \beta_{BT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{BT} & -\gamma_T \\ \gamma_B & -\gamma_{BT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_T^\mu \\ \phi_B^\mu \end{pmatrix}. \quad (4.92)$$

Se substituirmos esse resultado nas equações de campo restantes, a análise do número de graus de liberdade dinâmicos é bastante simplificada. De fato, após realizar essa substituição, isolamos as segundas derivadas temporais que estão presentes em cada equação; temos:

$$(EL_{\tilde{\phi}_B}) \sim \tilde{B} + \sqrt{3} \tilde{g}^{00} (\partial_0)^2 \tilde{\phi}_T, \quad (4.93)$$

$$(EL_{\tilde{\phi}_T}) \sim (1 + 2\tilde{\phi}_B) \tilde{g}^{00} (\partial_0)^2 \tilde{\phi}_T + \sqrt{3} \tilde{g}^{00} (\partial_0)^2 \tilde{\phi}_B + \frac{1}{\sqrt{3}} (1 + \sqrt{3} \tilde{\phi}_B) \tilde{B}, \quad (4.94)$$

$$(EL_{\tilde{\phi}_B})_\nu \sim \delta_\nu^0 \frac{e^{-\frac{2\tilde{\phi}_T}{\sqrt{3}}}}{(\beta_T \beta_B - \beta_{BT}^2)} (\beta_{BT} \partial_0 \tilde{X}_T - \beta_T \partial_0 \tilde{X}_B), \quad (4.95)$$

$$(EL_{\tilde{\phi}_T})_\nu \sim \delta_\nu^0 \frac{e^{-\frac{2\tilde{\phi}_T}{\sqrt{3}}}}{(\beta_T \beta_B - \beta_{BT}^2)} (\beta_B \partial_0 \tilde{X}_T - \beta_{BT} \partial_0 \tilde{X}_B), \quad (4.96)$$

$$(EL_{\tilde{e}})^\alpha \sim 4\delta_j^\alpha \tilde{N}_{ad}{}^{ij} (\partial_0)^2 \tilde{e}_i^d + 2\tilde{g}^{00} \left[(\partial_0)^2 \tilde{\phi}_B + \frac{\sqrt{3}}{3} (1 + \tilde{\phi}_B) (\partial_0)^2 \tilde{\phi}_T \right] \tilde{e}_a^\alpha - 2\tilde{g}^{0\alpha} \tilde{e}_a^0 \left[(\partial_0)^2 \tilde{\phi}_B + \frac{\sqrt{3}}{3} (1 - 2\tilde{\phi}_B) (\partial_0)^2 \tilde{\phi}_T \right], \quad (4.97)$$

onde $\tilde{N}_{ad}{}^{ij}$ e \tilde{B} são equivalentes às Eqs. (4.73) e (4.80), expressas em termos dos campos conformes $\tilde{g}^{\mu\nu}$, \tilde{e}_d^α .

Quando tomamos $\nu = 1, 2, 3$ nas Eqs.(4.95) e (4.96), não temos segundas derivadas temporais de nenhum dos campos, o que significa que pelo menos 6 graus de liberdade não são dinâmicos em nosso sistema. Nas mesmas equações, quando $\nu = 0$, acabamos com duas equações que envolvem as segundas derivadas temporais de vários campos devido ao fato de que:

$$\begin{cases} \partial_0 \tilde{X}_T \sim (\partial_0)^2 \phi_T^0 + \phi_T^0 \tilde{e}_b^\mu (\partial_0)^2 \tilde{e}_\mu^b - \frac{2}{\sqrt{3}} \phi_T^0 (\partial_0)^2 \tilde{\phi}_T, \\ \partial_0 \tilde{X}_B \sim (\partial_0)^2 \phi_B^0 + \phi_B^0 \tilde{e}_b^\mu (\partial_0)^2 \tilde{e}_\mu^b - \frac{2}{\sqrt{3}} \phi_B^0 (\partial_0)^2 \tilde{\phi}_T. \end{cases} \quad (4.98)$$

Essas duas equações estabelecem apenas vínculos entre as segundas derivadas temporais de ϕ_B^0 , ϕ_T^0 , \tilde{e}_μ^b , $\tilde{\phi}_T$. Uma situação semelhante é observada nas Eqs.(4.93) e (4.94). A primeira

estabelece um vínculo entre $(\partial_0)^2 \tilde{\phi}_T$ e $(\partial_0)^2 \tilde{e}_i^a$ (lembre-se de que $\tilde{B} \sim (\partial_0)^2 \tilde{e}_i^a$), enquanto a última estabelece um vínculo entre $(\partial_0)^2 \tilde{\phi}_B$, $(\partial_0)^2 \tilde{\phi}_T$ e $(\partial_0)^2 \tilde{e}_i^a$. De fato, a Eq.(4.93) pode ser usada para expressar a segunda derivada temporal de $\tilde{\phi}_T$ em termos da segunda derivada de \tilde{e}_i^a . Essa relação, por sua vez, pode ser usada na Eq.(4.94) para que $(\partial_0)^2 \tilde{\phi}_B$ também possa ser expressa em termos de $(\partial_0)^2 \tilde{e}_i^a$. Se essas relações forem substituídas na Eq.(4.97), então isso se torna um conjunto de 16 equações que envolvem as segundas derivadas temporais dos 12 componentes \tilde{e}_i^a . Isso significa que 4 dessas equações são na verdade vínculos e não equações dinâmicas.

