

Tese apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Dinâmica Não-Linear e Sistemas Complexos.

Dalton Nunes Oliveira

**TRANSIÇÕES PARA CAOS EM MODELOS DE
CONVECÇÃO E DÍNAMO
MAGNETOHIDRODINÂMICO**

Tese aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:

Prof. Dr. Erico Luiz Rempel

Orientador



Prof. Dr. Roman Chertovskikh

Coorientador

Prof^ª. Dr^ª. Emília Villani

Pró-Reitora de Pós-Graduação

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP - Brasil
2022

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Divisão de Informação e Documentação

Oliveira, Dalton Nunes
Transições para Caos em Modelos de Convecção e Dínamo Magnetohidrodinâmico / Dalton Nunes Oliveira.
São José dos Campos, 2022.
194f.

Tese de Doutorado – Curso de Física. Área de Dinâmica Não-Linear e Sistemas Complexos – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2022. Orientador: Prof. Dr. Erico Luiz Rempel. Coorientador: Prof. Dr. Roman Chertovskikh.

1. Dínamo. 2. Magnetohidrodinâmica. 3. Bifurcação. 4. Convecção Rayleigh-Bénard. 5. Caos. 6. Histerese. 7. Sistemas Dinâmicos. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Título.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

OLIVEIRA, Dalton Nunes. **Transições para Caos em Modelos de Convecção e Dínamo Magnetohidrodinâmico**. 2022. 194f. Tese de Doutorado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Dalton Nunes Oliveira

TÍTULO DO TRABALHO: Transições para Caos em Modelos de Convecção e Dínamo Magnetohidrodinâmico.

TIPO DO TRABALHO/ANO: Tese / 2022

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta tese e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese pode ser reproduzida sem a autorização do autor.



Dalton Nunes Oliveira
Rua Paraibuna, 443
12.245-020 – São José dos Campos–SP

TRANSIÇÕES PARA CAOS EM MODELOS DE CONVECÇÃO E DÍNAMO MAGNETOHIDRODINÂMICO

Dalton Nunes Oliveira

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marco Antonio Ridenti	Presidente	-	ITA
Prof. Dr. Erico Luiz Rempel	Orientador	-	ITA
Prof. Dr. Roman Chertovskikh	Coorientador	-	U. do Porto
Prof. Dr. Felipe Barbedo Rizzato	Membro Externo	-	UFRGS
Prof. Dr. Gustavo Andres Guerrero Eraso	Membro Externo	-	UFMG
Prof. Dr. Sergio Roberto Lopes	Membro Externo	-	UFPR

Dedico este trabalho aos meus pais, Ivan e Selma, aos meus irmãos, Douglas e Iriane, minha noiva Shirlene, ao meu sobrinho, Henrique, meus afilhados, Sofia e Herick e as minhas queridas avós, Cecília e Teresa.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por todas oportunidades concebidas e pela vida.

Agradeço aos meus orientadores Prof. Dr. Erico Luiz Rempel e Prof. Dr. Roman Chertovskikh a orientação dada, as correções, pelo conhecimento transmitido, por toda a paciência e dedicação para a realização deste trabalho. Agradeço-lhes também por estarem sempre dispostos a me ajudar em todas às vezes que precisei. Os mesmos mostraram-se orientadores empenhados e dedicados em meu processo de formação e aprendizagem. Agradeço ao Prof. Dr. Erico Rempel pelo apoio e orações. Ao Prof. Dr. Roman Chertovskikh pelo gentil acolhimento durante o doutorado sanduíche em Portugal, na universidade do Porto. Pelos cafés, boas conversas, pelas indicações de bons vinhos portugueses. Agradeço sua disponibilidade em me ajudar com o código numérico. Agradeço ao funcionário administrativo da universidade do Porto, Paulo Lopes.

Agradeço a todos os integrantes do grupo de pesquisa em Dinâmica Não-Linear aplicada a Plasmas Astrofísicos - *DYNASTRO*: Prof. Dr. Erico Luiz Rempel, Me. Leonardo Fabrício, Me. Luiz Sivieri, Dra. Suzana de Souza, Dr. Tiago Gomes e Dr. Francis Franco, pelas contribuições e ajuda ao longo deste trabalho. Em especial a Dra. Suzana de Souza, Dr. Francis Franco e ao Dr. Tiago Gomes, pelas inúmeras discussões e contribuições para a melhoria deste trabalho.

Agradeço aos professores da pós-graduação do ITA pelo conhecimento transmitido.

À secretaria da pós-graduação Elenice Rocha, por estar sempre disposta a ajudar.

Agradeço aos bons amigos que fiz na pós-graduação por tornarem o convívio mais agradável durante este árduo período: Elisa Assencio, Larissa Nascimento, Geanderson Carvalho, Pedro Cabral, Leonardo Fabricio, Lineide Lima e Angélica Zaneze. Em especial: Luis Madson, Heitor Oliveira, Francis Franco, Tiago Gomes, pelos vários momentos de descontração.

Agradeço aos amigos de Belém: Moisés Lima, Luiz Carlos. Aos amigos que fiz em São José dos Campos: João Luiz, William Porto, Eliane Porto, Irimar Porto, Mara Xavier, Junior Xavier, Laura Maria e Adriane Marques.

Agradeço à toda minha família, por todo o suporte, ajuda e incentivo.

Aos meus pais, Raimundo Ivan e Mariselma Albarado, meus irmãos: Douglas Oliveira e Iriane Oliveira e minha noiva, Shirlene Oliveira por todo o apoio, por sempre estarem ao meu lado em todos os momentos, sempre me amparando nos momentos de tristezas, obrigado pelas palavras de incentivos e por sempre acreditarem em mim. Sem o apoio e o incentivo de vocês, seria impossível finalizar este trabalho. A vocês obrigado por tudo!

Agradeço o Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) pelo suporte e oportunidade oferecido em minha formação.

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.

*"If I have seen farther than others,
it is because I stood on the shoulders of giants."*

— SIR ISAAC NEWTON

Resumo

A geração de campo magnético de grande escala é observada comumente em corpos astrofísicos, sendo que no caso do Sol esses campos revelam-se por meio da distribuição de manchas solares. Apesar dos avanços computacionais dos últimos anos, a geração de tais campos permanece um tópico em aberto na física solar. Neste trabalho, o problema da geração de campos magnéticos de grande escala em astrofísica é explorado por meio de simulações numéricas de fluidos condutores e da teoria de sistemas dinâmicos. Primeiro, investiga-se a presença de transientes caóticos em um dínamo não-linear através de simulações numéricas das equações de magnetohidrodinâmica 3D com um forçante externo. Utilizando a helicidade cinética do fluxo como um parâmetro de controle, uma *bifurcação blowout histerética* é conjecturada como sendo a responsável pela transição para o dínamo de grande escala, levando a um aumento repentino na energia magnética do atrator. Este atrator hidromagnético é repentinamente destruído em uma crise de fronteira quando a helicidade cinética é reduzida. Tanto a *bifurcação blowout histerética* quanto a crise de fronteira geram longos transientes caóticos que são devidos, respectivamente, a uma sela caótica e a um atrator caótico relativo. Em seguida, faz-se uma exploração do modelo de convecção Rayleigh-Bénard com rotação. São construídos três diagramas de bifurcação para diferentes números de Taylor e de Rayleigh, visando investigar o papel da velocidade de rotação e da diferença de temperatura no sistema. Três cenários de histerese apresentando coexistência de atratores são apresentados. Depois, foi investigada a dinâmica do sistema ao se inserir um campo magnético semente e verificar seu crescimento ou decaimento em função de certos parâmetros de controle associados ao campo magnético e ao campo de velocidades. Este estudo indica que os atratores periódicos são os mais apropriados para a geração de campo magnético na convecção com rotação. Relatamos que uma *bifurcação blowout não histerética* é conjecturada como a responsável pela *intermitência “on-off”* encontrada em nosso estudo.

Abstract

The generation of a large-scale magnetic field is commonly observed in astrophysical bodies, and in the case of the Sun, these fields are revealed through the distribution of sunspots. Despite the computational advances of recent years, the generation of such fields remains an open topic in solar physics. In this work, the problem of large-scale magnetic fields generation in astrophysics is explored through numerical simulations of conductive fluids and the theory of dynamical systems. First, the presence of chaotic transients in a nonlinear dynamo is investigated by numerical simulations of 3D magnetohydrodynamic equations with an external forcing. Using the kinetic helicity of the flow as a control parameter, a hysteretic blowout bifurcation is conjectured to be responsible for the transition to the large-scale dynamo, leading to a sudden increase in the magnetic energy of the attractor. This hydromagnetic attractor is suddenly destroyed in a boundary crisis when the kinetic helicity is reduced. Both the hysteretic blowout bifurcation and the boundary crisis generate long chaotic transients that are due, respectively, to a chaotic saddle and a relative chaotic attractor. Then, the Rayleigh-Bénard convection model with rotation is explored. Three bifurcation diagrams are constructed for different values of the Taylor and Rayleigh numbers in order to investigate the role of the rotation rate and of the temperature difference in the system. Three hysteresis scenarios showing coexistence of attractors are presented. Then, the dynamics of the system is investigated by inserting a seed magnetic field and observing its growth or decay as a function of certain control parameters associated with the magnetic field and the velocity field. Our study indicates that periodic attractors are the most appropriate for magnetic field generation in rotating convection. We report that a non-hysteretic blowout bifurcation is conjectured to be responsible for the on-off intermittency found in our study.

Lista de Figuras

FIGURA 1.1 – Ilustração do esquema de camadas do Sol. Fonte - https://pt.m.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Sun\$_poster\$.svg (modificada).	32
FIGURA 1.2 – Imagem de uma mancha solar. A ilustração mostra o tamanho de uma mancha solar, comparável ao tamanho da terra. Fonte - https://www.nasa.gov .	32
FIGURA 1.3 – Representação do “diagrama de borboleta” mostrando a variação da intensidade do campo magnético (em Gauss) por latitude em relação ao tempo (em anos). As variações periódicas ao longo do tempo definem o ciclo solar. As estruturas são similares as asas de uma borboleta e mostram a migração das manchas solares em direção ao equador solar. Fonte - https://solarscience.msfc.nasa.gov/dynamo.shtml .	33
FIGURA 1.4 – Histograma representando o número diário de manchas solares variando no tempo. Fonte - https://solarscience.msfc.nasa.gov/images/bfly.gif .	33
FIGURA 2.1 – Evolução temporal de uma trajetória, dada uma condição inicial \mathbf{x}_0 .	38
FIGURA 2.2 – Exemplo de uma série temporal, ilustrando um transiente inicial, antes de convergir para o regime.	38
FIGURA 2.3 – Órbita periódica iniciando sua evolução em um ponto x_0 e retornando exatamente a este ponto após um período de tempo.	40
FIGURA 2.4 – Uma órbita quase-periódica com duas frequências fundamentais distintas, Ω_1 e Ω_2 , situada sobre um toro $S^2 := S_1 \times S_2$, onde cada S_i é um componente periódico. Fonte: (PARKER; CHUA, 1989) (p. 18) (modificada).	41

FIGURA 2.5 – (a) Ilustração de uma órbita quase-periódica com duas frequências incomensuráveis situada em um toro em um espaço tridimensional. (b) Uma órbita periódica com número de rotação $R = 3$. Fonte: (OTT, 2002) (p. 189).	41
FIGURA 2.6 – Evolução temporal de duas órbitas, onde $\mathbf{x}_1(0)$ e $\mathbf{x}_2(0)$ representam duas condições iniciais próximas, separadas por uma distância $\Delta(0)$. Após um certo tempo, as duas órbitas se afastam para alguma distância $\Delta(t) > \Delta(0)$. Fonte: (OTT, 2002) (p. 16).	42
FIGURA 2.7 – Mapa de Poincaré representando uma típica trajetória \mathbf{C} formados por pontos registrados quando a trajetória \mathbf{C} cruza o plano de Poincaré de cima para baixo em um sistema tridimensional. Fonte: (ALLIGOOD <i>et al.</i> , 1996) (p. 49).	43
FIGURA 2.8 – Ciclo-limite estável (a), instável (b) e semiestável (c). Fonte: (LAYEK, 2015) (p. 177).	43
FIGURA 2.9 – Diagrama de bifurcação sela-nó. A linha tracejada representa o ponto instável e a linha contínua o ponto estável. Fonte: (STROGATZ, 1994) (p. 46) (modificada).	45
FIGURA 2.10 – Ilustração do diagrama de bifurcação de Hopf. Fonte: (PARKER; CHUA, 1989) (p. 205) (modificada).	46
FIGURA 2.11 – Ilustração do diagrama de bifurcação de Hopf supercrítica. Fonte: (GUCKENHEIMER; HOLMES, 2013) (p. 147).	46
FIGURA 2.12 – Ilustração de um diagrama de bifurcação com uma cascata de duplicações de período. Fonte: (KUZNETSOV, 2013) (p. 130).	47
FIGURA 3.1 – Elemento de volume no referencial Euleriano. Fonte: (SCHNACK, 2009) (p. 20).	56
FIGURA 3.2 – Representação geométrica da convecção Rayleigh-Bénard. Fonte: (PAUL <i>et al.</i> , 2011) (p. 2) (modificada).	59
FIGURA 3.3 – Representação do dínamo de Zel’dovich “estica-torce-dobra”. Fonte: (CHILDRESS; GILBERT, 1995) (p. 24).	66
FIGURA 3.4 – Ilustração dos movimentos do campo de velocidade $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, variando na pequena escala de comprimento l_0 e o campo magnético médio variando na escala global L . A média é definida sobre a esfera S_a , de raio a onde $l_0 \ll a \ll L$. Fonte: (MOFFATT, 1978) (p. 146).	68

