

Tese apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Física Nuclear, Área de Física.

Bruno Alves de Moura Soares

**ANÁLISE BAYESIANA DE MODELO HADRÔNICO
RELATIVÍSTICO RESTRINGIDO POR OBSERVAÇÕES
RECENTES DE ESTRELAS**

Tese aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:



Prof^a. Dra. Mariana Dutra da Rosa Lourenço

Orientadora



Prof. Dr. César Henrique Lenzi

Coorientador

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP - Brasil
2024

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Divisão de Informação e Documentação

Soares, Bruno Alves de Moura
Análise bayesiana de modelo hadrônico relativístico restringido por observações recentes de estrelas / Bruno Alves de Moura Soares.
São José dos Campos, 2024.
83f.

Tese de Doutorado – Curso de Física Nuclear. Área de Física – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2024. Orientadora: Profª. Dra. Mariana Dutra da Rosa Lourenço. Coorientador: Prof. Dr. César Henrique Lenzi.

1. Estrelas. 2. Estatística bayesiana. 3. Equações de estado. 4. Estrelas de nêutron.
5. Astrofísica. 6. Física nuclear. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Análise bayesiana de modelo hadrônico relativístico restringido por observações recentes de estrelas.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SOARES, Bruno Alves de Moura. **Análise bayesiana de modelo hadrônico relativístico restringido por observações recentes de estrelas**. 2024. 83f. Tese de Doutorado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Bruno Alves de Moura Soares

TÍTULO DO TRABALHO: Análise bayesiana de modelo hadrônico relativístico restringido por observações recentes de estrelas.

TIPO DO TRABALHO/ANO: Tese / 2024

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta tese e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese pode ser reproduzida sem a autorização do autor.

Bruno Alves de Moura Soares

Bruno Alves de Moura Soares
Rua Alfredo Nasser, 428, São João
77807-150 – Araguaína-TO

ANÁLISE BAYESIANA DE MODELO HADRÔNICO RELATIVÍSTICO RESTRINGIDO POR OBSERVAÇÕES RECENTES DE ESTRELAS

Bruno Alves de Moura Soares

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr.	Wayne Leonardo Silva de Paula	Presidente	-	ITA
Profa. Dra.	Mariana Dutra da Rosa Lourenço	Orientadora	-	ITA
Prof. Dr.	César Henrique Lenzi	Coorientador	-	ITA
Prof. Dr.	Rene Felipe Keidel Spada	Membro interno	-	ITA
Dr.	Rodrigo Picanço Negreiros	Membro externo	-	UFF
Dr.	Sérgio José Barbosa Duarte	Membro externo	-	CBPF

A minha querida e paciente esposa que
por muitos dias durante meu Doutorado
se viu trocada pela pesquisa.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, que proporcionou este universo com padrões capazes de serem estudados. À minha querida esposa e futura mãe dos meus filhos, que sempre esteve do meu lado desde a graduação e sempre foi a minha maior motivação.

Ao meu professor do ensino médio Dr. Carlos Argolo, que me apresentou a este mundo fantástico da física e que, de certa forma, moldou parte do meu caráter.

À minha mãe que sempre me apoiou nas minhas decisões e que criou a mim e meu irmão com tanto esforço. Também ao meu irmão, meu grande amigo, que compartilha do fascínio pela ciência, apesar de ter escolhido a matemática como carreira.

À minha orientadora Dr^a. Mariana Dutra, e meu Co-orientador Dr. César H. Lenzi, pela paciência e por me ensinarem e me guiarem nesta maravilhosa jornada.

Agradeço ao LAB-CCAM do ITA pelo suporte computacional. Também agradeço a POWER DATA TECNOLOGIA LTDA por fornecer um ambiente tecnológico (big data & analytics) para processamento de dados, com sua ajuda pudemos processar nossos dados com muito mais rapidez, simulações computacionais que de outra forma demorariam uma semana, foram processadas em cerca de dez horas.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro durante o primeiro ano do mestrado e quase dois anos do doutorado; sem esse auxílio, não conseguiria fazer pós-graduação em uma instituição tão renomada no Brasil, como o ITA. Agradeço também ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo suporte financeiro a meus orientadores.

A todos do departamento de Física do ITA, por me proporcionar um período de aprendizado tão prazeroso, com professores excepcionais que, mesmo em meio a uma pandemia, não deixaram que a qualidade das aulas caíssem. Aos colegas que fiz durante esses anos nunca esquecerei de vocês. Muito obrigado a todos.

"We are a way for the cosmos, to know itself."

— CARL SAGAN

Resumo

Utilizamos análise bayesiana para restringir a equação de estado da matéria nuclear a partir de dados astrofísicos relacionados às medições recentes da missão NICER, colaboração LIGO/Virgo, e distribuições de probabilidade de massa e raio de outras 12 fontes, incluindo explosões termonucleares e binárias de raios-X de baixa massa em quiescência. Para isso, baseamos nosso estudo em um modelo de campo médio hadrônico relativístico que inclui uma interação $\omega-\rho$. Nossos resultados indicam intervalos relevantes para alguns parâmetros de massa no ponto de saturação, tais como, massa efetiva, incompressibilidade e inclinação da energia de simetria (L_0). Por exemplo, encontramos $L_0 = 50.79_{-9.24}^{+15.16}$ MeV (Caso 1) e $L_0 = 75.06_{-4.43}^{+8.43}$ MeV (Caso 2) em um intervalo de confiança de 68% para os 2 casos analisados (diferentes intervalos de entrada para L_0 relacionados aos dados do PREX-II). As respectivas parametrizações estão em acordo com importantes restrições da matéria nuclear, bem como com dados observacionais de estrelas de nêutrons, como a deformabilidade de maré adimensional do evento GW170817. A partir das curvas massa-raio obtidas dessas melhores parametrizações, também encontramos os intervalos de $11.97 \text{ km} \leq R_{1.4} \leq 12.73 \text{ km}$ (Caso 1) e $12.34 \text{ km} \leq R_{1.4} \leq 13.06 \text{ km}$ (Caso 2) para o raio da estrela de nêutrons de $1.4M_\odot$.

Abstract

We use bayesian analysis in order to constrain the equation of state for nuclear matter from astrophysical data related to the recent measurements from the NICER mission, LIGO/Virgo collaboration, and probability distributions of mass and radius from other 12 sources, including thermonuclear busters, and quiescent low-mass X-ray binaries. For this purpose, we base our study on a relativistic hadronic mean field model including an $\omega - \rho$ interaction. Our results indicate optimal ranges for some bulk parameters at the saturation density, namely, effective mass, incompressibility, and symmetry energy slope (L_0). For instance, we find $L_0 = 50.79_{-9.24}^{+15.16}$ MeV (Case 1) and $L_0 = 75.06_{-4.43}^{+8.43}$ MeV (Case 2) in a 68% confidence interval for the 2 cases analyzed (different input ranges for L_0 related to the PREX-II data). The respective parametrizations are in agreement with important nuclear matter constraints, as well as observational neutron star data, such as the dimensionless tidal deformability of the GW170817 event. From the mass-radius curves obtained from these best parametrizations, we also find the ranges of $11.97 \text{ km} \leq R_{1.4} \leq 12.73 \text{ km}$ (Case 1) and $12.34 \text{ km} \leq R_{1.4} \leq 13.06 \text{ km}$ (Case 2) for the radius of the $1.4M_\odot$ neutron star.

Lista de Figuras

FIGURA 1.1 – Imagem do remanescente da supernova SN 1054, conhecida como Nebulosa do Caranguejo, capturada pelo Telescópio Espacial James Webb. Imagem: NASA, ESA, CSA, STScI, T. Temim (Princeton University).	17
FIGURA 2.1 – Potencial efetivo gerado pelo modelo de Walecka	21
FIGURA 2.2 – Incompressibilidade em função da densidade bariônica para três diferentes parametrizações	28
FIGURA 2.3 – Energia de simetria em função da densidade bariônica. As parametrizações são as mesmas da Figura 2.2.	29
FIGURA 2.4 – Taxa de variação da energia de simetria em função da densidade bariônica. As parametrizações são as mesmas da Figura 2.2.	30
FIGURA 2.5 – Curvas Massa-Raio de três EoS distintas.	35
FIGURA 2.6 – Ilustração da deformação causada pelo campo gravitacional de maré em um sistema binário de EN. A deformabilidade fica mais intensa quanto mais perto estão as estrelas	37
FIGURA 3.1 – Dados experimentais hipotéticos da grandeza y em função de x . As barras verticais em cada ponto são as margens de erro.	40
FIGURA 3.2 – Histograma representando a distribuição posterior dos parâmetros hipotéticos a_1 , a_2 e a_3 . A linha azul corresponde ao valor 'verdadeiro' dos parâmetros.	41
FIGURA 3.3 – Diagrama de Massa x Raio das medidas provenientes das fontes de dados tratadas em Özel <i>et al.</i> (2016). Sendo 6 fontes de busters termonucleares (diagrama à esquerda) e 5 fontes de qLMXBs (diagrama à direita). Os contornos representam a região dentro de 68% do intervalo de confiança.	44

- FIGURA 3.4 – Contornos massa-raio dentro de um CI de 68% (linhas tracejadas) e 90% CI (linhas contínuas). Os contornos obtidos pelo NICER em laranja (MILLER *et al.*, 2019) e azul claro (RILEY *et al.*, 2019) para PSRJ0030+0451; vermelho (MILLER *et al.*, 2021) e verde (RILEY *et al.*, 2021) para PSR J0740+6620. O contorno violeta representa as medições de massa e raio do evento GW170817 obtidos pelo LVC (ABBOTT *et al.*, 2018). Por último, o contorno em azul proveniente análise de raios-X em 4U 1702-429 (NÄTTILÄ, J. *et al.*, 2017). 46
- FIGURA 4.1 – Distribuição posterior dos parâmetros de *bulk* usando uma prior uniforme para o Caso 1 (azul) e o Caso 2 (laranja). Os histogramas mostrados na diagonal representam a distribuição marginal posterior de cada parâmetro de forma independente. As linhas sólidas pretas (vermelhas) representam o valor mediano da PDF para o Caso 1 (Caso 2). As linhas tracejadas azuis (laranjas) indicam os valores dos quantis 0,16 e 0,84 para o Caso 1 (Caso 2). Os pontos em forma de círculo (quadrado) pretos (vermelhos) referem-se aos valores medianos do Caso 1 (Caso 2). O triângulo (losango) preto (vermelho) é o valor mais provável para o Caso 1 (Caso 2), ou seja, as modas. Os níveis de σ nos histogramas 2D são $0,5\sigma$, 1σ , $1,5\sigma$ e 2σ . O limite da prior é mostrado como uma linha verde (linha tracejada) para o Caso 1 (Caso 2) na diagonal. 49
- FIGURA 4.2 – Distribuição posterior dos parâmetros de *bulk* utilizando prior gaussiana. A mesma notação da Figura 4.1. 50
- FIGURA 4.3 – Pressão versus ρ/ρ_0 (matéria simétrica) para as parametrizações obtidas a partir da análise bayesiana. A área sombreada em cinza claro do experimento do fluxo (*flow experiment*), foi retirada de Danielewicz *et al.* (2002). A faixa em cinza escuro foi extraída de Lynch *et al.* (2009). As faixas em verde e vermelho correspondem às parametrizações com intervalos de confiança de 68% (posteriores) usando priores Uniforme e Gaussiano, respectivamente. As curvas sólidas (priors Uniformes) e tracejadas (priors Gaussianos) representam as parametrizações relacionadas aos valores medianos dos parâmetros de *bulk* analisados. 55

- FIGURA 4.4 – Energia por partícula de matéria puramente de nêutrons em função da densidade. As faixas em cinza, cinza escuro e azul claro, derivadas da chEFT, foram extraídas de Hebeler *et al.* (2013), Krüger *et al.* (2013), Drischler *et al.* (2016), respectivamente. As faixas em verde e vermelho correspondem às parametrizações com intervalo de confiança de 68% (posteriores) usando priors Uniforme e Gaussiana, respectivamente. As curvas contínuas (prior Uniforme) e tracejadas (prior Gaussiana) representam as parametrizações relacionadas aos valores das medianas dos parâmetros de *bulk* analisados 56
- FIGURA 4.5 – Pressão versus ρ/ρ_0 (matéria puramente de nêutrons) para as parametrizações obtidas a partir da análise bayesiana. As faixas em cinza foram retiradas de Danielewicz *et al.* (2002). As faixas em verde e vermelho correspondem às parametrizações com intervalo de confiança de 68% (posteriores) usando priors Uniforme e Gaussiana, respectivamente. As curvas contínuas (priors Uniformes) e tracejadas (priors Gaussianas) representam as parametrizações relacionadas aos valores das medianas dos parâmetros de *bulk* analisados. 57
- FIGURA 4.6 – Diagramas massa-raio para as parametrizações obtidas a partir da análise bayesiana. As faixas em verde e vermelho correspondem às parametrizações em 68% CI (posteriores) usando priors Uniforme e Gaussiana, respectivamente. As curvas contínuas (priors Uniformes) e tracejadas (priors Gaussianas) representam aquelas parametrizações relacionadas aos valores das medianas dos parâmetros de *bulk* analisados. Também são exibidos os contornos para a massa-raio restritos pela missão NICER, nomeadamente, em laranja (MILLER *et al.*, 2019) e azul (RILEY *et al.*, 2019) para PSRJ0030+0451; vermelho (MILLER *et al.*, 2021) e verde (RILEY *et al.*, 2021) para PSR J0740+6620. O contorno violeta representa o evento GW170817 (ABBOTT *et al.*, 2018). 57
- FIGURA 4.7 – Semelhante à Figura 4.6, mas agora comparada com 7 observáveis adicionais utilizados na análise. 4U 1702-429 (NÄTTILÄ, J. *et al.*, 2017). Para os restantes, consulte (ÖZEL *et al.*, 2016) e as referências ali contidas. 58
- FIGURA 4.8 – Semelhante à Figura 4.6, mas agora comparada com os restantes 5 observáveis. Consulte Özel *et al.* (2016) e as referências ali contidas. 59

- FIGURA 4.9 – Previsões para $R_{1,4}$ calculadas a partir das parametrizações obtidas da análise bayesiana (círculos). Neste caso, apresentamos os resultados para o raio da estrela de nêutrons para $1,4M_{\text{sun}}$ com intervalo de confiança de 90% (posteriores), quando são utilizadas as priores Uniforme (UP) e Gaussiana (GP). A faixa em cinza foi extraída de Breschi *et al.* (2021), e as linhas vermelhas foram retiradas de Huth *et al.* (2022). 60
- FIGURA 4.10 – Λ em função de M para as parametrizações obtidas da análise bayesiana. As faixas em verde e vermelho correspondem às parametrizações com CI de 68% (posteriores) usando priors Uniforme e Gaussiana, respectivamente. As curvas contínuas (priors Uniformes) e tracejadas (priors Gaussianas) representam as parametrizações relacionadas aos valores das medianas dos parâmetros de *bulk* analisados. O quadrado roxo é o resultado de $\Lambda_{1,4} = 190_{-120}^{+390}$ obtido pelo LVC (ABBOTT *et al.*, 2018). 61
- FIGURA 4.11 – Deformabilidades de maré adimensionais para o caso dos componentes de alta massa (Λ_1) e baixa massa (Λ_2) do evento GW170817. As linhas roxas são os resultados obtidos pelo LVC (ABBOTT *et al.*, 2018) com intervalos de confiança de 50% e 90%. A linha tracejada diagonal corresponde a $\Lambda_1 = \Lambda_2$. As faixas em verde e vermelho correspondem às parametrizações com CI de 68% (posteriores) usando priors Uniforme e Gaussiana, respectivamente. As curvas contínuas (priors Uniformes) e tracejadas (priors Gaussianos) representam as parametrizações relacionadas aos valores das medianas dos parâmetros de *bulk* analisados. 62

Lista de Tabelas

TABELA 2.1 – Parâmetros de <i>bulk</i> e constantes de acoplamento das parametrizações G2*, GL1, e Z271s6	27
TABELA 3.1 – Quantidades de saturação usada nas priors. Para a densidade de saturação e energia de ligação foram fixados os valores $\rho_0 = 0,15 \text{ fm}^{-3}$ e $B_0 = -16 \text{ MeV}$, respectivamente.	44
TABELA 3.2 – Valores padrão fornecidos pela escala de Jeffrey (JEFFREYS, 1961), úteis para comparar duas hipóteses usando o fator de Bayes	47
TABELA 4.1 – Intervalos para os parâmetros de <i>bulk</i> obtidos a partir da posterior utilizando as diferentes priors. Todas as quantidades estão em MeV, exceto m_0^* (adimensional). CI: intervalo de confiança.	53
TABELA 4.2 – Evidência (Z) e fatores de Bayes, calculados através da equação (3.18), para os modelos analisados. Modelo A refere-se ao Caso 1 com uso de prior Uniforme.	54
TABELA 4.3 – O mesmo que na Tabela 4.2, com o Modelo A referindo-se ao Caso 1 com prior Gaussiano.	54
TABELA 4.4 – Algumas propriedades observacionais de NS que resultam das EoSs em 68% CI (Veja a quarta coluna na Tabela 4.1).	59
TABELA C.1 – Constantes de acoplamento que reproduzem os parâmetros de <i>bulk</i> relacionados na Tabela 4.1. L.I: Limite Inferior; L.S.: Limite Superior.	83

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
2	MODELO RELATIVÍSTICO	20
2.1	Modelo de Walecka não-linear do tipo ω - ρ	21
2.2	Pressão e densidade de energia	24
2.3	Parâmetros de <i>bulk</i> derivados da pressão e densidade de energia	25
2.4	Estrelas de Nêutrons	31
2.4.1	Equações de Tolman-oppenheimer-Volkoff e condições de equilíbrio estelar	32
2.4.2	Potenciais químicos e condições de equilíbrio	35
2.4.3	Deformabilidade de maré	36
3	ANÁLISE BAYESIANA	39
3.1	Conjunto de parâmetros θ	42
3.2	Probabilidades a Priori	42
3.3	Dados observacionais	44
3.4	Função de Verossimilhança	45
3.5	Fator de Bayes	47
4	RESULTADOS	48
4.1	Distribuições posteriores	48
4.2	Fator de Bayes e comparação entre os casos	52
4.3	EoS resultantes em matéria simétrica e matéria pura de nêutrons	54
4.4	Diagramas massa x raio	56
4.5	Deformabilidade de maré	61

5 CONCLUSÃO	63
REFERÊNCIAS	66
APÊNDICE A – DERIVAÇÃO DO NÚMERO DE LOVE DE SEGUNDA ORDEM	74
APÊNDICE B – CÓDIGO UTILIZADO PARA O CÁLCULO DA DISTRI- BUIÇÃO POSTERIOR	78
APÊNDICE C – CONSTANTES DE ACOPLAMENTO DAS EOSs	82

1 Introdução

Estrelas de nêutrons (EN) são alguns dos objetos mais fascinantes e misteriosos do universo. Quando estrelas muito massivas (entre 10 e 25 massas solares) chegam ao fim de sua vida e consomem todo seu estoque de hidrogênio, elas explodem em uma supernova lançando no espaço vários elementos pesados e deixando para trás o ‘cadáver’ da estrela, uma estrela de nêutrons, um objeto colapsado que encontra seu equilíbrio devido aos nêutrons estarem tão próximos uns aos outros que a pressão nuclear contrapõe a gravidade, evitando assim seu colapso total. Um exemplo direto de uma estrela que colapsou em uma estrela de nêutrons pode ser visto na Figura 1.1, onde é exibido os remanescentes de uma supernova que é conhecida como nebulosa do caranguejo. As EN oferecem uma oportunidade única para estudar as propriedades da matéria nuclear sob condições extremas, uma vez que seu núcleo pode conter matéria com até dez vezes a densidade de saturação ($\rho_0 \simeq 2,5 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3 \simeq 0,15 \text{ fm}^{-3}$) (STEINER *et al.*, 2010). Este ambiente é um contexto adequado para testar os vários tipos de modelos hadrônicos relativísticos e não relativísticos, juntamente com sua enorme quantidade de parametrizações relacionadas. Nessa direção, é possível selecionar, ou ao menos distinguir, entre diferentes modelos/parametrizações capazes de reproduzir propriedades conhecidas desses objetos astrofísicos compactos (OERTEL *et al.*, 2017; LATTIMER, 2012; MENEZES, 2021). Por outro lado, estudos reproduzidos aqui na terra sobre colisões de íons pesados fornecem algumas restrições à equação de estado (EoS) para matéria nuclear simétrica (SNM¹) em densidades em torno de ρ_0 (DANIELEWICZ *et al.*, 2002; FUCHS, 2006). Outros estudos baseados na teoria de campo efetivo quiral (HEBELER *et al.*, 2013; DRISCHLER *et al.*, 2016; KRÜGER *et al.*, 2013) também fornecem algumas restrições à EoS para a matéria feita puramente de nêutrons (PNM), que é uma boa aproximação para a matéria da EN.

Medidas recentes de propriedades de EN, como massas, raios e deformabilidade de maré, abriram a porta para uma nova era de investigação sobre a natureza desses objetos ao estabelecer novas restrições a serem satisfeitas por diferentes modelos. Tais observações incluem a detecção realizada pela Colaboração LIGO e Virgo (LVC) de ondas gravitacionais emitidas durante o evento denominado GW170817, no qual a fusão de duas EN foi registrada (ABBOTT; The LIGO and Virgo Collaboration, 2017; ABBOTT *et al.*, 2018; ABBOTT

¹do inglês *Symmetrical Nuclear Matter*



FIGURA 1.1 – Imagem do remanescente da supernova SN 1054, conhecida como Nebulosa do Caranguejo, capturada pelo Telescópio Espacial James Webb. Imagem: NASA, ESA, CSA, STScI, T. Temim (Princeton University).

et al., 2019), e dados fornecidos pela missão Neutron Star Interior Composition Explorer (NICER) da NASA referentes à detecção de raios-X vinda da proximidade dos pulsares PSR J0030+0451 (RILEY *et al.*, 2019; MILLER *et al.*, 2019) e PSR J0740+6620 (MILLER *et al.*, 2021; RILEY *et al.*, 2021). Ao usar as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) (TOLMAN, 1939; OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939), é possível criar um vínculo entre uma EoS específica e um diagrama de massa-raio único, um gráfico no qual alguns desses dados observacionais podem ser representados. Portanto, diferentes EoSs podem ser testadas contra as restrições astrofísicas atualizadas. Nesta tese, seguimos esse procedimento por meio de uma análise bayesiana, ou seja, uma ferramenta computacional poderosa que pode ser usada para combinar dados observacionais/experimentais com modelos teóricos para testá-los e restringi-los tanto quanto possível, a fim de buscar EoSs adequadas capazes de reproduzir as necessidades de matéria estelar mencionadas (TRAVERSI *et al.*, 2020; SALINAS; PIEKAREWICZ, 2023; ZHU *et al.*, 2022). Nesse sentido, trabalhos fazendo inferência de EoS com métodos bayesianos pela colaboração LIGO-Virgo também foram realizados, por exemplo, em (ABBOTT; The LIGO and Virgo Collaboration, 2019; ABBOTT; The LIGO and Virgo Collaboration, 2020).

Pretendemos encontrar parametrizações de um modelo de campo médio relativístico (RMF) hadrônico de alcance finito baseado em fundamentos teóricos da chamada Hadrodinâmica quântica (QHD). Este modelo também considera a matéria nuclear como infinita, o qual oferece uma aproximação notável para analisar a física das estrelas de nêutrons, que contêm cerca de 10^{57} partículas. Notavelmente, quando o conceito de matéria

nuclear infinita é aplicado ao estudo de núcleos finitos, os resultados obtidos frequentemente se alinham de forma impressionante com a realidade. Os modelos de Walecka estão inseridos nesse contexto, ele considera prótons e nêutrons interagindo entre si através de potenciais tipo Yukawa (YUKAWA, 1935), nos quais o alcance da interação núcleon-núcleon é regulado pelas massas dos mésons trocados. Além disso, as forças atrativas e repulsivas dessa interação são controladas pelos parâmetros livres do modelo. Usamos uma versão do modelo de Walecka não-linear que leva em conta auto-interações cúbicas e quárticas no campo σ (atrativo, méson σ), juntamente com uma interação cruzada entre os campos ω^μ (repulsivo, méson ω) e $\vec{\rho}_\mu$. Este último representa o méson isovetor ρ responsável pela assimetria do sistema (número diferente de prótons e nêutrons). O procedimento adotado aqui é obter, a partir da inferência bayesiana, os intervalos adequados para alguns parâmetros de *bulk*, isto é, quantidades físicas derivadas da EoS avaliadas na densidade de saturação, que melhor representem as observações feitas de EN. Como entrada para o método, fornecemos funções de verossimilhança extraídas de 16 fontes diferentes de massas e raios de explosões termonucleares (ÖZEL *et al.*, 2016), de binários de raios-X de baixa massa quiescentes (ÖZEL *et al.*, 2016), do NICER e da CLV. Mostramos que essas “melhores” parametrizações determinadas a partir dessa abordagem são capazes de descrever matéria nuclear simétrica, matéria de nêutrons pura e propriedades do sistema de matéria estelar também (raio da estrela de nêutrons de $1,4M_\odot$ e deformabilidade de maré, por exemplo).

Em comparação com o estudo realizado em Traversi *et al.* (2020), nosso trabalho apresenta as seguintes novidades: (i) usamos uma densidade lagrangiana para o modelo relativístico com uma interação $\omega - \rho$ incluída. Esse novo termo nos dá a liberdade de escolher mais um parâmetro de massa isovetor para ser usado na análise bayesiana. No nosso caso, além da inclinação da energia de simetria, também utilizamos na análise a energia de simetria em $2/3$ da densidade de saturação; (ii) o intervalo usado para a inclinação da energia de simetria é baseado no estudo proveniente da análise dos resultados do PREX-II para a espessura da pele de nêutrons de ^{208}Pb (ESSICK *et al.*, 2021; ESTEE *et al.*, 2021; YUE *et al.*, 2022; REED *et al.*, 2021); (iii) usamos como uma das fontes da análise bayesiana os dados observacionais recentes fornecidos pela missão NICER com relação ao pulsar PSR J0704+6620 (RILEY *et al.*, 2021).

Esta tese está organizada da seguinte maneira: no capítulo 2, descreveremos em detalhes o modelo relativístico utilizado como base para o estudo, apresentando a lagrangiana utilizada, destacando a derivação das EoSs para a pressão e densidade de energia em função da densidade bariônica, bem como as expressões para as quantidades de interesse nesse estudo como massa efetiva, incompressibilidade, energia de simetria e seu coeficiente angular. Também nesse capítulo, apresentaremos a derivação das equações de Tolmann-Oppenheimer-Volkoff (TOV) e como podemos solucioná-las obedecendo as condições de

equilíbrio químico e de neutralidade de carga. Além disso, apresentamos as fórmulas para o fator de deformabilidade de maré que pode ser calculado simultaneamente com as equações de TOV.

No capítulo 3 iremos explicar o processo de inferência bayesiana, onde apresentaremos os métodos empregados para calcular os possíveis valores dos parâmetros da EoS, com o auxílio de dados observáveis de massa e raio e do conhecimento prévio sobre o intervalo desses parâmetros. Esse conhecimento prévio acerca dos parâmetros pode ser resumido em uma distribuição de probabilidade a priori (ou *prior*), então diferentes tipos de priors podem produzir resultados diferentes. Por isso, nesse estudo, iremos utilizar dois tipos de priors, e verificar se seus resultados são compatíveis. Explicaremos como obter o fator de Bayes, necessário para comparar os resultados entre as *priors*.