Para resumir, começamos com 26 equações (Eqs.(4.84) a (4.88)), entre as quais temos 14 vínculos – 10 vindos das Eqs.(4.84), (4.85), (4.86), (4.87) e 4 da Eq.(4.88). Isso significa que apenas 12 equações são dinâmicas, as quais estabelecem um máximo de 12 graus de liberdade dinâmicos. No entanto, ainda podemos eliminar 4 graus de liberdade fixando adequadamente um sistema de coordenadas no espaço-tempo. Isso reduz o número máximo de graus de liberdade dinâmicos de 12 para 8. Como mencionado anteriormente, ainda podemos fixar um sistema de coordenadas no espaço tangente. Novamente, não está claro na análise do problema de Cauchy se isso pode reduzir o número de variáveis dinâmicas ou não. No final, o número de graus de liberdade dinâmicos varia entre 4 e 8, assim como nas abordagens geométrica e de Jordan.

4.4 Considerações Finais

Este trabalho foi dedicado à investigação da gravidade teleparalela de ordem superior do tipo $f(T, \nabla_\mu T, B, \nabla_\mu B, e_\mu^a)$ e sua possível descrição como uma teoria escalar-multi-tensorial. Para alcançar esse objetivo, o sistema foi analisado nos *frames* de Jordan e Einstein. No primeiro, quatro campos auxiliares - dois escalares e dois campos vetoriais - foram introduzidos e reduziram a ordem da derivada das equações de campo em comparação com a abordagem geométrica padrão. O preço a ser pago foi a inclusão de dez graus de liberdade extras. No *frame* de Jordan, a integral de ação é semelhante a uma teoria escalar-tensorial (semelhante à de Brans-Dicke) sem termo cinético.

A transição para o *frame* de Einstein foi realizada por uma transformação conforme da tetrada e a integral de ação usada no *frame* de Jordan foi obtida em termos das novas variáveis transformadas. Como de costume, o Lagrangiano final foi um Lagrangiano TEGR combinado com um potencial efetivo, com termos contendo acoplamentos derivativos e um termo cinético para um dos campos escalares auxiliares, $\tilde{\phi}_T$, que foi convenientemente redefinido em termos do campo original Φ_T . O resultado foi um conjunto de equações semelhantes ao TEGR com um tensor de energia-momento efetivo para os campos auxiliares.

A estrutura desenvolvida nos *frames* de Jordan e Einstein foi então aplicada a um exemplo. Para verificar se a dinâmica nos *frames* geométrico, de Jordan e de Einstein poderia ser compatível, uma análise concisa do problema de Cauchy foi realizada. Todas as abordagens resultaram no mesmo intervalo possível de graus de liberdade dinâmicos, ou seja, entre 4 e 8. É importante mencionar que determinar o número de graus de liberdade dinâmicos não é uma tarefa trivial a ser realizada em teorias teleparalelas. Em nossa opinião, isso parece estar associado ao papel que a transformação de Lorentz global desempenha nessas teorias. Este é um problema que merece uma análise própria.

Além disso, o fato de os graus de liberdade permanecerem consistentes em ambos os *frames*, até onde o problema de Cauchy nos permite analisar, sugere que o modelo estudado é promissor para aplicações. Isso inclui cosmologia (tanto do universo atual quanto primordial), fenômenos astrofísicos como estrelas, galáxias, buracos negros, ondas gravitacionais e lentes gravitacionais. Esses testes poderiam realmente validar experimentalmente o modelo proposto. Além do contexto experimental, o modelo pode ser submetido a testes no contexto da gravidade quântica e analisado, por exemplo, do ponto de vista de sua renormalizabilidade. Essas aplicações representam áreas que planejamos explorar em pesquisas futuras, reconhecendo que cada uma delas apresenta desafios únicos. Somente após investigar tais aplicações poderemos avaliar adequadamente as vantagens e limitações que tal abordagem teleparalela geral pode oferecer.