- FIGURA 3.5 – Representação do efeito Ω . As linhas de campo magnético poloidal esticam-se através da rotação diferencial, gerando um campo toroidal. Fonte: (RINCON, 2019) (p. 54) (modificada). 72
- FIGURA 3.6 – Ilustração do efeito α . As linhas de campo magnético toroidal esticam-se através dos movimentos convectivos helicoidais, o campo toroidal converte-se em um campo poloidal, onde as setas indicam os movimentos do fluido. As linhas de campo elevadas e torcidas representam as linhas de campo magnético. Fonte: (PRIEST, 2014) (p. 284). 73
- FIGURA 3.7 – Mecanismo de regeneração de linhas de campos poloidais e toroidais. No lado esquerdo tem-se o efeito $\Omega - \alpha$ e no lado direito o efeito α^2 . Fonte: (BRANDENBURG; SUBRAMANIAN, 2005) (p. 83). 73
- FIGURA 4.1 – Evolução espaço-temporal das médias horizontais de \bar{B}_y em função de z e suas respectivas séries temporais obtidas a partir das médias. O painel (a) mostra uma simulação iniciada com um campo semente para $\sigma = 0.32$, antes do início da ação do dínamo. O painel (b) ilustra uma simulação iniciada logo após a transição para o dínamo para $\sigma = 0.322$. O painel (c) ilustra uma simulação iniciada a partir de um campo inicial forte em seguida reduzida para $\sigma = 0.22$, mostrando o fenômeno de histerese no sistema, o campo magnético não decai, mas retorna com um ramo de energia alto. O painel (d) ilustra uma simulação iniciada com um campo inicial forte, após a transição para o dínamo, variando como parâmetro de controle o número de Prandtl magnético P_m , depois reduziu-se para $P_m = 0.1613$ mostrando a histerese no sistema. Fonte: (KARAK *et al.*, 2015) (p. 3 - 4). 76

- FIGURA 4.2 – Diagramas de bifurcação: O painel (a) ilustra as médias de tempo da energia magnética e cinética em função da amplitude do forçante F_0 , demonstrando a presença de vários estados de dínamo e não-dínamo. No respectivo painel, têm-se as legendas: $ND = no-dynamo\ state$, $FP = fixed-point$, $P = periodic\ state$, $C = caotic\ state$. β e α representam dois estados distintos de energia, os autores classificaram o primeiro estado como um ramo de “campo forte” e o segundo como um ramo de “campo fraco”. O painel (b) ilustra os modos de Fourier do campo magnético. Pode-se observar um salto repentino da amplitude do forçante, ocorrendo o início da ação do dínamo, observa-se um *loop* de histerese indicado na ampliação da figura. A legenda A com formato oval no painel indica uma rota para caos quase-periódica e a legenda B com formato retangular indica uma rota para caos com cenário de *Newhouse-Ruelle-Takens*. O painel (c) ilustra a transição para dínamo, variando como parâmetro de controle o número de Reynolds magnético. Fonte: (YADAV *et al.*, 2012) (p. 3). 77
- FIGURA 4.3 – Pontos do domínio computacional. 82
- FIGURA 4.4 – Comparação de simulações numéricas com diferentes resoluções de grade. (a) Séries temporais de B_{rms} (linha preta) e v_{rms} (linha vermelha) de simulações de dínamo MHD em escala log-linear para $\sigma = 1$ utilizando 64^3 pontos de grade; a fase cinemática tem uma taxa de crescimento de $\gamma \approx 0.055$. (b) O mesmo que (a), mas para 128^3 pontos de grade; a taxa de crescimento é $\gamma \sim 0.053$ 83
- FIGURA 4.5 – Espectros de energia cinética (linha sólida vermelha) e magnética (linha sólida preta) no tempo $t = 1000$ para $\sigma = 1$ 84
- FIGURA 4.6 – Intensidade do campo magnético (a) e componentes do campo de velocidade (b) em $t = 1000$ para $\sigma = 1$ 84
- FIGURA 4.7 – Série temporal da energia magnética para as componentes $\langle B_x^2 \rangle$, $\langle B_y^2 \rangle$, $\langle B_z^2 \rangle$ 85
- FIGURA 4.8 – Evolução espaço-tempo das médias horizontais de \bar{B}_y no plano xy em função de z (a) e \bar{B}_y no plano yz em função de x (b) para $\sigma = 1$. 85
- FIGURA 4.9 – Trajetória caótica de $(B_x(x_0, y_0, z_0, t), B_y(x_0, y_0, z_0, t), B_z(x_0, y_0, z_0))$ para o atrator hidromagnético para $\sigma = 1$ 86

- FIGURA 4.10 –Gráfico de intensidade do campo magnético para as componentes B_x, B_y, B_z , para $t = 5 \times 10^3$, ilustrando o aparecimento de estruturas do campo magnético de grande escala, para diferentes valores de σ . (a) $\sigma = 0.3$, (b) $\sigma = 0.4$, (c) $\sigma = 0.5$, (d) $\sigma = 0.6$, (e) $\sigma = 0.7$, (f) $\sigma = 0.8$ e (g) $\sigma = 0.9$ 86
- FIGURA 4.11 –Diagrama de bifurcação mostrando a média temporal de \mathbf{B}_{rms} em função de σ 87
- FIGURA 4.12 –Série temporal da energia magnética exibindo *intermitência on-off*, caracterizando uma bifurcação *blowout não histerética*. Fonte: (SWEET *et al.*, 2001a) (p. 3). 88
- FIGURA 4.13 –(a) Diagrama de bifurcação mostrando a média de tempo da energia magnética (triângulos vermelhos) e energia cinética (círculos pretos) em função de η . (b) Séries temporais intermitentes da energia magnética caracterizando uma bifurcação *blowout não histerética*. Fonte: (REMPEL *et al.*, 2009) (p. 511 – 512). 88
- FIGURA 4.14 –Exemplo de uma série temporal exibindo *intermitência on-off*. Fonte: (ASHWIN *et al.*, 2001) (p. 7) (modificada). 89
- FIGURA 4.15 –Séries temporais de B_{rms} próximas à transição crítica para a ação do dínamo mostrada na Fig. 4.11, para um campo magnético semente aleatório. Antes da transição (a e b), mostrando o decaimento para um atrator puramente hidrodinâmico, e logo após a transição (c), mostrando uma longa fase hidrodinâmica transitória antes de atingir o atrator hidromagnético. 89
- FIGURA 4.16 –Trajetória de $(v_x(x_0, y_0, z_0, t), v_y(x_0, y_0, z_0, t), v_z(x_0, y_0, z_0, t))$ para o atrator hidrodinâmico para (a) $\sigma = 0.21$ e (b) $\sigma = 0.21374$ 90
- FIGURA 4.17 –Série temporal de v_{rms} , ilustrando a fase caótica hidrodinâmica. 91
- FIGURA 4.18 –Séries temporais de B_{rms} para dois valores diferentes de σ menores que a transição crítica para o dínamo mostrado na Fig. 4.11. As simulações partiram de um forte campo magnético inicial, obtido em $\sigma = 0.3$. Em seguida, o parâmetro de controle foi reduzido para (a) $\sigma = 0.2$ e (b) $\sigma = 0.199$. A solução não decai em direção ao atrator hidrodinâmico com energia magnética nula, indicando histerese. 92
- FIGURA 4.19 –Evolução espaço-tempo das médias horizontais de B_y em função de z e tempo para (a) $\sigma = 0.2$ e (b) $\sigma = 0.199$ 92
- FIGURA 4.20 –Série temporal de B_{rms} exibindo transientes hidromagnéticos caóticos para (a) $\sigma = 0.198$ e (b) $\sigma = 0.197$ 93

- FIGURA 4.21 –Evolução espaço-tempo das médias horizontais de B_y em função de z e tempo para (a) $\sigma = 0.198$ e (b) $\sigma = 0.197$ 93
- FIGURA 4.22 –Trajetória das condições iniciais em conjuntos invariantes no espaço $(B_x(x_0, y_0, z_0, t), B_y(x_0, y_0, z_0, t), B_z(x_0, y_0, z_0))$ para o atrator hidromagnético em $\sigma = 0.199$ (a) e sela caótica hidromagnética em $\sigma = 0.198$ (b). O ponto (x_0, y_0, z_0) está na origem do domínio espacial. 94
- FIGURA 4.23 –Lei de escala dos transientes caóticos hidromagnéticos em função da distância ao valor de crise de fronteira σ_{bc} 95
- FIGURA 4.24 –Diagrama de bifurcação esquemático de \bar{B}_{rms} em função de σ . Linhas sólidas indicam soluções atrativas e linhas tracejadas indicam soluções não atrativas responsáveis por transientes caóticos; as linhas vermelhas representam estados hidrodinâmicos e as linhas pretas quebradas representam estados caóticos hidromagnéticos. . . . 96
- FIGURA 5.1 – Representação geométrica do domínio computacional na camada do plano horizontal. Fonte: (CHERTOVSKI, 2010) (p. 14). 98
- FIGURA 5.2 – Espectro de energia cinética média no tempo para o atrator caótico em $R = 3000$ e $Ta = 100$, calculado com resolução espacial de $48 \times 48 \times 24$ (linha pontilhada preta) e $64 \times 64 \times 32$ (linha vermelha contínua) harmônicos de Fourier, onde n é o número de onda. 100
- FIGURA 5.3 – Atratores para o sistema hidrodinâmico convectivo para $Ta = 0$. Tabela retirada de PODVIGINA (2008) (p. 428) (modificada). 101
- FIGURA 5.4 – Série temporal da energia cinética para $R = 700$, gerada a partir de uma condição inicial aleatória, ilustrando um comportamento ponto fixo. 102
- FIGURA 5.5 – Séries temporais da energia cinética, apresentando um comportamento de ponto fixo, utilizando a técnica de continuação de parâmetro. Em (a) $R = 710$, (b) $R = 720$, (c) $R = 730$ e (d) $R = 731$. . . 103
- FIGURA 5.6 – Séries temporais da energia cinética e série temporal do modo de Fourier, utilizando a técnica de continuação de parâmetro. Em (a) $R = 732$, energia cinética, (b) $R = 732$ e (c) $R = 732$ sendo a ampliação de (b), representando a série temporal do modo de Fourier $(Re(\hat{v}_{222}^z))$, (d) $R = 733$, (e) $R = 734$, (f) $R = 735$, (g) $R = 736$ e (h) $R = 736$ sendo a ampliação de (g). 103
- FIGURA 5.7 – Diagrama de bifurcação dos atratores convectivos hidrodinâmicos para $Ta = 0$. Fonte: (PODVIGINA, 2008) (p. 427) (modificado). . . . 104

- FIGURA 5.8 – Diagrama de bifurcação da energia cinética em função do número de Rayleigh R , para $Ta = 0$. As linhas em vermelho representam os atratores caóticos convectivos hidrodinâmicos. 105
- FIGURA 5.9 – Diagrama de Bifurcação da energia cinética em função do número de Rayleigh R , para $Ta = 10$. Os círculos em magenta representam os valores de parâmetro onde o sistema apresenta o comportamento de ponto fixo. Os círculos em azul representam o comportamento periódico. Os círculos em preto representam um comportamento quase-periódico e os círculos em vermelho representam um comportamento do sistema caótico. 107
- FIGURA 5.10 –(a) bifurcações de duplicação de período. Observa-se uma sequência de duplicações de período até $R = 780.96$, além do qual o comportamento é caótico. (b) bifurcação de duplicação de período inversa. Em tal bifurcação, o atrator caótico perde instabilidade, sendo substituído por um atrator periódico, então uma sequência de bifurcações ocorrem, até que seja obtido um único atrator periódico de período 1. 109
- FIGURA 5.11 –Refinamento do diagrama de bifurcação apresentado na Figura 5.9 utilizando a técnica de continuação de parâmetro. Os círculos em vermelho representam o atrator (C). O círculo em azul representa o atrator (P). 110
- FIGURA 5.12 –(a) série temporal intermitente da parte real do modo de Fourier para $R = 1009$. (b) projeção do atrator caótico intermitente no espaço de fase. 110
- FIGURA 5.13 –Espectros de energia calculados a partir da série temporal da energia cinética para diferentes valores do parâmetro de controle R 112
- FIGURA 5.14 –Espectros de energia calculados a partir da série temporal da energia cinética para diferentes valores do parâmetro de controle R 113
- FIGURA 5.15 –Espectros de energia calculados a partir da série temporal da energia cinética para diferentes valores do parâmetro de controle R 115
- FIGURA 5.16 –Espectros de energia calculados a partir da série temporal da energia cinética para diferentes valores do parâmetro de controle R 116
- FIGURA 5.17 –Espectro de energia calculado a partir da série temporal da energia cinética para $R = 4000$ 116