No capítulo 4 iremos expor os resultados decorrentes da inferência bayesiana dos parâmetros da EoS. Analisaremos o comportamento das EoSs resultantes através de restrições na dependência da densidade para a pressão e energia por partícula conhecidas na literatura. Compararemos os resultados de cada modelo com seu fator de Bayes. Examinaremos as sequências de massa-raio geradas por essas EoSs, assim como também as deformabilidades de maré associadas, sempre comparando os resultados obtidos para as diferentes priors utilizadas e, por fim, no capítulo 5 apresentamos nossas conclusões e considerações finais do trabalho.

2 Modelo Relativístico

A pesquisa em física nuclear evoluiu significativamente nas últimas décadas, impulsionada pelo desenvolvimento de modelos hadrônicos relativísticos sofisticados. Um dos marcos nesse avanço é a Hadrodinâmica Quântica (QHD), com o modelo de Walecka destacando-se como um componente fundamental. Esse modelo teórico aborda prótons e nêutrons como núcleons fundamentais que interagem por meio da troca de mésons. No modelo original proposto por Walecka (WALECKA, 1974), são introduzidos dois tipos de mésons: o méson escalar σ , que media forças atrativas de longo alcance, e o méson vetorial ω , responsável por forças repulsivas de curto alcance. Essas interações são encapsuladas em uma densidade lagrangiana que mantém a invariância de Lorentz, garantindo que suas propriedades não variem com a mudança de referencial. Várias propriedades da dinâmica nuclear podem ser derivadas da densidade lagrangiana, incluindo o potencial efetivo nuclear, o qual se reduz ao potencial de Yukawa (YUKAWA, 1935) para um sistema estacionário e de simetria esférica:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi r} \left(-g_\sigma e^{-m_\sigma r} + g_\omega e^{-m_\omega r} \right). \quad (2.1)$$

Podemos perceber a natureza atrativa do méson σ e repulsiva do méson ω refletidas nos coeficientes negativo e positivo no primeiro e segundo termos do potencial, respectivamente. Os valores das constantes de acoplamento g_σ e g_ω são ajustados para que o modelo possa prever corretamente medidas experimentais cruciais, tais como a energia de ligação por núcleon ($B_0 \approx -16$ MeV) e a densidade de saturação da matéria nuclear ($\rho_0 \approx 0,15$ fm^{-3}) a zero Kelvin (GLENDEENING, 2012). A Figura 2.1 ilustra o comportamento do potencial $V(r)$ em função da distância r entre núcleons, usando um conjunto específico de parâmetros: $g_\sigma = 11,25$, $m_\sigma = 561$ MeV, $g_\omega = 13,25$, e $m_\omega = 756$ MeV. Notavelmente, o ponto de mínimo do potencial, localizado em $r \approx 0,33 fm^{-1}$, corresponde à densidade de saturação $\rho_0 = 0,15$ fm^{-3} , em um contexto de simetria esférica.

Embora o modelo de Walecka descreva adequadamente parâmetros como B_0 e ρ_0 , ele enfrenta desafios em descrever outras propriedades, como a massa efetiva do núcleon (m^*) e a incompressibilidade (K_0), cujo valor estimado em 554 MeV supera consideravelmente o valor geralmente aceito na literatura, que é de cerca de 220 MeV (TREINER *et al.*,

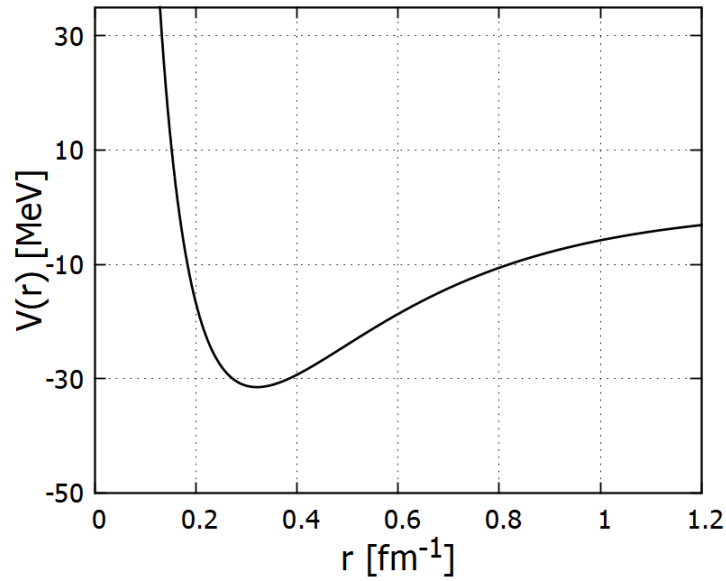


FIGURA 2.1 – Potencial efetivo gerado pelo modelo de Walecka

1981). Para superar essas limitações, Boguta e Bodmer (1977) sugeriram uma versão não linear do modelo de Walecka. Eles adicionaram termos de autointeração cúbicos e quárticos ao campo mesônico escalar σ , junto com duas novas constantes de acoplamento. Essa abordagem permitiu alcançar valores mais realistas para K_0 e m^* . Esse modelo é conhecido como o modelo não-linear de Walecka ou modelo tipo $\sigma^3 - \sigma^4$.

Para introduzir assimetria no sistema nuclear, é essencial incorporar outro méson vetorial, o méson ρ . Assim como o méson ω , o ρ media interações entre os núcleons. No entanto, diferentemente do ω , no espaço de isospin, o ρ funciona como um isovetor. O méson ρ é crucial para modelar a assimetria entre o número de prótons e nêutrons, uma vez que ele incorpora o isospin das partículas na densidade lagrangiana. Essa característica é particularmente relevante em ambientes como estrelas de nêutrons, onde a proporção de nêutrons para prótons é significativamente alta.

2.1 Modelo de Walecka não-linear do tipo ω - ρ

Nesse trabalho estudaremos as propriedades das equações de estado provenientes do modelo de Walecka não-linear do tipo $\sigma^3 - \sigma^4$ com a inclusão do méson ρ . Além disso, neste modelo permitiremos interações entre os mésons vetoriais ρ e ω . Fazendo isso, acrescentamos duas constantes de acoplamento ao modelo: g_ρ e α . A inclusão do méson ρ e suas interações têm impacto em grandezas nucleares como a energia de simetria e sua derivada em relação à densidade (MANKA; BEDNAREK, 2001; FATTOYEV; PIEKAREWICZ, 2010). Além disso, é conhecido que a interação entre os mésons ρ e ω tem influência no raio da estrela, alterando sua compactação (FILHO, 2011). A densidade lagrangiana que

descreve a matéria hadrônica é a seguinte: (DUTRA *et al.*, 2014; LI *et al.*, 2008)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{nm} + \mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_\omega + \mathcal{L}_\rho + \mathcal{L}_{\omega\rho}, \quad (2.2)$$

onde

$$\mathcal{L}_{nm} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\Psi - g_\sigma\sigma\bar{\Psi}\Psi - g_\omega\bar{\Psi}\gamma^\mu\omega_\mu\Psi - \frac{1}{2}g_\rho\bar{\Psi}\gamma^\mu\vec{\rho}_\mu\vec{\tau}\Psi, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2}(\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma - m_\sigma\sigma^2) - \frac{A}{3}\sigma^3 - \frac{B}{4}\sigma^4, \quad (2.4)$$

$$\mathcal{L}_\omega = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu, \quad (2.5)$$

$$\mathcal{L}_\rho = -\frac{1}{4}\vec{B}^{\mu\nu}\vec{B}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\rho^2\vec{\rho}_\mu\vec{\rho}^\mu \quad \text{e} \quad (2.6)$$

$$\mathcal{L}_{\omega\rho} = \frac{1}{2}\alpha g_\omega^2 g_\rho^2 \omega_\mu\omega^\mu \vec{\rho}_\mu\vec{\rho}^\mu, \quad (2.7)$$

que representam, respectivamente, as interações dos núcleons com os mésons (equação (2.3)), a parte cinética e autointerações do méson σ (equação (2.4)), a parte cinética dos mésons ω (equação (2.5)) e ρ (equação (2.6)) e por último, as interações cruzadas entre os mésons ω e ρ (equação (2.7)). O campo de núcleons é dado pelo espinor de Dirac Ψ . Os mésons σ , ω , e ρ estão relacionados com os campos escalar, vetor e isovetor: σ , ω^μ , e $\vec{\rho}_\mu$, respectivamente. Os tensores antissimétricos são representados por $F_{\mu\nu} = \partial_\nu\omega_\mu - \partial_\mu\omega_\nu$ e $\vec{B}_{\mu\nu} = \partial_\nu\vec{\rho}_\mu - \partial_\mu\vec{\rho}_\nu$. A massa do núcleon é $M = 939$ MeV e as massas dos mésons são dadas por: m_σ , m_ω , e m_ρ . As constantes de acoplamento g_σ , g_ω e g_ρ representam a força da interação dos campos entre si e a constante α a força da interação entre os campos ω e ρ .

A partir da densidade Lagrangiana, na equação (2.2), podemos resolver as equações de Euler-Lagrange para cada um dos campos:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right). \quad (2.8)$$

Portanto, os campos devem satisfazer as seguintes equações não-lineares altamente acopladas:

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m_\sigma^2)\sigma = -g_\sigma\bar{\Psi}\Psi - A\sigma^2 - B\sigma^3, \quad (2.9)$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} - m_\omega^2\omega^\mu = -g_\omega\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi + \alpha g_\omega^2 g_\rho^2 \vec{\rho}_\mu\vec{\rho}^\mu\omega^\mu, \quad (2.10)$$

$$\partial_\nu B^{\mu\nu} - m_\rho^2\vec{\rho}^\mu = -\frac{1}{2}g_\rho\bar{\Psi}\gamma^\mu\vec{\tau}\Psi + \alpha g_\omega^2 g_\rho^2 \omega_\mu\omega^\mu \vec{\rho}^\mu \quad (2.11)$$

$$\text{e} \quad [\gamma^\mu(i\partial_\mu - g_\omega\omega_\mu - g_\rho\vec{\rho}_\mu\vec{\tau}) - (M + g_\sigma\sigma)]\Psi = 0. \quad (2.12)$$

A equação para o campo Ψ (2.12) é interpretada como uma equação de Dirac que

representa um férmion cujo momento é deslocado pela quantidade $g_\omega\omega_\mu + g_\rho\vec{\rho}_\mu\vec{\tau}$ e que possui massa efetiva M^* dada por

$$M^* = M + g_\sigma\sigma \quad (2.13)$$

que passa a variar conforme o campo ω que por sua vez depende da densidade. Esta é uma definição estritamente relativística de massa efetiva, também chamada de massa de Dirac (JAMINON *et al.*, 1981). As soluções das equações para os campos (2.9-2.12), se não forem aproximadas, são determinadas utilizando métodos numéricos.

Buscando soluções semi-analíticas para as equações, um método amplamente utilizado é a aproximação de campo médio (ACM) (WALECKA, 1974; SEROT; WALECKA, 1986), onde substitui-se os campos mesônicos por seus respectivos valores médios. Este método baseia-se na suposição que, em uma matéria uniforme, infinita e em seu estado fundamental, os núcleons estão sob a ação de uma interação nuclear média. Neste sentido, quanto maior a densidade bariônica mais eficaz será essa aproximação, pois as flutuações dos campos tendem a ser desprezíveis comparadas as amplitudes dos campos dos núcleons. Empregando a ACM, reescrevemos os campos mesônicos como:

$$\sigma \rightarrow \langle\sigma\rangle \equiv \sigma, \quad \omega_\mu \rightarrow \langle\omega_\mu\rangle \equiv \omega_0 \quad \text{e} \quad \vec{\rho}_\mu \rightarrow \langle\vec{\rho}_\mu\rangle \equiv \vec{\rho}_0, \quad (2.14)$$

Substituindo as fontes dos campos mesônicos por seus valores médios, encontramos

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}\Psi \rightarrow \langle\bar{\Psi}\Psi\rangle &= \rho_s, & \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \rightarrow \langle\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\rangle &= \bar{\Psi}\gamma^0\Psi = \rho \quad \text{e} \\ \bar{\Psi}\gamma^\mu\vec{\tau}\Psi \rightarrow \langle\bar{\Psi}\gamma^\mu\vec{\tau}\Psi\rangle &= \bar{\Psi}\gamma^0\tau_3\Psi = \rho_3, \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde $\rho_s = \rho_p + \rho_n$ e $\rho = \rho_p + \rho_n$ são, respectivamente, a soma das densidades escalares e vetoriais de prótons e nêutrons e $\rho_3 = \rho_p - \rho_n = (2y - 1)\rho$ a diferença. y é a fração de prótons do sistema, definida por $y = \rho_p/\rho$. τ_3 é a terceira componente do isospin, é igual a 1 para prótons e -1 para nêutrons. A expressão para as densidades são

$$\rho_{s,p,n} = \frac{\gamma M^*}{2\pi^2} \int_0^{k_{F_{p,n}}} \frac{k^2 dk}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}} \quad \text{e} \quad \rho_{p,n} = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_{F_{p,n}}} k^2 dk = \frac{\gamma}{6\pi^2} k_{F_{p,n}}^3. \quad (2.16)$$

Os índices p e n representam respectivamente prótons e nêutrons. $k_{F_{p,n}}$ é o momento de Fermi. O fator de degenerescência, γ , é igual a 2 para matéria assimétrica e 4 para matéria simétrica. Aplicando a ACM, as equações para os campos são simplificadas:

$$m_\sigma^2\sigma = -g_\sigma\rho_s - A\sigma^2 - B\sigma^3, \quad (2.17)$$

$$m_\omega^2\omega_0 = g_\omega\rho - \alpha g_\omega^2 g_\rho^2 \vec{\rho}_0^2 \omega_0, \quad (2.18)$$

$$m_\rho^2\vec{\rho}_0 = \frac{g_\rho}{2}\rho_3 - \alpha g_\omega^2 g_\rho^2 \vec{\rho}_0 \omega_0^2 \quad \text{e} \quad (2.19)$$

$$\left[\gamma^\mu \left(i\partial_\mu - g_\omega \omega_0 - \frac{g_\rho}{2} \bar{\rho}_0 \tau_3 \right) - M^* \right] \Psi = 0. \quad (2.20)$$

Pela definição da massa efetiva dada na equação (2.13), temos que $\Delta M/g_\sigma = \sigma$, onde $\Delta M = M^* - M$, logo, substituindo o campo escalar na equação (2.17) encontramos a expressão transcendental para M^* que dependerá apenas da fração de prótons (y) e da densidade bariônica (ρ)

$$M^*(y, \rho) = M - G_\sigma^2 [\rho_s + a(\Delta M)^2 + b(\Delta M)^3], \quad (2.21)$$

com $G_\sigma^2 = g_\sigma^2/m_\sigma^2$, $a = A/g_\sigma^3$, e $b = B/g_\sigma^4$. Rearranjando os termos das equações (2.18) e (2.19), temos

$$g_\omega \omega_0(y, \rho) = G_\omega^2 \rho [1 + \alpha G_\omega^2 (g_\rho \bar{\rho}_0)^2]^{-1} \quad e \quad (2.22)$$

$$g_\rho \bar{\rho}_0(y, \rho) = \frac{G_\rho^2 \rho_3}{2} [1 + \alpha G_\rho^2 (g_\omega \omega_0)^2]^{-1}, \quad (2.23)$$

onde $G_\omega^2 = g_\omega^2/m_\omega^2$ e $G_\rho^2 = g_\rho^2/m_\rho^2$. Note que as expressões dos campos mesônicos ω e ρ formam um conjunto de equações acopladas que, afim de calcular a equação de estado do sistema, devem ser determinadas simultaneamente com a massa efetiva (equação (2.21)) para cada densidade ρ e fração de prótons y .

2.2 Pressão e densidade de energia

Utilizando a densidade lagrangiana do sistema, podemos escrever o tensor energia-momento, definido por

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu Q_i)} \partial_\nu Q_i. \quad (2.24)$$

Aplicando a ACM e fazendo o uso da equação (2.20), o tensor energia-momento pode ser escrito como

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \left[-\frac{m_\sigma^2}{2} \sigma^2 - \frac{A}{3} \sigma^3 - \frac{B}{4} \sigma^4 + \frac{m_\omega^2}{2} \omega_0^2 + \frac{m_\rho^2}{2} \bar{\rho}_0^2 + \frac{1}{2} \alpha g_\omega^2 g_\rho^2 \omega_0^2 \bar{\rho}_0^2 \right] + i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\nu \Psi. \quad (2.25)$$

Uma maneira particularmente útil de tratarmos o tensor energia-momento na matéria nuclear é considerando-a um fluido perfeito, isto é, uma substância em que a pressão é uniforme em todas as direções e onde não há forças de cisalhamento e transporte de calor. Se em certo ponto, a velocidade do fluido for v , um observador movendo-se com essa velocidade vê o fluido ao seu redor como isotrópico. Esta aproximação é melhor quanto menor o livre caminho médio entre colisões de partículas (WEINBERG, 1972). Nesse sentido, é possível determinar uma expressão para a pressão e densidade de energia

a partir do tensor energia-momento fazendo $P = \frac{1}{3}\langle T_{ii} \rangle$ e $\varepsilon = \langle T_{00} \rangle$. Assim temos que

$$P = -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 - \frac{A}{3}\sigma^3 - \frac{B}{4}\sigma^4 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}m_\rho^2\bar{\rho}_0^2 + \frac{1}{2}\alpha g_\omega^2 g_\rho^2 \omega_0^2 \bar{\rho}_0^2 + P_{cin}^n + P_{cin}^p, \quad (2.26)$$

e

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 + \frac{A}{3}\sigma^3 + \frac{B}{4}\sigma^4 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 - \frac{1}{2}m_\rho^2\bar{\rho}_0^2 + g_\omega\omega_0\rho + \frac{g_\rho}{2}\bar{\rho}_0\rho_3 \\ & - \frac{1}{2}\alpha g_\omega^2 g_\rho^2 \omega_0^2 \bar{\rho}_0^2 + \varepsilon_{cin}^n + \varepsilon_{cin}^p, \end{aligned} \quad (2.27)$$

com os termos cinéticos das equações (2.27) e (2.26) escritos como:

$$\varepsilon_{cin}^{p,n} = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_{Fp,n}} k^2 (k^2 + (M^*)^2)^{1/2} dk \quad \text{e} \quad P_{cin}^{p,n} = \frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^{k_{Fp,n}} \frac{k^4}{(k^2 + (M^*)^2)^{1/2}} dk. \quad (2.28)$$

Podemos reescrever as expressões da pressão (2.26) e densidade de energia (2.27) utilizando as expressões dos campos ω (2.18) e ρ (2.19), resultando na expressão final da equação de estado do sistema:

$$P(y, \rho) = -\frac{(\Delta M)^2}{2G_\sigma^2} - \frac{a(\Delta M)^3}{3} - \frac{b(\Delta M)^4}{4} + \frac{(g_\omega\omega_0)^2}{2G_\omega^2} + \frac{(g_\rho\bar{\rho}_0)}{4}\rho_3 + P_{cin}^n + P_{cin}^p \quad (2.29)$$

e

$$\begin{aligned} \varepsilon(y, \rho) = & \frac{(\Delta M)^2}{2G_\sigma^2} + \frac{a(\Delta M)^3}{3} + \frac{b(\Delta M)^4}{4} - \frac{(g_\omega\omega_0)^2}{2G_\omega^2} + \frac{(g_\rho\bar{\rho}_0)}{4}\rho_3 + (g_\omega\omega_0)\rho \\ & + \varepsilon_{cin}^n + \varepsilon_{cin}^p. \end{aligned} \quad (2.30)$$

As equações (2.29) e (2.30) constituem as EoS do sistema e, com o auxílio das equações acopladas (2.22) e (2.23), possuem seis constantes, G_σ^2 , G_ω^2 , G_ρ^2 , a , b e α , que são determinadas de forma a reproduzirem grandezas macroscópicas medidas em laboratório, chamadas parâmetros de *bulk*.

2.3 Parâmetros de *bulk* derivados da pressão e densidade de energia

A partir da pressão (2.29) e da densidade de energia (2.30), outras grandezas físicas importantes podem ser derivadas. Essas grandezas são chamadas de parâmetros de *bulk*, são quantidades que descrevem propriedades macroscópicas e gerais da matéria nuclear, como a densidade de saturação ρ_0 , a massa efetiva do núcleon m_0^* , a energia de ligação

por núcleon B_0 , a incompressibilidade K_0 , a energia de simetria J e a derivada da energia de simetria L_0 .

ρ_0 é definida como a densidade em que o potencial nuclear é mínimo, ou seja, é o ponto em que a força entre os núcleons deixa de ser atrativa (negativa) e passa a ser repulsiva (positiva), portanto:

$$P(\rho_0)_{y=1/2} = 0. \quad (2.31)$$

Já m_0^* é a razão entre a massa efetiva do núcleon avaliada em ρ_0 e a sua massa:

$$m_0^* = \frac{M^*(\rho_0)}{M}. \quad (2.32)$$

A energia por partícula em função da densidade (ε/ρ) pode ser expandida em série de Taylor em torno de ρ_0 que, na SNM, toma a seguinte forma: (DUTRA *et al.*, 2012; NA *et al.*, 2009)

$$\frac{\varepsilon}{\rho} = E_{SNM} = E_0 + \frac{1}{2}K_0x^2 + O(x^3), \quad (2.33)$$

onde $x = (\rho - \rho_0)/3\rho_0$, E_0 é a energia por partícula e K_0 a incompressibilidade, ambas calculadas na densidade de saturação ρ_0 . A diferença de E_0 com a massa do núcleon M é o que chamamos de energia de ligação por núcleon (B_0), ou simplesmente energia de ligação. Essa é uma quantidade importante na física nuclear que mede quanta energia é necessária para separar completamente um núcleo atômico em seus prótons e nêutrons constituintes:

$$B_0 = E_0 - M = \frac{\varepsilon(\rho_0)}{\rho_0} - M. \quad (2.34)$$

Outro parâmetro que aparece na expansão de ε/ρ , na equação (2.33), é a incompressibilidade (K), uma propriedade que está associada ao movimento dos prótons e nêutrons. De maneira geral, a incompressibilidade descreve a incapacidade de um material ou fluido de ser comprimido ou reduzido em volume quando submetido a uma pressão externa. Pode ser identificada experimentalmente ao analisar as ressonâncias de monopolo gigantes (conhecidas como GMR em inglês) em núcleos de átomos pesados (BLAIZOT, 1980). A incompressibilidade pode ser expressada de várias formas igualmente equivalentes, uma forma conveniente, válida apenas em temperatura nula, é a seguinte (FILHO, 2011):

$$K = 9 \left[\frac{\partial(\varepsilon + P)}{\partial\rho} - \frac{\varepsilon + P}{\rho} \right], \quad (2.35)$$

esta forma se torna proveitosa devido aos termos que se cancelam quando somamos as equações (2.29) e (2.30). Estamos interessados em calcular a incompressibilidade no regime SNM, portanto, fazemos $\rho_3 = 0$ e $k_{F_n} = k_{F_p} = k_F$ nas expressões da pressão (2.29) e densidade de energia (2.30), além disso, utilizamos que na SNM $\varepsilon_{cin} + P_{cin} =$

TABELA 2.1 – Parâmetros de *bulk* e constantes de acoplamento das parametrizações G2*, GL1, e Z271s6

	ρ_0 (fm^{-3})	m_0^*	B_0 (MeV)	K_0 (MeV)	J (MeV)	L_0 (MeV)
G2*	0,154	0,66	-16,07	214,77	30,39	69,68
GL1	0,153	0,70	-16,30	199,97	32,49	94,66
Z271s6	0,148	0,80	-16,24	271,00	31,20	47,81
	G_σ^2 (fm^2)	G_ω^2 (fm^2)	G_ρ^2 (fm^2)	a ($10^{-2} fm^{-1}$)	b (10^{-3})	α (10^{-1})
G2*	13,57	8,26	4,89	-1,83	-4,82	0,46
GL1	12,69	7,16	4,41	2,66	-6,96	0,00
Z271s6	9,08	4,42	7,40	-2,79	15,12	1,74

$(k_F^2 + M^{*2})^{1/2}\rho$, que resulta na forma explicita da incompressibilidade:

$$K(\rho) = 9 \left[G_\omega^2 \rho + \frac{k_F^2}{3E_F^*} + \rho \left(\frac{M^*}{E_F^*} \right) \frac{\partial M^*}{\partial \rho} \right], \quad (2.36)$$

onde a derivada da massa efetiva em relação a densidade, na matéria simétrica é

$$\frac{\partial M^*}{\partial \rho} = - \left(\frac{M^*}{E_F^*} \right) \left(\frac{1}{G_\sigma^2} + 2a\Delta M + 3b(\Delta M)^2 + 3 \left(\frac{\rho_s}{M^*} - \frac{\rho}{E_F^*} \right) \right)^{-1}, \quad (2.37)$$

com $E_F^* = (k_F^2 + M^{*2})^{1/2}$.

Em laboratório, é possível reproduzir densidades até a densidade de saturação, entretanto, o valor da incompressibilidade, assim como outros parâmetros de *bulk*, não pode ser medido diretamente e irá depender do modelo teórico utilizado. Por isso, na literatura existem diversas parametrizações, isto é, conjuntos de parâmetros de *bulk*, que descrevem a matéria nuclear. Na Tabela VII de (DUTRA *et al.*, 2014) podemos encontrar varias parametrizações para diferentes tipos de modelos teóricos. O intervalo de valores aceitos para a incompressibilidade avaliada na densidade de saturação ($K_0 = K(\rho_0)$) está entre 220 e 260 MeV, segundo o entendimento atual sobre esta grandeza (veja Garg e Colò (2018), por exemplo). Tomemos para fins didáticos três parametrizações: G2* (SULAKSONO; MART, 2006), GL1 (GLENDEENING, 2012) e Z271s6 (HOROWITZ; PIEKAREWICZ, 2002), que tem como valor de K_0 : 214,77 MeV, 199,97 MeV e 271 MeV respectivamente. As constantes de acoplamento dessas parametrizações, bem como os valores dos parâmetros que elas geram, estão na Tabela 2.1. Na Figura 2.2 podemos ver o comportamento de $K(\rho)$ (2.36) para as três parametrizações citadas.