5 Conclusão

Neste trabalho, exploramos detalhadamente o estudo das teorias de gravitação dentro da perspectiva das teorias teleparalelas, com foco particular nas abordagens geométrica e de gauge. No Capítulo 2, iniciamos com a construção de teorias de gravitação usando uma abordagem exclusivamente geométrica, formulando a teoria em uma variedade diferenciável com métrica e conexão. Observamos as propriedades intrínsecas como curvatura, torção e derivada covariante da métrica, e discutimos como a nulidade de uma dessas propriedades leva a diferentes geometrias, as quais podem ser estudadas através de campos fundamentais, como a tetrada. Destacamos a variedade de Weitzenböck, onde a torção desempenha um papel central e a curvatura e condição de metricidade são nulas. Demonstramos que, mesmo com uma geometria diferente, a teoria na variedade de Weitzenböck pode ser equivalente à Relatividade Geral.

No Capítulo 3, avançamos para o desenvolvimento de uma teoria de gravitação de ordem superior como uma teoria de gauge. Apresentamos a teoria geral de gauge desenvolvida por Utiyama e sua aplicação ao grupo de Translação, que, apesar de não ser um grupo semi-simples, pode ser associado a uma teoria de gravitação teleparalela na perspectiva de uma teoria de gauge. Observamos que, ao contrário do campo de gauge na teoria de Utiyama, um campo de gauge livre pode admitir um termo massivo. A análise da lagrangiana do campo de gauge revelou novos invariantes e possíveis soluções para as equações de campo, incluindo o potencial gravitacional que combina os potenciais de Newton e Yukawa. Esses resultados sugerem a possível existência de grávitons com massa e fornecem uma base para novas investigações sobre soluções adicionais.

Finalmente, no Capítulo 4, nos dedicamos à investigação da gravidade teleparalela de ordem superior do tipo $f(T, B, \nabla_\mu T, \nabla_\mu B)$ e sua descrição como uma teoria escalar-multi-tensorial. Mas antes disso, introduzimos ao leitor o problema de Cauchy e como este pode ser utilizado para analisar a dinâmica de uma teoria de gravitação, para isso utilizamos como exemplo o TEGR. Em seguida, também com caráter de revisão, apresentamos os *frames* de Jordan e de Einstein através da aplicação em uma teoria $f(T)$. Finalizada a revisão, partimos para o caso das teorias $f(T, B, \nabla_\mu T, \nabla_\mu B)$, onde analisamos o sistema nos *frames* de Jordan e Einstein. No *frame* de Jordan, a introdução de campos auxiliares permitiu a redução da ordem das equações de campo, embora com a inclusão de graus

de liberdade adicionais. A transição para o *frame* de Einstein foi realizada por uma transformação conforme da tetrada, resultando em uma Lagrangiana combinada com um potencial efetivo. A análise do problema de Cauchy confirmou que os graus de liberdade dinâmicos permanecem consistentes entre os *frames*, sugerindo que o modelo estudado tem potencial para aplicações práticas em cosmologia, astrofísica e gravidade quântica.

As perspectivas para futuras pesquisas incluem a validação experimental do modelo proposto e a análise de sua renormalizabilidade perturbativa. Tais investigações permitirão avaliar as vantagens e limitações desta abordagem teleparalela em comparação com outras teorias de gravitação, aprofundando nossa compreensão da gravidade em contextos variados.

Referências

ABRAMO, L. R.; YASUDA, I.; PETER, P. Nonsingular bounce in modified gravity. **Physical Review D**, APS, v. 81, n. 2, p. 023511, 2010.

ACCIOLY, A.; GIACCHINI, B. L.; SHAPIRO, I. L. On the gravitational seesaw in higher-derivative gravity. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 77, p. 1–7, 2017.

ACEVEDO, O.; CUZINATTO, R.; PIMENTEL, B.; POMPEIA, P. Teorias de gauge à la Utiyama. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 40, p. e4302, 2018.

AFONSO, V.; OLMO, G. J.; RUBIERA-GARCIA, D. Mapping Ricci-based theories of gravity into general relativity. **Physical Review D**, APS, v. 97, n. 2, p. 021503, 2018.

ALDROVANDI, R.; BARROS, P.; PEREIRA, J. Gravitation as anholonomy. **General Relativity and Gravitation**, v. 35, 02 2003.

ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. **An Introduction to Geometrical Physics**. [S.l.]: World Scientific, 1995. (G - Reference, Information and Interdisciplinary Subjects Series). ISBN 9789810222321.

ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. G. **Teleparallel gravity: an introduction**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

ARCOS, H. I.; PEREIRA, J. G. Torsion gravity: a reappraisal. **International Journal of Modern Physics D**, World Scientific, v. 13, n. 10, p. 2193–2240, 2004.

ASSENCCIO, E. M. B.; CARAÇA, R. S.; VILHENA, S. G.; POMPEIA, P. J. Second-order teleparallel gauge theory. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 40, n. 20, p. 205015, sep 2023.

ASSENCCIO, E. M. B.; POMPEIA, P. J. Scalar-multi-tensor approach to $f(T, B, \nabla_\mu T, \nabla_\mu B)$ teleparallel gravity. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 41, n. 6, p. 065013, feb 2024.