- FIGURA 5.18 – Diagrama de bifurcação da energia cinética em função do número de Rayleigh, R , para $Ta = 50$. Os círculos em magenta representam os valores de parâmetro onde o sistema apresenta o comportamento de ponto fixo. Os círculos em azul representam o comportamento periódico. Os círculos em preto representam um comportamento quase-periódico e os círculos em vermelho representam um comportamento do sistema caótico. 119
- FIGURA 5.19 – Espectros de energia calculados a partir da série temporal da energia cinética para diferentes valores do parâmetro de controle R 121
- FIGURA 5.20 – Espectros de energia calculados a partir da série temporal da energia cinética para diferentes valores do parâmetro de controle R 122
- FIGURA 5.21 – Espectros de energia calculados a partir da série temporal da energia cinética para diferentes valores do parâmetro de controle R 123
- FIGURA 5.23 – Projeção no espaço de fase no plano $Re(\hat{v}_{222}^y) \times Re(\hat{v}_{222}^z)$ representando a coexistência do atrator quase-periódico (preto) e do atrator periódico (azul). 126
- FIGURA 5.24 – Diagrama de Bifurcação da energia cinética em função do número de Rayleigh R para $Ta = 100$. Os círculos em magenta representam os valores de parâmetro onde o sistema apresenta o comportamento de ponto fixo. Os círculos em azul representam o comportamento periódico. Os círculos em preto representam um comportamento quase-periódico e os círculos em vermelho representam um comportamento do sistema caótico. 128
- FIGURA 5.25 – Espectros de energia calculados a partir da série temporal da energia cinética para diferentes valores do parâmetro de controle R 130
- FIGURA 5.26 – Espectros de energia calculados a partir da série temporal da energia cinética para diferentes valores do parâmetro de controle R 131
- FIGURA 5.27 – Espectros de energia calculados a partir da série temporal da energia cinética para diferentes valores do parâmetro de controle R 132
- FIGURA 5.28 – Espectros de energia calculados a partir da série temporal da energia cinética para diferentes valores do parâmetro de controle R 133
- FIGURA 5.29 – Espectros de energia calculados a partir da série temporal da energia cinética para diferentes valores do parâmetro de controle R 134

- FIGURA 5.30 – Refinamento do diagrama de bifurcação da Figura 5.24. (a) diagrama de bifurcação da energia cinética em função de R , plotando os pontos máximos da seção de Poincaré da série temporal da energia cinética. As linhas em preto representam as soluções do sistema em um regime quase-periódico. O círculo em verde representa a solução do sistema em um regime periódico. (b) diagrama de bifurcação da média da energia cinética em função de R . A seta demarcada pela cor preta indica o sistema partindo da esquerda para a direita, de $R = 1940$ a $R = 1950$. A seta demarcada pela cor azul indica o sistema retornando (diminuindo o valor do parâmetro de controle R) da direita para a esquerda, de $R = 1950$ a $R = 1940$. Os quadradinhos sobrepostos representam as soluções em que o sistema apresenta o mesmo comportamento quase-periódico. Em $R = 1950$ o sistema apresenta um comportamento periódico, tanto partindo da esquerda para a direita como partindo da direita para a esquerda, e ao reduzir o valor do parâmetro de controle para $R = 1949$ o sistema apresenta dois regimes, um quase-periódico, representado pelo quadrado na cor preta e outro regime periódico, representado pelo círculo na cor verde. 136
- FIGURA 5.31 – Projeção no espaço de fase no plano $Re(\hat{v}_{222}^x) \times Re(\hat{v}_{222}^y)$ do atrator quase-periódico (preto) e do atrator periódico (verde). 137

- FIGURA 5.32 – Refinamento do diagrama de bifurcação da Figura 5.24. (a) diagrama de bifurcação da energia cinética em função de R , plotando os máximos da série temporal. As linhas em vermelho representam o comportamento caótico do sistema. As linhas em preto representam o comportamento quase-periódico do sistema. A seta indica a direção de partida do diagrama. (b) diagrama de bifurcação da média da energia cinética em função de R . A seta demarcada pela cor laranja indica o sistema partindo da direita para a esquerda, de $R = 2070$ até $R = 2080$. Os círculos em laranja representam o comportamento caótico do sistema. A seta demarcada pela cor magenta indica o sistema retornando (diminuindo o valor de parâmetro R) da direita para a esquerda, partindo de $R = 2080$ até $R = 2070$. Os quadrados na cor magenta representam o comportamento quase-periódico. Os quadrados em magenta e os círculos em laranja sobrepostos representam as soluções em que o sistema apresenta o mesmo comportamento quase-periódico. Em $R = 2076$ o sistema apresenta coexistência de atratores. O atrator caótico coexiste com o atrator quase-periódico. 138
- FIGURA 5.33 – Projeção no espaço de fase no plano $Re(\hat{v}_{222}^x) \times (Re\hat{v}_{222}^y)$ do atrator caótico (laranja) e do atrator quase-periódico (magenta). 139
- FIGURA 6.1 – Comparação das séries temporais da energia magnética em escala log-linear com diferentes grades de resolução, para $P_m = 8$, $Ta = 10$ e $R = 3050$. A linha em preto corresponde à grade numérica de $64 \times 64 \times 32$; a linha vermelha corresponde à grade numérica de $96 \times 96 \times 32$. A fase cinemática tem uma taxa de crescimento de aproximadamente $\gamma \approx 0.172$ em ambas resoluções. 144
- FIGURA 6.2 – Séries temporais da energia cinética na ausência de campo magnético (painéis da esquerda) e projeções $Re(\hat{v}_{222}^y) \times Re(\hat{v}_{222}^z)$ dos atratores no espaço de fase dos coeficientes de Fourier (painéis da direita). Em (a) tem-se o comportamento caótico do sistema. Em (b) tem-se o comportamento quase-periódico. O retângulo pontilhado em azul representa a ampliação da Figura-(b). Em (c) tem-se o comportamento periódico. Em (d)-(e) tem-se o comportamento caótico sistema. 147
- FIGURA 6.3 – Estimativa para o número de Prandtl magnético crítico, P_m^c , para o início da ação do dínamo, em $R = 3000$. O retângulo pontilhado em azul indica uma ampliação do número de Taylor entre $0 \leq Ta \leq 100$. 148

- FIGURA 6.4 – (a) Série temporal da energia magnética gerada a partir de um atrator convectivo hidrodinâmico quase-periódico. (b) Série temporal da energia cinética, após sofrer uma perturbação do campo magnético. 149
- FIGURA 6.5 – (a) Série temporal da energia magnética gerada a partir de um atrator convectivo hidrodinâmico quase-periódico. As setas indicam o intervalo mostrado na ampliação da série temporal. (b) Série temporal da energia cinética, após sofrer uma perturbação do campo magnético. 150
- FIGURA 6.6 – Séries temporais da energia magnética em escala log-linear geradas através dos atratores convectivos. Em (a) $R = 3050$ atrator periódico, (b) $R = 3150$ atrator quase-periódico e (c) $R = 3250$ atrator caótico. 151
- FIGURA 6.7 – Séries temporais da energia cinética para os atratores convectivos para $Ta = 10$ em $R = 3050$ e $P_m = 8$ (a), $R = 3150$ e $P_m = 8$ (b) em $R = 3250$ e $P_m = 9$ (c). 152
- FIGURA 6.8 – Séries temporais da energia magnética em escalas log-linear geradas através dos atratores convectivos. Em (a) $R = 2020$ atrator periódico, (b) $R = 2030$ atrator quase-periódico e (c) $R = 2040$ atrator caótico. 153
- FIGURA 6.9 – Séries temporais da energia magnética em $R = 3000$ mostrando fases dinâmicas transitórias próximas à transição para o início da ação do dínamo, para diferentes números de Taylor e Prandtl magnético. . . 154
- FIGURA 6.10 – (a) Série temporal do campo magnético exibindo intermitência “on-off” com comportamento cíclico semelhante ao ciclo solar. (b) Série temporal do campo magnético suavizada representando os estados máximos (linha vermelha) – “on” – e mínimos (linha azul) – “off” – do ciclo solar. Fonte: (OLEMSKOY; KITCHATINOV, 2013) (p. 6) (modificada). 155
- FIGURA 6.11 – (a) Série temporal da energia magnética exibindo intermitência “on-off” em $R = 3000$, $Ta = 0$ e $P_m = 9$. (b) Série temporal da energia cinética. 156
- FIGURA 6.12 – Série temporal da energia magnética exibindo intermitência “on-off” em $R = 3000$. Em (a) $Ta = 2$, $P_m = 10$. (b) $Ta = 50$, $P_m = 9$. (c) $Ta = 100$, $P_m = 9$. Em (d) $Ta = 600$ e $P_m = 7$ 157

FIGURA 6.13 –(a) Série temporal da energia magnética exibindo intermitência “*on-off*”. (b) Representação do atrator caótico intermitente hidromagnético no espaço de fase no plano $Im(\hat{b}_{212}^x) \times Im(\hat{b}_{121}^y) \times Im(\hat{b}_{222}^z)$. . 158

FIGURA 6.14 –Lei de escala da duração média das fases laminares entre estouros em função da distância ao valor crítico onde a intermitência aparece. 159

Lista de Tabelas

TABELA 5.1 – Atratores para o sistema hidrodinâmico convectivo para $Ta = 10$. . .	106
TABELA 5.2 – Atratores para o sistema hidrodinâmico convectivo para $Ta = 50$. . .	117
TABELA 5.3 – Atratores para o sistema hidrodinâmico convectivo para $Ta = 100$. . .	126
TABELA 6.1 – Atratores para o sistema hidrodinâmico convectivo em função de R e Ta para $P = 0.3$. Os traços indicam ausência de movimentos, ou seja, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. As legendas denotam os respectivos comportamentos do sistema: periódico (P), quase-periódico (QP) e caótico (C). . . .	145
TABELA 6.2 – Continuação da Tabela 6.1.	146

Lista de Abreviaturas e Siglas

MHD	Magnetohidrodinâmica
CMEs	Coronal Mass Ejections
MPI	Message Passage Interface
CFL	Constante de Courant-Friedrich-Lewy
FEM	Força Eletromotriz
CRB	Convecção Rayleigh-Benárd
FOSA	First-Order Smoothing Approximation
MTA	Minimal Tau Approximation
NEMPI	Negative Effective Magnetic Pressure Instability
STF	Stretch-Twist-Fold
RMS	Root-Mean-Square
DNS	Direct Numerical Simulation
FFT	Fast Fourier Transform
ETD	Exponential Time Differencing
PF	Ponto Fixo
P	Periódico
QP	Quase-periódico
C	Caótico
ITM	Intermitente
PSD	Power Spectral Density

Lista de Símbolos

T	Temperatura
ρ	Densidade
G	Gauss
α	Efeito alfa
Ω	Efeito ômega
\mathbf{B}	Campo magnético
$\overline{\mathbf{B}}$	Campo magnético médio
$(\bar{\cdot})$	Indica o valor médio
$(\cdot)'$	Indica a flutuação
\mathbf{E}	Campo elétrico
\mathbf{J}	Densidade de corrente elétrica
μ_0	Permeabilidade magnética no vácuo
ε_0	Constante dielétrica
σ_e	Condutividade elétrica
\mathbf{v}	Vetor velocidade do fluido
∇	Nabla
η	Difusividade magnética
η_t	Difusividade magnética total
R_m	Número de Reynolds magnético
R_e	Número de Reynolds
l	Escala de comprimento
l_0	Pequena escala de comprimento
τ_D	Escala de tempo de difusão magnética
p_{ij}	Tensor de pressão
∇p	Gradiente de pressão
\mathbf{g}	Aceleração gravitacional
ϕ_g	Potencial gravitacional
\mathbf{F}_g	Força gravitacional
$\sigma^{(\mu)}$	Tensor viscoso de <i>stress</i>
δ_{ij}	tensor delta de Kronecker

\tilde{R}	Constante do gás
$\tilde{\mu}$	Massa atômica média
K_B	Constante de Boltzmann [$1.381 \times 10^{-23} J \cdot K$]
γ	Expoente adiabático
$\delta \mathbf{V}$	Pequeno volume de fluido
δT	Gradiente de temperatura
Δz	Deslocamento na direção z
ΔT	Taxa de variação da temperatura
R	Número de Rayleigh
R_c	Número de Rayleigh crítico
P	Número de Prandtl
P_m^c	Número de Prandtl magnético crítico
P_m	Número de Prandtl magnético
Ta	Número de Taylor
k	Número de onda
k_c	Número de onda crítico
κ	Difusividade térmica
ν	Viscosidade cinemática
Ω	Velocidade angular
τ_v	Tempo de difusão de térmica
ε	Força eletromotriz
ε_{ijk}	Tensor de Levi-Civita
β	Difusividade magnética turbulenta
ω	Vorticidade
D	Número de dínamo
D_c	Número de dínamo crítico
$\Delta \Omega$	Variação de velocidade angular
R_\odot^3	Raio solar
c_s	Velocidade do som
\mathbf{A}	Potencial vetor magnético
p	Pressão do fluido
\mathbf{f}	Função forçante
σ	Helicidade cinética
θ	Perfil de temperatura
γ	Taxa de crescimento na fase cinemática