Uma grandeza bastante estudada na física nuclear é a energia de simetria (\mathcal{S}). A energia de simetria caracteriza a variação da energia de ligação à medida que a relação nêutron-próton de um sistema nuclear varia. Ela aparece quando expandimos a energia

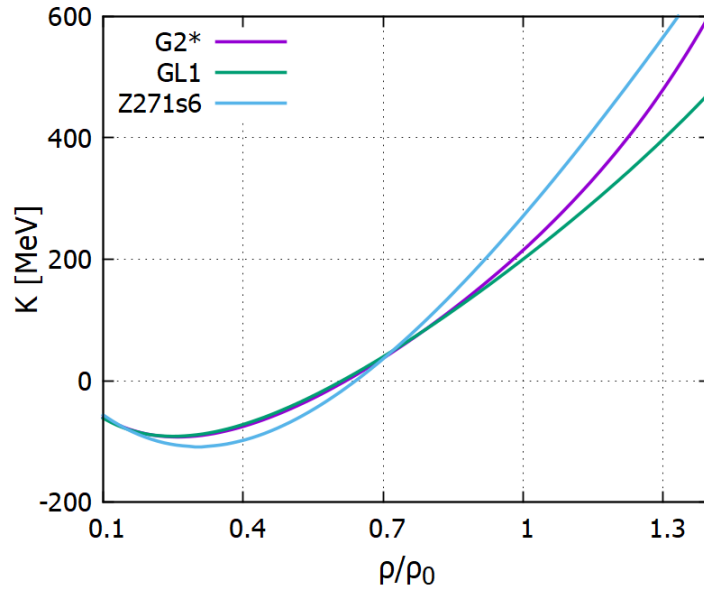


FIGURA 2.2 – Incompressibilidade em função da densidade bariônica para três diferentes parametrizações

por partícula (ε/ρ) em termos do parâmetro de assimetria $\beta = (1 - 2y)$:

$$\frac{\varepsilon}{\rho}(\rho, \beta) = E(\rho) + \mathcal{S}(\rho)\beta^2 + O(\beta^4). \quad (2.38)$$

desse modo, \mathcal{S} é definida por

$$\mathcal{S}(\rho) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2(\varepsilon/\rho)}{\partial \beta^2} \right)_{\beta=0} \quad \text{ou} \quad \mathcal{S}(\rho) = \frac{1}{8} \left(\frac{\partial^2(\varepsilon/\rho)}{\partial y^2} \right)_{y=1/2}, \quad (2.39)$$

utilizando que $\rho_3 = -\beta\rho$ podemos reescrever $\mathcal{S}(\rho)$ em função de ρ_3 :

$$\mathcal{S}(\rho) = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_3^2} \right)_{\rho_3=0}. \quad (2.40)$$

Para calcularmos \mathcal{S} na equação (2.40), partimos de (2.27) e, utilizando a seguinte expressão:

$$\frac{\partial(\varepsilon_{cin}^p + \varepsilon_{cin}^n)}{\partial \rho_3} = \frac{1}{2} (E_{F_p}^* - E_{F_n}^*) + \rho_s \frac{\partial M^*}{\partial \rho_3}, \quad (2.41)$$

chegamos à expressão para $\partial\varepsilon/\partial\rho_3$:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho_3} = \frac{1}{2} (E_{F_p}^* - E_{F_n}^*) + \frac{1}{2} g_\rho \bar{\rho}_0, \quad (2.42)$$

com $g_\rho \bar{\rho}_0$ dado na equação (2.23). Podemos então derivar novamente em relação à ρ_3 e por fim fazer $\rho_3 = 0$ para encontrar explicitamente a expressão da energia de simetria:

$$\mathcal{S}(\rho) = \frac{k_F^2}{6E_F^*} + \frac{G_\rho^2 \rho}{8(1 + \alpha G_\rho^2 (G_\omega^2 \rho)^2)}. \quad (2.43)$$

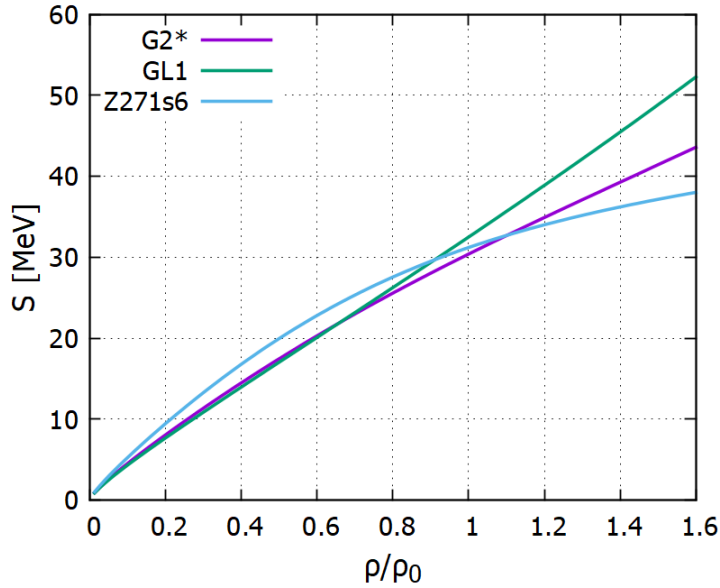


FIGURA 2.3 – Energia de simetria em função da densidade bariônica. As parametrizações são as mesmas da Figura 2.2.

Perceba que a constante α , que controla a interação entre os mésons ω e ρ , aparece explicitamente na expressão de \mathcal{S} , por isso, os modelos que permitem esse tipo de interação possibilitam um ajuste fino em seu valor para que se adéque ao intervalo de valores previsto em laboratório. Em vários estudos recentes, temos que a energia de simetria avaliada em ρ_0 ($J = \mathcal{S}(\rho_0)$) está na faixa $29 \text{ MeV} < J < 36 \text{ MeV}$ (LATTIMER, 2023; YUE *et al.*, 2022). Na Figura 2.3 vemos o comportamento de $\mathcal{S}(\rho)$ para as mesmas parametrizações utilizadas na Figura 2.2, onde o valor de J é 30,39 MeV, 32,49 MeV e 31,20 MeV para G2*, GL1 e Z271s6, respectivamente. Apesar dos valores de J serem parecidos para as três parametrizações, vemos um comportamento de \mathcal{S} bem diferente para densidades superiores à ρ_0 , isso se deve principalmente à diferença dos valores da primeira derivada da energia de simetria, como veremos a seguir.

A última grandeza nuclear que iremos derivar é a taxa de variação da energia de simetria em relação a densidade, conhecida como *slope*¹ (L). É um importante parâmetro da EoS, uma vez que ela está correlacionada com o raio de estrelas (LOPES; MENEZES, 2014). Ela surge quando expandimos \mathcal{S} em termos de $x = (\rho - \rho_0)/3\rho_0$, similarmente ao que foi feito para ε/ρ na equação (2.33)

$$\mathcal{S} = J + L_0x + O(x^2), \quad (2.44)$$

onde as quantidades J e L_0 são, respectivamente, a energia de simetria e a sua primeira

¹'inclinação' em uma tradução livre

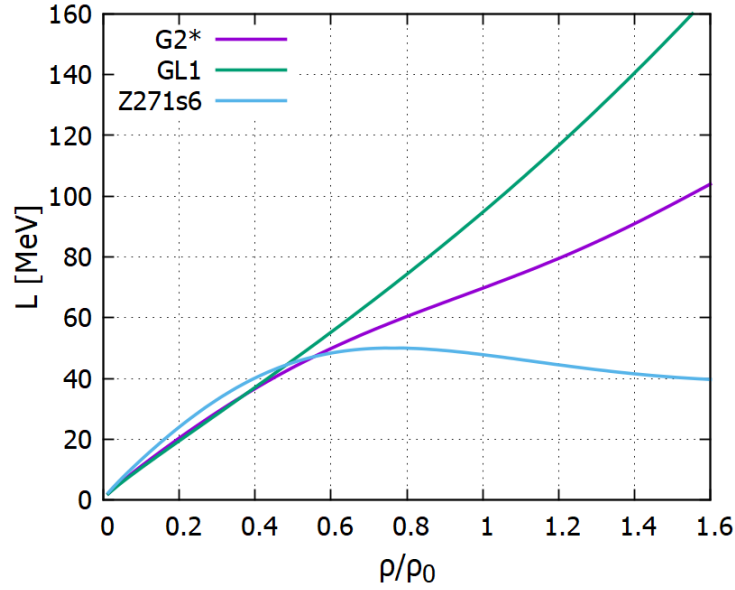


FIGURA 2.4 – Taxa de variação da energia de simetria em função da densidade bariônica. As parametrizações são as mesmas da Figura 2.2.

derivada avaliadas no ponto de saturação e são dadas, respectivamente, por

$$J = \mathcal{S}(\rho_0) \quad e \quad L_0 = L(\rho_0) = 3\rho_0 \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0}. \quad (2.45)$$

Escrevendo L de forma explícita, temos

$$L(\rho) = \frac{k_F^2}{3E_F^*} - \frac{k_F^4}{6E_F^{*3}} \left(1 + \frac{2M^*k_F}{\pi^2} \left(\frac{\partial M^*}{\partial \rho} \right) \right) + \frac{3}{8} \frac{G_\rho^2 \rho}{(1 + \alpha G_\rho^2 (G_\omega^2 \rho)^2)} \left(1 - \frac{2\alpha G_\rho^2 G_\omega^4 \rho^2}{1 + \alpha G_\rho^2 (G_\omega^2 \rho)^2} \right). \quad (2.46)$$

O intervalo de valores aceitos para L_0 ainda é bastante amplo na literatura, estando entre $40 \text{ MeV} < L_0 < 150 \text{ MeV}$ (ESSICK *et al.*, 2021)(ESTEE *et al.*, 2021). O comportamento de $L(\rho)$ pode ser visto na Figura 2.4.

Vários modelos hadrônicos demonstram uma correlação significativa entre a energia de simetria na densidade de saturação (J) e seu *Slope* (L_0), conforme relatado em diversas publicações (GANDOLFI *et al.*, 2012; HEBELER *et al.*, 2013; SANTOS *et al.*, 2015; DRISCHLER *et al.*, 2020; LI *et al.*, 2021). Para abordar essa característica, optamos por utilizar o valor da energia de simetria em $\rho_{\text{cross}} = \frac{2\rho_0}{3}$, denotado por $\mathcal{S}_{2/3} = \mathcal{S}(\rho_{\text{cross}})$, como dado de entrada em nossas análises. Pesquisas, como a apresentada em Santos *et al.* (2015), demonstram que, se diferentes parametrizações do parâmetro de *bulk* $\mathcal{A}(\rho)$ se intersectam quando plotadas em função de ρ , então o parâmetro derivado $\mathcal{B}(\rho)$, que é definido como a derivada de \mathcal{A} em relação à densidade, tende a mostrar uma relação linear com \mathcal{A} no ponto de saturação, ou seja, $\mathcal{B}(\rho_0) = a + b\mathcal{A}(\rho_0)$. Neste contexto, a densidade na qual as parametrizações de \mathcal{A} se cruzam é referida como densidade de cruzamento. Como $L(\rho)$ é definido como a derivada de $\mathcal{S}(\rho)$, a análise realizada em Santos *et al.* (2015) facilita o estabelecimento

de uma correlação entre J e L_0 . Assim, escolhemos a densidade de cruzamento $\rho_{\text{cross}} = \frac{2\rho_0}{3}$, sugerida por Khan e Margueron (2013). Destacamos que $\mathcal{S}_{2/3}$ e L_0 são as únicas variáveis isovetoriais usadas como entrada em nossa análise bayesiana, ao contrário do que ocorre em Drischler *et al.* (2020), onde os parâmetros de *bulk* correlacionados J e L_0 são empregados junto com suas incertezas associadas.

A título de observação, mencionamos que os híperons poderiam ser incluídos no modelo. No entanto, a inclusão de tais partículas no sistema suaviza as equações de estado, como consequência, o modelo não produz estrelas muito massivas em comparação com o caso em que os núcleons são os únicos graus de liberdade (*the hyperon puzzle*). Além disso, as interações dos híperons não são completamente determinadas e algumas suposições precisam ser feitas, o que torna inevitável a proliferação de mais constantes de acoplamento a serem ajustadas no modelo. Neste trabalho, preferimos evitar tais problemas mantendo, por uma questão de simplicidade, apenas núcleons e mésons no lado hadrônico do sistema de matéria estelar.

2.4 Estrelas de Nêutrons

As estrelas de nêutrons, verdadeiros colossos cósmicos, são remanescentes densos resultantes da explosão de supernovas que tiveram colapso de núcleo. Elas representam um dos destinos finais de estrelas maciças após esgotarem seu combustível nuclear e colapsarem sob sua própria gravidade. Notavelmente, estrelas de nêutrons podem possuir uma massa maior que 2 massas solares, enquanto seu raio é incrivelmente reduzido, em torno de 10 km. A densidade central ρ_c de uma EN pode atingir cerca de sete vezes a densidade do núcleo atômico ($\rho_{\text{nuc}} = 2 \times 10^{14} \text{g cm}^{-3}$) e a gravidade na superfície é bilhões de vezes maior que a gravidade na terra (GLENDENNING, 2012). Essas propriedades desafiam nossa compreensão da física e da natureza fundamental da matéria.

O conceito teórico de uma estrela de nêutrons foi inicialmente proposto por Fritz Zwicky e Walter Baade em 1934 — pouco mais de um ano após a descoberta do nêutron — que imaginaram a possibilidade de um objeto estelar colapsado, composto principalmente de nêutrons. No entanto, a confirmação experimental e observacional dessa ideia só viria mais tarde, em 1967, quando a primeira evidência concreta de uma estrela de nêutrons foi encontrada. A descoberta do pulsar PSR B1919+21 por Jocelyn Bell Burnell e Antony Hewish marcou significativamente a astrofísica. Inicialmente interpretado como um sinal de possível comunicação extraterrestre devido à sua natureza regular de pulsação, logo foi compreendido como um pulsar, uma estrela de nêutrons altamente magnetizada que emite feixes de radiação eletromagnética periódica enquanto gira rapidamente.

Densidades tão altas quanto $2\rho_0$ a $15\rho_0$ podem levar à criação de novas fases da matéria

e condensados de partículas como kaons e híperons, todavia são muito dependentes dos modelos teóricos, de modo que sua estrutura interna teórica pode mudar de maneira significativa dependendo do modelo. Tendo isso em vista, podemos dizer que a EoS da matéria estelar está intimamente conectada com a sua estrutura e pode nos fornecer informações de quantidades macroscópicas das EN que podemos medir aqui da terra. Neste contexto, as equações de TOV (TOLMAN, 1939; OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939), desempenham um papel crucial. Essas equações, derivadas da relatividade geral, descrevem o equilíbrio hidrostático que impede o colapso da estrela devido a força da gravidade. Resolvendo essas equações, obtemos a massa e o raio da EN quando uma EoS é fornecida, ou seja, quando a densidade de energia e a pressão são fornecidas como *inputs*.

2.4.1 Equações de Tolman-oppenheimer-Volkoff e condições de equilíbrio estelar

As equações de TOV podem ser encontradas a partir das equações de campo da relatividade geral:

$$R_{\mu\nu} = -8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right), \quad (2.47)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, $g_{\mu\nu}$ a métrica, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento e $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$. Utilizamos $G = c = 1$ em todo o decorrer dessa dedução. Assumimos uma métrica na forma esférica simétrica padrão:

$$g_{rr} = A(r), \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \text{sen}^2(\theta), \quad g_{tt} = -B(r) \quad \text{e} \quad g_{\mu\nu} = 0 \quad \mu \neq \nu, \quad (2.48)$$

e um tensor energia-momento para um fluido perfeito:

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (p + \epsilon)U_\mu U_\nu \quad (2.49)$$

onde p é a pressão e ϵ a densidade de energia. U^μ é a quadrivelocidade, e para um fluido em repouso temos que as componentes espaciais de U são iguais a zero, isto é,

$$U_r = U_\theta = U_\phi = 0, \quad (2.50)$$

além disso, U^μ é definida de modo que

$$g^{\mu\nu}U_\mu U_\nu = -1, \quad (2.51)$$

e portanto, por causa de (2.50), apenas o termo temporal de (2.51) será não-nulo, logo

$$g^{tt}U_t U_t = -1; \quad U_t = -\sqrt{-g_{tt}} = -\sqrt{B(r)}. \quad (2.52)$$

Utilizando esses resultados podemos escrever as expressões para os tensores de Ricci e, conseqüentemente, as equações de campo (2.47). Os termos não nulos são:

$$R_{rr} = \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rA} = -4\pi(\epsilon - p)A, \quad (2.53)$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2A} \left(-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{A} = -4\pi(\epsilon - p)r^2 \quad \text{e} \quad (2.54)$$

$$R_{rr} = -\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rA} = -4\pi(\epsilon + 3p)B, \quad (2.55)$$

onde a linha denota derivada em r . A equação para $\phi\phi$ é idêntica à $\theta\theta$. Podemos derivar a expressão de $A(r)$, fazendo a seguinte relação com as equações (2.53), (2.54) e (2.55):

$$\frac{R_{rr}}{2A} + \frac{R_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{R_{tt}}{2B} = -\frac{A'}{rA^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{Ar^2} = -8\pi\epsilon, \quad (2.56)$$

essa equação pode ser escrita como

$$\left(\frac{r}{A} \right)' = 1 - 8\pi\epsilon r^2. \quad (2.57)$$

Integrando a equação (2.57) em r temos que, para $A(0)$ finito

$$A(r) = \left(1 - \frac{2m(r)}{r} \right)^{-1}, \quad (2.58)$$

onde $m(r)$ é definida de modo que

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \epsilon(r') dr'. \quad (2.59)$$

Além disso, empregamos a condição de equilíbrio hidrostático, isto é, a conservação do tensor energia-momento:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.60)$$

que, usando as equações (2.48) à (2.52), resulta em

$$\frac{B'}{B} = -\frac{2p'}{p + \epsilon}. \quad (2.61)$$

Utilizando os resultados dos campos $A(r)$ e $B(r)$ em (2.58) e (2.61), podemos reescrever a equação para $R_{\theta\theta}$ (2.54), que se torna:

$$-1 + \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \left(1 - \frac{rp'}{p + \epsilon} \right) + \frac{m}{r} - 4\pi\epsilon r^2 = -4\pi(\epsilon - p)r^2. \quad (2.62)$$

Rearranjamos os termos de (2.62) de forma que chegamos finalmente em

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{[\epsilon(r) + p(r)][m(r) + 4\pi r^3 p(r)]}{r^2[1 - 2m(r)/r]}, \quad (2.63)$$

onde

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon(r). \quad (2.64)$$

Essas equações foram derivadas em 1939 por Robert Oppenheimer e George Volkoff (OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939) e independentemente por Richard C. Tolman (TOLMAN, 1939). Ela é conhecida como equação de estrutura pois relaciona a pressão e a densidade de energia da matéria estelar, com parâmetros observáveis de estrelas, como massa e raio.

Um último passo, para calcularmos a pressão total e densidade de energia, é adicionado as contribuições dos elétrons e múons no sistema, e portanto a pressão total será $p = P + P_e + P_\mu$ e a densidade de energia total será $\epsilon = \epsilon + \epsilon_e + \epsilon_\mu$, onde P e ϵ são dados respectivamente nas equações (2.29) e (2.30), e P_l e ϵ_l são dados por

$$P_l = \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{\sqrt{\mu_l^2 - m_l^2}} \frac{k^4}{(k^2 + (m_l)^2)^{1/2}} dk \quad e \quad \epsilon_l = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\sqrt{\mu_l^2 - m_l^2}} k^2 (k^2 + (m_l)^2)^{1/2} dk. \quad (2.65)$$

com $l = e, \mu$. μ_l são os potenciais químicos e serão explicados na seção (2.4.2). m_μ é a massa do múon e vale 105,7 MeV. Como a massa do elétron é muito pequena (apenas 0,511 MeV) em comparação com a do múon, podemos considerar os elétrons como sendo sem massa e portanto a pressão total e densidade de energia do sistema serão

$$p = P + \frac{\mu_e^4}{12\pi^2} + \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{\sqrt{\mu_\mu^2 - m_\mu^2}} \frac{dk k^4}{(k^2 + m_\mu^2)^{1/2}}, \quad (2.66)$$

e

$$\epsilon = \epsilon + \frac{\mu_e^4}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\sqrt{\mu_\mu^2 - m_\mu^2}} dk k^2 (k^2 + m_\mu^2)^{1/2}. \quad (2.67)$$

A solução para as equações de TOV pode ser encontrada considerando as seguintes condições de contorno: no centro da estrela $p(r = 0) = p_c$ (pressão central) e $m(r = 0) = 0$; então as equações (2.63) e (2.64) são integradas com incrementos dr . Devido ao sinal negativo de (2.63) a pressão irá diminuir a cada incremento, até que $p(r = R) = 0$, que é considerada a superfície da estrela, e $m(r = R) \equiv M$, onde R e M são o raio e massa da estrela, respectivamente. A crosta externa da estrela de nêutron é descrita pela equação de estado de Baym-Pethick-Sutherland (BAYM *et al.*, 1971) para densidades entre

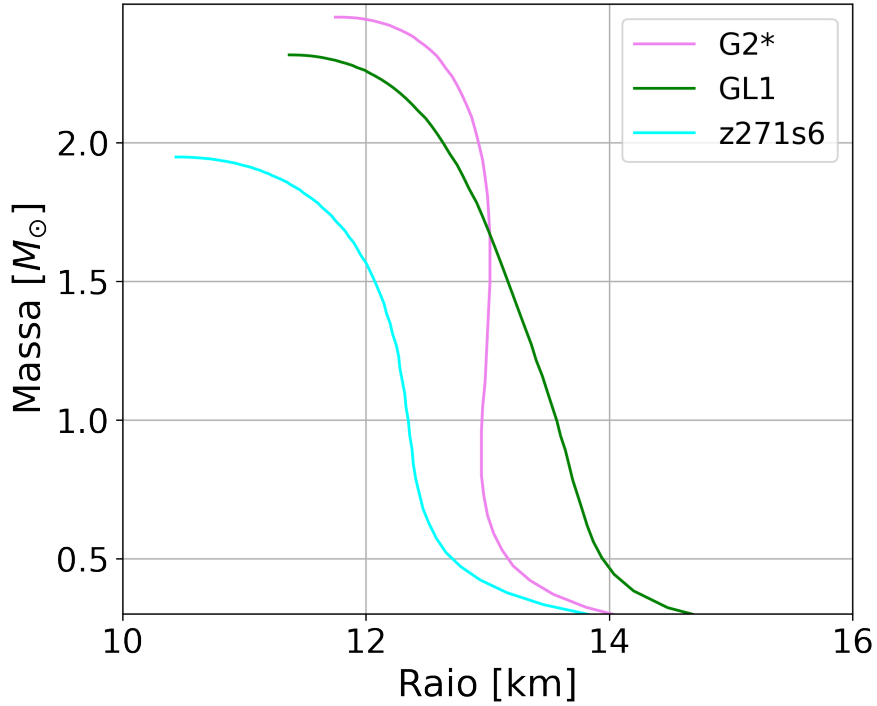


FIGURA 2.5 – Curvas Massa-Raio de três EoS distintas.

$$6,29 \times 10^{-12} \leq \rho \leq 8,91 \times 10^{-3} \text{ fm}^{-3}.$$

Portanto, resolvendo as equações acopladas (2.63) e (2.64) para um determinado valor e p_c , encontraremos a massa e o raio correspondente. Quando resolvemos as equações para vários valores diferentes de p_c e plotamos os valores de massa e raio, encontramos a curva massa-raio que será diferente para cada EoS. Podemos ver alguns exemplos de curva massa-raio na Figura 2.5, onde foram usadas as equações de estado cujas parametrizações estão na Tabela 2.1.

2.4.2 Potenciais químicos e condições de equilíbrio

Por definição, os potenciais químicos são definidos como a variação de energia em relação à variação de partículas no sistema, ou seja, o potencial químico nos diz o quanto de energia é necessária para remover ou adicionar uma partícula no sistema. Para os núcleons, podemos escrever tal grandeza como

$$\mu_i = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_i}, \quad i = p, n. \quad (2.68)$$

Utilizando a equação (2.30) e também que

$$\frac{\partial (\varepsilon_{cin}^p + \varepsilon_{cin}^n)}{\partial \rho_i} = \sqrt{k_{Fi}^2 + M^{*2}} + \rho_s \frac{\partial M^*}{\partial \rho_i}, \quad (2.69)$$

encontramos a forma explícita do potencial químico dos prótons e nêutrons:

$$\mu_i = \sqrt{k_{F_i}^2 + M^{*2}} + g_\omega \omega_0 + \frac{\partial \rho_3}{\partial \rho_i} \bar{\rho}_0, \quad (2.70)$$

onde $\frac{\partial \rho_3}{\partial \rho_i} = 1$ para prótons e -1 para nêutrons. Como consideramos os elétrons sem massa, então o seu potencial químico será igual ao seu momento de Fermi, ou seja

$$\mu_e = (3\pi^2 \rho_e)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.71)$$

Múons só serão produzidos quando o potencial químico dos elétrons (2.71) excederem o valor da massa do múon, ou seja:

$$\mu_\mu = \begin{cases} \mu_e, & \text{se } \mu_e > m_\mu, \\ 0, & \text{se } \mu_e \leq m_\mu, \end{cases} \quad (2.72)$$

portanto, o potencial químico do elétron e do múon dependem da densidade de elétrons (ρ_e) e para calcularmos ρ_e , duas condições devem ser satisfeitas que são: a condição de equilíbrio químico (equilíbrio beta) e de neutralidade de carga; essas condições são representadas pelas respectivas equações:

$$\mu_n(\rho, y) - \mu_p(\rho, y) = \mu_e(\rho_e) \quad (2.73)$$

e

$$\rho_p(\rho, y) - \rho_e = \rho_\mu(\rho_e) = \frac{(\mu_\mu^2 - m_\mu^2)^{3/2}}{3\pi^2}; \quad (2.74)$$

então, para um dado valor de ρ , satisfazendo simultaneamente as equações (2.73 e 2.74), encontramos a fração de prótons e a densidade de elétrons, que por sua vez nos diz a densidade de múons, e assim temos um sistema de equação completo.