ASTIER, P.; GUY, J.; REGNAULT, N.; PAIN, R.; AUBOURG, E.; BALAM, D.; BASA, S.; CARLBERG, R.; FABBRO, S.; FOUCHÉZ, D. *et al.* The supernova legacy survey: measurement of, and w from the first year data set. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 447, n. 1, p. 31–48, 2006.

- BAHAMONDE, S.; SAID, J. L.; ZUBAIR, M. Solar system tests in modified teleparallel gravity. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2020, n. 10, p. 024, 2020.
- BENISTY, D.; GUENDELMAN, E. I.; VASAK, D.; STRUCKMEIER, J.; STOECKER, H. Quadratic curvature theories formulated as covariant canonical gauge theories of gravity. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 98, p. 106021, Nov 2018.
- BERGLIAFFA, S. E. P.; NUNES, Y. E. C. d. O. Static and spherically symmetric black holes in $f(R)$ theories. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 84, p. 084006, Oct 2011.
- BERGLIAFFA, S. P. Constraining $f(R)$ theories with the energy conditions. **Physics Letters B**, v. 642, n. 4, p. 311–314, 2006. ISSN 0370-2693.
- BERTIN, M.; PIMENTEL, B.; POMPEIA, P. Hamilton–Jacobi approach for first order actions and theories with higher derivatives. **Annals of Physics**, v. 323, n. 3, p. 527–547, 2008. ISSN 0003-4916.
- BERTIN, M.; PIMENTEL, B.; POMPEIA, P. General relativity in two dimensions: A Hamilton–Jacobi analysis. **Annals of Physics**, v. 325, n. 11, p. 2499–2511, 2010. ISSN 0003-4916.
- BERTONE, G.; HOOPER, D. History of dark matter. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 90, n. 4, p. 045002, 2018.
- BERTONE, G.; TAIT, T. M. A new era in the search for dark matter. **Nature**, Nature Publishing Group UK London, v. 562, n. 7725, p. 51–56, 2018.
- BHADRA, A.; SARKAR, K.; DATTA, D.; NANDI, K. Brans–dicke theory: Jordan versus Einstein frame. **Modern Physics Letters A**, World Scientific, v. 22, n. 05, p. 367–375, 2007.
- BISWAS, T.; KOSHELEV, A. S.; MAZUMDAR, A. Consistent higher derivative gravitational theories with stable de Sitter and anti–de Sitter backgrounds. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 95, p. 043533, Feb 2017.
- BISWAS, T.; TALAGANIS, S. String-inspired infinite-derivative theories of gravity: A brief overview. **Modern Physics Letters A**, World Scientific, v. 30, n. 03n04, p. 1540009, 2015.
- BITTENCOURT, E.; MOSCHELLA, U.; NOVELLO, M.; TONIATO, J. D. Cosmology in geometric scalar gravity. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 90, p. 123540, Dec 2014.
- BITTENCOURT, E.; MOSCHELLA, U.; NOVELLO, M.; TONIATO, J. D. More about scalar gravity. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 93, p. 124023, Jun 2016.
- BLAGOJEVIĆ, M.; NESTER, J. M. Local symmetries and physical degrees of freedom in $f(\mathbb{T})$ gravity: A Dirac–Hamiltonian constraint analysis. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 102, p. 064025, Sep 2020.

- BLAGOJEVIĆ, M.; NIKOLIĆ, I. A. Hamiltonian structure of the teleparallel formulation of general relativity. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 62, p. 024021, Jun 2000.
- BRAX, P. What makes the universe accelerate? a review on what dark energy could be and how to test it. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 81, n. 1, p. 016902, 2017.
- CALDWELL, R. R.; KAMIONKOWSKI, M. The physics of cosmic acceleration. **Annual Review of Nuclear and Particle Science**, Annual Reviews, v. 59, p. 397–429, 2009.
- CALZÀ, M.; RINALDI, M.; SEBASTIANI, L. A special class of solutions in $f(R)$ -gravity. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 78, p. 1–9, 2018.
- CAPOZZIELLO, S.; LAURENTIS, M. D. Extended theories of gravity. **Physics Reports**, Elsevier, v. 509, n. 4-5, p. 167–321, 2011.
- CAPOZZIELLO, S.; STABILE, A.; TROISI, A. A general solution in the newtonian limit of $f(R)$ -gravity. **Modern physics letters A**, World Scientific, v. 24, n. 09, p. 659–665, 2009.
- CASANA, R.; MELO, C. de; PIMENTEL, B. Massless DKP field in a Lyra manifold. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 24, n. 3, p. 723, 2007.
- CASTELLANOS, A. R. R.; SOBREIRA, F.; SHAPIRO, I. L.; STAROBINSKY, A. A. On higher derivative corrections to the $R+R^2$ inflationary model. **Journal of cosmology and astroparticle physics**, IOP Publishing, v. 2018, n. 12, p. 007, 2018.
- CHO, Y. Einstein lagrangian as the translational Yang-Mills lagrangian. **Physical Review D**, APS, v. 14, n. 10, p. 2521, 1976.
- CHO, Y. Gauge theory of Poincaré symmetry. **Physical Review D**, APS, v. 14, n. 12, p. 3335, 1976.
- CLOWE, D.; BRADAČ, M.; GONZALEZ, A. H.; MARKEVITCH, M.; RANDALL, S. W.; JONES, C.; ZARITSKY, D. A direct empirical proof of the existence of dark matter. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 648, n. 2, p. L109, 2006.
- CUZINATTO, R.; MEDEIROS, L.; POMPEIA, P. Higher-order modified Starobinsky inflation. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2019, n. 02, p. 055, 2019.
- CUZINATTO, R.; MELO, C. de; MEDEIROS, L.; POMPEIA, P. Gauge formulation for higher order gravity. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 53, p. 99–108, 2008.
- CUZINATTO, R.; MELO, C. de; MEDEIROS, L.; POMPEIA, P. Observational constraints on a phenomenological $f(R, \nabla R)$ -model. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 47, n. 3, p. 29, 2015.
- CUZINATTO, R.; MELO, C. de; POMPEIA, P. Second order gauge theory. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 322, n. 5, p. 1211–1232, 2007.