Sumário

1	INTRODUÇÃO	30
2	SISTEMAS DINÂMICOS	37
2.1	Introdução	37
2.2	Conjuntos Limite	39
2.2.1	Atratores	39
2.2.2	Pontos Fixos ou Pontos de Equilíbrios	39
2.2.3	Órbitas Periódicas	40
2.2.4	Órbitas Quase-Periódicas	40
2.2.5	Órbitas e Atratores Caóticos	42
2.2.6	Mapa de Poincaré	42
2.3	Ciclo-Limite	43
2.4	Variedades Invariantes	44
2.5	Bifurcações	44
2.5.1	Bifurcação Local	44
2.5.2	Bifurcação Global	46
3	CONVECÇÃO RAYLEIGH-BÉNARD (CRB) - EQUAÇÕES DA MAGNETOHIDRODINÂMICA (MHD) E TEORIA DO DÍNAMO	49
3.1	Equações da Magnetohidrodinâmica	49
3.1.1	Lei de Ohm	50
3.1.2	Equação de Indução	51
3.1.3	Equação de Movimento	53
3.1.4	Equação de Continuidade	55

3.1.5	Equação de Energia	57
3.2	Convecção Rayleigh-Bénard (CRB)	58
3.3	Equações do Modelo CRB Hidrodinâmica	59
3.3.1	Equações do Modelo CRB sem Rotação	60
3.3.2	Equações do Modelo CRB com Rotação	61
3.4	Teoria do Dínamo	63
3.4.1	Classificação de Dínamos	64
3.4.2	Tipos de Dínamos	65
3.4.3	Dínamo de Herzenberg	65
3.4.4	Dínamo de Zel'dovich	66
3.4.5	Dínamo de Parker	66
3.4.6	Teoria de Dínamo de Campo Médio	67
3.4.7	Efeito Ω	72
3.4.8	Efeito α	72
3.4.9	Dínamo α^2	73
4	TRANSIENTES CAÓTICOS E HISTERESE EM UM MODELO DE DÍ- NAMO α^2	75
4.1	O Modelo Numérico de Dínamo α^2	78
4.1.1	O Código PENCIL	80
4.1.2	Condições Iniciais e de Contorno	81
4.2	Resultados	82
4.2.1	Resolução Numérica	82
4.2.2	Dínamo	83
4.2.3	Diagrama de Bifurcação	87
4.2.4	Histerese e Transientes Caóticos	91
4.2.5	Conclusão	96
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO DO MODELO CRB 3D	97
5.1	Condições de Contorno	97
5.2	Métodos Espectrais	99

5.3	Resolução Numérica	99
5.4	Simulações Numéricas sem Rotação para $Ta = 0$	100
5.5	Simulações Hidrodinâmicas para $P = 0.3, Ta = 0$	101
5.5.1	Atratores Convectivos Hidrodinâmicos	101
5.5.2	Diagrama de Bifurcação da Energia Cinética sem Rotação para Taylor = 0	104
5.6	Simulações Numéricas com Rotação para $Ta = 10$	105
5.6.1	Diagrama de Bifurcação da Energia Cinética com Rotação para $Ta =$ 10	105
5.7	Identificação de Bifurcações	111
5.7.1	Análise dos Espectros de Potência da Energia Cinética para $Ta = 10$	111
5.8	Simulações Numéricas com Rotação para $Ta = 50$	117
5.8.1	Diagrama de Bifurcação da Energia Cinética com Rotação para $Ta =$ 50	117
5.9	Identificação de Bifurcações	118
5.9.1	Análise dos Espectros de Potência da Energia Cinética para $Ta = 50$	118
5.10	Histerese – Coexistência de Atratores	123
5.10.1	Histerese entre $1160 \leq R \leq 1170$	123
5.11	Simulações Numéricas com Rotação para $Ta = 100$	126
5.11.1	Diagrama de Bifurcação da Energia Cinética com Rotação para $Ta =$ 100	126
5.12	Identificação de Bifurcações	129
5.12.1	Análise dos Espectros de Potência da Energia Cinética para $Ta = 100$	129
5.13	Histerese – Coexistência de Atratores	134
5.13.1	Histerese entre $1940 \leq R \leq 1950$	134
5.13.2	Histerese entre $2070 \leq R \leq 2080$	137
5.14	Conclusão	139
6	GERAÇÃO DE CAMPO MAGNÉTICO EM CRB 3D COM ROTAÇÃO - RESULTADOS E DISCUSSÃO	141
6.1	O Modelo Numérico de CRB MHD	141

6.2	Resolução Numérica	143
6.3	Regimes Convectivos	144
6.4	Geração de Campo Magnético	147
6.4.1	Início da Ação do Dínamo	154
6.4.2	Dínamo Intermitente	154
6.5	Conclusão	159
7	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	161
7.1	Conclusões	161
7.2	Trabalhos Futuros	163
	REFERÊNCIAS	164
	APÊNDICE A – TRABALHO PUBLICADO	175
A.1	Trabalho publicado em <i>Journal of Physics: Complexity</i>	175
	APÊNDICE B – MÉTODOS NUMÉRICOS PARA O MODELO CRB .	187
B.1	Expansões de Fourier	187
B.2	Erro de <i>Aliasing</i>	189
B.3	Transformações da Série de Fourier Seno e Cosseno	191
B.4	Discretização Espacial	192
B.5	Discretização Temporal - Diferenciação Temporal Exponencial	193

1 Introdução

Acredita-se que um mecanismo de dínamo, um processo que converte energia cinética em magnética relacionado com movimentos turbulentos do plasma, seja a principal causa do magnetismo em corpos astrofísicos, tais como estrelas, planetas, galáxias, aglomerados de galáxias e discos de acreção (BRANDENBURG; SUBRAMANIAN, 2005). Sugere-se que deve haver ação de um dínamo para que os campos magnéticos desses corpos sejam amplificados a partir de campos magnéticos fracos (campos sementes) (HAUGEN *et al.*, 2004). No caso da Terra, o campo magnético é gerado através do processo de convecção térmica que ocorre no núcleo externo de ferro líquido do planeta (KRAUSE; RÄDLER, 1980). A dinâmica do fluido condutor é fortemente influenciada por uma combinação de forças de Coriolis, devido à rotação da Terra, e de Lorentz, associada ao campo magnético (VERHOGEN, 1961; GLATZMAIER; ROBERTS, 1998). No Sol, é a turbulência na zona convectiva, também influenciada fortemente pelas forças de Coriolis e de Lorentz, que gera o campo magnético, que ascende na fotosfera solar para fornecer exposições da atividade solar, como a formação de grandes *loops* de plasma, violentas explosões e ejeções de massa coronal (CMEs - *Coronal Mass Ejections*) (PRIEST, 2014). Atividades estelares semelhantes à do Sol foram observadas para diferentes classes de estrelas (veja, por exemplo – BERDYUGINA (2005)). No entanto, mesmo a teoria do dínamo sendo plausível para explicar a amplificação dos campos magnéticos, ainda há um imenso debate sobre qual a origem dos campos sementes (GRASSO; RUBINSTEIN, 2001). No caso de galáxias e aglomerados de galáxias, desconhece-se a origem dos campos magnéticos (MOFFATT, 1978).

O Sol é a nossa estrela mais próxima, sendo um objeto de estudo há milhares de anos, logo, torna-se importante para a astronomia porque muitos fenômenos que só podem ser estudados indiretamente em outras estrelas podem ser observados diretamente no Sol (por exemplo, rotação estelar, manchas solares e a estrutura da superfície estelar) (STIX, 2004). O campo magnético do Sol manifesta-se em diferentes formas, exibindo uma diversidade de fenômenos em uma ampla gama de escalas espaciais, temporais e de energia. A observação do campo magnético de grande escala dá-se através de manchas solares (MESTEL, 2012), que são localizadas em sua superfície, sendo regiões escuras e mais frias que a média local de temperatura, apresentando intensas concentrações de campos magnéticos. As manchas são escuras porque liberam menos energia devido ao forte campo magnético local inibir o

fluxo de calor do interior do Sol (PROCTOR, 2006; PRIEST, 2014).

Apesar do progresso neste campo de pesquisa devido aos avanços de simulações numéricas durante os últimos anos, o mecanismo de formação de manchas solares ainda não está totalmente esclarecido, havendo um imenso debate quanto a isso. Existem duas categorias principais de teorias em relação à formação das mesmas: uma categoria explica os processos de formação como um fenômeno que ocorre no interior do Sol e a outra como um fenômeno que ocorre próximo à superfície do Sol. O primeiro pressuposto é a amplificação do campo magnético, logo abaixo da zona convectiva, onde se acredita haver um forte cisalhamento (*shear*) (OSSENDRIJVER, 2003; BRANDENBURG; SUBRAMANIAN, 2005; RINCON, 2019). No segundo pressuposto, o campo magnético concentra-se perto da superfície do Sol, provocado por uma instabilidade magnetohidrodinâmica (MHD) (BRANDENBURG *et al.*, 2016).

O interior do Sol divide-se em três regiões, como pode ser observado na Figura 1.1, núcleo, zona radiativa e zona convectiva. A fonte de energia do Sol deriva de reações termonucleares, que ocorrem no núcleo, uma região com temperatura $T = 1.5 \times 10^7$ K e densidade $\rho = 1.6 \times 10^5$ kg/m^3 . Essas reações convertem hidrogênio em hélio, liberando energia térmica no processo, produzindo uma forte pressão que atua contra a gravidade para que o Sol não entre em colapso. Tal processo denomina-se fusão nuclear. A energia liberada no núcleo é transportada por processo de radiação através da zona radiativa, onde a temperatura é da ordem de $T = 8 \times 10^6$ K, com densidade de 2×10^4 kg/m^3 a 2×10^2 kg/m^3 . A zona convectiva caracteriza-se pelo transporte de energia através da convecção térmica, com temperatura $T = 2 \times 10^6$ K e densidade $\rho = 150$ kg/m^3 (PRIEST, 2014; KARTTUNEN *et al.*, 2016). No limite entre a zona radiativa e a zona convectiva existe uma camada de forte cisalhamento denominada taoclina, onde a taxa de rotação diferencial varia rapidamente no interior solar, com temperatura $T = 2.3 \times 10^6$ K e acredita-se que o campo magnético de grande escala do Sol é gerado nesta região (HUGHES *et al.*, 2007).

No século XVI, Galileu Galilei observou a existência de manchas solares na superfície do Sol através de um telescópio e reconheceu que tais manchas eram características próprias do Sol. Ele descreveu o formato geométrico das mesmas, o tempo de vida de manchas solares individuais, sendo a primeira pessoa a sugerir haver um padrão na posição das manchas solares. Entretanto, foi apenas no início do século XX que George Hale (1908) observou que as manchas correlacionam-se com uma intensa concentração de campo magnético (HALE, 1908). Sabe-se que o campo magnético de uma mancha solar (Figura 1.2) é da ordem de 2500 a 4000 G. Devido a esses campos magnéticos fortes, a convecção é reduzida (BORRERO; ICHIMOTO, 2011).

Em 1843, Schwabe descobriu um ciclo periódico no aparecimento de manchas solares, estimando o período desse ciclo em 11 anos (Fig. 1.3). Tal ciclo ficou conhecido como ciclo solar de Schwabe. Sabe-se que nem todos os ciclos têm o mesmo período, sendo que

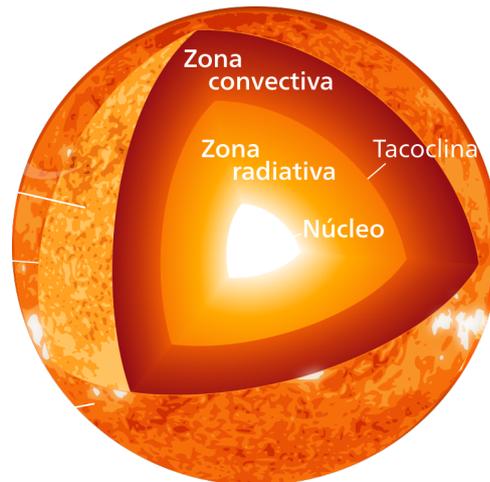


FIGURA 1.1 – Ilustração do esquema de camadas do Sol.

Fonte - [https://pt.m.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Sun_\\$poster\\$.svg](https://pt.m.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Sun_$poster$.svg) (modificada).