2.4.3 Deformabilidade de maré

Sistemas binários de estrelas de nêutrons, como aquele em que o LVC detectou pela primeira vez ondas gravitacionais (ABBOTT; The LIGO and Virgo Collaboration, 2017; ABBOTT *et al.*, 2018), são particularmente úteis na astrofísica, pois é possível determinar a massa das EN no sistema com precisão. Nesse sistema, duas EN giram ao redor de um centro de massa comum. A rotação gera ondas gravitacionais, fazendo com que as órbitas percam energia e se aproximem, resultando em um movimento espiral, gerando cada vez mais ondas gravitacionais à medida que se aproximam até colidirem e se fundirem. Durante a fase de espiral, um poderoso campo gravitacional de maré \mathcal{E}_{ij} causado pela estrela

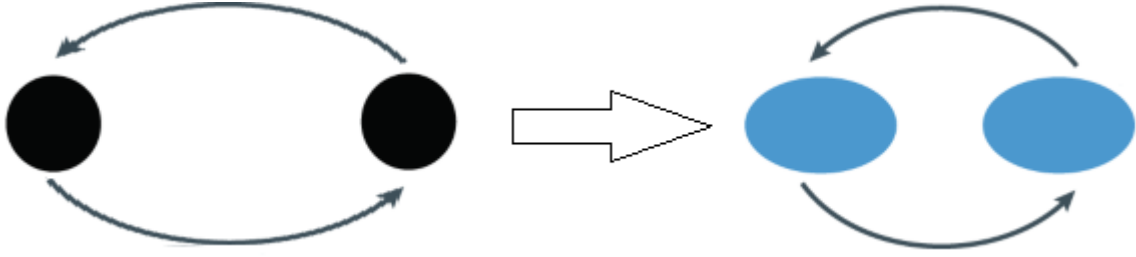


FIGURA 2.6 – Ilustração da deformação causada pelo campo gravitacional de maré em um sistema binário de EN. A deformabilidade fica mais intensa quanto mais perto estão as estrelas

companheira deforma sua estrutura, induzindo na estrela um momento de quadrupolo Q_{ij} ; A Figura 2.6 ilustra o efeito da distorção do campo de maré nesses sistemas binários. O parâmetro de deformabilidade de maré (λ), também conhecido como número de maré de Love, pode ser utilizado para descrever esse efeito.

$$Q_{ij} = -\lambda \mathcal{E}_{ij} \quad \text{onde} \quad \lambda = \frac{2}{3} k_2 R^5. \quad (2.75)$$

A versão adimensional do parâmetro λ é escrita como

$$\Lambda = \frac{2}{3} \frac{k_2}{C^5}, \quad (2.76)$$

Onde $C = M/R$ é o parâmetro de compactidade e k_2 é o número de maré de Love de segunda ordem, que contém informações sobre a estrutura interna da EN, pois seu cálculo depende diretamente da EoS. Outra maneira de perceber que a deformabilidade está ligada à EoS é a seguinte: conforme o raio da EN aumenta, a influência do campo gravitacional externo intensifica a deformação devido ao crescimento do gradiente gravitacional associado ao aumento do raio; isso significa que uma equação de estado mais rígida (mais flexível) provocará, respectivamente, maiores (menores) deformações no sistema de estrelas de nêutrons binárias. Para derivarmos k_2 é necessário resolver as equações de campo da Relatividade Geral utilizando uma métrica com coeficientes de perturbação. O cálculo completo dessas derivações estão no apêndice A. Explicitamente, o número de Love k_2 pode ser escrito como

$$\begin{aligned} k_2 = & \frac{8C^5}{5} (1 - 2C)^2 [2 + 2C(y_R - 1) - y_R] \times \left\{ 2C[6 - 3y_R + 3C(5y_R - 8)] \right. \\ & + 4C^3[13 - 11y_R + C(3y_R - 2) + 2C^2(1 + y_R)] \\ & \left. + 3(1 - 2C)^2 [2 - y_R + 2C(y_R - 1)] \ln(1 - 2C) \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (2.77)$$

com $y_R \equiv y(R)$. A função $y(r)$ pode ser encontrada resolvendo a equação diferencial acoplada às equações de TOV, dada por

$$r(dy/dr) + y^2 + yF(r) + r^2Q(r) = 0, \quad (2.78)$$

com

$$F(r) = \frac{1 - 4\pi r^2[\epsilon(r) - p(r)]}{1 - 2m(r)/r}, \quad (2.79)$$

$$Q(r) = \frac{4\pi r}{r - 2m(r)} \left[5\epsilon(r) + 9p(r) + \frac{\epsilon(r) + p(r)}{\partial p(r)/\partial \epsilon(r)} - \frac{6}{r^2} \right] - 4 \left[\frac{m(r) + 4\pi r^3 p(r)}{r^2(1 - 2m(r)/r)} \right]^2. \quad (2.80)$$

Mais detalhes sobre a derivação dessas equações podem ser vistos no apêndice A e também em (HINDERER *et al.*, 2010; POSTNIKOV *et al.*, 2010; DAMOUR; NAGAR, 2010a; BINNINGTON; POISSON, 2009; HINDERER, 2008).

3 Análise bayesiana

Nesta seção, discutiremos o método empregado para utilizar observações recentes de massa e raio de estrelas de nêutrons a fim de restringir a EoS do modelo relativístico com aproximação de campo médio, como detalhado no capítulo 2, isto é, a análise bayesiana. Esta análise é um modo de testar e restringir modelos, onde a principal ideia é a construção de uma probabilidade posterior através do Teorema de Bayes (SIVIA; SKILLING, 2006; GELMAN *et al.*, 2014), dado por:

$$P(\theta|D, \mathcal{M}) = \frac{P(D|\theta, \mathcal{M})P(\theta, \mathcal{M})}{P(D, \mathcal{M})}. \quad (3.1)$$

que nos retorna a distribuição de probabilidade de um conjunto de parâmetros θ , uma vez fornecido um conjunto de dados D de um modelo \mathcal{M} . Essa distribuição é chamada de função densidade posterior (PDF).

A PDF é o resultado da junção de informações anteriores, dadas pela probabilidade a priori (*prior*) $P(\theta, \mathcal{M})$, que reflete o conhecimento que temos sobre os parâmetros antes dos dados serem considerados, e da função de verossimilhança (*likelihood*) $P(D|\theta, \mathcal{M})$, que é a probabilidade de inferir os dados que foram observados assumindo que são reproduzidos por um modelo \mathcal{M} com parâmetros θ . $P(D, \mathcal{M})$ é a probabilidade dos dados observáveis D ; é conhecida como evidência e pode ser tratada como um fator de normalização, pois não depende do conjunto de parâmetros θ (STEINER *et al.*, 2010; TRAVERSI *et al.*, 2020). Portanto, podemos reescrever (3.1) como

$$P(\theta|D, \mathcal{M}) = \frac{P(D|\theta, \mathcal{M})P(\theta, \mathcal{M})}{Z_{\mathcal{M}}}, \quad (3.2)$$

onde $Z_{\mathcal{M}}$ é a constante de normalização. Desse modo, a probabilidade posterior (não normalizada) de um determinado conjunto de parâmetros θ é obtida apenas pelo produto entre a prior e a likelihood.

Como exemplo, suponha que precisamos encontrar o conjunto de parâmetros $\theta = a_1, a_2, a_3$ que caracterizam a função $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$, onde x e $f(x)$ podem ser medidos experimentalmente, porém com uma certa incerteza. Neste exemplo, os valores exatos de a_1, a_2 e a_3 são -0,96, 3,29 e -2,57, respectivamente. Através da análise baye-

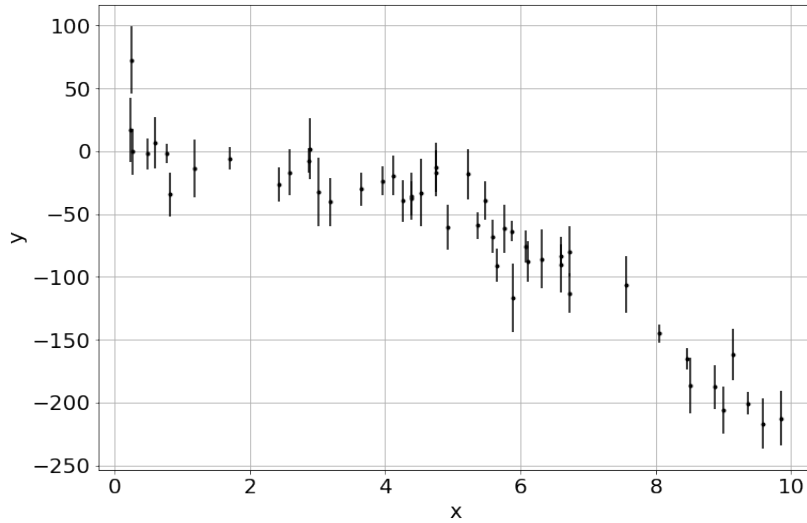


FIGURA 3.1 – Dados experimentais hipotéticos da grandeza y em função de x . As barras verticais em cada ponto são as margens de erro.

siana, estimaremos os valores para o conjunto de parâmetros $\theta = a_1, a_2, a_3$. Para isso, utilizaremos dados hipotéticos experimentais observados para essa grandeza, que estão apresentados na Figura 3.1, onde y são os valores observados de $f(x)$. Acerca de a_1 , a_2 e a_3 sabemos apenas que eles devem ter valores entre -5 e 5 . Como não temos mais nenhuma informação sobre esses parâmetros, podemos propor uma distribuição uniforme como prior, de modo que qualquer valor dentro deste intervalo tenha a mesma probabilidade, isto é, uma distribuição de probabilidade que dentro do intervalo $[-5, 5]$ tenha valor igual a $\frac{1}{5 - (-5)} = \frac{1}{10}$, este valor é escolhido de modo a normalizar a distribuição. Logo

$$P(\theta) = P(a_1, a_2, a_3) = P(a_1)P(a_2)P(a_3) = \begin{cases} \frac{1}{10^3}, & \text{se } -5 < a_1, a_2, a_3 < 5 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Agora, precisamos definir uma função de verossimilhança do modelo, $P(D|\theta)$. Em outras palavras, precisamos descobrir qual a probabilidade de obtermos os dados observacionais D partindo de um conjunto θ . Na literatura, existem diversas maneiras de fazer isso. Uma das mais utilizadas é o método da máxima verossimilhança, que basicamente consiste em uma distribuição gaussiana, que tem a probabilidade máxima quando y_n (grandeza obtida experimentalmente) é igual à função $f(x)$ do modelo teórico, ou seja,

$$P(x, y|a_1, a_2, a_3) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_n \left[\frac{(y_n - f(x_n))^2}{\sigma_n^2} + \ln(2\pi\sigma_n^2) \right] \right\}. \quad (3.4)$$

Utilizando as equações (3.4) e (3.3), podemos popular a posterior (3.2), isto é, calcular $P(\theta|D)$ (não normalizada) para diversos valores dos parâmetros θ . O resultado pode

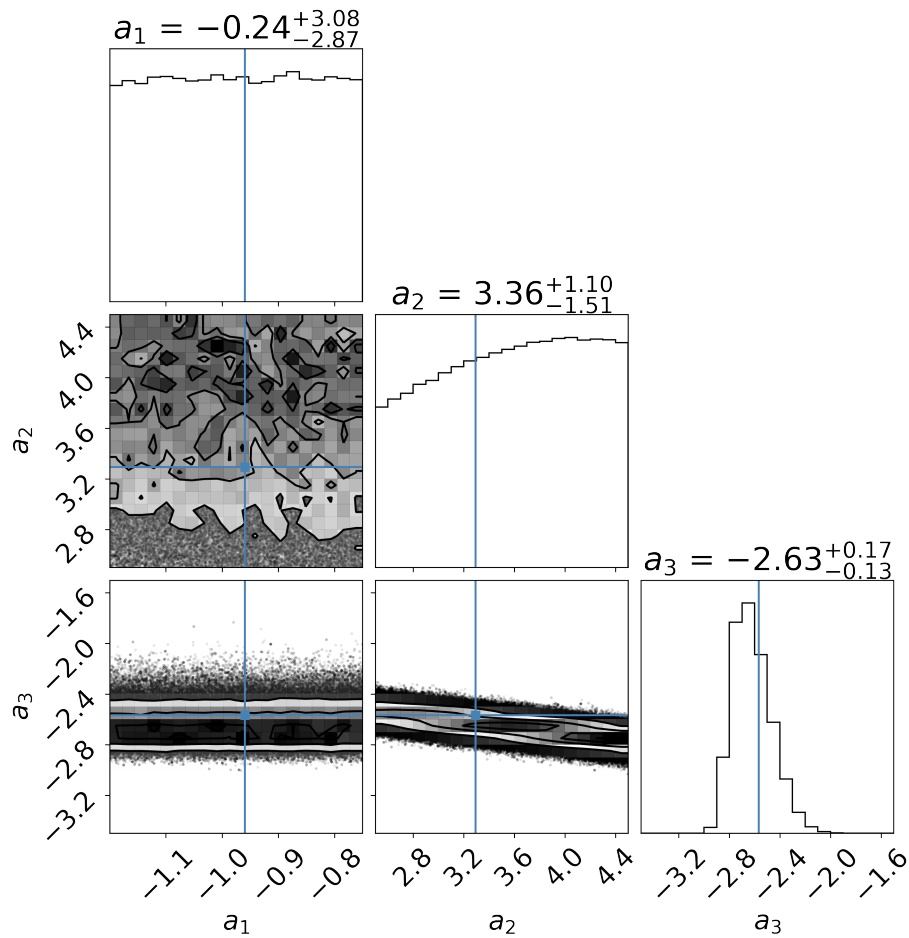


FIGURA 3.2 – Histograma representando a distribuição posterior dos parâmetros hipotéticos a_1 , a_2 e a_3 . A linha azul corresponde ao valor 'verdadeiro' dos parâmetros.

ser visualizado através de histogramas, como utilizado na Figura 3.2, onde podemos ver os possíveis valores dos parâmetros a_1 , a_2 e a_3 . Podemos ver claramente que a análise bayesiana conseguiu inferir com precisão os valores prováveis de a_2 e a_3 , no entanto a_1 ficou um pouco mais distante do seu valor correto, porém ainda dentro do intervalo de confiança de 68%. Na região em que os dados observacionais foram retirados ($0 \leq x \leq 10$), a função $f(x)$ tem o seu comportamento dominado pelo termo quadrático. Por esse motivo, neste exemplo, o coeficiente ligado a x^2 , isto é, a_3 , é determinado com tanta precisão. Para obtermos mais precisão nos coeficiente a_1 e a_2 seria necessário obtermos mais dados observacionais na faixa entre $0 \leq x \leq 1$. Portanto, o intervalo a ser analisado também é de suma importância na análise bayesiana.

Nesta tese, seguiremos a ideia apresentada no exemplo, porém utilizando os dados observacionais de massa e raio de EN para restringir os parâmetros da equação de estado do modelo relativístico descrito no capítulo 2.

3.1 Conjunto de parâmetros θ

O modelo relativístico utilizado nesta tese, é composto por seis constantes de acoplamento, como descrito no fim da seção 2.2. Determinamos essas seis constantes a partir de seis parâmetros de *bulk* da SNM: m_0^* , B_0 , K_0 , ρ_0 , $\mathcal{S}_{2/3}$, e L_0 ; ou seja, encontramos G_σ^2 , G_ω^2 , G_ρ^2 , a , b e α de modo que:

$$M^*(\rho_0) = m_0^* M, \quad (3.5)$$

$$P(\rho_0) = 0, \quad (3.6)$$

$$\varepsilon(\rho_0) = \rho_0(M + B_0), \quad (3.7)$$

$$K(\rho_0) = K_0, \quad (3.8)$$

$$\mathcal{S}\left(\frac{2\rho_0}{3}\right) = \mathcal{S}_{2/3}, \quad (3.9)$$

$$L(\rho_0) = L_0. \quad (3.10)$$

As formas explicitas destas quantidades são dadas nas equações (2.21), (2.29), (2.30), (2.36), (2.43) e (2.46), respectivamente.

Decidimos fixar ρ_0 em $0,15 \text{ fm}^{-3}$ e B_0 em $-16,0 \text{ MeV}$, uma vez que essas quantidades são bem estabelecidos na maioria dos modelos nucleares de campo médio, tendo margens de erro muito pequenas como se pode ver, por exemplo, em Margueron *et al.* (2018), em que os intervalos para tais quantidades são $\rho_0 = 0,155 \pm 0,005 \text{ fm}^{-3}$ e $B_0 = -15,8 \pm 0,3 \text{ MeV}$. Os outros quatro parâmetros de *bulk* constituem o conjunto de parâmetros θ que serão inferidos pelo teorema de Bayes, equação (3.11). Logo, podemos reescrevê-la como:

$$P(m_0^*, K_0, \mathcal{S}_{2/3}, L_0 | D, \mathcal{M}) = \frac{P(D | m_0^*, K_0, \mathcal{S}_{2/3}, L_0, \mathcal{M}) \times P(m_0^*, K_0, \mathcal{S}_{2/3}, L_0, \mathcal{M})}{Z_{\mathcal{M}}}, \quad (3.11)$$

onde $Z_{\mathcal{M}} \equiv P(D, \mathcal{M})$.

3.2 Probabilidades a Priori

Diferentes estudos foram realizados para determinar intervalos para os parâmetros de *bulk*, e utilizamos alguns deles para fornecer informações de entrada para a análise bayesiana. Para m_0^* foi escolhido o intervalo obtido em Souza *et al.* (2020), a saber, $0,60 \leq m_0^* \leq 0,88$, que foi obtido analisando as correlações do parâmetro com a deformabilidade de maré de uma estrela de $1,4 M_\odot$ ($\Lambda_{1,4}$), baseado em modelos RMF. O intervalo usado para a incompressibilidade foi $220,0 \leq K_0 \leq 260,0 \text{ MeV}$ (GARG; COLÒ, 2018), onde os autores chegaram neste intervalo analisando os resultados experimentais

de Ressonancias Gigantes de Monopolo e Dipolo Isoscalar (ISGMR¹ e ISGDR²). Já no caso de $\mathcal{S}_{2/3}$, utilizamos o intervalo dos modelos RMF não-lineares (excluindo os modelos dependentes de densidade), da Tabela I de Dutra *et al.* (2016). O intervalo encontrado foi $22,45 < \mathcal{S}_{2/3} < 26,04$ MeV.

Para o intervalo da *slope* da energia de simetria, utilizamos quatro estudos diferentes e recentes que calculam L_0 baseado em resultados do experimento sobre a espessura da pele-de-nêutrons do chumbo 208 (²⁰⁸Pb), conhecido com PREX-II. Os resultados para a *slope* nesses estudos são: $L_0 = 53_{-15}^{+14}$ MeV (ESSICK *et al.*, 2021), $L_0 = (106 \pm 37)$ MeV (REED *et al.*, 2021), $42 < L_0 < 117$ MeV (ESTEE *et al.*, 2021), $L_0 = (83,1 \pm 24,7)$ MeV (YUE *et al.*, 2022). É interessante investigar como diferentes tipos de intervalos iniciais para a *slope* pode influenciar o resultado final da análise, por isso decidimos dividir nossas priors em dois casos:

- **Caso 1:** intervalo determinado pelo menor e o maior valor de L_0 nos artigos do PREX-II citados:

$$38 \text{ MeV} \leq L_0 \leq 143 \text{ MeV} \quad (3.12)$$

- **Caso 2:** intervalo determinado pela intersecção dos valores de L_0 em (REED *et al.*, 2021; ESTEE *et al.*, 2021; YUE *et al.*, 2022):

$$69 \text{ MeV} \leq L_0 \leq 107,8 \text{ MeV}. \quad (3.13)$$

Além disso, até onde sabemos, diferentes tipos de priors podem alterar o resultado da posterior (STEINER *et al.*, 2016). Para verificar essa hipótese, calculamos as posteriores utilizando distribuições uniforme e gaussiana como priors para entender como elas afetam a PDF.

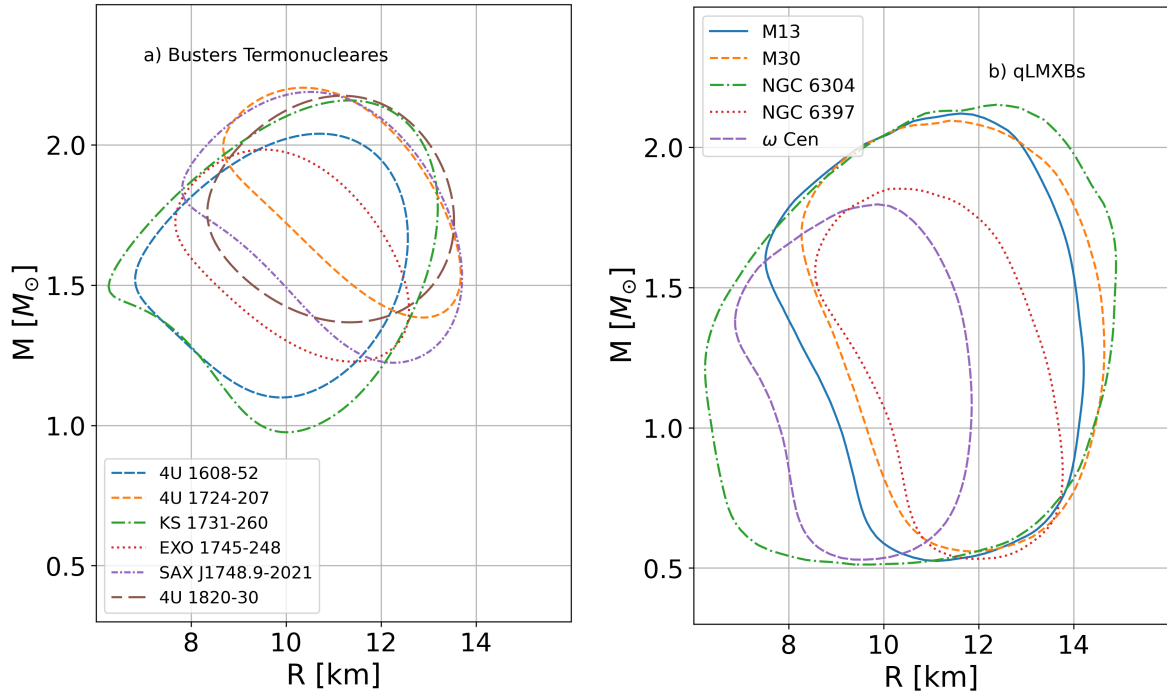
No caso da distribuição uniforme, os intervalos globais para os parâmetros de *bulk*, apresentados anteriormente, foram usados (valores mínimos e máximos). Quanto à distribuição gaussiana, atribuímos como média o ponto médio desses intervalos $\Delta = (Máximo + Mínimo)/2$ e como desvio padrão $(\sigma) = (Máximo - Mínimo)/4$. Dessa forma, os limites dos intervalos estão 2σ distantes da média. Todos os intervalos dos parâmetros da distribuição uniforme, assim como as médias e os desvios padrão da distribuição gaussiana, podem ser vistos na Tabela 3.1.

¹do inglês *Isoscalar Giant Monopole Resonance*

²do inglês *Isoscalar Giant Dipole Resonance*

TABELA 3.1 – Quantidades de saturação usada nas priors. Para a densidade de saturação e energia de ligação foram fixados os valores $\rho_0 = 0,15 \text{ fm}^{-3}$ e $B_0 = -16 \text{ MeV}$, respectivamente.

Tipo de Prior	Intervalo	m_0^* (MeV)	K_0 (MeV)	$\mathcal{S}_{2/3}$ (MeV)	L_0 (MeV)	
					Caso 1	Caso 2
Uniforme	Min	0,60	220,0	22,45	38,0	69,0
	Max	0,88	260,0	26,04	143,0	107,8
Gaussiana	Δ	0,74	240,0	24,25	90,5	88,4
	σ	0,07	10,0	0,90	26,25	9,7

FIGURA 3.3 – Diagrama de Massa x Raio das medidas provenientes das fontes de dados tratadas em Özel *et al.* (2016). Sendo 6 fontes de busters termonucleares (diagrama à esquerda) e 5 fontes de qLMXBs (diagrama à direita). Os contornos representam a região dentro de 68% do intervalo de confiança.

3.3 Dados observacionais

Os dados observacionais utilizados nesse trabalho são constituídos por 16 fontes. Esses dados são posteriores, ou seja, são estudos que tem como resultado distribuições de probabilidade de massa e raio. Primeiramente, temos onze fontes de dados cujas medições de massa e raio constam no trabalho de Özel (ÖZEL *et al.*, 2016). Seis destas fontes são *busters* termonucleares: 4U 1820–30, SAX J1748.9–2021, EXO 1745–248, KS 1731–260, 4U 1724–207, e 4U 1608–52, suas distribuições posteriores de massa e raio são calculadas utilizando cálculos de diâmetros angulares aparentes, distância e *fluxos de aterragem*³. A Figura 3.3a apresenta as medidas de massa e raio dentro do intervalo de confiança (CI) de 68%, conforme calculadas por Özel para estas fontes.

³tradução livre para 'touchdown fluxes'

Ainda no estudo de Özél (ÖZEL *et al.*, 2016), outras cinco fontes provenientes de raios-X (qLMXBs⁴) são utilizadas para inferir medidas de massa e raio: M13, M30, NGC 6304, NGC 6397, e ω Cen, cujas posteriores de massa-raio são calculadas a partir da análise espectroscópica da emissão de radiação termal. Os contornos de massa e raio dentro do CI de 68% das fontes de qLMXBs estão apresentados na Figura 3.3b. Mais detalhes sobre a metodologia utilizada no tratamento dessas fontes de dados, bem como as distribuições de $M - R$, podem ser encontradas em Özél e Paulo (2016).

Em relação às 5 fontes de dados restantes, das 16, uma delas vem da análise de raios-X da estrela de nêutrons em 4U 1702–429 (NÄTTILÄ, J. *et al.*, 2017), em que os autores calcularam $M = 1,9 \pm 0,3 M_{\odot}$ e $R = 12,4 \pm 0,4$ km. Do artigo do LVC (ABBOTT *et al.*, 2018) usamos os dois componentes provenientes da análise do evento de onda gravitacional GW170817⁵ (LSC *et al.*, 2019). As duas últimas fontes provêm de medições de massa-raio obtidas a partir dos dados fornecidos pela missão NICER, nomeadamente, uma para o pulsar PSR J0030+0451, calculada através de modelos para o perfil de pulsação (RILEY *et al.*, 2019), e outra para o pulsar PSR J0740+6620, calculado usando observações de raios-X e padrões de rotação de regiões quentes (RILEY *et al.*, 2021). Os contornos dessas distribuições de massa e raio podem ser visualizadas na Figura 3.4. A fim de emular as distribuições $M - R$ para os observáveis 4U 1702–429 e PSR J0030+0451, usamos a mesma descrição e parâmetros propostos em NÄTTILÄ, J. *et al.* (2017), Traversi *et al.* (2020), ou seja, a distribuição gaussiana bivariada, dada por

$$P(M, R) = \frac{1}{2\pi\sigma_M\sigma_R\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \times \left[\frac{(M-\mu_M)^2}{\sigma_M^2} - 2\rho\frac{(M-\mu_M)(R-\mu_R)}{\sigma_M\sigma_R} + \frac{(R-\mu_R)^2}{\sigma_R^2} \right] \right\}, \quad (3.14)$$

onde $\mu_M = 1,34 M_{\odot}$, $\sigma_M = 0,155 M_{\odot}$, $\mu_R = 12,71$ km, $\sigma_R = 1,165$ km e $\rho = 0,9$ para PSR J0030+0451. O valor de ρ é escolhido para imitar o comportamento altamente correlacionado dos dados. De maneira similar temos para 4U 1702–429 que $\mu_M = 1,9 M_{\odot}$, $\sigma_M = 0,3 M_{\odot}$, $\mu_R = 12,4$ km, $\sigma_R = 0,4$ km.