CUZINATTO, R.; PIMENTEL, B.; POMPEIA, P.; ESQUIA, J. S. A massive gauge theory à la Utiyama. **Physica Scripta**, IOP Publishing, v. 98, n. 8, p. 085308, 2023.

CUZINATTO, R. R.; MELO, C. A. de; MEDEIROS, L. G.; POMPEIA, P. J. Cosmic acceleration from second order gauge gravity. **Astrophysics and Space Science**, Springer, v. 332, p. 201–208, 2011.

CUZINATTO, R. R.; MELO, C. A. M. de; MEDEIROS, L. G.; POMPEIA, P. J. Scalar-multi-tensorial equivalence for higher order $f(R, \nabla_\mu R, \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} R, \dots, \nabla_{\mu_1} \dots \nabla_{\mu_n} R)$ theories of gravity. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 93, p. 124034, Jun 2016.

CUZINATTO, R. R.; MELO, C. A. M. de; MEDEIROS, L. G.; POMPEIA, P. J. $f(R, \nabla_{\mu_1} R, \dots, \nabla_{\mu_1} \dots \nabla_{\mu_n} R)$ theories of gravity in Einstein frame: A higher order modified Starobinsky inflation model in the palatini approach. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 99, p. 084053, Apr 2019.

CUZINATTO, R. R.; MORAIS, E. M. de; PIMENTEL, B. M. Lyra scalar-tensor theory: A scalar-tensor theory of gravity on Lyra manifold. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 103, p. 124002, Jun 2021.

DECANINI, Y.; FOLACCI, A. Irreducible forms for the metric variations of the action terms of sixth-order gravity and approximated stress–energy tensor. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 24, n. 18, p. 4777, 2007.

EINSTEIN, A. New possibility for a unified field theory of gravitation and electricity. **Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften-physikalisch-mathematische Klasse**, p. 224–227, 1928.

FABRIS, J. C.; PEREZ, R. S.; PINTO-NETO, N.; BERGLIAFFA, S. E. P. Born-Infeld-like $f(R)$ gravity. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 86, p. 103525, Nov 2012.

FARRUGIA, G.; SAID, J. L.; FINCH, A. Gravitoelectromagnetism, solar system tests, and weak-field solutions in $f(T, B)$ gravity with observational constraints. **Universe**, MDPI, v. 6, n. 2, p. 34, 2020.

FELSAGER, B. **Geometry, particles, and fields**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

FERRARO, R.; GUZMÁN, M. J. Hamiltonian formalism for $f(T)$ gravity. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 97, p. 104028, May 2018.

FERRARO, R.; GUZMÁN, M. J. Quest for the extra degree of freedom in $f(T)$ gravity. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 98, p. 124037, Dec 2018.

FINCH, A.; SAID, J. L. Galactic rotation dynamics in $f(T)$ gravity. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 78, p. 1–18, 2018.

FREEDMAN, W. L. Measurements of the hubble constant: tensions in perspective. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 919, n. 1, p. 16, 2021.