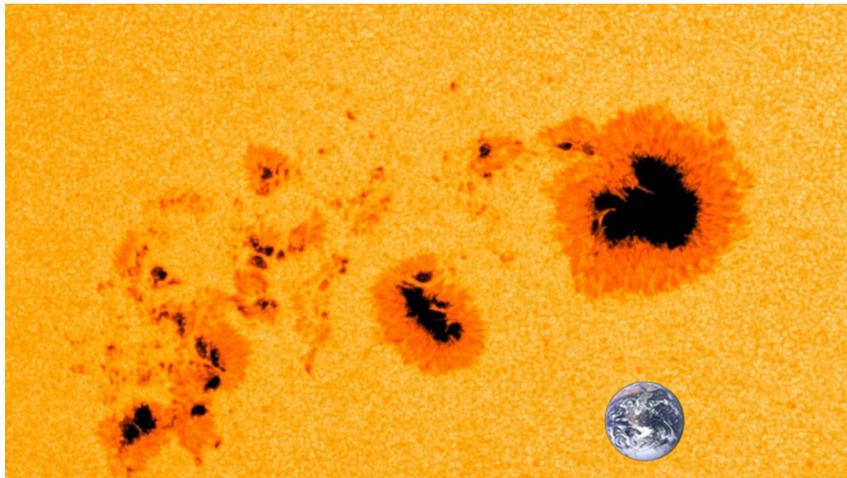


FIGURA 1.2 – Imagem de uma mancha solar. A ilustração mostra o tamanho de uma mancha solar, comparável ao tamanho da terra. Fonte - <https://www.nasa.gov>.

alguns ciclos podem demorar um pouco mais de 11 anos e outros podem ser mais curtos. Anos depois da descoberta de Schwabe, WOLF (1849) iniciou um registro sistemático de manchas solares envolvendo vários centros observacionais e estabeleceu uma técnica padrão de medição da atividade magnética solar, que ficou conhecida como número de Wolf de manchas solares. A Figura 1.4 representa um histograma, mostrando a proporção da área do hemisfério visível ocupado pelas manchas em função do tempo (PRIEST, 2014).

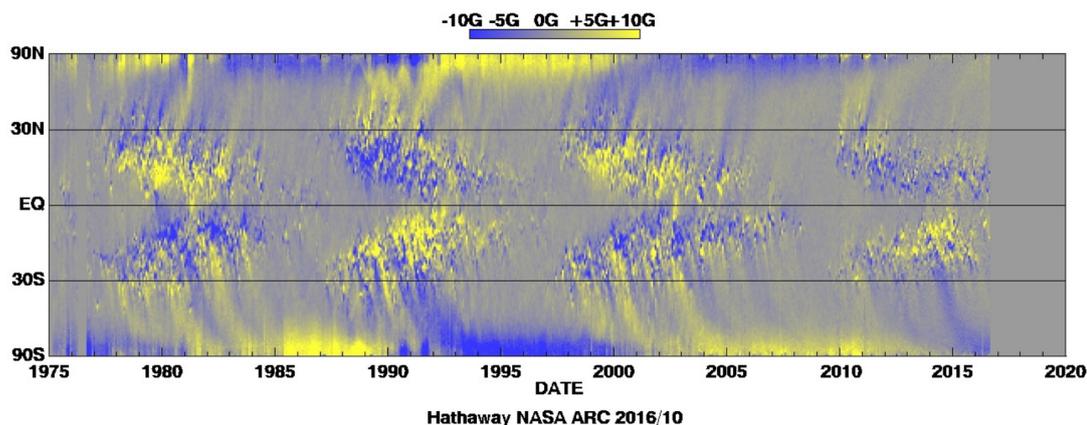


FIGURA 1.3 – Representação do “diagrama de borboleta” mostrando a variação da intensidade do campo magnético (em Gauss) por latitude em relação ao tempo (em anos). As variações periódicas ao longo do tempo definem o ciclo solar. As estruturas são similares as asas de uma borboleta e mostram a migração das manchas solares em direção ao equador solar.

Fonte - <https://solarscience.msfc.nasa.gov/dynamo.shtml>.

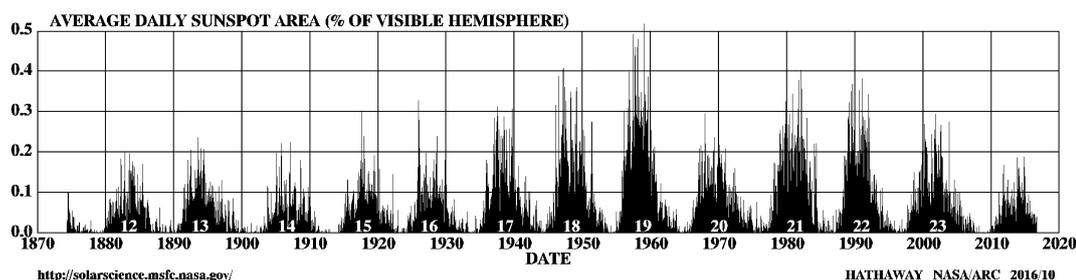


FIGURA 1.4 – Histograma representando o número diário de manchas solares variando no tempo.

Fonte - <https://solarscience.msfc.nasa.gov/images/bfly.gif>.

Pressupõe-se que o ciclo solar seja o resultado da ação do dínamo operando em algum lugar na zona convectiva. Parker descreveu essa ação através dos processos que combinam os efeitos indutivos através do cisalhamento (*shear*) em um campo magnético de grande escala, por meio da rotação diferencial que ocorre no interior do Sol, combinada com os movimentos turbulentos convectivos helicoidais presentes no campo de pequena escala. O efeito Ω produz um campo magnético toroidal a partir de um campo poloidal. O efeito α associado à helicidade do campo de velocidade é capaz de produzir um campo magnético poloidal a partir do campo toroidal. Verifica-se o efeito α em estrelas convectivas como é o caso do Sol (PARKER, 1955b). Ambos os efeitos $\alpha - \Omega$ serão tratados com mais detalhes posteriormente.

Assim, uma possível explicação para a formação de manchas solares baseia-se na existência de tubos de fluxo magnético (da ordem de 10^5 G) gerados por algum mecanismo

desconhecido na base da zona de convecção ou logo abaixo dela. Acredita-se que sua ascensão à superfície solar leve à formação de manchas solares. Tal ideia teve forte influência sobre a modelagem de dínamo solar nos chamados modelos de transporte de tubos de fluxo magnéticos, onde o efeito α é utilizado para orientar o aumento dos tubos de fluxo toroidais da tacoclina para formar campos poloidais próximo à superfície. Então, um fluxo meridional deve levar o campo poloidal formado na superfície de volta para a tacoclina, onde é cortado de volta à forma toroidal, sendo amplificado para fechar o *loop* do dínamo (DIKPATI; CHARBONNEAU, 1999). A heliosismologia¹ permitiu compreender como a rotação diferencial muda no interior solar, contribuindo para a intensificação do campo magnético (HUGHES *et al.*, 2007)

Embora tais fenômenos sejam plausíveis, esses conceitos enfrentam várias dificuldades teóricas: a geração e o armazenamento de campos magnéticos suficientemente fortes provaram ser difíceis de se reproduzir numericamente, como demonstrado por simulações (FAN, 2009; GUERRERO; KÄPYLÄ, 2011). ARLT *et al.* (2005), através de simulações tridimensionais, questionaram a estabilidade da tacoclina para campos magnéticos fortes. BRANDENBURG (2005) relatou que as velocidades de rotação das regiões ativas são consistentes com a ideia de que manchas solares formam-se próximo da superfície, sugerindo a busca de um novo mecanismo para a formação de manchas solares.

Outra possibilidade para a formação de manchas solares próximo à superfície é a *instabilidade da pressão magnética efetiva negativa* (do inglês, *Negative Effective Magnetic Pressure Instability* (NEMPI)), a qual consiste na redução da pressão turbulenta total combinada com forte estratificação, podendo levar a uma instabilidade MHD provocada por campos magnéticos de grande escala. Como resultado deste processo, a pressão magnética efetiva, isto é, a combinação de pressão magnética média e pressão turbulenta, torna-se negativa. Tal instabilidade não produz novos fluxos magnéticos, mas redistribui o campo magnético de grande escala (BRANDENBURG *et al.*, 2016). Esta instabilidade foi cuidadosamente estudada analiticamente em uma série de artigos publicados por Kleeorin *et al.* (KLEEORIN *et al.*, 1989; KLEEORIN *et al.*, 1990; KLEEORIN *et al.*, 1993; KLEEORIN; ROGACHEVSKII, 1994; KLEEORIN *et al.*, 1996). A primeira demonstração numérica da instabilidade foi apresentada por BRANDENBURG *et al.* (2011), através de simulações numéricas diretas (DNS, do inglês, *Direct Numerical Simulation*).

Os estudos de convecção térmica exibem uma série de fenômenos complexos, incluindo instabilidades, formação de padrões, caos e turbulência (CHANDRASEKHAR, 1981; SWINNEY; GOLLUB, 1981; CROSS; HOHENBERG, 1993; MANNEVILLE, 2004; GUPTA *et al.*, 2015; CHIMANSKI *et al.*, 2016). Uma forma idealizada para estudar tais sistemas é a Convecção de Rayleigh-Bénard (CRB) (BÉNARD, 1900; BÉNARD, 1901; RAYLEIGH, 1916), que vem

¹A heliosismologia é o estudo de ondas sonoras provenientes do interior solar, visa compreender a estrutura interna e a dinâmica do interior solar (PRIEST, 2014).

sendo estudada extensivamente no contexto de dinâmica não-linear (LIBCHABER *et al.*, 1983; PODVIGINA, 2006; PODVIGINA, 2008; CHERTOVSKIH *et al.*, 2015; CHERTOVSKIH *et al.*, 2017). Nesse sistema, uma camada de fluido confinado entre duas placas horizontais separadas por uma distância h é aquecida por baixo e resfriada por cima. A geometria simplificada da CRB e as propriedades termodinâmicas envolvidas produzem estruturas de fluxos interessantes (padrões hexagonais, rolos de convecção), como observado em um sistema geofísico e astrofísico (GLATZMAIER, 2013). Uma análise altamente extensa dos problemas de estabilidade hidrodinâmica e hidromagnética da teoria linear, incluindo investigações dos efeitos da rotação na CRB, foi apresentada e discutida com detalhes por CHANDRASEKHAR (1981).

A análise de dinâmica não-linear e teoria do caos desempenha um importante papel para a compreensão de diversos fenômenos físicos que ocorrem em CRB. CHERTOVSKIH *et al.* (2015) estudaram a transição para regimes hipercaóticos envolvendo regimes quase-periódicos, coexistência de atratores e atratores caóticos intermitentes, no modelo CRB sem campo magnético. CHIMANSKI *et al.* (2016) investigaram, através de simulações numéricas 3D, a rota para caos no modelo CRB na ausência de campo magnético, com o número de Prandtl correspondendo ao seu valor para convecção no núcleo externo da terra. Eles identificaram várias bifurcações e relataram uma rota para hipercaos através de intermitência. CHERTOVSKIH *et al.* (2017) investigaram a geração de campo magnético no modelo CRB em simulações 3D, relatando a ação intermitente do dínamo.

A motivação do presente trabalho consiste em investigar a geração de campos magnéticos de grande escala em um fluido condutor elétrico, utilizando como bases teóricas os conceitos de sistemas dinâmicos. Primeiro, investigou-se a presença de transientes caóticos e histerese em um modelo de dínamo não-linear, através de simulações numéricas 3D das equações de MHD em uma caixa periódica com um forçante externo. Para isso, construiu-se um diagrama de bifurcação, variando-se como parâmetro de controle a helicidade cinética do fluxo. Desta forma, investigamos a transição para o dínamo de grande escala. Segundo, investigou-se a geração de campo magnético no modelo CRB. Para isso, estudamos a convecção hidrodinâmica sem rotação e com rotação em uma determinada faixa de parâmetros que controlam a rotação e a convecção e observamos uma grande variedade de regimes convectivos, sendo gerada uma série de diagramas de bifurcação. Depois, analisamos os regimes convectivos mais benéficos para a ação do dínamo. Ainda nesse contexto, encontramos atratores caóticos hidromagnéticos intermitentes e relacionamos uma possível aplicação para o ciclo solar, com comportamentos parecidos com os relatados por SPIEGEL (2008) e REMPEL *et al.* (2009) em simulações sem rotação. O principal objetivo desta etapa do estudo é compreender a ação do dínamo de grande escala em sistemas convectivos com rotação.

Este trabalho organiza-se da seguinte maneira: o capítulo 2 apresenta uma funda-

mentação teórica contendo uma introdução aos conceitos básicos de sistemas dinâmicos, necessários para a compreensão dos resultados obtidos. O capítulo 3 apresenta as equações da MHD, assim como uma discussão sobre a teoria do dínamo. O modelo CRB é apresentado, assim como as equações. No capítulo 4 são apresentados o modelo numérico da turbulência forçada externamente em caixa periódica e os resultados obtidos através de simulações tridimensionais utilizando o código *PENCIL*. No capítulo 5 são apresentados o modelo numérico CRB 3D e os resultados obtidos na ausência de rotação e na presença de rotação, sem campo magnético. No capítulo 6 são apresentados os resultados do modelo CRB 3D com rotação e campo magnético. As conclusões e trabalhos futuros são apresentados no capítulo 7.