3.4 Função de Verossimilhança

Para calcular a verossimilhança, $P(D|\theta)$, de um dado conjunto de parâmetros θ , nós seguimos o processo descrito em Traversi *et al.* (2020), método amplamente utilizado na literatura e detalhado, por exemplo, em Steiner *et al.* (2010), Özél *et al.* (2016), Raithel

⁴abreviação em inglês para *Quiescent Low-Mass X-ray Binaries*

⁵as posteriores podem ser encontradas em <https://dcc.ligo.org/LIGO-P1800115/public>

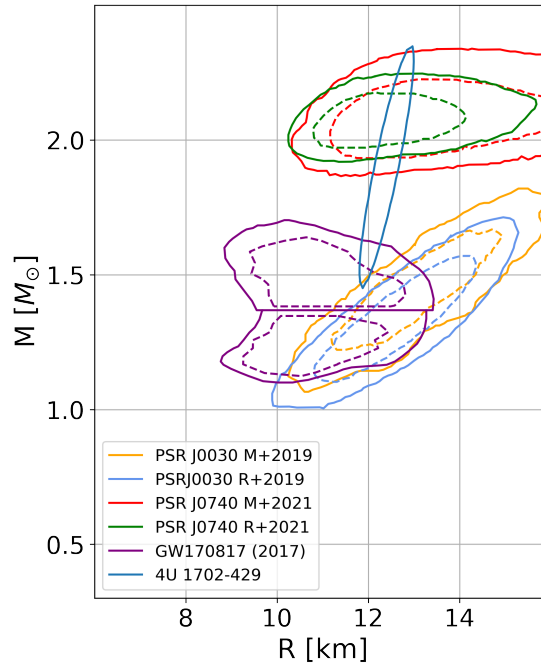


FIGURA 3.4 – Contornos massa-raio dentro de um CI de 68% (linhas tracejadas) e 90% CI (linhas continuas). Os contornos obtidos pelo NICER em laranja (MILLER *et al.*, 2019) e azul claro (RILEY *et al.*, 2019) para PSRJ0030+0451; vermelho (MILLER *et al.*, 2021) e verde (RILEY *et al.*, 2021) para PSR J0740+6620. O contorno violeta representa as medições de massa e raio do evento GW170817 obtidos pelo LVC (ABBOTT *et al.*, 2018). Por último, o contorno em azul proveniente análise de raios-X em 4U 1702-429 (NÄTTILÄ, J. *et al.*, 2017).

et al. (2017). Nesse caso, a likelihood é a probabilidade de gerar N observações de massa-raio dados um conjunto de parâmetros específicos do modelo. Portanto, a partir da EoS, calculamos a probabilidade de realização do par $D = (M, R)$ de uma fonte específica através do seguinte procedimento: (i) dado um conjunto de parâmetros, calculamos a respectiva EoS e, a partir disso, resolvemos as equações de TOV (veja seção 2.4.1) com vários valores de densidade central para obter a curva de massa-raio correspondente. Se a EoS produzir $M_{\max} < 2M_{\odot}$, o conjunto de parâmetros é descartado e outro é escolhido. (ii) Se a condição $M_{\max} \geq 2M_{\odot}$ for satisfeita, a probabilidade de cada ponto do diagrama massa-raio é avaliada de acordo com a distribuição $M - R$ da fonte. (iii) A probabilidade máxima encontrada nesses pontos será assinalada como o valor da likelihood. Portanto,

$$P(D|m_0^*, K_0, \mathcal{S}_{2/3}, L_0, \mathcal{M}) = \prod_{i=1}^{N=16} P_i(D_i|m_0^*, K_0, \mathcal{S}_{2/3}, L_0, \mathcal{M}), \quad (3.15)$$

onde

$$P_i(D_i|m_0^*, K_0, \mathcal{S}_{2/3}, L_0, \mathcal{M}) = P_{\max,i}(D_i|m_0^*, K_0, \mathcal{S}_{2/3}, L_0, \mathcal{M}), \quad (3.16)$$

com $P_{max,i}(D_i|m_0^*, K_0, \mathcal{S}_{2/3}, L_0, \mathcal{M})$ sendo a probabilidade máxima associada com o conjunto de parâmetro.

Finalmente, o numerador da PDF na equação (3.1) é calculado através de simulações de Monte Carlo via cadeias de Markov (MCMC). Para isso, utilizamos o pacote python *emcee* apresentado em Foreman-Mackey *et al.* (2013). Porém, como nosso estudo considera duas priors diferentes, bem como dois conjuntos diferentes de parâmetros L_0 , é necessário calcular a evidência $P(D, \mathcal{M})$, dada por:

$$P(D, \mathcal{M}) = Z_{\mathcal{M}} = \int P(D|\theta, \mathcal{M})P(\theta, \mathcal{M})d\theta. \quad (3.17)$$

Tal quantidade é obtida através de uma integração de Monte Carlo sobre a posterior, equação (3.2).

3.5 Fator de Bayes

Para testar e comparar as hipóteses levantadas pelos modelos utilizados, ou seja, pelas diferentes tipos de priors escolhidas, é interessante calcular o fator de Bayes (BF), que é uma medida estatística que quantifica a evidência a favor ou contra uma hipótese em relação a outra, com base nos dados observados (JEFFREYS, 1961; ROBERT *et al.*, 2009; KÖHLINGER *et al.*, 2019; BRESCHI *et al.*, 2021). O fator de Bayes pode ser encontrado pela razão das evidências de dois modelos:

$$\mathcal{B}_{AB} = \frac{P(D|\mathcal{M}_A)}{P(D|\mathcal{M}_B)} = \frac{Z_A}{Z_B}. \quad (3.18)$$

Para interpretar o fator de Bayes, utilizamos a sugestão proposta por Jeffreys (1961) e resumida em Kass e Raftery (1995), conforme apresentado na Tabela 3.2.

TABELA 3.2 – Valores padrão fornecidos pela escala de Jeffrey (JEFFREYS, 1961), úteis para comparar duas hipóteses usando o fator de Bayes

$\log_{10}(\mathcal{B}_{AB})$	\mathcal{B}_{AB}	Evidência contra \mathcal{M}_A
< 0	> 1	Hipótese nula sustentada
0 a 0,5	1 a 3,2	Merece apenas uma menção breve
0,5 a 1	3,2 a 10	Substancial
1 a 2	10 a 100	Forte
> 2	> 100	Decisivo

4 Resultados

Neste capítulo, apresentaremos os resultados obtidos por meio da análise bayesiana descrita no Capítulo 3. Utilizamos simulações de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC) para estimar a função de densidade de probabilidade posterior, conforme definido pelo teorema de Bayes na equação (3.11). O conjunto de parâmetros analisados, $\theta = m_0^*, K_0, \mathcal{S}_{2/3}, L_0$, será restringido baseado nos dados observacionais de massa e raio de estrelas de nêutrons, que também são detalhados no Capítulo 3. O tipo de equação de estado considerada nessa análise deriva de um modelo relativístico de campo médio, incluindo interações do tipo $\omega - \rho$, conforme descrito no Capítulo 2. Após a obtenção da distribuição posterior, calculamos a energia de simetria no ponto de saturação.

Um esboço do algoritmo utilizado nesta tese para calcular a posterior encontra-se no apêndice B. Para iniciar o MCMC precisamos definir a quantidade de *walkers*, isto é, a quantidade de pontos iniciais que será calculada a probabilidade posterior, e também a quantidade de passos, ou seja, a quantidade de vezes que esses pontos serão atualizados. A cada novo passo, os *walkers* escolhem novos conjuntos θ e a probabilidade é então calculada (equação 3.1); esses conjuntos podem ser aceitos ou rejeitados dependendo do valor da probabilidade encontrada, assim, conjuntos de parâmetros θ com maior probabilidade tendem a ser mais aceitos e portanto serem escolhidos mais frequentemente, fazendo com que o histograma final das amostras reflita a distribuição de probabilidade posterior. Para cada rodada de análise feita (4 no total), foram utilizados 500 *walkers* e 900 passos, totalizando um histograma com 450 mil conjuntos de parâmetros θ . Mais detalhes sobre o método do MCMC pode ser visto em Foreman-Mackey *et al.* (2013).

4.1 Distribuições posteriores

Como um resultado inicial, apresentamos as PDFs posteriores resultantes dos Casos 1 e 2. Estas distribuições resultantes da análise bayesiana são apresentadas em histogramas em uma e duas dimensões, onde foi utilizado o pacote do python *corner.py* (FOREMAN-MACKEY, 2016) para visualização dos dados. Os níveis observados nos histogramas bi-dimensionais são $0, 5\sigma, 1\sigma, 1,5\sigma$ e 2σ , que correspondem a 12%, 39%, 68% e 90% do

intervalo de confiança, respectivamente.

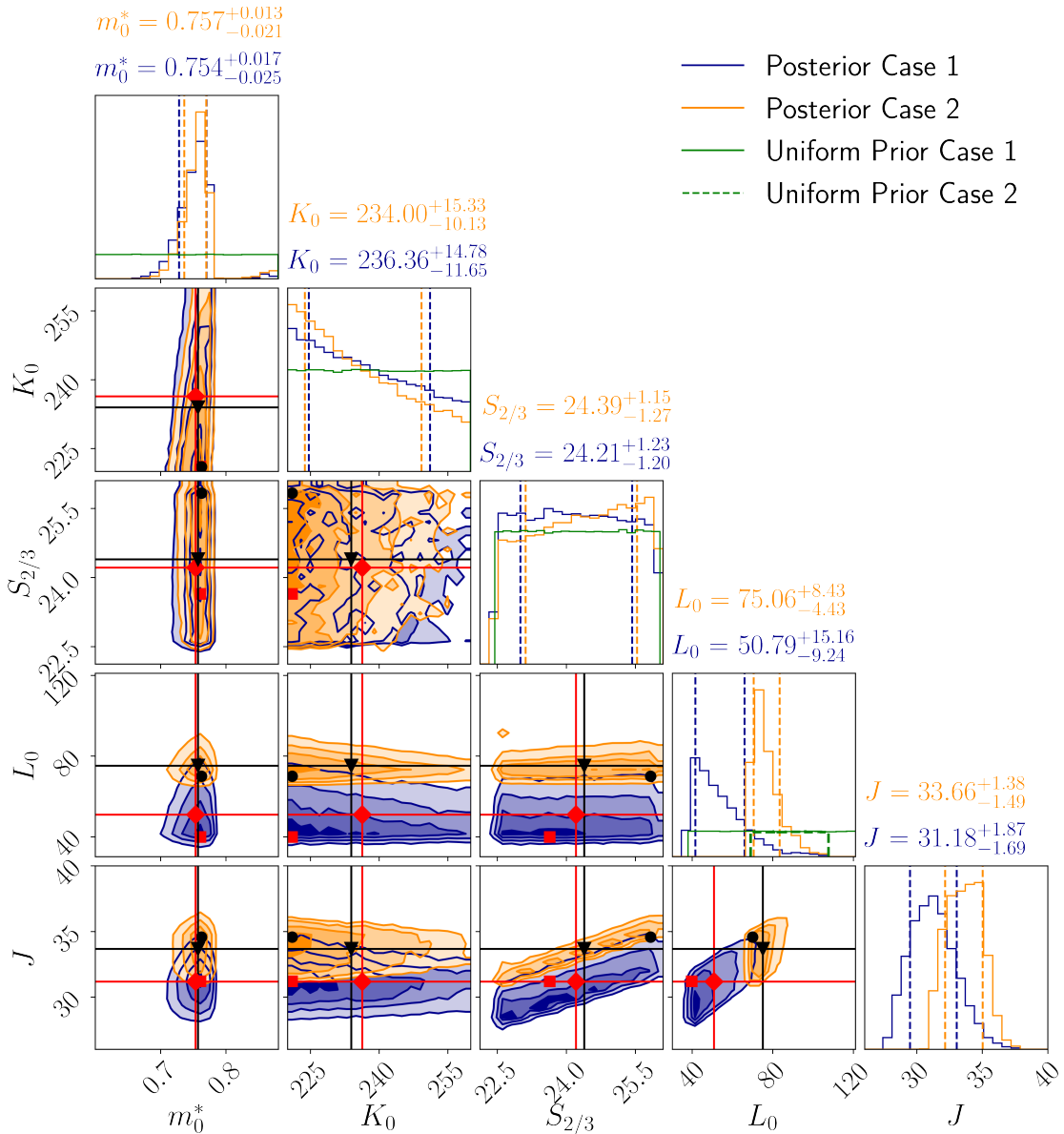


FIGURA 4.1 – Distribuição posterior dos parâmetros de *bulk* usando uma prior uniforme para o Caso 1 (azul) e o Caso 2 (laranja). Os histogramas mostrados na diagonal representam a distribuição marginal posterior de cada parâmetro de forma independente. As linhas sólidas pretas (vermelhas) representam o valor mediano da PDF para o Caso 1 (Caso 2). As linhas tracejadas azuis (laranjas) indicam os valores dos quantis 0,16 e 0,84 para o Caso 1 (Caso 2). Os pontos em forma de círculo (quadrado) pretos (vermelhos) referem-se aos valores medianos do Caso 1 (Caso 2). O triângulo (losango) preto (vermelho) é o valor mais provável para o Caso 1 (Caso 2), ou seja, as modas. Os níveis de σ nos histogramas 2D são $0,5\sigma$, 1σ , $1,5\sigma$ e 2σ . O limite da prior é mostrado como uma linha verde (linha tracejada) para o Caso 1 (Caso 2) na diagonal.

Na Figura 4.1, apresentamos os resultados da análise utilizando prior uniforme. Note que em ambos os casos, a massa efetiva manifesta uma preferência por valores maiores, exibindo um pico notável próximo ao valor médio. Note que o histograma de m_0^* apresenta uma queda brusca após $m_0^* = 0,8$, um dos motivos poderia ser o limite superior do intervalo escolhido para a análise $(0,88)$, que está próximo do valor mais provável. Outra

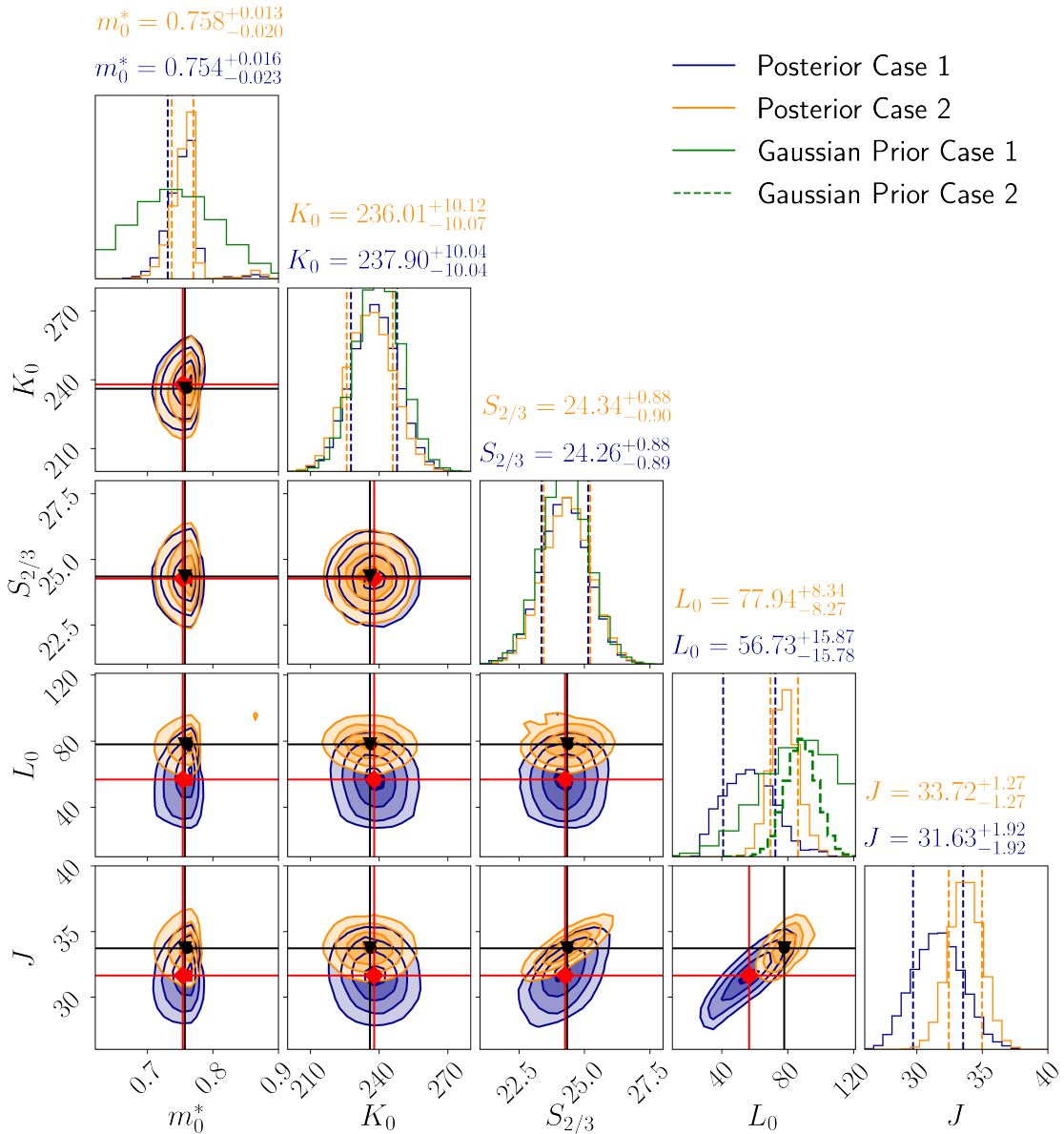


FIGURA 4.2 – Distribuição posterior dos parâmetros de *bulk* utilizando prior gaussiana. A mesma notação da Figura 4.1.

explicação provável é que $m_0^* > 0,8$ não deva produzir curvas massa-raio com massas máximas maiores que $2M_\odot$. m_0^* está fortemente ligada com a massa máxima, de maneira que quanto menor m_0^* maior será a massa máxima e vice-versa (Weissenborn *et al.*, 2012). Como uma das condições que impomos na análise foi que as EoSs reproduzissem uma massa máxima maior que $2M_\odot$, então valores mais altos de m_0^* foram descartados. A incompressibilidade tem um comportamento decrescente e uma tendência de escolha de valores menores em comparação com a prior para os dois casos. Tanto a incompressibilidade quanto a energia de simetria afetam a rigidez da EoS. Segundo Alam *et al.* (2016), K_0 tem pouca correlação com a massa da EN na faixa entre $0,8 - 1,8M_\odot$ e portanto seu valor é restringido principalmente pelo tamanho dos raios das fontes. Os dados provenientes de fontes de qLMXBs e *busters* termonucleares — que constituem a maior parte dos

dados observacionais — tem faixas de erro muito grandes, como podemos ver na Figura 3.3, porém os raios das EN medidos pelo NICER e LVC são mais precisos e tem raios ligeiramente maiores (posicionados mais à direita no diagrama massa-raio na Figura 3.4), o que acaba suportando valores menores de incompressibilidade, que acabamos visualizando na posterior. Em $S_{2/3}$ observa-se uma distribuição posterior uniforme e plana; note que a posterior não apresenta mudanças abruptas em relação à prior uniforme adotada para ambos os casos, o que significa que os dados observacionais não teve impacto significativo para condicionar a posterior. Ainda em relação a $S_{2/3}$, especificamente no Caso 2, há uma tendência geral de aumento na distribuição em direção ao limite superior da prior, ou seja, ≈ 26 MeV. Este é o valor apontado em Reed *et al.* (2021) como sendo o correto para $S_{2/3}$. Os autores afirmam que $S_{2/3} \approx 26$ MeV, uma vez que esta quantidade é fortemente restringida pela energia de ligação dos núcleos pesados. Quanto ao parâmetro L_0 , notamos uma tendência para valores menores em ambos os casos. No entanto, devido ao limite superior ser mais elevado na faixa do Caso 2, isso possibilita que a inclinação da energia de simetria alcance valores superiores em comparação com os obtidos no Caso 1. Valores menores de L_0 são uma consequência direta da escolha do modelo $\omega - \rho$, como podemos ver explicitamente na fórmula de $L(\rho)$ na equação (2.46), onde a constante de acoplamento da interação $\omega - \rho$ (α) aparece no último termo diminuindo o valor de $L(\rho)$.

Por último, após o cálculo via análise bayesiana, também foram gerados os histogramas 1D e 2D para os valores da energia de simetria na densidade de saturação J que são apresentados na última linha da Figura 4.1. Esses histogramas foram construídos com base nos parâmetros obtidos na distribuição posterior. É importante observar que os valores de J exibem uma distribuição normal centralizada em ambos os casos. Embora as duas representações sejam centralizadas, a do Caso 1 gera valores mais prováveis, isto é, a moda, em torno de 31 MeV, enquanto para o Caso 2 a moda está em torno de 34 MeV. Segundo esses dados, é altamente provável que J esteja na faixa de 28 a 34 MeV para o Caso 1 e aproximadamente 31 a 36 MeV para o Caso 2, dentro de um intervalo de confiança de 90%; estes resultados estão de acordo com vários estudos recentes sobre restrições na energia de simetria (LATTIMER, 2023; LATTIMER; LIM, 2013; LIM; SCHWENK, 2024), onde os autores reportam J na faixa de 30,9 – 33,1 MeV, 29,0 – 32,7 MeV e 30,6 – 33,9 MeV, respectivamente.

Ao analisar a posterior calculada usando prior gaussiana na Fig 4.2, observa-se o mesmo comportamento para a massa efetiva de quando a prior uniforme foi utilizada, ou seja, um pico acentuado seguido por uma rápida queda em torno de 0,8, para ambos os casos estudados, o que reforça a hipótese que massas efetivas acima desse valor não produzam massas máximas de pelo menos $2M_{\odot}$. As distribuições posteriores para K_0 e $S_{2/3}$ não tem diferenças significativas de suas respectivas priors. Para essas três primeiras quantidades, os Casos 1 e 2 têm praticamente o mesmo comportamento, o que não ocorre

para L_0 — devido a mudança significativa no desvio padrão (σ)— porém a clara tendência de escolher valores no limite inferior ainda é a mesma vista no resultado com prior uniforme (Figura 4.1), como podemos perceber que ambos os casos apresentam valores posteriores deslocados para a esquerda em relação às suas respectivas priors. Para L_0 , a análise total da posterior com CI de 90% permite intervalos em torno de 33 – 84 MeV para o Caso 1 e 64 – 93 MeV para o Caso 2. As distribuições posteriores da energia de simetria J não sofreram diferenças significativas quando comparadas aos resultados com prior uniforme. O valor mais provável de J encontrado na posterior com prior gaussiana é praticamente o mesmo obtido no resultado com prior uniforme na Figura 4.1 em ambos os casos.

Um resumo de todos esses resultados se encontra na Tabela 4.1, onde a faixa de valores obtidos para os parâmetros de *bulk* encontrados nas distribuições posteriores, dos Casos 1 e 2 de ambas as priors, são apresentados, juntamente com outras quantidades estatísticas obtidas das PDFs, como média, moda e mediana. As constantes de acoplamento das EoSs que geram os parâmetros da 4.1 podem ser encontrados na Tabela C.1 no Apêndice C.

4.2 Fator de Bayes e comparação entre os casos

Para compararmos de maneira mais efetiva os resultados obtidos pelos modelos utilizados, isto é, pelas priors e casos escolhidos, devemos calcular o BF (equação 3.18) que é utilizado para comparar diferentes hipóteses e determinar qual delas é mais provável, considerando os dados disponíveis (JEFFREYS, 1961). A fim de calcular o BF, precisamos encontrar as evidências (Z) de cada modelo. Para isso fazemos uma integração de monte carlo em toda a posterior para cada um dos modelos.

Para facilitar comparação, definimos o Caso 1 como o conjunto de parâmetros para o modelo \mathcal{M}_A . Fazemos essa definição devido à escolha menos restritiva para o intervalo de L_0 . Os resultados da comparação entre os modelos utilizados são mostrados na Tabela 4.2 e na Tabela 4.3, onde os BFs são interpretados de acordo com o descrito na Tabela 3.2.

A análise do BF nos diz que existe uma leve preferência pela descrição que utiliza a prior uniforme com o conjunto de parâmetros definidos no Caso 2. Isso mostra que apesar das distribuições posteriores possuírem uma tendência a escolher valores menores de L_0 , a faixa de valores mais provável de L_0 é aquela do modelo com prior uniforme do Caso 2, ou seja, $L_0 = 75,06^{+8,43}_{-4,43}$ MeV com 68% CI. Este resultado está de acordo com a maior parte dos estudos do PREX-II (REED *et al.*, 2021; ESTEE *et al.*, 2021; YUE *et al.*, 2022). Adicionalmente podemos citar a faixa $L_0 = 43,7 - 70,0$ MeV (LIM; SCHWENK, 2024), MeV onde os autores determinam o valor de L_0 através também da análise bayesiana utilizando Teoria Efetiva de Campos Quirais.

TABELA 4.1 – Intervalos para os parâmetros de *bulk* obtidos a partir da posterior utilizando as diferentes priors. Todas as quantidades estão em MeV, exceto m_0^* (adimensional). CI: intervalo de confiança.

	Média	Moda	Mediana	68% CI	90% CI
Uniforme					
Caso 1					
m_0^*	0,751	0,761	0,754	0,729 – 0,771	0,710 – 0,777
K_0	237,54	221,00	236,36	224,71 – 251,14	221,39 – 257,10
$\mathcal{S}_{2/3}$	24,22	23,65	24,21	23,01 – 25,44	22,62 – 25,84
L_0	53,75	39,78	50,79	41,55 – 65,95	39,05 – 78,29
J	31,28	31,18	31,18	29,49 – 33,05	28,64 – 34,37
Caso 2					
m_0^*	0,757	0,763	0,757	0,737 – 0,770	0,720 – 0,777
K_0	235,88	221,00	234,00	223,87 – 249,32	221,16 – 256,22
$\mathcal{S}_{2/3}$	24,34	25,83	24,39	23,12 – 25,54	22,66 – 25,88
L_0	77,00	69,97	75,06	70,62 – 83,48	69,50 – 91,38
J	33,65	34,58	33,66	32,17 – 35,04	31,52 – 35,78
Gaussiana					
Caso 1					
m_0^*	0,753	0,760	0,754	0,731 – 0,770	0,714 – 0,777
K_0	237,91	237,88	237,90	227,87 – 247,94	221,25 – 254,43
$\mathcal{S}_{2/3}$	24,25	24,28	24,26	23,37 – 25,14	22,76 – 25,73
L_0	58,01	56,32	56,73	40,96 – 72,61	33,50 – 83,82
J	31,68	31,61	31,63	29,71 – 33,56	28,60 – 34,81
Caso 2					
m_0^*	0,758	0,761	0,758	0,737 – 0,770	0,722 – 0,777
K_0	236,02	236,41	236,01	225,94 – 246,12	219,49 – 252,70
$\mathcal{S}_{2/3}$	24,34	24,36	24,34	23,44 – 25,23	22,85 – 25,81
L_0	78,03	78,07	77,94	69,67 – 86,29	64,20 – 92,65
J	33,72	33,73	33,72	32,46 – 34,99	31,62 – 35,80

TABELA 4.2 – Evidência (Z) e fatores de Bayes, calculados através da equação (3.18), para os modelos analisados. Modelo A refere-se ao Caso 1 com uso de prior Uniforme.

Dados	Prior	Modelo	$\ln(Z)$	\mathcal{B}_{AB}	$\log_{10}(\mathcal{B}_{AB})$	Evidência contra \mathcal{M}_A
Caso 1	Uniforme	\mathcal{M}_A	-94,06	–	–	–
Caso 1	Gaussiana	\mathcal{M}_B	-94,03	0,97	-0,01	Negativa (suporta \mathcal{M}_A)
Caso 2	Uniforme	\mathcal{M}_B	-95,32	3,51	0,55	Substancial
Caso 2	Gaussiana	\mathcal{M}_B	-95,09	2,80	0,45	Merece apenas uma menção breve

TABELA 4.3 – O mesmo que na Tabela 4.2, com o Modelo A referindo-se ao Caso 1 com prior Gaussiano.

Dados	Prior	Modelo	$\ln(Z)$	\mathcal{B}_{AB}	$\log_{10}(\mathcal{B}_{AB})$	Evidência contra \mathcal{M}_A
Caso 1	Gaussiana	\mathcal{M}_A	-94,03	–	–	–
Caso 1	Uniforme	\mathcal{M}_B	-94,06	1,03	0,01	Merece apenas uma menção breve
Caso 2	Uniforme	\mathcal{M}_B	-95,32	3,62	0,56	Substancial
Caso 2	Gaussiana	\mathcal{M}_B	-95,09	2,88	0,46	Merece apenas uma menção breve

4.3 EoS resultantes em matéria simétrica e matéria pura de nêutrons

Neste ponto, temos todos os valores prováveis para os parâmetros de *bulk* m_0^* , K_0 , $\mathcal{S}_{2/3}$, L_0 e J . Para verificar como esses números afetam a matéria nuclear e estelar, utilizamos os parâmetros de *bulk* com intervalo de confiança de 68% da distribuição posterior resultante (apresentados na Tabela 4.1) para traçar o gráfico dessas EoSs (isto é, a pressão ou densidade de energia em função da densidade bariônica) em diferentes regimes. Os valores respectivos das constantes de acoplamento para essas parametrizações são apresentados na Tabela C.1.