- GOLOVNEV, A.; GUZMÁN, M. J. Disformal transformations in modified teleparallel gravity. **Symmetry**, MDPI, v. 12, n. 1, p. 152, 2020.
- GOLOVNEV, A.; GUZMÁN, M.-J. Foundational issues in $f(T)$ gravity theory. **International Journal of Geometric Methods in Modern Physics**, World Scientific, v. 18, n. supp01, p. 2140007, 2021.
- HAYASHI, K.; SHIRAFUJI, T. New general relativity. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 19, p. 3524–3553, Jun 1979.
- HAYASHI, K.; SHIRAFUJI, T. New general relativity. **Physical Review D**, APS, v. 19, n. 12, p. 3524, 1979.
- HOHMANN, M. Scalar-torsion theories of gravity. III. Analogue of scalar-tensor gravity and conformal invariants. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 98, p. 064004, Sep 2018.
- HUTERER, D.; SHAFER, D. L. Dark energy two decades after: observables, probes, consistency tests. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 81, n. 1, p. 016901, 2017.
- IOCCO, F.; PATO, M.; BERTONE, G. Evidence for dark matter in the inner Milky Way. **Nature Physics**, Nature Publishing Group UK London, v. 11, n. 3, p. 245–248, 2015.
- ISHAM, C. J. Spinor fields in four dimensional space-time. **Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences**, The Royal Society London, v. 364, n. 1719, p. 591–599, 1978.
- KASE, R.; TSUJIKAWA, S. Dark energy in Horndeski theories after gw170817: A review. **International Journal of Modern Physics D**, World Scientific, v. 28, n. 05, p. 1942005, 2019.
- KIBBLE, T. W. Lorentz invariance and the gravitational field. **Journal of mathematical physics**, American Institute of Physics, v. 2, n. 2, p. 212–221, 1961.
- KRŠŠÁK, M.; HOOGEN, R. V. D.; PEREIRA, J.; BÖHMER, C.; COLEY, A. Teleparallel theories of gravity: illuminating a fully invariant approach. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 36, n. 18, p. 183001, 2019.
- KRŠŠÁK, M.; SARIDAKIS, E. N. The covariant formulation of $f(T)$ gravity. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 33, n. 11, p. 115009, 2016.
- LANGE, J. U.; YANG, X.; GUO, H.; LUO, W.; BOSCH, F. C. van den. New perspectives on the BOSS small-scale lensing discrepancy for the Planck λ CDM cosmology. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 488, n. 4, p. 5771–5787, 2019.
- LANGLOIS, D. Dark energy and modified gravity in degenerate higher-order scalar–tensor (dhost) theories: A review. **International Journal of Modern Physics D**, World Scientific, v. 28, n. 05, p. 1942006, 2019.

- LOPES, R. C.; VOIVODIC, R.; ABRAMO, L. R.; JR, L. S. Turnaround radius in $f(R)$ model. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2018, n. 09, p. 010, 2018.
- MALUF, J.; ROCHA-NETO, J. da. General relativity on a null surface: Hamiltonian formulation in the teleparallel geometry. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 31, n. 2, p. 173–185, 1999.
- MALUF, J. W. Hamiltonian formulation of the teleparallel description of general relativity. **Journal of Mathematical Physics**, American Institute of Physics, v. 35, n. 1, p. 335–343, 1994.
- MALUF, J. W. The teleparallel equivalent of general relativity. **Annalen der Physik**, v. 525, n. 5, p. 339–357, 2013.
- MALUF, J. W.; ROCHA-NETO, J. F. da. Hamiltonian formulation of general relativity in the teleparallel geometry. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 64, p. 084014, Sep 2001.
- MELIA, F. The cosmic timeline implied by the jwst high-redshift galaxies. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters**, Oxford University Press, v. 521, n. 1, p. L85–L89, 2023.
- MIRANDA, T.; FABRIS, J.; PIATTELLA, O. Reconstructing a $f(R)$ theory from the α -Attractors. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2017, n. 09, p. 041, 2017.
- MODESTO, L.; RACHWAŁ, L.; SHAPIRO, I. L. Renormalization group in super-renormalizable quantum gravity. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 78, n. 7, p. 555, 2018.
- MODESTO, L.; SHAPIRO, I. L. Superrenormalizable quantum gravity with complex ghosts. **Physics Letters B**, v. 755, p. 279–284, 2016. ISSN 0370-2693.
- MORALES, J. O.; SANTILLÁN, O. P. About the Cauchy problem in Stelle’s quadratic gravity. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2019, n. 03, p. 026, mar 2019.
- MOTTA, V.; GARCÍA-ASPEITIA, M. A.; HERNÁNDEZ-ALMADA, A.; MAGANA, J.; VERDUGO, T. Taxonomy of dark energy models. **Universe**, MDPI, v. 7, n. 6, p. 163, 2021.
- MYRZAKULOV, R.; SEBASTIANI, L.; ZERBINI, S. Some aspects of generalized modified gravity models. **International Journal of Modern Physics D**, World Scientific, v. 22, n. 08, p. 1330017, 2013.
- NASCIMENTO, J. R.; PETROV, A. Y.; PORFÍRIO, P. J. Induced gravitational topological term and the Einstein-Cartan modified theory. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 105, p. 044053, Feb 2022.
- NOJIRI, S.; ODINTSOV, S.; OIKONOMOU, V. Modified gravity theories on a nutshell: Inflation, bounce and late-time evolution. **Physics Reports**, Elsevier, v. 692, p. 1–104, 2017.

- NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Unified cosmic history in modified gravity: from $F(R)$ theory to lorentz non-invariant models. **Physics Reports**, Elsevier, v. 505, n. 2-4, p. 59–144, 2011.
- NOVELLO, M.; BITTENCOURT, E.; MOSCHELLA, U.; GOULART, E.; SALIM, J.; TONIATO, J. Geometric scalar theory of gravity. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2013, n. 06, p. 014, 2013.
- OLMO, G. J. Palatini approach to modified gravity: $f(R)$ theories and beyond. **International Journal of Modern Physics D**, World Scientific, v. 20, n. 04, p. 413–462, 2011.
- O’RAIFEARTAIGH, L. **The dawning of gauge theory**. [*S.l.*]: Princeton University Press, 1997.
- OSHITA, N.; WU, Y.-P. Role of spacetime boundaries in a vierbein formulation of gravity. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 96, p. 044042, Aug 2017.
- PIMENTEL, B.; POMPEIA, P.; ROCHA-NETO, J. da. The Teleparallel Lagrangian and Hamilton-Jacobi formalism. **Il Nuovo Cimento**, Italian Physical Society, v. 64, p. 981–992, Sep 2005.
- PIMENTEL, B.; POMPEIA, P.; ROCHA-NETO, J. da; TEIXEIRA, R. The Teleparallel Lagrangian and Hamilton-Jacobi formalism. **arXiv preprint gr-qc/0303087**, 2003.
- POMPEIA, P. J. Scalar-multitensor approach to teleparallel modified theories of gravity. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 103, p. 124036, Jun 2021.
- PUCHEU, M. L.; JUNIOR, F. A. P. A.; BARRETO, A. B.; ROMERO, C. Cosmological models in Weyl geometrical scalar-tensor theory. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 94, p. 064010, Sep 2016.
- PUCHEU, M. L.; ROMERO, C.; BELLINI, M.; AGUILAR, J. E. M. Gauge invariant fluctuations of the metric during inflation from a new scalar-tensor Weyl-integrable gravity model. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 94, p. 064075, Sep 2016.
- RAHAMAN, F.; BISWAS, R.; FATIMA, H. I.; ISLAM, N. A new proposal for galactic dark matter: Effect of $f(T)$ gravity. **International Journal of Theoretical Physics**, Springer, v. 53, p. 370–379, 2014.
- RIESS, A. G.; STROLGER, L.-G.; TONRY, J.; CASERTANO, S.; FERGUSON, H. C.; MOBASHER, B.; CHALLIS, P.; FILIPPENKO, A. V.; JHA, S.; LI, W. *et al.* Type Ia supernova discoveries at $z > 1$ from the Hubble Space Telescope: Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 607, n. 2, p. 665, 2004.
- RINALDI, M. On the equivalence of Jordan and Einstein frames in scale-invariant gravity. **The European Physical Journal Plus**, Springer, v. 133, p. 1–6, 2018.
- RINALDI, M.; COGNOLA, G.; VANZO, L.; ZERBINI, S. Reconstructing the inflationary $f(R)$ from observations. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2014, n. 08, p. 015, 2014.

- RODRIGUES, M. E.; FABRIS, J. C.; JUNIOR, E. L.; MARQUES, G. T. Generalisation for regular black holes on general relativity to $f(R)$ gravity. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 76, n. 5, p. 250, 2016.
- SABBATA, V. D.; GASPERINI, M. **Introduction to gravitation**. [*S.l.*]: World Scientific Publishing Company, 1986.
- SALLES, F. d. O.; SHAPIRO, I. L. Do we have unitary and (super)renormalizable quantum gravity below the Planck scale? **Physical Review D**, American Physical Society, v. 89, p. 084054, Apr 2014.
- SHAHID-SALESS, B. First-order formalism treatment of $R+R^2$ gravity. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 35, p. 467–470, Jan 1987.
- SHAPIRO, I. L. Counting ghosts in the “ghost-free” non-local gravity. **Physics Letters B**, v. 744, p. 67–73, 2015. ISSN 0370-2693.
- SLOSAR, A.; DAVIS, T.; EISENSTEIN, D.; HLOŽEK, R.; ISHAK-BOUSHAKI, M.; MANDELBAUM, R.; MARSHALL, P.; SAKSTEIN, J.; WHITE, M. Dark energy and modified gravity. **arXiv preprint arXiv:1903.12016**, 2019.
- SOTIRIOU, T. P.; FARAONI, V. $f(R)$ theories of gravity. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 82, p. 451–497, Mar 2010.
- SOTIRIOU, T. P.; LIBERATI, S. Metric-affine $f(R)$ theories of gravity. **Annals of Physics**, v. 322, n. 4, p. 935–966, 2007. ISSN 0003-4916.
- STAROBINSKY, A. A new type of isotropic cosmological models without singularity. **Physics Letters B**, v. 91, n. 1, p. 99–102, 1980. ISSN 0370-2693.
- STELLE, K. S. Renormalization of higher-derivative quantum gravity. **Physical Review D**, APS, v. 16, n. 4, p. 953, 1977.
- TAMANINI, N.; BOEHMER, C. G. Good and bad tetrads in $f(T)$ gravity. **Physical Review D**, APS, v. 86, n. 4, p. 044009, 2012.
- TAMANINI, N.; BÖHMER, C. G. Definition of good tetrads for $f(T)$ gravity. *In: Thirteenth Marcel Grossmann Meeting: On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics and Relativistic Field Theories. Proceedings [...].* [*S.l.: s.n.*], 2015. p. 1282–1284.
- UTIYAMA, R. Invariant theoretical interpretation of interaction. **Physical Review**, APS, v. 101, n. 5, p. 1597, 1956.
- UTIYAMA, R. Invariant theoretical interpretation of interaction. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 101, p. 1597–1607, Mar 1956.
- VILHENA, S.; DUARTE, S.; DUTRA, M.; POMPEIA, P. Neutron stars in modified teleparallel gravity. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2023, n. 04, p. 044, 2023.
- WANDS, D. Extended gravity theories and the Einstein–Hilbert action. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 11, n. 1, p. 269, 1994.