2 Sistemas Dinâmicos

2.1 Introdução

Sistemas dinâmicos são sistemas que obedecem uma regra determinística onde seus estados alteram-se à medida que o tempo evolui. Consistem em um conjunto de estados possíveis, com uma regra determinística que determina o presente estado utilizando o estado anterior (ALLIGOOD *et al.*, 1996).

Um sistema dinâmico é representado através de um conjunto de *variáveis de estado*, uma *regra dinâmica* e um conjunto de *parâmetros de controle*. O conjunto de variáveis de estado forma o que é denominado *espaço de fase*. Define-se a dimensão de um espaço de fase através do número de variáveis de estado para descrever o estado de um sistema dinâmico em um dado instante de tempo. A variável tempo pode ser contínua, para o caso de equações diferenciais, ou pode ser discreta, no caso de mapas. A evolução temporal do sistema representado no espaço de fase é definida como *trajetória* ou *órbita* (ALLIGOOD *et al.*, 1996).

Um sistema dinâmico contínuo pode ser representado por um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs), para o caso de sistemas N dimensionais, sendo neste caso o sistema definido por um conjunto de N equações, adquirindo a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t), a), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t), a), \\ &\vdots \\ \frac{dx_N}{dt} &= f_N(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t), a),\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde x_1, x_2, \dots, x_N , representam as variáveis de estado do sistema dinâmico, que caracterizam o estado do sistema, para um tempo t , e a representa um conjunto de parâmetros de controle. Uma *trajetória* no espaço de fase representa a evolução no tempo de uma condição inicial \mathbf{x}_0 (Figura 2.1) (STROGATZ, 1994). Considerando um sistema dissipativo,

divide-se o comportamento de uma trajetória em duas fases: um *transiente inicial* e a outra em *regime*. O transiente inicial é uma região do espaço de fase que a trajetória de uma condição inicial x_0 abrange antes de convergir, assintoticamente, para um conjunto de pontos denominados *regime* (Fig. 2.2). Define-se um conjunto como sendo atrator se ele atrai uma porção considerável (i. e., de volume não nulo) do espaço de fase à sua volta. Em um sistema com mais de um atrator diferente nem todas as condições iniciais convergem para o mesmo atrator. Se o sistema dinâmico apresentar mais de um atrator, cada um deles possui a sua própria *bacia de atração*. Uma bacia de atração é o conjunto de pontos cujas órbitas convergem para um atrator (STROGATZ, 1994; ALLIGOOD *et al.*, 1996; HILBORN, 2000).

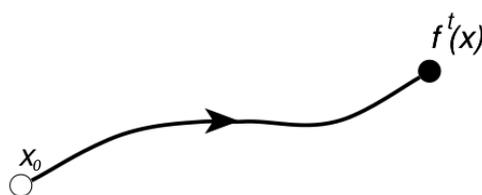


FIGURA 2.1 – Evolução temporal de uma trajetória, dada uma condição inicial x_0 .

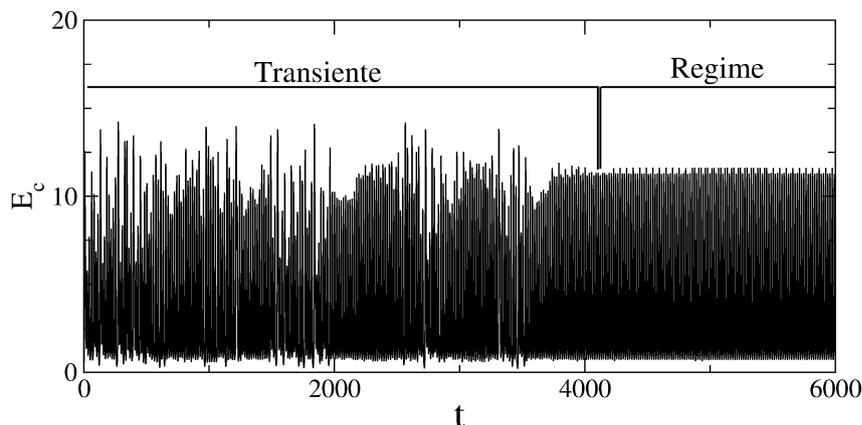


FIGURA 2.2 – Exemplo de uma série temporal, ilustrando um transiente inicial, antes de convergir para o regime.

Pode-se classificar sistemas dinâmicos em *conservativos* e *dissipativos*. Um sistema é classificado como conservativo se o volume no espaço de fase não se altera com o tempo, ou seja, dada a evolução de um elemento de volume no espaço de fase, o mesmo se conserva. Um sistema é classificado como dissipativo se o volume no espaço de fase se contrai com a evolução temporal. Um sistema dinâmico dissipativo caracteriza-se pela presença de *atratores*, e os mesmos podem apresentar uma variedade de comportamentos, dependendo da escolha dos parâmetros de controle, tais como *pontos fixos* ou *pontos de equilíbrio*, *órbitas periódicas*, *quase-periódicas* e *conjuntos caóticos* (ALLIGOOD *et al.*, 1996).

2.2 Conjuntos Limite

Em um sistema dinâmico de tempo contínuo, um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ está no conjunto ω -limite, $\omega(\mathbf{x}_0)$, da solução $\phi_t(\mathbf{x}_0)$, se houver uma sequência de pontos na órbita de \mathbf{x}_0 a qual converge para \mathbf{x} quando $t \rightarrow \infty$. Para sistemas com tempo reverso, a definição assemelha-se. Um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ está no conjunto α -limite, $\alpha(\mathbf{x}_0)$, da solução $\phi_t(\mathbf{x}_0)$ se houver uma sequência de pontos na órbita de \mathbf{x}_0 que converge para \mathbf{x} quando $t \rightarrow -\infty$ (ALLIGOOD *et al.*, 1996).

2.2.1 Atratores

Um aspecto importante para a compreensão dos fenômenos de sistemas dinâmicos é a descrição de atratores, sendo um conjunto ω -limite que atrai um conjunto de condições iniciais com medida diferente de zero (medida não-nula para comprimento, área ou volume, dependendo se a dimensão do espaço de fase for um, dois ou maior). O conjunto de condições iniciais atraídas para o atrator é conhecida como *bacia de atração* (ALLIGOOD *et al.*, 1996).

A seguir descrevem-se os comportamentos dinâmicos de órbitas sobre os conjuntos limites.

2.2.2 Pontos Fixos ou Pontos de Equilíbrios

Um *ponto fixo*, ou *ponto de equilíbrio*, é uma solução constante para as equações do sistema. Se $\phi_t(\mathbf{x})$ é o fluxo do sistema e $\bar{\mathbf{x}}$ é o ponto fixo, então $\phi(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}}$ para todo t . Pode-se classificar um *ponto fixo* quanto à sua estabilidade: estável, assintoticamente estável e instável (ALLIGOOD *et al.*, 1996).

Define-se $\bar{\mathbf{x}}$ como um *ponto fixo*, ou *ponto de equilíbrio estável* se soluções próximas a $\bar{\mathbf{x}}$, permanecem próximas a $\bar{\mathbf{x}}$ conforme o tempo aumenta.

Define-se $\bar{\mathbf{x}}$ como *ponto fixo*, ou *ponto de equilíbrio assintoticamente estável* se toda solução suficientemente próxima de $\bar{\mathbf{x}}$ tende a $\bar{\mathbf{x}}$ conforme o tempo aumenta. *Pontos fixos*, ou *pontos de equilíbrios assintoticamente estáveis* são chamados de atratores.

Define-se $\bar{\mathbf{x}}$ como *ponto fixo*, ou *ponto de equilíbrio instável* se soluções próximas a $\bar{\mathbf{x}}$ se distanciam conforme o tempo aumenta.

2.2.3 Órbitas Periódicas

Uma órbita periódica é uma trajetória que repete de maneira exata, seu comportamento após a passagem de um intervalo fixo de tempo (Fig. 2.3). Um fluxo de sistema contínuo autônomo ϕ_t é periódico se $\phi_t(\mathbf{x}) = \phi_{t+T}(\mathbf{x})$ para todo t e para algum $T > 0$, denominado período. No espaço de fases órbitas periódicas são representadas por curvas fechadas. Se uma órbita periódica possui uma vizinhança que não contém outras soluções periódicas, ela é chamada *ciclo limite* (PARKER; CHUA, 1989).

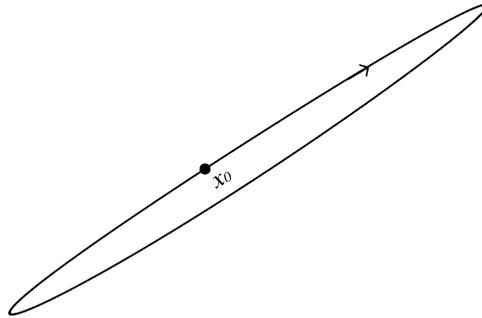


FIGURA 2.3 – Órbita periódica iniciando sua evolução em um ponto x_0 e retornando exatamente a este ponto após um período de tempo.

2.2.4 Órbitas Quase-Periódicas

As órbitas quase-periódicas podem ser representadas como uma combinação de um número finito de órbitas periódicas com frequências incomensuráveis. Para o movimento quase-periódico, as trajetórias restringem-se à superfície de um toro no espaço de fase. Pode-se descrevê-las matematicamente considerando a transformada de Fourier de uma órbita periódica $\phi_t(\mathbf{x}) = \phi_{t+T}(\mathbf{x})$,

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(\mathbf{x}) \exp(i\omega t) dt,$$

onde $\hat{f}(\omega)$ consiste em picos localizados em frequências múltiplas de uma frequência fundamental $\Omega = 2\pi/T$. Um movimento quase-periódico pode ser descrito, como citado anteriormente, como uma combinação de movimentos periódicos com diferentes frequências fundamentais e *incomensuráveis*. Isto significa que nenhuma frequência Ω_i pode ser descrita como uma combinação linear das outras usando coeficientes que são números racionais, ou seja, uma relação da seguinte forma

$$m_1\Omega_1 + m_2\Omega_2 + \dots + m_N\Omega_N = 0,$$

não pode ser descrita para nenhum conjunto de m_i inteiros, exceto para a solução trivial $m_1 = m_2 = \dots = m_N = 0$ (OTT, 2002). A Figura 2.4, refere-se a uma órbita quase-

periódica com duas frequências fundamentais, Ω_1 e Ω_2 , em um toro-2 $S^2 := S_1 \times S_2$, onde cada S_i representa um movimento periódico relacionado a uma das frequências fundamentais incomensuráveis.

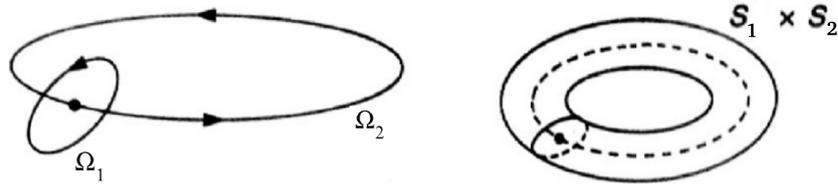


FIGURA 2.4 – Uma órbita quase-periódica com duas frequências fundamentais distintas, Ω_1 e Ω_2 , situada sobre um toro $S^2 := S_1 \times S_2$, onde cada S_i é um componente periódico. Fonte: (PARKER; CHUA, 1989) (p. 18) (modificada).

Se os dois períodos S_1 e S_2 forem comensuráveis, existem dois números inteiros p e q tais que $pS_1 = qS_2$. Após o tempo pS_1 , a trajetória realiza p ciclos na primeira direção e q ciclos na segunda direção. Neste caso, forma-se um ciclo limite com período pS_1 . Entretanto, quando os períodos são incomensuráveis, não existem tais p e q e a órbita nunca se fecha. Neste caso, define-se o *número de rotação* como o número médio de rotações executadas através da órbita na menor direção para cada rotação realizada na maior direção,

$$R = \Omega_1/\Omega_2.$$

Quando R é irracional, a órbita preenche o toro sendo classificada como um movimento quase-periódico, caso contrário, R é racional e a órbita se fecha sobre si mesma, sendo assim, um movimento periódico. A Figura 2.5 (a) exemplifica uma órbita quase-periódica de duas frequências sobre um toro em um espaço tridimensional. A Figura 2.5 (b) ilustra uma órbita periódica com um número de rotação $R = 3$ (PARKER; CHUA, 1989; OTT, 2002). Adaptado da tese de doutorado de REMPEL (2006).

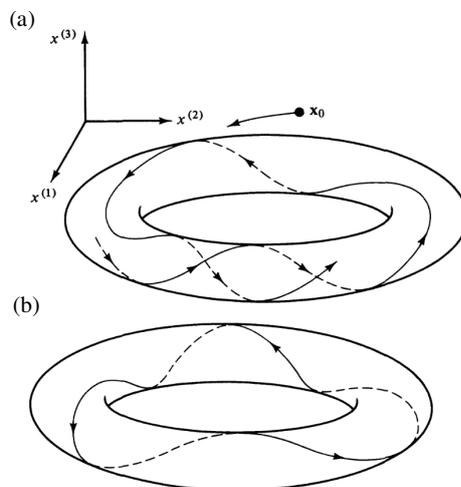


FIGURA 2.5 – (a) Ilustração de uma órbita quase-periódica com duas frequências incomensuráveis situada em um toro em um espaço tridimensional. (b) Uma órbita periódica com número de rotação $R = 3$. Fonte: (OTT, 2002) (p. 189).