Analisamos o comportamento da EoS sob o regime de matéria nuclear simétrica ($y = 0,5, \rho_p = \rho_n$) através do gráfico de pressão versus densidade visto na Figura 4.3. Nesta Figura, a região delimitada pela faixa cinza claro (*flow experiment*) foi retirada de Danielewicz *et al.* (2002), onde os autores analisaram dados experimentais do fluxo de partículas gerados por colisões de alta energia entre núcleos de ^{197}Au , e então, utilizando um modelo formulado dentro da teoria de Landau relativística, extrapolaram os dados para pressões avaliadas entre $2\rho_0$ até $4,5\rho_0$. Outro estudo que investiga a produção de Kaons em Colisões de Ions Pesados (HIC) (LYNCH *et al.*, 2009) resulta em mais uma faixa de restrição para a pressão em densidades menores $1,2 \leq \rho \leq 2,2 \text{ fm}^{-3}$, indicado pela faixa cinza escura na Figura 4.3. Podemos notar que as EoS geradas satisfazem as duas regiões delimitadoras citadas. Além disso, as descrições das EoSs geradas utilizando os resultados com priors uniforme e gaussiana são praticamente idênticas dentro do intervalo de confiança de 68%, o que é evidenciado pela região em laranja, onde a descrição gerada por cada uma das priors se sobrepõem. Não foram observadas diferenças significativas entre os Casos 1 e 2; no entanto, notamos que o Caso 2 apresenta uma região delimitada

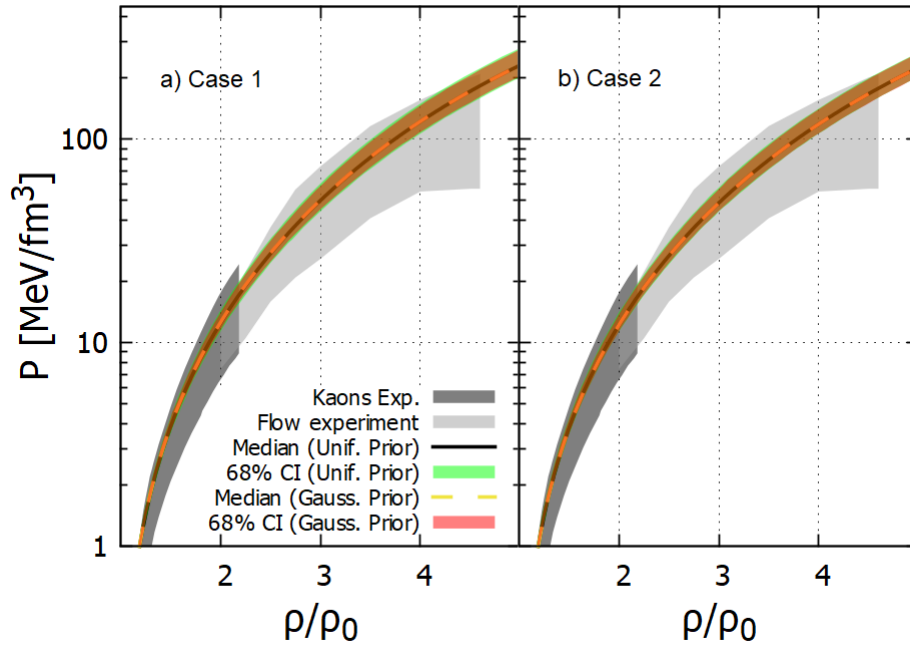


FIGURA 4.3 – Pressão versus ρ/ρ_0 (matéria simétrica) para as parametrizações obtidas a partir da análise bayesiana. A área sombreada em cinza claro do experimento do fluxo (*flow experiment*), foi retirada de Danielewicz *et al.* (2002). A faixa em cinza escuro foi extraída de Lynch *et al.* (2009). As faixas em verde e vermelho correspondem às parametrizações com intervalos de confiança de 68% (posteriores) usando priores Uniforme e Gaussiano, respectivamente. As curvas sólidas (priors Uniformes) e tracejadas (priors Gaussianos) representam as parametrizações relacionadas aos valores medianos dos parâmetros de *bulk* analisados.

um pouco mais estreita em comparação com o Caso 1, sugerindo uma margem de erro potencialmente menor para o Caso 2.

Já nas Figuras 4.4 e 4.5, analisamos a EoS para matéria constituída puramente de nêutrons (PNM), isto é, EoS onde $y = 0$ e $\rho_n = \rho$. Investigações de EoS em PNM são importantes pois são uma boa aproximação da matéria constituinte de uma estrela de nêutrons. Estudos baseados na teoria efetiva de campos quirais (chEFT) têm sido realizados ao longo dos anos, como (HEBELER *et al.*, 2013; KRÜGER *et al.*, 2013; DRISCHLER *et al.*, 2016), por exemplo. Nestes trabalhos, expansões de baixos momentos são utilizadas para descrever a força nuclear. As interações entre núcleons são consideradas como pontuais ou através da troca de píons. Os parâmetros correspondentes são ajustados por meio da observação de sistemas de dois e três corpos. Na Figura 4.4, é exibida uma comparação dos nossos resultados com as faixas relacionadas aos cálculos de chEFT em um gráfico de energia por partícula versus densidade. As faixas em cinza, cinza escuro e azul claro, denominadas como NN+3N, PRC88 e PRC98 foram extraídas de Hebeler *et al.* (2013), (KRÜGER *et al.*, 2013) e (DRISCHLER *et al.*, 2016), respectivamente. Vemos que as parametrizações do Caso 2 apresentam maiores desvios das faixas delimitadas, principalmente para a região de baixa densidade. A comparação desses resultados sugere uma EoS suave, com L_0 e J menores, como os encontrados no Caso 1. Além disso, é mais notável aqui a

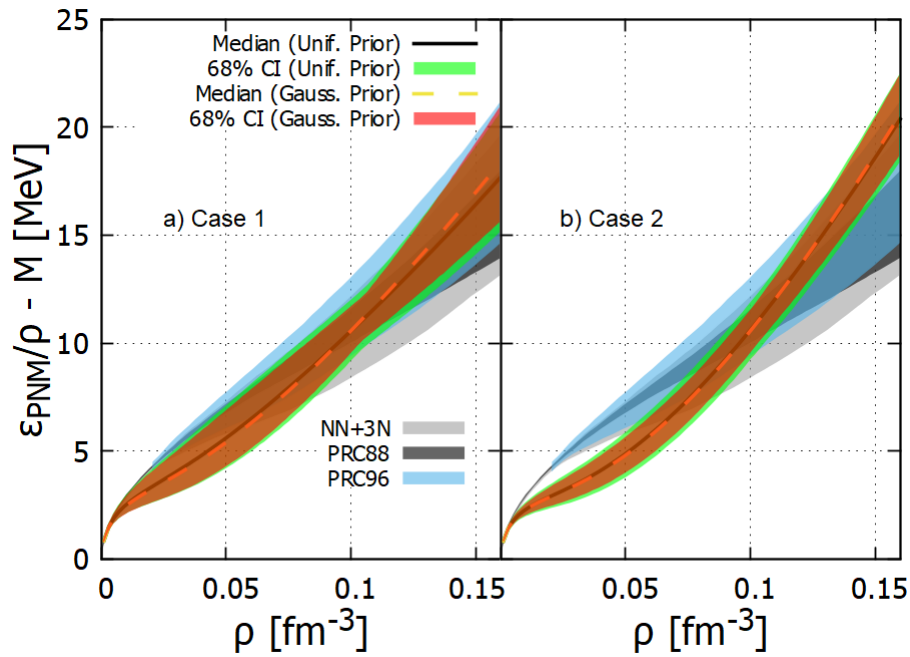


FIGURA 4.4 – Energia por partícula de matéria puramente de nêutrons em função da densidade. As faixas em cinza, cinza escuro e azul claro, derivadas da chEFT, foram extraídas de Hebeler *et al.* (2013), Krüger *et al.* (2013), Drischler *et al.* (2016), respectivamente. As faixas em verde e vermelho correspondem às parametrizações com intervalo de confiança de 68% (posteriores) usando priors Uniforme e Gaussiana, respectivamente. As curvas contínuas (prior Uniforme) e tracejadas (prior Gaussiana) representam as parametrizações relacionadas aos valores das medianas dos parâmetros de *bulk* analisados

diferença na faixa de erro das regiões entre os dois casos. A faixa em 68% CI do Caso 2 é notavelmente mais estreita, o que é um reflexo do intervalo menor escolhido para L_0 na prior para o Caso 2.

Ainda no regime de PNM, Danielewicz *et al.* (2002) analisaram os dados do fluxo de partículas ejetadas de colisões entre íons de ^{197}Au . Também utilizando teoria efetiva de Landau, os autores propuseram uma restrição para a pressão dependendo da densidade através de uma extrapolação dos dados das colisões, incluindo termos de assimetria com forte (*stiff*) ou fraca (*soft*) dependência da densidade. A região delimitada encontrada pode ser vista na Figura 4.5, onde mais uma vez as nossas EoSs resultantes satisfazem as restrições, principalmente a região com fraca dependência na densidade (*soft*), onde a faixa em ambos os casos passa inteiramente dentro da região (em cinza claro).

4.4 Diagramas massa x raio

Utilizamos as EoSs geradas a partir dos resultados das posteriores com 68% do CI e resolvemos as equações de TOV (2.63,2.64) para vários valores diferentes de pressão central para obter sequências de massa-raio. Os diagramas resultantes podem ser vistos na Figura 4.6. Nesta Figura, também exibimos os contornos correspondentes aos dados

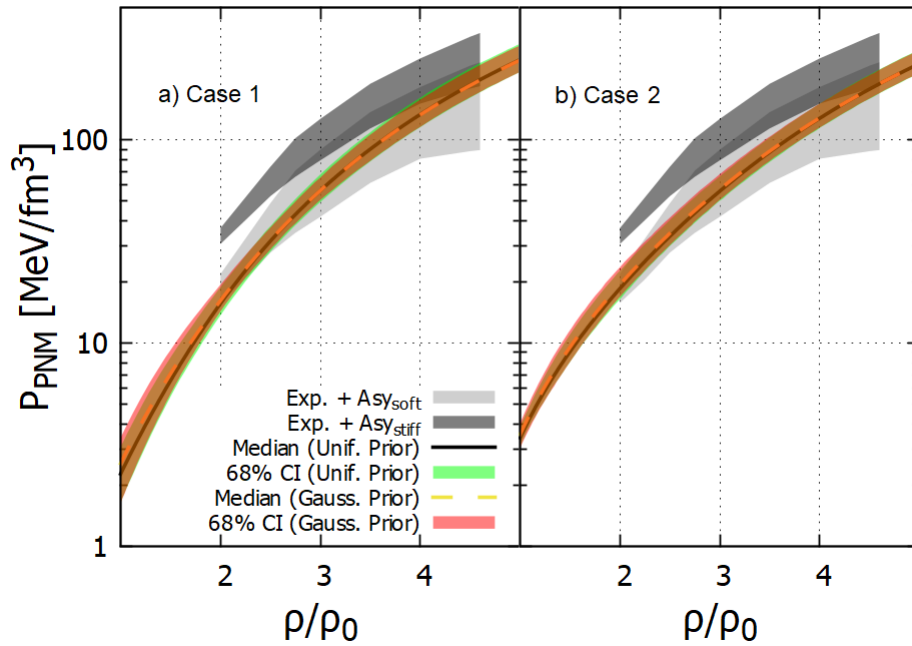


FIGURA 4.5 – Pressão versus ρ/ρ_0 (matéria puramente de nêutrons) para as parametrizações obtidas a partir da análise bayesiana. As faixas em cinza foram retiradas de Danielewicz *et al.* (2002). As faixas em verde e vermelho correspondem às parametrizações com intervalo de confiança de 68% (posteriores) usando priors Uniforme e Gaussiana, respectivamente. As curvas contínuas (priors Uniformes) e tracejadas (priors Gaussianas) representam as parametrizações relacionadas aos valores das medianas dos parâmetros de *bulk* analisados.

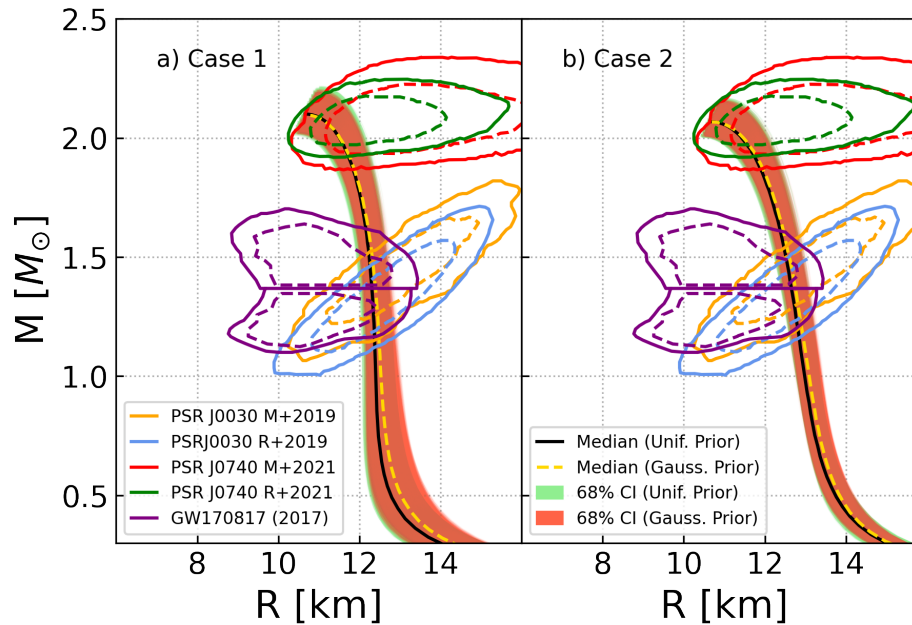


FIGURA 4.6 – Diagramas massa-raio para as parametrizações obtidas a partir da análise bayesiana. As faixas em verde e vermelho correspondem às parametrizações em 68% CI (posteriores) usando priors Uniforme e Gaussiana, respectivamente. As curvas contínuas (priors Uniformes) e tracejadas (priors Gaussianas) representam aquelas parametrizações relacionadas aos valores das medianas dos parâmetros de *bulk* analisados. Também são exibidos os contornos para a massa-raio restritos pela missão NICER, nomeadamente, em laranja (MILLER *et al.*, 2019) e azul (RILEY *et al.*, 2019) para PSR J0030+0451; vermelho (MILLER *et al.*, 2021) e verde (RILEY *et al.*, 2021) para PSR J0740+6620. O contorno violeta representa o evento GW170817 (ABBOTT *et al.*, 2018).

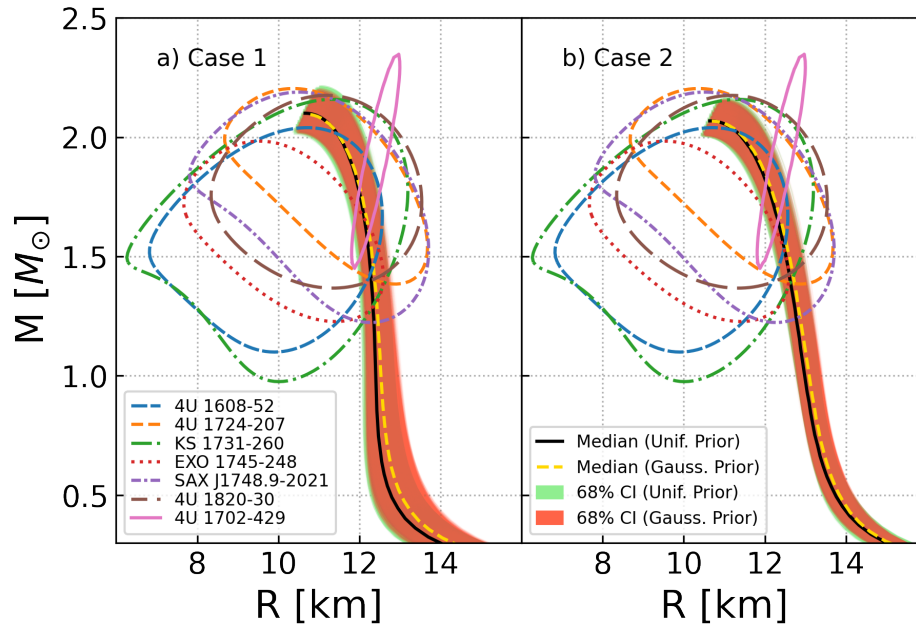


FIGURA 4.7 – Semelhante à Figura 4.6, mas agora comparada com 7 observáveis adicionais utilizados na análise. 4U 1702-429 (NÄTTILÄ, J. *et al.*, 2017). Para os restantes, consulte (ÖZEL *et al.*, 2016) e as referências ali contidas.

do NICER (MILLER *et al.*, 2019; MILLER *et al.*, 2021; RILEY *et al.*, 2019; RILEY *et al.*, 2021) e LVC (ABBOTT; The LIGO and Virgo Collaboration, 2017; ABBOTT *et al.*, 2018). Podemos observar que o Caso 1 e o Caso 2 são muito semelhantes entre si, especialmente para $M/M_{\odot} > 1$. Para valores menores de M , podemos notar a diferença entre os dois casos na espessura da faixa de 68% do CI, provavelmente causada pelo intervalo de valores menor de L_0 no Caso 2, como já mencionado anteriormente. A relação massa-raio inferida também é mostrada nas Figuras 4.7 e 4.8 em relação às outras observações utilizadas nesta tese (ÖZEL *et al.*, 2016; NÄTTILÄ, J. *et al.*, 2017). Observe que os resultados também suportam um intervalo de confiança de 68% para quase todas as fontes usadas no trabalho. No entanto, a fonte descrita por ω Cen na Figura 4.8 tem uma pequena distância dos resultados obtidos para 68% CI. Essa distância é pequena para o Caso 1 em comparação com o Caso 2, o que indica que EoSs com pequenos valores de L_0 , são mais compatíveis com a descrição da fonte de dados provenientes de ω Cen. Note que a faixa de menores valores de L_0 é aquela dada pelo Caso 1. Para este caso, os raios das estrelas geradas também são menores em comparação com aqueles obtidos no Caso 2, veja as Figuras 4.6 a 4.8. O efeito de redução de R à medida que L_0 diminui também foi verificado em Fattoyev *et al.* (2013), Alam *et al.* (2016), Zhang e Li (2018), Souza *et al.* (2020), Lourenço *et al.* (2022). Na Tabela 4.4, são apresentados os valores para algumas propriedades macroscópicas provenientes dos resultados das posteriores com CI de 68%. A Tabela contém a massa máxima (M_{\max}), seu raio respectivo (R_{\max}), o raio da estrela de nêutrons de $1,4M_{\odot}$ ($R_{1,4}$), e a sua deformabilidade de maré adimensional ($\Lambda_{1,4}$). Esta última é obtida simultaneamente na resolução das equações de TOV, faremos mais comparações com esta

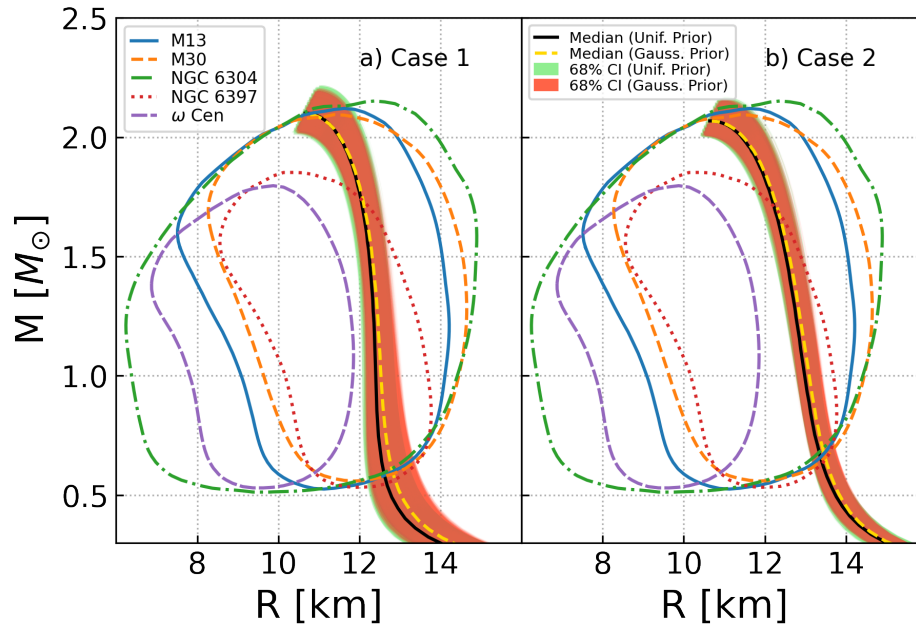


FIGURA 4.8 – Semelhante à Figura 4.6, mas agora comparada com os restantes 5 observáveis. Consulte Özel *et al.* (2016) e as referências ali contidas.

TABELA 4.4 – Algumas propriedades observacionais de NS que resultam das EoSs em 68% CI (Veja a quarta coluna na Tabela 4.1).

	M_{\max} (M_{\odot})	R_{\max} (km)	$R_{1,4}$ (km)	$\Lambda_{1,4}$
Uniforme				
Caso 1	2,01 – 2,22	10,39 – 11,06	11,97 – 12,73	354,05 – 474,02
Caso 2	2,00 – 2,17	10,41 – 10,98	12,34 – 13,06	378,52 – 505,15
Gaussiana				
Caso 1	2,00 – 2,20	10,43 – 11,02	12,04 – 12,84	357,68 – 481,32
Caso 2	2,00 – 2,16	10,53 – 10,96	12,42 – 13,12	383,76 – 541,65

quantidade na Seção 4.5. As faixas de intervalo resultantes são praticamente as mesmas para as priors Uniforme e Gaussiana utilizadas em cada caso analisado. Podemos dizer que o resultado é independente da prior utilizada, a diferença está entre os casos. O Caso 2 (valores maiores de L_0) resulta em valores maiores de $R_{1,4}$ e $\Lambda_{1,4}$ e massas máximas um pouco menores.

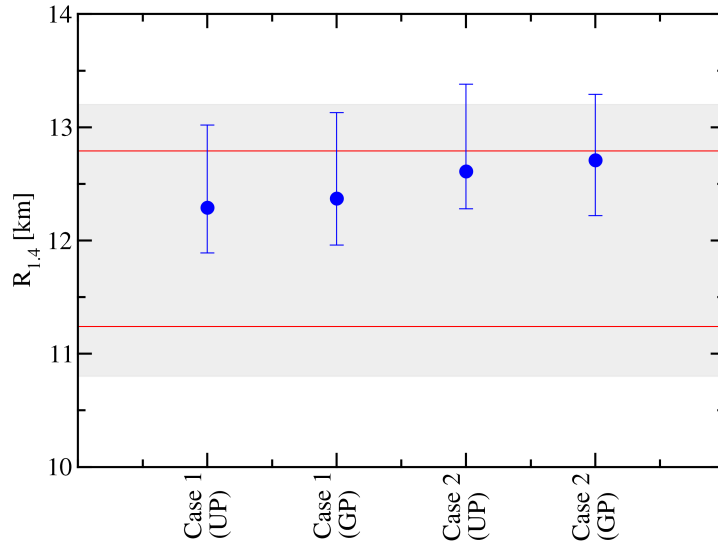


FIGURA 4.9 – Previsões para $R_{1,4}$ calculadas a partir das parametrizações obtidas da análise bayesiana (círculos). Neste caso, apresentamos os resultados para o raio da estrela de nêutrons para $1,4M_{\text{sun}}$ com intervalo de confiança de 90% (posteriores), quando são utilizadas as priores Uniforme (UP) e Gaussiana (GP). A faixa em cinza foi extraída de Breschi *et al.* (2021), e as linhas vermelhas foram retiradas de Huth *et al.* (2022).

Estrelas de Nêutrons de $1,4 M_{\odot}$ são especificamente importantes pois boa parte das estrelas de nêutrons observadas tem massas próximas a esse valor. Recentemente, os autores de Breschi *et al.* (2021) compilaram estimativas recentes para $R_{1,4}$. Apresentamos essa faixa de valores na Figura 4.9, assim como outra previsão para essa quantidade encontrada em Huth *et al.* (2022), também proveniente da inferência bayesiana. Uma vez que todas essas são estimativas baseadas em uma análise estatística que leva em consideração um intervalo de confiança de 90% ou mais, comparamos nossos resultados também usando um CI de 90%. Note que todos os pontos obtidos em nosso trabalho (círculos) concordam com essas estimativas, mostrando uma tendência em direção a valores mais próximos dos limites superiores.

4.5 Deformabilidade de maré

Finalmente, semelhantemente ao método feito para encontrarmos os diagramas massa-raio, calculamos a deformabilidade de maré adimensional, que é computada juntamente com as equações de TOV. Seu comportamento em função de M pode ser visto na Figura 4.10. A descrição para ambas as priors é praticamente idêntica, e podemos também

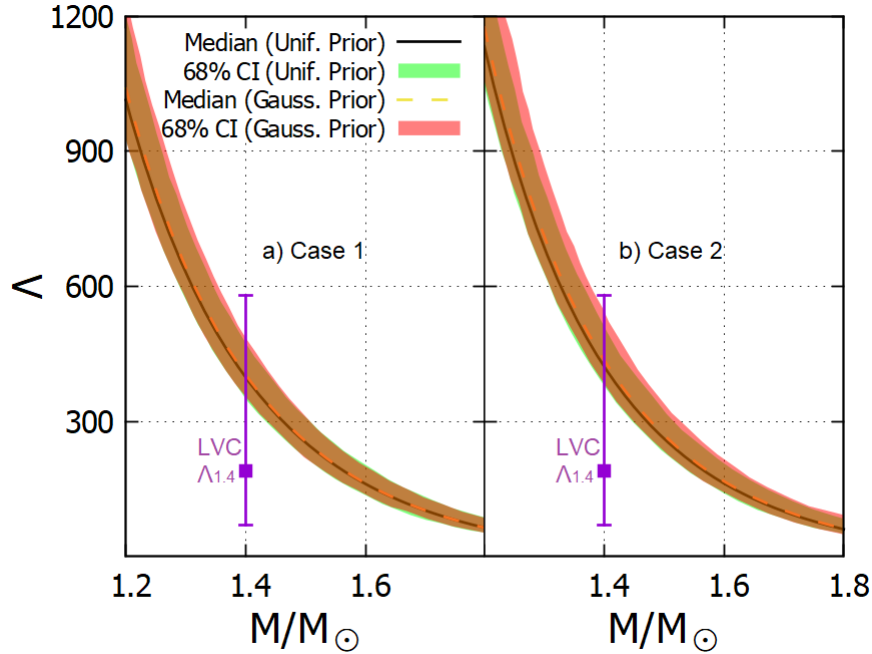


FIGURA 4.10 – Λ em função de M para as parametrizações obtidas da análise bayesiana. As faixas em verde e vermelho correspondem às parametrizações com CI de 68% (posteriores) usando priors Uniforme e Gaussiana, respectivamente. As curvas contínuas (priors Uniformes) e tracejadas (priors Gaussianas) representam as parametrizações relacionadas aos valores das medianas dos parâmetros de *bulk* analisados. O quadrado roxo é o resultado de $\Lambda_{1,4} = 190_{-120}^{+390}$ obtido pelo LVC (ABBOTT *et al.*, 2018).

observar que todas as parametrizações produzem $\Lambda_{1,4}$ dentro da faixa prevista pelo LVC, independentemente do caso utilizado na análise bayesiana. Quando comparado ao Caso 1, o Caso 2 apresenta valores ligeiramente maiores para Λ , especialmente em valores mais baixos de M . Para $\Lambda_{1,4}$ especificamente, alguns estudos já mostraram que essa quantidade é sensível a L_0 (FATTOYEV *et al.*, 2013; ALAM *et al.*, 2016; ZHANG; LI, 2018; SOUZA *et al.*, 2020; LOURENÇO *et al.*, 2022). Em nosso estudo, o Caso 2 possui valores maiores para L_0 e, como consequência, Λ é geralmente maior.