WEITZENBÖCK, R. Invariantentheorie,(noordhoff, groningen, 1923): Sitzungsber. **Preuss. Akad. Wiss.(Berlin), Phys-Math. K**, v. 1, p. 466, 1928.

WEYL, H. Elektron und gravitation. **Zeitschrift für Physik**, v. 56, p. 330–352, 1929.

WIGNER, E. Eine Bemerkung zu Einsteins neuer Formulierung des allgemeinen relativitätsprinzips. **Zeitschrift für Physik**, v. 53, p. 592–596, 1929.

WRIGHT, M. Conformal transformations in modified teleparallel theories of gravity revisited. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 93, p. 103002, May 2016.

YANG, R.-J. Conformal transformation in $f(T)$ theories. **Europhysics Letters**, v. 93, n. 6, p. 60001, mar 2011.

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO TD	2. DATA 21 de agosto de 2024	3. DOCUMENTO Nº DCTA/ITA/TD-040/2024	4. Nº DE PÁGINAS 94
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: Teorias da gravitação de ordem superior no contexto teleparalelo			
6. AUTORA(ES): Elisa Maria Bernardo Assencio			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELA AUTORA: Gravitação; Tetrada; Teorias teleparalelas; Teoria de gauge; Teorias de ordem superior; Teorias escalares-tensoriais.			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Gravitação; Espaço-tempo; Geometria; Teoria de gauge; Equações lineares; Teoria da relatividade; Física nuclear; Física			
10. APRESENTAÇÃO: <input checked="" type="checkbox"/> Nacional <input type="checkbox"/> Internacional ITA, São José dos Campos. Curso de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Física Nuclear. Orientador: Prof. Dr. Pedro José Pompeia. Defesa em 09/08/2024. Publicada em 2024.			
11. RESUMO: Nesta tese, analisamos duas abordagens distintas da gravidade modificada no contexto teleparalelo. Primeiramente, investigamos extensões de segunda ordem dessas teorias como teorias de <i>gauge</i> para o grupo de translação, utilizando a abordagem de Utiyama. Demonstramos que é possível incluir termos de derivada de segunda ordem na Lagrangiana do potencial de <i>gauge</i> , preservando a invariância de <i>gauge</i> e difeomorfismo. Introduzimos um novo objeto necessário para essa preservação, a partir do qual obtemos quatorze invariantes independentes. Esses invariantes levam a equações lineares na quarta derivada do campo das tetradas. Analisamos um exemplo específico com um desses invariantes e avaliamos o limite de campo fraco, mostrando que o potencial gravitacional efetivo combina os potenciais de Newton e Yukawa. Em seguida, no contexto da gravidade teleparalela modificada, analisamos a equivalência entre teorias escalares-multitensoriais e teorias geométricas do tipo $f(T, B, \nabla_\mu T, \nabla_\mu B)$, onde T e B representam, respectivamente, o escalar de torção o escalar do termo de superfície. Realizamos essa análise nos <i>frames</i> de Jordan e Einstein. No <i>frame</i> de Einstein, discutimos dois casos distintos, focando no papel dos termos de superfície. Verificamos a equivalência entre as abordagens geométrica e escalare-multitensoriais para sistemas regulares, que apresentam uma matriz Hessiana regular. Apresentamos um exemplo e realizamos a análise do problema de Cauchy para as diferentes abordagens.			
12. GRAU DE SIGILO: <input checked="" type="checkbox"/> OSTENSIVO <input type="checkbox"/> RESERVADO <input type="checkbox"/> SECRETO			