2.2.5 Órbitas e Atratores Caóticos

Órbitas caóticas são órbitas limitadas, que não tendem para um comportamento de ponto fixo, periódico ou quase-periódico, e apresentam *dependência sensível às condições iniciais*. Uma órbita apresenta sensibilidade a condições iniciais se órbitas vizinhas arbitrariamente próximas tendem a se afastar exponencialmente dela, como ilustrado na Figura 2.6 (ALLIGOOD *et al.*, 1996).

Considere um ponto x em uma órbita caótica, se x pertence ao seu próprio conjunto ω -limite, $\omega(x)$, então $\omega(x)$ é denominado conjunto caótico. Se este conjunto caótico for também um atrator ele denomina-se *atrator caótico* (DEVANEY, 1992; ALLIGOOD *et al.*, 1996; REMPEL, 2006).

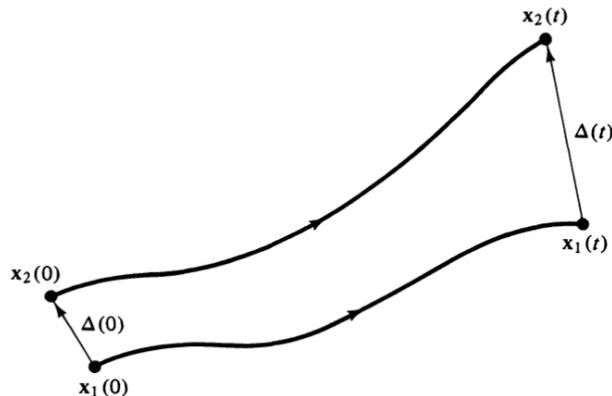


FIGURA 2.6 – Evolução temporal de duas órbitas, onde $\mathbf{x}_1(0)$ e $\mathbf{x}_2(0)$ representam duas condições iniciais próximas, separadas por uma distância $\Delta(0)$. Após um certo tempo, as duas órbitas se afastam para alguma distância $\Delta(t) > \Delta(0)$. Fonte: (OTT, 2002) (p. 16).

2.2.6 Mapa de Poincaré

O *mapa de Poincaré* é uma ferramenta clássica para análise de sistemas dinâmicos. Através do mapa de Poincaré é possível substituir um fluxo de tempo contínuo de um sistema n -dimensional em um fluxo discreto de um sistema com dimensão $n - 1$. A Figura 2.7 representa um exemplo de mapa de Poincaré, onde se visualiza a órbita \mathbf{C} cruzando a superfície de Poincaré, o plano \mathbf{S} é definido pela constante \mathbf{x}_3 . Cada vez que a trajetória \mathbf{C} cruza o plano \mathbf{S} de cima para baixo, como nos pontos \mathbf{A} e \mathbf{B} representados na Figura 2.7, registra-se então o ponto de cruzamento no plano \mathbf{S} , tais pontos são denominados como *pontos de Poincaré*. Neste caso, $P(A) = B$ onde $P(A)$ representa a iteração do mapa P no ponto A (ALLIGOOD *et al.*, 1996).

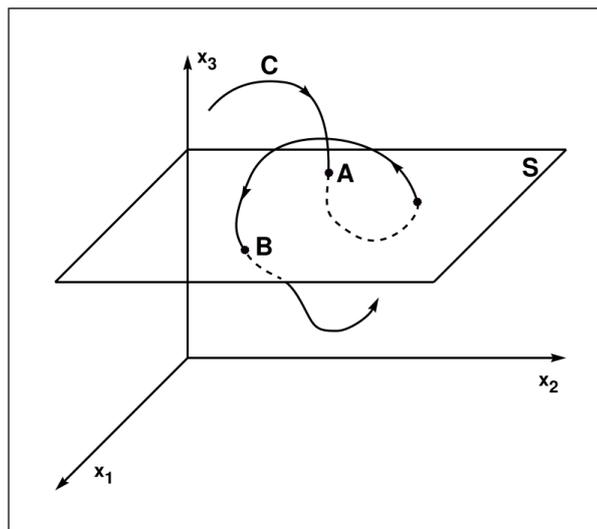


FIGURA 2.7 – Mapa de Poincaré representando uma típica trajetória **C** formados por pontos registrados quando a trajetória **C** cruza o plano de Poincaré de cima para baixo em um sistema tridimensional. Fonte: (ALLIGOOD *et al.*, 1996) (p. 49).

2.3 Ciclo-Limite

Um *ciclo-limite* é uma trajetória fechada e isolada, que pode aparecer no espaço de fase de sistemas não lineares. Trajetória isolada significa ausência de outras trajetórias fechadas infinitesimalmente próximas. Por isso, as trajetórias vizinhas a um ciclo-limite devem ou se aproximar ou se afastar dele em espiral. Existem basicamente três tipos de ciclos limites: ciclos limites estáveis, instáveis e semiestáveis. Um ciclo-limite é estável quando as trajetórias vizinhas se aproximam. Se as trajetórias vizinhas se afastam, o ciclo-limite é instável. Se as trajetórias se aproximam por um lado, mas se afastam, por outro, o ciclo-limite é chamado de semiestável. Esses três tipos de ciclos-limites são ilustrados na Figura 2.8 (LAYEK, 2015).

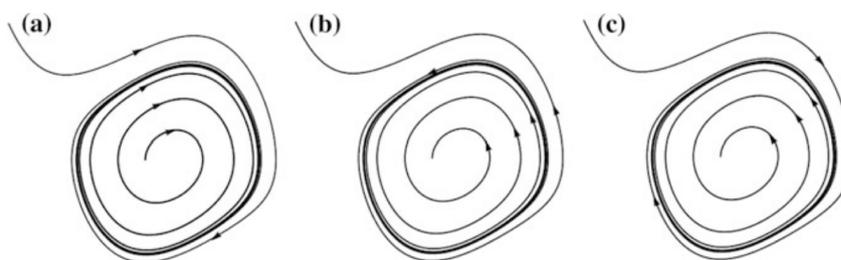


FIGURA 2.8 – Ciclo-limite estável (a), instável (b) e semiestável (c). Fonte: (LAYEK, 2015) (p. 177).

2.4 Variedades Invariantes

As variedades podem ser definidas como espaços topológicos que se assemelham a um espaço euclidiano, \mathbb{R}^n , isto é, cada ponto de uma variedade deve ter uma vizinhança que se assemelha ao \mathbb{R}^n . Em termos geométricos, são objetos no espaço de fase que permanecem invariantes em relação à dinâmica do sistema, ou seja, as órbitas que começam na variedade permanecem nela. Em sistemas dinâmicos, variedades são representadas por curvas ou superfícies no espaço de fase associadas a pontos de equilíbrio do tipo sela (ALLIGOOD *et al.*, 1996).

2.5 Bifurcações

Bifurcações descrevem qualquer mudança na dinâmica do sistema ao variar-se um ou mais parâmetros de controle. Tais mudanças estão ligadas a uma mudança das propriedades topológicas e/ou de estabilidade do sistema, conforme os parâmetros do sistema passam por valores críticos (ALLIGOOD *et al.*, 1996). Considere um sistema de tempo contínuo

$$\dot{x} = f(x, \mu),$$

onde $\mu \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de controle. À medida que μ se altera, os conjuntos limite do sistema também alteram-se. Uma mudança qualitativa pode ocorrer no sistema dinâmico apenas quando o sistema é estruturalmente instável. Por exemplo, se para um determinado valor do parâmetro de controle μ as propriedades topológicas de um conjunto limite alteram-se ou um conjunto limite muda de instável para atrator, ou vice-versa, diz-se que o sistema sofreu uma bifurcação, e agora μ_c é o ponto crítico de bifurcação. Aqui, mudanças topológicas referem-se a mudanças consideráveis na forma ou tamanho de conjuntos limite, como as que ocorrem nas crises, descritas abaixo. Um sistema é dito estruturalmente estável quando pequenas perturbações não modificam o comportamento qualitativo das suas soluções. E um sistema é dito estruturalmente instável, se ao variar-se os valores dos parâmetros em torno de números críticos, a dinâmica do sistema se modifica qualitativamente (PARKER; CHUA, 1989).

Classificam-se bifurcações em dois tipos: bifurcação local e bifurcação global.

2.5.1 Bifurcação Local

Bifurcações locais são mudanças qualitativas de comportamento de um sistema dinâmico que ocorrem na vizinhança local de um ponto fixo no espaço de fase, ocasionando a destruição, criação ou alteração de estabilidade do ponto fixo (STROGATZ, 1994). Al-

guns dos tipos mais comuns desta categoria de bifurcação podem ser: bifurcação sela-nó, forquilha, Hopf e duplicação de período.

2.5.1.1 Bifurcação Sela-Nó

A bifurcação sela-nó é um mecanismo básico de criação ou destruição de pontos fixos. À medida que um parâmetro de controle é alterado, dois pontos fixos, sendo um estável e outro instável, movem-se em direção ao outro, colidem e mutuamente aniquilam-se. O termo “sela-nó” refere-se ao fato de que para sistemas em um espaço de fase bidimensional, o ponto instável é uma *sela* e o ponto estável é um *nó*. O diagrama de bifurcação para este tipo de bifurcação é ilustrado na Figura 2.9 (STROGATZ, 1994; ALLIGOOD *et al.*, 1996).

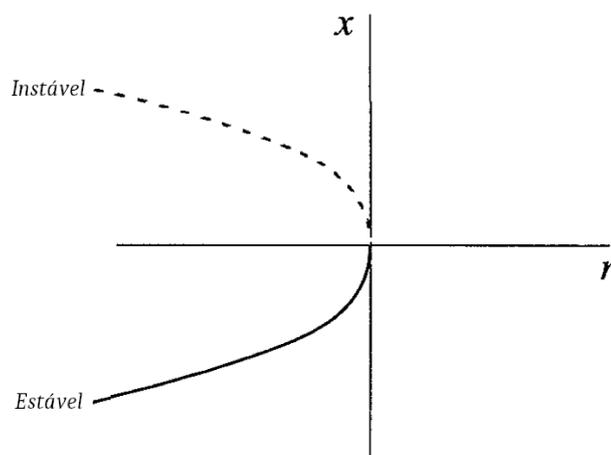


FIGURA 2.9 – Diagrama de bifurcação sela-nó. A linha tracejada representa o ponto instável e a linha contínua o ponto estável. Fonte: (STROGATZ, 1994) (p. 46) (modificada).

2.5.1.2 Bifurcação Hopf

A *bifurcação de Hopf* ocorre quando um ponto de equilíbrio do sistema é alterado de estável para instável e um ciclo limite é criado (Fig. 2.10). Esse tipo de bifurcação ocorre somente em sistemas de equações diferenciais formado por duas ou mais equações. Pode-se classificar a bifurcação de Hopf como *supercrítica* ou *subcrítica*. A bifurcação supercrítica é a bifurcação contínua de um ponto atrator para um ciclo limite estável, representado na Fig. 2.11, onde x e y representam o espaço de fase e μ o parâmetro de controle. Para $\mu < 0$ o sistema dinâmico possui um ponto de equilíbrio estável. Para $\mu > 0$, o ponto de equilíbrio torna-se instável e cria-se um ciclo limite estável. Para $\mu = 0$ ocorre uma troca de estabilidade do ponto de equilíbrio. No caso de uma bifurcação subcrítica, um ponto de equilíbrio instável torna-se estável e um ciclo limite instável é criado (PARKER; CHUA, 1989).

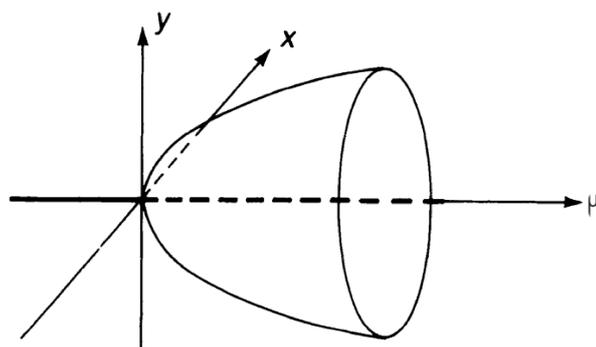


FIGURA 2.10 – Ilustração do diagrama de bifurcação de Hopf. Fonte: (PARKER; CHUA, 1989) (p. 205) (modificada).