Na Figura 4.11, mostramos a deformabilidade de maré adimensional para cada uma das estrelas do sistema binário relacionado ao evento GW170817, com massas componentes M_1 na faixa de $1,37 \leq M_1/M_\odot \leq 1,60$ (ABBOTT; The LIGO and Virgo Collaboration, 2017). A massa da estrela companheira é calculada através da relação entre M_1 , M_2 , e a massa de *chirp*, isto é, $\mathcal{M} = (M_1 M_2)^{3/5} / (M_1 + M_2)^{1/5} = 1,188 M_\odot$ (ABBOTT; The LIGO and Virgo Collaboration, 2017). As deformabilidades são calculadas usando a EoS resultante dentro do CI de 68% para ambas as priors e casos. Também mostramos linhas de contorno

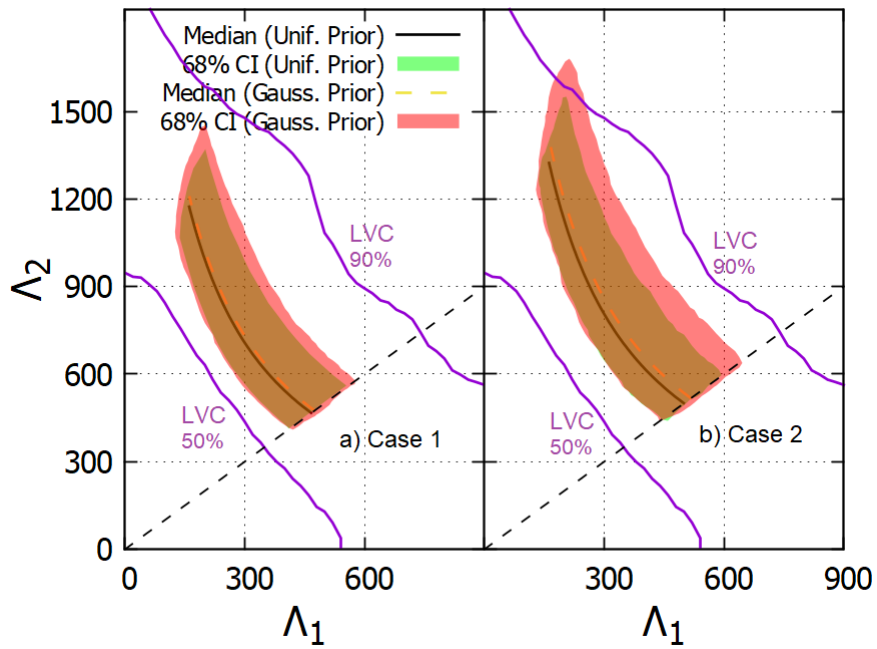


FIGURA 4.11 – Deformabilidades de maré dimensionais para o caso dos componentes de alta massa (Λ_1) e baixa massa (Λ_2) do evento GW170817. As linhas roxas são os resultados obtidos pelo LVC (ABBOTT *et al.*, 2018) com intervalos de confiança de 50% e 90%. A linha tracejada diagonal corresponde a $\Lambda_1 = \Lambda_2$. As faixas em verde e vermelho correspondem às parametrizações com CI de 68% (posteriores) usando priors Uniforme e Gaussiana, respectivamente. As curvas contínuas (priors Uniformes) e tracejadas (priors Gaussianos) representam as parametrizações relacionadas aos valores das medianos dos parâmetros de *bulk* analisados.

nos intervalos de confiança de 50% e 90% (linhas roxas) associadas ao evento GW170817. Podemos observar que todos os resultados obtidos neste trabalho estão dentro das previsões do LVC. Apenas uma pequena porção na faixa de 68% do CI do resultado com prior gaussiana que está fora do intervalo de 90% fornecido pelo LVC.

5 Conclusão

Neste trabalho, realizamos uma análise bayesiana para estabelecer intervalos de valores para os principais parâmetros de *bulk*: m_0^* (a razão de massa efetiva em $\rho = \rho_0$), K_0 (a incompressibilidade em $\rho = \rho_0$), $\mathcal{S}_{2/3}$ (a energia de simetria em $\rho = 2\rho_0/3$) e L_0 (a inclinação da energia de simetria em $\rho = \rho_0$). As funções de verossimilhança empregadas na análise foram baseadas em 16 fontes distintas de dados sobre massas e raios. Destas, 11 foram derivadas de Özel *et al.* (2016), incluindo seis *busters* termonucleares identificadas como 4U 1820–30, SAX J1748.9–2021, EXO 1745–248, KS 1731–260, 4U 1724–207 e 4U 1608–52, e cinco fontes de Raios-X de Binários de Baixa Massa em Quiescência (qLMXBs) observados em M13, M30, NGC 6304, NGC 6397 e ω Cen. Adicionalmente, incorporamos dados de uma análise de raios-X da estrela de nêutrons em 4U 1702–429 (NÄTTILÄ, J. *et al.*, 2017), dois componentes da LVC (LSC *et al.*, 2019), e dois conjuntos de medições de massa-raio da missão NICER (RILEY *et al.*, 2019; RILEY *et al.*, 2021). Utilizando os intervalos resultantes, desenvolvemos parametrizações otimizadas do modelo de campo médio relativístico empregado, que inclui a interação $\omega - \rho$. A adição dessa interação permitiu um controle mais efetivo não só da energia de simetria, mas também de sua inclinação. Isso possibilitou a inclusão de valores específicos para L_0 , baseados nos dados experimentais mais recentes do PREX-II (ESSICK *et al.*, 2021; ESTEE *et al.*, 2021; REED *et al.*, 2021; YUE *et al.*, 2022).

O estudo enfrentou limitações intrínsecas ao método bayesiano, como a necessidade de uma modelagem precisa das funções de verossimilhança e a dependência nas priors e intervalos escolhidos para a análise. Com isso em mente, dividimos nossa análise em dois conjuntos denominados Caso 1 e Caso 2, ambos com dois tipos diferentes de priors: distribuições uniforme e gaussiana. Esses conjuntos levam em consideração os extremos e interseções dos valores de L_0 obtidos através de estudos dos resultados do PREX-II mencionados anteriormente. Os resultados mostram que os valores de L_0 , aqueles encontrados pela análise, são impactados pela escolha da distribuição, mais especificamente, o valor mais provável para essa quantidade (moda) e seu limite inferior para os intervalos de confiança de 68% e 90% para o Caso 1. Isso ocorre porque a distribuição gaussiana permite escolhas possíveis de valores mais baixos de L_0 . O mesmo não é verdade para a distribuição uniforme, na qual valores mais baixos para L_0 têm probabilidade zero. Nossos

resultados posteriores também mostram que, para uma maior (menor) restrição nos valores de entrada para L_0 na análise para ambas as distribuições a priori, uniforme e gaussiana, Caso 1 (Caso 2), os resultados de saída para essa quantidade mudam consideravelmente. Por exemplo, os valores posteriores usando o prior uniforme são $L_0 = 50,79_{-9,24}^{+15,16}$ MeV ($L_0 = 75,06_{-4,43}^{+8,43}$ MeV) para CI de 68%. Esses valores estão relacionados à energia de simetria na faixa de $J = 31,18_{-1,69}^{+1,87}$ MeV ($J = 33,66_{-1,49}^{+1,38}$ MeV), todos eles compatíveis com valores recentemente previstos na literatura (ADHIKARI *et al.*, 2021; ADHIKARI *et al.*, 2022; REED *et al.*, 2021; CARLSON *et al.*, 2022).

Finalmente, demonstramos que a EoS com CI de 68% obtida da análise bayesiana descreve satisfatoriamente tanto a matéria nuclear simétrica quanto a matéria puramente de nêutrons em regimes de densidade sub e supra-saturação. Na matéria estelar, nossos resultados mostram que as parametrizações produzem estrelas de nêutrons com uma massa máxima de $M_{\max} = 2,115 \pm 0,105 M_{\odot}$ para o Caso 1 e $M_{\max} = 2,085 \pm 0,085 M_{\odot}$ para o Caso 2, ambas para distribuição posterior quando a prior uniforme é usada. Os raios correspondentes relacionados a essas massas são $R_{\max} = 10,725 \pm 0,335$ km e $R_{\max} = 10,695 \pm 0,285$ km, respectivamente. Além disso, os valores encontrados para o raio da estrela de nêutrons de $1,4 M_{\odot}$ são $R_{1,4} = 12,35 \pm 0,38$ km para o Caso 1, e $R_{1,4} = 12,7 \pm 0,36$ km para o Caso 2. Esses valores são totalmente compatíveis com aqueles recentemente obtidos em Breschi *et al.* (2021) e Huth *et al.* (2022). Os números previstos pelas parametrizações ótimas em relação aos coeficientes adimensionais de deformabilidades de maré Λ_1 , e Λ_2 (sistema de estrelas de nêutrons binárias), e $\Lambda_{1,4}$ (relacionado à estrela de nêutrons de $1,4 M_{\odot}$) também estão de acordo com as restrições observacionais impostas pela colaboração LVC a partir da análise do evento GW170817, ou seja, detecção de ondas gravitacionais provenientes da fusão de duas estrelas de nêutrons.

Futuros trabalhos poderiam explorar a inclusão de um espectro mais amplo de dados experimentais e observacionais para refinamento adicional das EoSs. Além disso, a exploração de outras interações mesônicas e a extensão do modelo para incluir a dinâmica de outros bárions (como híperons) poderiam oferecer insights mais profundos sobre a matéria nuclear em densidades ultra-altas.

O uso de técnicas bayesianas para refinar modelos de estrelas de nêutrons oferece uma ponte poderosa entre teoria nuclear e astrofísica observacional, permitindo um entendimento mais aprofundado das condições extremas no universo. Este estudo demonstrou que, dentro das incertezas determinadas, as EoSs que modelamos estão bem alinhadas com as observações atuais, oferecendo suporte para a precisão dos modelos hadrônicos relativísticos na descrição da matéria estelar. A pesquisa sublinha a importância da análise contínua à medida que novos dados tornam-se disponíveis, garantindo que as teorias nucleares permaneçam relevantes e precisas no contexto de descobertas astronômicas emergentes.

Como resultado desta pesquisa, publicamos um artigo no *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* em agosto de 2023 (SOARES *et al.*, 2023), onde detalhamos a metodologia e os principais resultados obtidos, reforçando a importância e o impacto deste estudo na comunidade científica.

Referências

ABBOTT, B. *et al.* Properties of the binary neutron star merger gw170817. **Phys. Rev. X**, v. 9, n. 1, p. 011001, 2019.

ABBOTT, B.; The LIGO and Virgo Collaboration. Constraining the p -mode- g -mode tidal instability with gw170817. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 122, p. 061104, Fev. 2019. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.122.061104>.

ABBOTT, B. P. *et al.* Gw170817: Measurements of neutron star radii and equation of state. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 121, p. 161101, Out. 2018. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.161101>.

ABBOTT, B. P.; The LIGO and Virgo Collaboration. Gw170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 119, p. 161101, Out. 2017. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.161101>.

ABBOTT, B. P.; The LIGO and Virgo Collaboration. Model comparison from ligo-virgo data on gw170817's binary components and consequences for the merger remnant. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 37, n. 4, p. 045006, Jan. 2020. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ab5f7c>.

ADHIKARI, D. *et al.* Accurate determination of the neutron skin thickness of ^{208}Pb through parity-violation in electron scattering. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 126, p. 172502, Abril 2021. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.172502>.

ADHIKARI, D. *et al.* Precision determination of the neutral weak form factor of ^{48}Ca . **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 129, p. 042501, Jul. 2022. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.129.042501>.

ALAM, N.; AGRAWAL, B. K.; FORTIN, M.; PAIS, H.; PROVIDÊNCIA, C.; RADUTA, A. R.; SULAKSONO, A. Strong correlations of neutron star radii with the slopes of nuclear matter incompressibility and symmetry energy at saturation. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 94, p. 052801, Nov. 2016. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.94.052801>.

BAYM, G.; PETHICK, C.; SUTHERLAND, P. The Ground State of Matter at High Densities: Equation of State and Stellar Models. **The Astrophysical Journal**, v. 170, p. 299, 1971. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1971ApJ...170..299B>.

- BINNINGTON, T.; POISSON, E. Relativistic theory of tidal love numbers. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 80, p. 084018, Out. 2009. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.084018>.
- BLAIZOT, J. Nuclear compressibilities. **Physics Reports**, v. 64, n. 4, p. 171–248, 1980. ISSN 0370-1573. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157380900010>.
- BOGUTA, J.; BODMER, A. Relativistic calculation of nuclear matter and the nuclear surface. **Nuclear Physics A**, v. 292, n. 3, p. 413–428, 1977. ISSN 0375-9474. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375947477906261>.
- BRESCHI, M.; PEREGO, A.; BERNUZZI, S.; DEL POZZO, W.; NEDORA, V.; RADICE, D.; VESCOVI, D. AT2017gfo: Bayesian inference and model selection of multicomponent kilonovae and constraints on the neutron star equation of state. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 505, n. 2, p. 1661–1677, 05 2021. ISSN 0035-8711. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/mnras/stab1287>.
- CARLSON, B. V.; DUTRA, M.; LOURENÇO, O.; MARGUERON, J. arXiv, 2022. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2209.03257>.
- DAMOUR, T.; NAGAR, A. Effective one body description of tidal effects in inspiralling compact binaries. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 81, p. 084016, Abril 2010. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.084016>.
- DAMOUR, T.; NAGAR, A. Effective one body description of tidal effects in inspiralling compact binaries. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 81, p. 084016, Abril 2010. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.084016>.
- DANIELEWICZ, P.; LACEY, R.; LYNCH, W. G. Determination of the equation of state of dense matter. **Science**, v. 298, n. 5598, p. 1592–1596, 2002. Disponível em: <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1078070>.
- DRISCHLER, C.; CARBONE, A.; HEBELER, K.; SCHWENK, A. Neutron matter from chiral two- and three-nucleon calculations up to $n^3\text{LO}$. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 94, p. 054307, Nov. 2016. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.94.054307>.
- DRISCHLER, C.; FURNSTAHL, R. J.; MELENDEZ, J. A.; PHILLIPS, D. R. How well do we know the neutron-matter equation of state at the densities inside neutron stars? a bayesian approach with correlated uncertainties. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 125, p. 202702, Nov. 2020. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.125.202702>.
- DUTRA, M.; LOURENÇO, O.; AVANCINI, S. S.; CARLSON, B. V.; DELFINO, A.; MENEZES, D. P.; PROVIDÊNCIA, C.; TYPEL, S.; STONE, J. R. Relativistic mean-field hadronic models under nuclear matter con. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 90, p. 055203, Nov. 2014. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.90.055203>.

- DUTRA, M.; LOURENÇO, O.; MARTINS, J. S. S.; DELFINO, A.; STONE, J. R.; STEVENSON, P. D. Skyrme interaction and nuclear matter constraints. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 85, p. 035201, Mar. 2012. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.85.035201>.
- DUTRA, M.; LOURENÇO, O.; MENEZES, D. P. Stellar properties and nuclear matter constraints. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 93, p. 025806, Fev. 2016. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.93.025806>.
- ESSICK, R.; TEWS, I.; LANDRY, P.; SCHWENK, A. Astrophysical constraints on the symmetry energy and the neutron skin of ^{208}Pb with minimal modeling assumptions. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 127, p. 192701, Nov. 2021. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.192701>.
- ESTEE, J. *et al.* Probing the symmetry energy with the spectral pion ratio. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 126, p. 162701, Abril 2021. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.162701>.
- FATTOYEV, F. J.; CARVAJAL, J.; NEWTON, W. G.; LI, B.-A. Constraining the high-density behavior of the nuclear symmetry energy with the tidal polarizability of neutron stars. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 87, p. 015806, Jan. 2013. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.87.015806>.
- FATTOYEV, F. J.; PIEKAREWICZ, J. Relativistic models of the neutron-star matter equation of state. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 82, p. 025805, Ago. 2010. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.82.025805>.
- FILHO, O. L. S. Diagramas de fase para a matéria nuclear e de quarks. Programa de Pós-graduação em Física, 2011. Disponível em: <https://app.uff.br/riuff/handle/1/19120>.
- FOREMAN-MACKEY, D. corner.py: Scatterplot matrices in python. **The Journal of Open Source Software**, The Open Journal, v. 1, n. 2, p. 24, Jun. 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.21105/joss.00024>.
- FOREMAN-MACKEY, D.; HOGG, D. W.; LANG, D.; GOODMAN, J. emcee: The MCMC hammer. **Publications of the Astronomical Society of the Pacific**, IOP Publishing, v. 125, n. 925, p. 306–312, Mar. 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1086/670067>.
- FUCHS, C. Kaon production in heavy ion reactions at intermediate energies. **Progress in Particle and Nuclear Physics**, v. 56, n. 1, p. 1–103, 2006. ISSN 0146-6410. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0146641005000785>.
- GANDOLFI, S.; CARLSON, J.; REDDY, S. Maximum mass and radius of neutron stars, and the nuclear symmetry energy. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 85, p. 032801, Mar. 2012. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.85.032801>.
- GARG, U.; COLÒ, G. The compression-mode giant resonances and nuclear incompressibility. **Progress in Particle and Nuclear Physics**, v. 101, p. 55–95, 2018. ISSN 0146-6410. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0146641018300322>.

GELMAN, A.; CARLIN, J.; STERN, H.; DUNSON, D.; VEHTARI, A.; RUBIN, D. **Bayesian Data Analysis, Third Edition**. [*S.l.*]: Taylor & Francis, 2014. (Chapman & Hall/CRC Texts in Statistical Science). ISBN 9781439840955.

GLENDENNING, N. K. **Compact stars: Nuclear physics, particle physics and general relativity**. [*S.l.*]: Springer Science & Business Media, 2012.

HEBELER, K.; LATTIMER, J. M.; PETHICK, C. J.; SCHWENK, A. Equation of state and neutron star properties constrained by nuclear physics and observation. **The Astrophysical Journal**, The American Astronomical Society, v. 773, n. 1, p. 11, Jul. 2013. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/773/1/11>.

HINDERER, T. Tidal love numbers of neutron stars. **The Astrophysical Journal**, v. 677, n. 2, p. 1216, abril 2008. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1086/533487>.

HINDERER, T.; LACKEY, B. D.; LANG, R. N.; READ, J. S. Tidal deformability of neutron stars with realistic equations of state and their gravitational wave signatures in binary inspiral. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 81, p. 123016, Jun. 2010. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.123016>.

HOROWITZ, C. J.; PIEKAREWICZ, J. Constraining urca cooling of neutron stars from the neutron radius of ^{208}Pb . **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 66, p. 055803, Nov. 2002. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.66.055803>.

HUTH, S.; PANG, P. T. H.; TEWS, I.; DIETRICH, T.; FÈVRE, A. L.; SCHWENK, A.; TRAUTMANN, W.; AGARWAL, K.; BULLA, M.; COUGHLIN, M. W.; BROECK, C. V. D. Constraining neutron-star matter with microscopic and macroscopic collisions. **Nature**, v. 606, n. 7913, p. 276–280, 2022.

JAMINON, M.; MAHAUX, C.; ROCHUS, P. Single Particle Potential in a Relativistic Hartree-Fock Mean Field Approximation. **Nucl. Phys. A**, v. 365, p. 371–391, 1981.

JEFFREYS, H. **The Theory of Probability**. Third. [*S.l.*]: Oxford University Press, 1961.

KASS, R. E.; RAFTERY, A. E. Bayes factors. **Journal of the American Statistical Association**, [American Statistical Association, Taylor Francis, Ltd.], v. 90, n. 430, p. 773–795, 1995. ISSN 01621459. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2291091><http://www.jstor.org/stable/2291091>.

KHAN, E.; MARGUERON, J. Determination of the density dependence of the nuclear incompressibility. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 88, p. 034319, Set. 2013. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.88.034319>.

KRÜGER, T.; TEWS, I.; HEBELER, K.; SCHWENK, A. Neutron matter from chiral effective field theory interactions. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 88, p. 025802, Ago. 2013. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.88.025802>.

KÖHLINGER, F.; JOACHIMI, B.; ASGARI, M.; VIOLA, M.; JOUDAKI, S.; TRÖSTER, T. A Bayesian quantification of consistency in correlated data sets. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 484, n. 3, p. 3126–3153, 01 2019. ISSN 0035-8711. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/mnras/stz132>.

- LATTIMER, J. M. The nuclear equation of state and neutron star masses. **Annual Review of Nuclear and Particle Science**, v. 62, n. 1, p. 485–515, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.1146/annurev-nucl-102711-095018>.
- LATTIMER, J. M. Constraints on nuclear symmetry energy parameters. **Particles**, v. 6, n. 1, p. 30–56, 2023. ISSN 2571-712X. Disponível em: <https://www.mdpi.com/2571-712X/6/1/3>.
- LATTIMER, J. M.; LIM, Y. Constraining the symmetry parameters of the nuclear interaction. **The Astrophysical Journal**, The American Astronomical Society, v. 771, n. 1, p. 51, Jun. 2013. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/771/1/51>.
- LI, B.-A.; CAI, B.-J.; XIE, W.-J.; ZHANG, N.-B. Progress in constraining nuclear symmetry energy using neutron star observables since gw170817. **Universe**, v. 7, n. 6, 2021. ISSN 2218-1997. Disponível em: <https://www.mdpi.com/2218-1997/7/6/182>.
- LI, B.-A.; CHEN, L.-W.; KO, C. M. Recent progress and new challenges in isospin physics with heavy-ion reactions. **Physics Reports**, v. 464, n. 4, p. 113–281, 2008. ISSN 0370-1573. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157308001269>.
- LIM, Y.; SCHWENK, A. Symmetry energy and neutron star properties constrained by chiral effective field theory calculations. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 109, p. 035801, Mar. 2024. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.109.035801>.
- LOPES, L.; MENEZES, D. Effects of the symmetry energy and its slope on neutron star properties. **Brazilian Journal of Physics**, v. 44, 05 2014.
- LOURENÇO, O.; LENZI, C. H.; FREDERICO, T.; DUTRA, M. Dark matter effects on tidal deformabilities and moment of inertia in a hadronic model with short-range correlations. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 106, p. 043010, Ago. 2022. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.106.043010>.
- LSC *et al.* **LIGO Document P1800115-v12**. 2019. GW170817: Measurements of Neutron Star Radii and Equation of State. Disponível em: <https://dcc.ligo.org/LIGO-P1800115/public>.
- LYNCH, W.; TSANG, M.; ZHANG, Y.; DANIELEWICZ, P.; FAMIANO, M.; LI, Z.; STEINER, A. Probing the symmetry energy with heavy ions. **Progress in Particle and Nuclear Physics**, v. 62, n. 2, p. 427–432, heavy-Ion Collisions from the Coulomb Barrier to the Quark-Gluon Plasma, 2009. ISSN 0146-6410. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0146641009000027>.
- MANKA, R.; BEDNAREK, I. Nucleon and meson effective masses in the relativistic mean-field theory. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, v. 27, n. 10, p. 1975, Set. 2001. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/0954-3899/27/10/302>.
- MARGUERON, J.; CASALI, R. H.; GULMINELLI, F. Equation of state for dense nucleonic matter from metamodeling. i. foundational aspects. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 97, p. 025805, Fev. 2018. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.97.025805>.

- MENEZES, D. P. A neutron star is born. **Universe**, v. 7, n. 8, 2021. ISSN 2218-1997. Disponível em: <https://www.mdpi.com/2218-1997/7/8/267>.
- MILLER, M. C. *et al.* PSR J0030+0451 Mass and Radius from NICER Data and Implications for the Properties of Neutron Star Matter. , v. 887, n. 1, p. L24, 2019.
- MILLER, M. C. *et al.* The radius of psr j0740+6620 from nicer and xmm-newton data. **The Astrop. J. Lett.**, American Astronomical Society, v. 918, n. 2, p. L28, Set. 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac089b>.
- NA, I. V.; PROVIDÊNCIA, C.; POLLS, A.; RIOS, A. Density dependence of the nuclear symmetry energy: A microscopic perspective. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 80, p. 045806, Out. 2009. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.80.045806>.
- NÄTTILÄ, J.; MILLER, M. C.; STEINER, A. W.; KAJAVA, J. J. E.; SULEIMANOV, V. F.; POUTANEN, J. Neutron star mass and radius measurements from atmospheric model fits to x-ray burst cooling tail spectra. **A&A**, v. 608, p. A31, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201731082>.
- OERTEL, M.; HEMPEL, M.; KLÄHN, T.; TYPEL, S. Equations of state for supernovae and compact stars. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 89, p. 015007, Mar. 2017. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.89.015007>.
- OPPENHEIMER, J. R.; VOLKOFF, G. M. On massive neutron cores. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 55, p. 374–381, Fev. 1939. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.55.374>.
- ÖZEL, F.; PAULO, F. Masses, radii, and the equation of state of neutron stars. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, v. 54, n. 1, p. 401–440, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1146/annurev-astro-081915-023322>.
- POSTNIKOV, S.; PRAKASH, M.; LATTIMER, J. M. Tidal love numbers of neutron and self-bound quark stars. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 82, p. 024016, Jul. 2010. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.82.024016>.
- RAITHEL, C. A.; ÖZEL, F.; PSALTIS, D. From neutron star observables to the equation of state. ii. bayesian inference of equation of state pressures. **The Astrophysical Journal**, The American Astronomical Society, v. 844, n. 2, p. 156, Ago. 2017. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/aa7a5a>.
- REED, B. T.; FATTOYEV, F. J.; HOROWITZ, C. J.; PIEKAREWICZ, J. Implications of prex-2 on the equation of state of neutron-rich matter. **Phys. Rev. Lett.**, APS, v. 126, n. 17, p. 172503, 2021. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.172503>.
- REGGE, T.; WHEELER, J. A. Stability of a schwarzschild singularity. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 108, p. 1063–1069, Nov. 1957. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.108.1063>.
- RILEY, T. E. *et al.* A NICER View of PSR J0030+0451: Millisecond Pulsar Parameter Estimation. **Astrophys. J. Lett.**, v. 887, n. 1, p. L21, 2019.

- RILEY, T. E. *et al.* A NICER view of the massive pulsar PSR j07406620 informed by radio timing and XMM-newton spectroscopy. **The Astrophysical Journal Letters**, American Astronomical Society, v. 918, n. 2, p. L27, Set. 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac0a81>.
- ROBERT, C. P.; CHOPIN, N.; ROUSSEAU, J. Harold Jeffreys's Theory of Probability Revisited. **Statistical Science**, Institute of Mathematical Statistics, v. 24, n. 2, p. 141 – 172, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1214/09-STS284>.
- SALINAS, M.; PIEKAREWICZ, J. **Bayesian refinement of covariant energy density functionals**. arXiv, 2023. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2301.09692>.
- SANTOS, B. M.; DUTRA, M.; LOURENÇO, O.; DELFINO, A. Correlations between bulk parameters in relativistic and nonrelativistic hadronic mean-field models. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 92, p. 015210, Jul. 2015. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.92.015210>.
- SEROT, B.; WALECKA, J. **Advances in Nuclear Physics**. New York: Plenum, 1986.
- SIVIA, D.; SKILLING, J. **Data Analysis: A Bayesian Tutorial**. [S.l.]: OUP Oxford, 2006. (Oxford science publications). ISBN 9780198568315.
- SOARES, B. A. de M.; LENZI, C. H.; LOURENÇO, O.; DUTRA, M. Bayesian analysis of a relativistic hadronic model constrained by recent astrophysical observations. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, p. stad2558, 08 2023. ISSN 0035-8711. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/mnras/stad2558>.
- SOUZA, L. A.; DUTRA, M.; LENZI, C. H.; LOURENÇO, O. Effects of short-range nuclear correlations on the deformability of neutron stars. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 101, p. 065202, Jun. 2020. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.101.065202>.
- STEINER, A. W.; LATTIMER, J. M.; BROWN, E. F. The equation of state from observed masses and radii of neutron stars. **The Astrophysical Journal**, American Astronomical Society, v. 722, n. 1, p. 33–54, Set. 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0004-637x/722/1/33>.
- STEINER, A. W.; LATTIMER, J. M.; BROWN, E. F. Neutron star radii, universal relations, and the role of prior distributions. **European Physical Journal A**, v. 52, p. 18, 2016. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2016EPJA...52...18S>.
- SULAKSONO, A.; MART, T. Low density instability in relativistic mean field models. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 74, p. 045806, Out. 2006. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.74.045806>.
- THORNE, K. S. Tidal stabilization of rigidly rotating, fully relativistic neutron stars. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 58, p. 124031, Nov. 1998. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.58.124031>.
- THORNE, K. S.; CAMPOLATTARO, A. Non-radial pulsation of general-relativistic stellar models. i. analytic analysis for $l \geq 2$. **Astrophysical Journal**, vol. 149, p. 591, v. 149, p. 591, 1967.

- TOLMAN, R. C. Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 55, p. 364–373, Fev. 1939. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.55.364>.
- TRAVERSI, S.; CHAR, P.; PAGLIARA, G. Bayesian inference of dense matter equation of state within relativistic mean field models using astrophysical measurements. **The Astrop. J.**, IOP Publishing, v. 897, n. 2, p. 165, 2020. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/1538-4357/ab99c1>.
- TREINER, J.; KRIVINE, H.; BOHIGAS, O.; MARTORELL, J. Nuclear incompressibility: From finite nuclei to nuclear matter. **Nuclear Physics A**, v. 371, n. 2, p. 253–287, 1981. ISSN 0375-9474. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375947481900671>.
- WALECKA, J. A theory of highly condensed matter. **Annals of Physics**, v. 83, n. 2, p. 491–529, 1974. ISSN 0003-4916. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491674902085>.
- WEINBERG, S. **Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity**. Massachusetts: Jon Wiley& Sons, 1972.
- Weissenborn, S.; Chatterjee, D.; Schaffner-Bielich, J. Hyperons and massive neutron stars: The role of hyperon potentials. , v. 881, p. 62–77, 2012.
- YUE, T.-G.; CHEN, L.-W.; ZHANG, Z.; ZHOU, Y. Constraints on the symmetry energy from prex-ii in the multimessenger era. **Phys. Rev. Res.**, American Physical Society, v. 4, p. L022054, Jun. 2022. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.4.L022054>.
- YUKAWA, H. On the interaction of elementary particles. I. **Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series**, The Physical Society of Japan, The Mathematical Society of Japan, v. 17, p. 48–57, 1935. Disponível em: <https://doi.org/10.1143/P TPS.1.1>.
- ZHANG, N.-B.; LI, B.-A. Delineating effects of nuclear symmetry energy on the radii and tidal polarizabilities of neutron stars. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, IOP Publishing, v. 46, n. 1, p. 014002, Nov. 2018. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6471/aaef54>.
- ZHU, Z.; LI, A.; LIU, T. **A Bayesian inference of relativistic mean-field model for neutron star matter from observation of NICER and GW170817/AT2017gfo**. arXiv, 2022. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2211.02007>.
- ÖZEL, F.; PSALTIS, D.; GÜVER, T.; BAYM, G.; HEINKE, C.; GUILLOT, S. The dense matter equation of state from neutron star radius and mass measurements. **The Astrop. J.**, American Astronomical Society, v. 820, n. 1, p. 28, Mar. 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.3847/0004-637x/820/1/28>.

Apêndice A - Derivação do Número de Love de Segunda Ordem

Agora vamos derivar o número de maré de segunda ordem de Love, que depende da equação de estado. O momento quadrupolar da estrela Q_{ij} e o campo de maré externo E_{ij} aparecem nos coeficientes de expansão assintótica da métrica total a uma grande distância r da estrela. Esta expansão inclui o componente da métrica g_{tt} em coordenadas cartesianas assintoticamente centradas na massa (THORNE, 1998), e temos

$$-(1 + g_{tt}) = \phi_{\text{int}} + \phi_{\text{ext}} = -\frac{M}{r} - \frac{3Q_{ij}}{2r^3} \left(n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) + \dots + E_{ij} \frac{2r^2}{3} n_i n_j, \quad (\text{A.1})$$

onde $n_i = \frac{x_i}{r}$, e ambos Q_{ij} e E_{ij} são tensores simétricos e sem traço e M é a massa da estrela.

O objetivo é derivar o número de Love dentro do quadro da teoria de perturbação linear. Consideramos perturbações estáticas de uma estrela esfericamente simétrica e relativística descrita por:

$$g_{\alpha\beta}^{(0)} = \text{diag}[-e^{\nu(r)}, e^{\lambda(r)}, r^2, r^2 \sin^2 \theta]. \quad (\text{A.2})$$

Nosso interesse está nas perturbações de paridade par no calibre de Regge-Wheeler, que é a dependência angular dos componentes de uma perturbação métrica linearizada em harmônicos esféricos (REGGE; WHEELER, 1957). A métrica perturbada pode ser expressa como:

$$h_{\alpha\beta} = \text{diag}[-e^{\nu(r)} H(r), -e^{\lambda(r)} H(r), r^2 K(r), r^2 \sin^2 \theta K(r)] Y_{20}(\theta, \phi), \quad (\text{A.3})$$

onde $Y_{20}(\theta, \phi)$ é a função harmônica esférica associada ao momento quadrupolar. Ao fazer $x = \cos \theta$ e escrever $Y_{20}(\theta, \phi) = \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{\pi}}(3x^2 - 1)$, então a equação se torna:

$$h_{\alpha\beta} = \text{diag} \left[-e^{\nu(r)} H(r), -e^{\lambda(r)} H(r), r^2 K(r), r^2 (1 - x^2) K(r) \right] \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{\pi}} (3x^2 - 1). \quad (\text{A.4})$$

A métrica total então se torna:

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^{(0)} + h_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.5})$$

A equação (A.5) pode ser resolvida com as seguintes condições:

(i) Primeiro, as equações de Einstein perturbadas (para $l \geq 2$) para o fluido perfeito devem ser determinadas. Em seguida, a derivada do tensor energia-momento é encontrada tomando

$$\delta T_{\mu}^{\nu} = (\delta\epsilon + \delta p)u^{\mu}u_{\nu} + (p + \epsilon)(u^{\mu}\delta u_{\nu} + u_{\nu}\delta u^{\mu}) + \delta p\delta_{\mu}^{\nu}. \quad (\text{A.6})$$

Os componentes não nulos do tensor energia-momento são $\delta T_0^0 = -\delta\epsilon = -\frac{d\epsilon}{dp}\delta p$ e $T_i^i = \delta p$.

(ii) Portanto, a equação de Einstein linearizada com todos os componentes combinados é dada por $\delta G_{\nu}^{\mu} = 8\pi\delta T_{\nu}^{\mu}$, e então procedemos para calcular todos os componentes da equação de Einstein.

Escrevemos a componente $r\theta$ das equações de campo para encontrar uma expressão para $K'(r)$

$$K'(r) = -H'(r) - H(r)\nu'(r), \quad (\text{A.7})$$

Para encontrarmos uma expressão para H, precisamos subtrair a componente rr da equação de Einstein da componente tt :

$$\begin{aligned} \delta G_t^t - \delta G_r^r &= 8\pi (T_0^0 - T_i^i), \\ \delta G_t^t - \delta G_r^r + 8\pi \left(\frac{d\epsilon}{dp}\delta p + \delta p \right) &= 0, \\ -\frac{1}{4r^2} \left(H(r) \left[24e^{\lambda(r)} + r \left(2 \left(-1 + \frac{d\epsilon}{dp} \right) \nu'(r) + \left(1 + \frac{d\epsilon}{dp} \right) r\nu'(r)^2 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \lambda'(r) \left(2 \left(3 + \frac{d\epsilon}{dp} \right) + \left(1 + \frac{d\epsilon}{dp} \right) r\nu'(r) \right) + 2 \left(1 + \frac{d\epsilon}{dp} \right) r\nu''(r) \right) \right. \\ &\quad \left. + r \left(- \left(1 + \frac{d\epsilon}{dp} \right) H'(r) (-4 + r\lambda'(r) - 3r\nu'(r)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(- \left(3 + \frac{d\epsilon}{dp} \right) (-4 + r\lambda'(r)) + \left(-1 + \frac{d\epsilon}{dp} \right) r\nu'(r) \right) (-H'(r) - H(r)\nu'(r)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2r \left(\left(1 + \frac{d\epsilon}{dp} \right) H''(r) + \left(3 + \frac{d\epsilon}{dp} \right) (-H'(r)\nu'(r) - H''(r) - H(r)\nu''(r)) \right) \right] \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Rearranjando os termos, podemos escrever a equação diferencial de H na forma:

$$H''(r) + C_1H'(r) + C_0H(r) = 0. \quad (\text{A.9})$$

C_1 e C_0 são extraídos de (A.8).

$$C_1 = \frac{2}{r} + \frac{1}{2}(\nu'(r) - \lambda'(r)) = \frac{2}{r} + e^{\lambda(r)} \left[\frac{2m(r)}{r^2} + 4\pi r(p - \epsilon) \right] \quad (\text{A.10})$$

e

$$C_0 = e^{\lambda(r)} \left[-\frac{l(l+1)}{r^2} + 4\pi(\epsilon + p) \frac{d\epsilon}{dp} + 4\pi(5\epsilon + 9p) \right] - \nu'(r)^2, \quad (\text{A.11})$$

Onde foram utilizados as equações de TOV para reescrever C_1 e C_0 . A equação de segunda ordem de H é convertida em duas equações de primeira ordem em uma nova variável β :

$$\frac{dH(r)}{dr} = \beta(r) \quad (\text{A.12})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d\beta(r)}{dr} &= e^{\lambda(r)} H(r) \left[-4\pi \left(5\epsilon + 9p + \left(\frac{dp}{d\epsilon} \right)^{-1} (\epsilon + p) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{l(l+1)}{r^2} + 4e^{\lambda(r)} \left(\frac{m(r)}{r^2} + 4\pi r p \right)^2 \right] + \frac{2\beta(r)}{r} e^{\lambda(r)} \left(-1 + \frac{m(r)}{r} + 2\pi r^2 (\epsilon - p) \right), \\ &= \left(1 - \frac{2m(r)}{r} \right)^{-1} H(r) \left[-4\pi \left(5\epsilon + 9p + \left(\frac{dp}{d\epsilon} \right)^{-1} (\epsilon + p) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{l(l+1)}{r^2} + 2 \left(1 - \frac{2m(r)}{r} \right)^{-1} \left(\frac{m(r)}{r^2} + 4\pi r p \right)^2 \right] \\ &\quad + \frac{2\beta(r)}{r} \left(1 - \frac{2m(r)}{r} \right)^{-1} \left(-1 + \frac{m(r)}{r} + 2\pi r^2 (\epsilon - p) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Definindo a quantidade $y(r) = r\beta(r)/H(r)$ para a solução interna, podemos diferenciar $y(r)$ com relação a r . As equações são

$$y'(r)H(r) + (y(r) - 1)\beta(r) - r\beta'(r) = 0 \quad (\text{A.14})$$

substituindo (A.13) em (A.14) chegamos finalmente a

$$ry'(r) + y(r)^2 + y(r)F(r)r^2Q(r) = 0 \quad (\text{A.15})$$

com

$$F(r) = \frac{1 - 4\pi r^2[\epsilon(r) - p(r)]}{1 - 2m(r)/r}, \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} Q(r) &= \frac{4\pi r}{r - 2m(r)} \left[5\epsilon(r) + 9p(r) + \frac{\epsilon(r) + p(r)}{\partial p(r)/\partial \epsilon(r)} - \frac{6}{r^2} \right] \\ &\quad - 4 \left[\frac{m(r) + 4\pi r^3 p(r)}{r^2(1 - 2m(r)/r)} \right]^2. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

. Novamente, podemos escrever a equação diferencial de segunda ordem (A.9) para fora da estrela $r = R$ com relação à equação de Legendre associada com $m = 2$ (THORNE; CAMPOLATTARO, 1967; DAMOUR; NAGAR, 2010b):

$$(x^2 - 1)H''(x) + 2xH'(x) - \left(l(l+1) - \frac{4}{x^2 - 1} \right) H(x) = 0, \quad (\text{A.18})$$

onde $m(r = R) = M$, e $x = R/M - 1$ é a variável independente. Portanto, a solução geral da equação (A.18) pode ser escrita como

$$H(x) = a_P \hat{P}_{l2}(x) + a_Q \hat{Q}_{l2}(x) \quad (\text{A.19})$$

onde a_P , e a_Q são constantes de integração que são determinadas pelo ajuste à solução interna. Substituindo o valor de $y(r)$ na equação (A.19), temos

$$y(x) = (1+x) \frac{\hat{P}'_{l2}(x) + a_l \hat{Q}'_{l2}(x)}{\hat{P}_{l2}(x) + a_l \hat{Q}_{l2}(x)} \quad (\text{A.20})$$

aqui $a_l = \frac{a_Q}{a_P}$ é determinado pelo ajuste à solução interna em relação à compactação $C = M/R$ da estrela.

$$a_l = - \frac{\hat{P}'_{l2}(x) - C y_l \hat{P}_{l2}(x)}{\hat{Q}'_{l2}(x) - C y_l \hat{Q}_{l2}(x)} \Big|_{x=\frac{R}{M}-1} \quad (\text{A.21})$$

Por outro lado a_l está relacionado ao número de Love adimensional k_l (DAMOUR; NAGAR, 2010b). Pode-se definir k_l como

$$k_l = \frac{1}{2} C^{2l+1} a_l \quad (\text{A.22})$$

com $l=2,3,4,\dots$ sendo os números de quadrupolo, octopolo e hexadecapolo, respectivamente. Para o número de quadrupolo, isto é, número de Love de segunda ordem ($l=2$), temos:

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{8C^5}{5} (1-2C)^2 [2 + 2C(y_R - 1) - y_R] \times \left\{ 2C[6 - 3y_R + 3C(5y_R - 8)] \right. \\ &+ 4C^3 [13 - 11y_R + C(3y_R - 2) + 2C^2(1 + y_R)] \\ &+ \left. 3(1-2C)^2 [2 - y_R + 2C(y_R - 1)] \ln(1-2C) \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

com $y_R = y(R)$.

Apêndice B - Código utilizado para o cálculo da distribuição posterior

```
1 from scipy import interpolate
2 import numpy as np
3
4 #(importando script com a funcao 'couplings' que retorna as
   constantes de acoplamento, input= theta)
5 exec(open('my_couplings_v3.py').read())
6
7 #Importando script com a funcao 'EoSsolve' que retorna tabela com
   a EoS do modelo estudado na tese, input= constantes de
   acoplamento.
8 exec(open('walecka_solver_wp.py').read())
9
10 #Script com funcao 'TOVSOLVER' que resolve a TOV e retorna a curva
   massa-raio, tendo como input a EoS
11 exec(open('PYTOV.py').read())
12
13 #LEITURA DOS DADOS OBSERVACIONAIS#
14 PDF1608=np.loadtxt('MRprob_1608.dat', unpack=True)
15 PDF1724=np.loadtxt('MRprob_1724.dat', unpack=True)
16 PDF1731=np.loadtxt('MRprob_1731.dat', unpack=True)
17 PDF1745=np.loadtxt('MRprob_1745.dat', unpack=True)
18 PDF1748=np.loadtxt('MRprob_1748.dat', unpack=True)
19 PDF1820=np.loadtxt('MRprob_1820.dat', unpack=True)
20 PDFM13=np.loadtxt('MRprob_M13.dat', unpack=True)
21 PDFM30=np.loadtxt('MRprob_M30.dat', unpack=True)
22 PDFNGC6304=np.loadtxt('MRprob_NGC6304.dat', unpack=True)
23 PDFNGC6397=np.loadtxt('MRprob_NGC6397.dat', unpack=True)
24 PDF0mCen=np.loadtxt('MRprob_0mCen.dat', unpack=True)
25 PDFLigo1=np.loadtxt('Ligo_PDF1_new.dat', unpack=True)
26 PDFLigo2=np.loadtxt('Ligo_PDF2_new.dat', unpack=True)
```

```

27 PDFnicer=np.loadtxt('Nicer_PDF_new.dat', unpack=True)
28 PDFnatila=np.loadtxt('Natila_new.dat', unpack=True)
29 PDFnicer19=np.loadtxt('Nicer19_PDF_new.dat', unpack=True)
30 sources=PDF1608,PDF1724,PDF1731,PDF1745,PDF1748,PDF1820,PDFM13,
        PDFM30,PDFNGC6304,PDFNGC6397,PDF0mCen,PDFLigo1,PDFLigo2,
        PDFnicer,PDFnatila,PDFnicer19
31 quant_sources=16
32
33 interp=[]
34 for source in sources:
35     y,x,z = source
36     points=int(np.sqrt(len(z)))
37     Msource=np.zeros(points)
38     Rsource=np.zeros(points)
39     Probab_2d = np.reshape(z, (points,points))
40     for p in range(points):
41         Msource[p]=y[p]
42         Rsource[p]=x[p+points*p]
43
44 #DEFINICAO DA FUNCAO QUE IRA INTERPOLAR O VALOR DA PROBABILIDADE
        PARA (R,M) ARBITRARIO, DE ACORDO COM CADA FONTE DE DADOS
45     f=interpolate.RectBivariateSpline(Rsource, Msource, Probab_2d)
        #(x,y,z)
46     interp.append(f)
47
48 del PDF1608,PDF1724,PDF1731,PDF1745,PDF1748,PDF1820,PDFM13,PDFM30,
        PDFNGC6304,PDFNGC6397,PDF0mCen,sources,source,x,y,z,PDFnicer
49
50
51 #DEFINICAO DOS PARAMETROS INICIAIS PARA O MCMC
52 ndim = 4
53 nwalkers =600
54 steps=900
55
56 #####
57 # DEFINICAO DA PRIOR E DA LIKELIHOOD #
58 #####
59 def lnprior(theta): #DISTRIBUICAO UNIFORME
60     ms,K,J1,L0 = theta
61     if msmin < ms < msmax and Kmin < K < Kmax and S1min < J1 <
        S1max and L0min < L0 < L0max:

```

```

62     return 0.0
63     return -np.inf
64
65
66 def lnlike(theta):
67     constantes=couplings(theta) #CALCULO DAS CONSTANTES DE
        ACOPLAMENTO
68
69     EoS=EoSsolve(constantes) #CALCULO DA EOS
70
71     MRcurve ,Mmax=TOVSOLVER(EoS) #CALCULO DA CURVA MASSA-RAIO, E
        MASSA MAXIMA
72
73     if Mmax < 2.: #ESTAMOS INTERESSADOS EM MASSAS MAXIMAS MAIOR
        QUE 2
74         return -np.inf
75
76     likelihood=1. #iniciando o produtorio da likelihood
77     for i in range(quant_sources):
78         NewPDF=[]
79         for Point in MRcurve:
80             rhoc ,R,M=Point
81             newprob=float(interp[i](R,M))
82             if newprob<0.: newprob=0.0
83             NewPDF.append(newprob)
84
85             likeli= np.max(NewPDF)
86             likelihood= likelihood*likeli
87     if likelihood==0:
88         return -np.inf
89     return np.log(likelihood)
90
91 def lnprob(theta):
92     lp = lnprior(theta)
93     if not np.isfinite(lp):
94         return -np.inf
95     ll=lnlike(theta)
96     if not np.isfinite(ll):
97         return -np.inf
98     return lp + ll
99

```



```
100 #####
101 #INICIANDO O MCMC
102 import emcee
103 from multiprocessing import Pool
104 if __name__ == '__main__':
105     with Pool() as pool:
106         sampler = emcee.EnsembleSampler(nwalkers, ndim, lnprob,
107                                         pool=pool)
108
109 #PRIMEIRAMENTE RODAMOS UMA RODADA DE BURNIN COM 200 STEPS E
110 # SALVAMOS A ULTIMA POSICAO DOS WALKERS (pos)
111     # EXECUTANDO MCMC
112     pos, prob, state = sampler.run_mcmc(pos, steps)
113
114     #SALVANDO A DISTRIBUICAO RESULTANTE
115     samples = sampler.flatchain
116     np.savetxt("samples.dat", samples)
```

Apêndice C - Constantes de acoplamento das EoSs

TABELA C.1 – Constantes de acoplamento que reproduzem os parâmetros de *bulk* relacionados na Tabela 4.1. L.I: Limite Inferior; L.S.: Limite Superior.

	g_σ^2/m_σ^2 (fm ²)	g_ω^2/m_ω^2 (fm ²)	g_ρ^2/m_ρ^2 (fm ²)	$100A/g_\sigma^3$ (fm ⁻¹)	B/g_σ^4 (10 ⁻³)	10α
Uniforme						
Caso 1						
Média	10,94	5,81	6,85	-3,13	-4,56	1,00
Moda	10,84	5,51	7,47	-3,86	-6,85	1,73
Mediana	10,88	5,74	7,00	-3,23	-4,65	1,12
68% L.I.	11,76	6,48	7,12	-2,83	-5,93	1,41
68% L.S.	10,18	5,24	6,99	-3,23	-0,80	0,75
90% L.I.	12,34	7,03	7,39	-2,47	-5,69	1,49
90% L.S.	9,90	5,04	6,84	-3,15	1,68	0,49
Caso 2						
Média	10,79	5,65	6,09	-3,32	-4,62	0,42
Moda	10,80	5,48	7,07	-3,90	-6,85	0,62
Mediana	10,80	5,63	6,16	-3,38	-4,89	0,46
68% L.I.	11,54	6,25	5,61	-3,03	-6,17	0,48
68% L.S.	10,22	5,25	6,55	-3,28	-1,22	0,36
90% L.I.	12,06	6,74	5,39	-2,68	-5,99	0,47
90% L.S.	9,92	5,06	6,56	-3,18	1,37	0,23
Gaussiana						
Caso 1						
Média	10,90	5,77	6,67	-3,16	-4,47	0,88
Moda	10,67	5,54	6,76	-3,36	-4,17	0,97
Mediana	10,85	5,72	6,73	-3,20	-4,42	0,92
68% L.I.	11,66	6,41	7,37	-2,83	-5,68	1,42
68% L.S.	10,23	5,24	6,63	-3,33	-1,46	0,58
90% L.I.	12,23	6,92	8,46	-2,55	-5,81	1,84
90% L.S.	9,93	5,05	6,65	-3,25	1,04	0,37
Caso 2						
Média	10,76	5,62	6,06	-3,35	-4,57	0,40
Moda	10,67	5,53	6,08	-3,42	-4,38	0,40
Mediana	10,77	5,62	6,06	-3,34	-4,58	0,40
68% L.I.	11,49	6,22	5,80	-3,02	-5,98	0,51
68% L.S.	10,25	5,24	6,33	-3,39	-1,83	0,29
90% L.I.	12,03	6,69	5,67	-2,74	-6,17	0,60
90% L.S.	9,94	5,04	6,50	-3,32	0,71	0,21

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO TD	2. DATA 02 de agosto de 2024	3. DOCUMENTO Nº DCTA/ITA/TD-032/2024	4. Nº DE PÁGINAS 83
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: Análise bayesiana de modelo hadrônico relativístico restringido por observações recentes de estrelas			
6. AUTOR(ES): Bruno Alves de Moura Soares			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: Estrelas; Análise Bayesiana; Física Nuclear			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Estrelas; Estatística bayesiana; Equações de estado; Estrelas de nêutron; Astrofísica; Física nuclear			
10. APRESENTAÇÃO: <input checked="" type="checkbox"/> Nacional <input type="checkbox"/> Internacional ITA, São José dos Campos. Curso de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Física Nuclear (FIS-N). Orientador: Prof ^a . Dra. Mariana Dutra da Rosa Lourenço. Coorientador: Prof. Dr. César Henrique Lenzi. Defesa em 03/07/2024. Publicada em 2024			
11. RESUMO: Utilizamos análise bayesiana para restringir a equação de estado da matéria nuclear a partir de dados astrofísicos relacionados às medições recentes da missão NICER, colaboração LIGO/Virgo, e distribuições de probabilidade de massa e raio de outras 12 fontes, incluindo explosões termonucleares e binárias de raios-X de baixa massa em quiescência. Para isso, baseamos nosso estudo em um modelo de campo médio hadrônico relativístico que inclui uma interação $\omega - \rho$. Nossos resultados indicam intervalos relevantes para alguns parâmetros de massa no ponto de saturação, tais como, massa efetiva, incompressibilidade e inclinação da energia de simetria (L_0). Por exemplo, encontramos $L_0 = 50.79_{-9.24}^{+15.16}$ MeV (Caso 1) e $L_0 = 75.06_{-4.43}^{+8.43}$ MeV (Caso 2) em um intervalo de confiança de 68% para os 2 casos analisados (diferentes intervalos de entrada para L_0 relacionados aos dados do PREX-II). As respectivas parametrizações estão em acordo com importantes restrições da matéria nuclear, bem como com dados observacionais de estrelas de nêutrons, como a deformabilidade de maré adimensional do evento GW170817. A partir das curvas massa-raio obtidas dessas melhores parametrizações, também encontramos os intervalos de $11.97 \text{ km} \leq R_{1.4} \leq 12.73 \text{ km}$ (Caso 1) e $12.34 \text{ km} \leq R_{1.4} \leq 13.06 \text{ km}$ (Caso 2) para o raio da estrela de nêutrons de $1.4M_{\odot}$.			
12. GRAU DE SIGILO: <input checked="" type="checkbox"/> OSTENSIVO <input type="checkbox"/> RESERVADO <input type="checkbox"/> SECRETO			