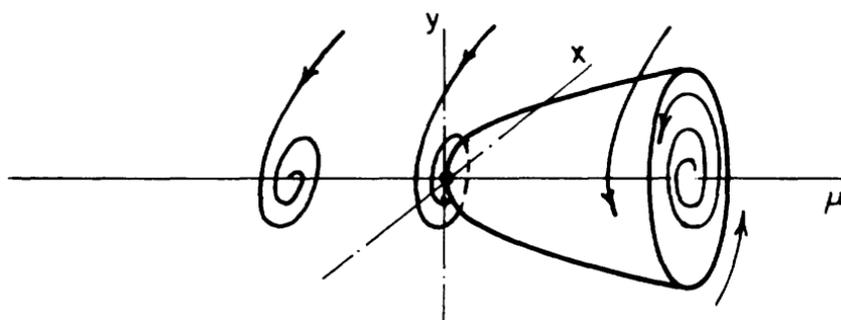


FIGURA 2.11 – Ilustração do diagrama de bifurcação de Hopf supercrítica. Fonte: (GUCKENHEIMER; HOLMES, 2013) (p. 147).

2.5.1.3 Bifurcação de Duplicação de Período

A bifurcação de duplicação de período ocorre quando uma órbita periódica estável, ao variar-se o valor de um parâmetro de controle do sistema, perde estabilidade e cria-se uma nova órbita de período duplicado. Por exemplo, à medida que o parâmetro de controle é aumentado, uma órbita de período dois torna-se instável e gera uma nova órbita de período quatro. Uma sequência dessas bifurcações está associada à rota para caos conhecida como *cascata de duplicações de período* (PARKER; CHUA, 1989; ALLIGOOD *et al.*, 1996). No caso de sistemas de tempo contínuo, o período inteiro mencionado acima refere-se ao período no mapa de Poincaré. A Figura 2.12 ilustra uma cascata de bifurcações de duplicação de período, onde uma órbita de período um dá lugar a uma de período dois, em seguida a uma de período quatro, depois oito, e assim sucessivamente, até que o atrator torna-se caótico e, portanto, não periódico (KUZNETSOV, 2013).

2.5.2 Bifurcação Global

Bifurcações globais caracterizam-se por mudanças topológicas ou de estabilidade envolvendo grandes regiões no espaço de fase. Estas mudanças nas trajetórias do espaço de fase não podem ser confinadas à vizinhança local de um ponto fixo, como ocorre nas

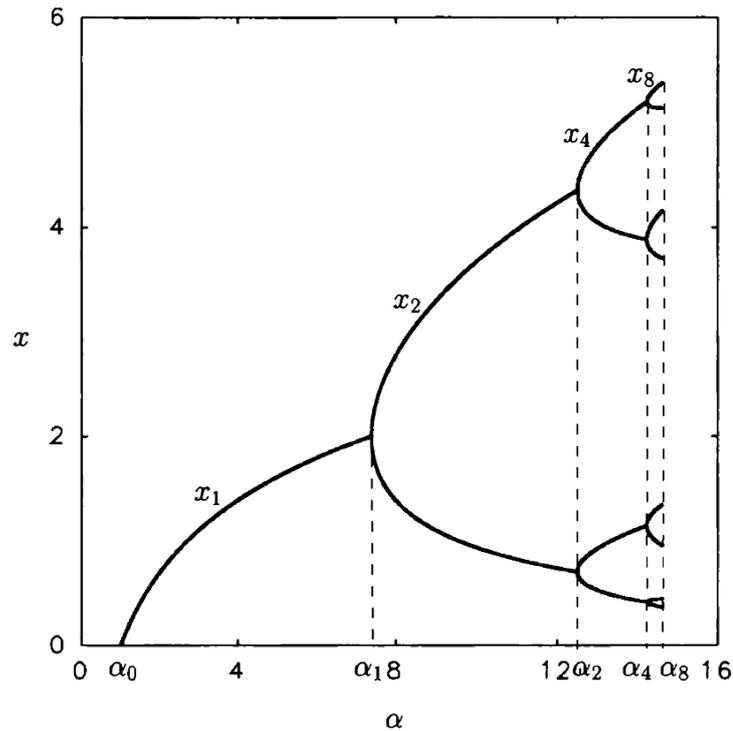


FIGURA 2.12 – Ilustração de um diagrama de bifurcação com uma cascata de duplicações de período. Fonte: (KUZNETSOV, 2013) (p. 130).

bifurcações locais (STROGATZ, 1994). Cita-se como exemplos de bifurcações globais as *crises*.

2.5.2.1 Crises

Crises podem ser definidas como uma colisão entre um atrator caótico e um ponto fixo, ou órbita periódica instável coexistente, ou equivalentemente, com sua variedade estável (GREBOGI *et al.*, 1983; GREBOGI *et al.*, 1987). As mudanças ocorridas após uma crise podem ser de três tipos:

- *Destruição do atrator (crise de fronteira)*: na crise de fronteira, o atrator caótico e sua bacia de atração destroem-se imediatamente após $\mu > \mu_c$, onde μ é o parâmetro de controle do sistema, e μ_c o valor crítico de μ no momento da crise. Neste caso, o atrator caótico colide com uma órbita periódica instável, que se encontra sobre a fronteira entra a bacia de atração do atrator caótico e a bacia de outro atrator, em $\mu = \mu_c$. Após a crise, $\mu > \mu_c$, as órbitas que pertenciam ao atrator normalmente comportam-se como um transiente caótico, ou seja, elas são inicialmente atraídas para a região do espaço de fase anteriormente ocupada pelo atrator. Após este tempo de transiente, as órbitas do antigo atrator convergem para outro atrator no espaço de fase (GREBOGI *et al.*, 1983; GREBOGI *et al.*, 1987; REMPEL, 2006; FRANCO, 2020).

- *Expansão do atrator (crise interior)*: Para $\mu < \mu_c$, um atrator caótico existe no espaço de fase. Quando μ ultrapassa o valor crítico μ_c , há uma colisão do atrator com uma órbita periódica instável, expandindo-se subitamente, ocupando uma região maior no espaço de fase (GREBOGI *et al.*, 1983; GREBOGI *et al.*, 1987; REMPEL, 2006; FRANCO, 2020).
- *Crise de junção de atratores*: para $\mu < \mu_c$ existem dois atratores caóticos, cada um com sua própria bacia de atração. À medida que μ aumenta, os dois atratores aumentam de tamanho e, na crise ($\mu = \mu_c$), os dois tocam simultaneamente a fronteira que separa as duas bacias, resultando na junção dos atratores, dando origem a um único atrator maior (GREBOGI *et al.*, 1983; GREBOGI *et al.*, 1987; REMPEL, 2006; FRANCO, 2020).

3 Convecção Rayleigh-Bénard (CRB) - Equações da Magnetohidrodinâmica (MHD) e Teoria do Dínamo

3.1 Equações da Magnetohidrodinâmica

A teoria MHD descreve o movimento de um fluido eletricamente condutor em presença de um campo magnético. Assim, a evolução de um fluido MHD é descrita por um conjunto de equações composto por:

- (a) Equação de estado (Termodinâmica);
- (b) Equação dos campos eletromagnéticos (Eletrodinâmica);
- (c) Equação de Navier-Stokes (Hidrodinâmica) (modificada com a inclusão dos efeitos do campo magnético).

Reunindo as equações fundamentais de Maxwell, expressas pelas leis de Ampère-Maxwell (a derivada temporal do campo elétrico, conhecida como corrente de deslocamento ($\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$) na lei de Ampère-Maxwell (Eq. (3.1)) pode ser desprezado, considerando que a velocidade do plasma é muito menor que a velocidade da luz ($v \ll c$)), lei de Faraday, lei de Gauss elétrica e lei de Gauss magnética (ausência de monopolos magnéticos), tem-se o conjunto de equações em sua forma diferencial. Em unidades SI, as equações de Maxwell apresentam a seguinte forma:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0, \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.4)$$

onde \mathbf{B} é o campo de indução magnético, \mathbf{E} o campo elétrico, \mathbf{J} a densidade de corrente elétrica, μ_0 é a permeabilidade magnética no vácuo, ε_0 a constante dielétrica, ρ a densidade de carga.

Uma suposição fundamental da teoria MHD é que as variações eletromagnéticas não são relativísticas, ou seja,

$$V_0 \ll c, \quad (3.5)$$

onde $V_0 = l_0/t_0$ é uma velocidade eletromagnética característica, enquanto l_0 e t_0 representam um comprimento e tempo típicos. Além disso, suponha que

$$\frac{E_0}{l_0} \approx \frac{B_0}{t_0}, \quad (3.6)$$

onde E_0 e B_0 são valores típicos de E e B , de modo que os dois lados da Eq. (3.2) são os mesmos em ordem de grandeza. Na Eq. (3.1), o último termo representa a corrente de deslocamento, que tem a magnitude

$$\frac{E_0}{c^2 t_0} \approx \frac{B_0 l_0}{c^2 t_0^2} = \frac{V_0^2 B_0}{c^2} \frac{1}{l_0} \approx \frac{V_0^2}{c^2} |\nabla \times \mathbf{B}|,$$

que pela Eq. (3.5) é muito menor do que o primeiro termo do lado direito da Eq. (3.1). Assim, uma consequência da Eq. (3.5) é que o termo $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ pode ser desprezado na Eq. (3.1).

A primeira equação de Maxwell (3.1) mostra que correntes ou campos elétricos variantes no tempo podem produzir campos magnéticos, enquanto a segunda e a terceira equações (3.2 e 3.3) implicam que cargas elétricas ou campos magnéticos variantes no tempo podem dar origem a campos elétricos. A quarta equação (3.4) assume não haver monopolos magnéticos. As equações descritas acima são complementadas pela lei de Ohm, considerando um fluido total ou parcialmente ionizado, expressa a seguir.

3.1.1 Lei de Ohm

Conforme a lei de Ohm, a densidade de corrente elétrica no plasma é expressa como:

$$\mathbf{J} = \sigma_e \mathbf{E}, \quad (3.7)$$

onde σ_e é a condutividade elétrica. Entretanto, se o plasma se move com uma velocidade \mathbf{v} não relativística na presença de um campo magnético ($\mathbf{v} \times \mathbf{B}$), está sujeito a um campo elétrico ($\mathbf{E} + \mathbf{v}$) além do campo elétrico (\mathbf{E}) (PRIEST, 2014). Portanto, a lei de Ohm afirma que a densidade de corrente é proporcional ao campo elétrico total, e pode ser expressa

como

$$\mathbf{J} = \sigma_e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (3.8)$$

3.1.2 Equação de Indução

As equações de Maxwell e a lei de Ohm podem ser utilizadas para deduzir a equação de indução, a equação central da teoria MHD e a equação governante para a evolução de um campo magnético dentro de um meio eletricamente condutor.

Substituindo a Eq. (3.8) em (3.1) e aplicando o rotacional ($\nabla \times$), obtém-se:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sigma_e (\nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.9)$$

onde o primeiro termo do lado direito é dado pela Eq. (3.2). Aplicando a seguinte identidade vetorial na Eq. (3.9):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{a} - \nabla^2 \mathbf{a},$$

obtém-se:

$$\underbrace{\nabla (\nabla \cdot \mathbf{B})}_0 - \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \sigma_e \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right). \quad (3.10)$$

Reescrevendo a Eq. (3.10), tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \nabla^2 \mathbf{B} = 0, \quad (3.11)$$

onde $\eta = \frac{1}{\mu_0 \sigma_e}$ é a difusividade magnética. Chegou-se à expressão Eq. (3.12), conhecida como equação de indução. É a equação que governa a geração e comportamento dos campos magnéticos:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (3.12)$$

O primeiro termo do lado direito da Eq. (3.12) está ligado ao movimento do fluido, o segundo termo representa o termo difusivo da equação. A partir da Eq. (3.12), pode-se analisar dimensionalmente para uma melhor compreensão do significado físico desses dois termos. Têm-se:

$$|\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})| \simeq \frac{vB}{l}, \quad (3.13)$$

$$\eta |\nabla^2 \mathbf{B}| \simeq \frac{\eta B}{l^2}, \quad (3.14)$$

onde l denota a escala de comprimento característico.

A razão entre os termos $\frac{v}{l}$ e $\frac{\eta}{l^2}$ é conhecida como número de Reynolds magnético, sendo expressa como:

$$R_m = \frac{vl}{\eta}. \quad (3.15)$$

Considerando o caso em que $R_m \ll 1$, o segundo termo à direita na equação (3.12) é o que governa o comportamento do campo magnético, e temos a aproximação:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (3.16)$$

É possível utilizar a análise dimensional para estimar o tempo de decaimento do campo magnético. A análise dimensional produz:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right| \simeq \frac{B}{\tau_D}, \quad (3.17)$$

$$|\eta \nabla^2 \mathbf{B}| \simeq \frac{\eta B}{l^2}, \quad (3.18)$$

onde τ_D é a escala de tempo de difusão magnética. De acordo com a Eq. (3.16), o campo magnético se difunde com um tempo de decaimento característico da ordem de:

$$\tau_D = \frac{l^2}{\eta}. \quad (3.19)$$

O tempo de difusão para o campo magnético da Terra é estimado em 3×10^5 anos. Para Galáxias o tempo de decaimento é estimado em 3×10^{23} anos. O tempo de difusão para o campo magnético do Sol é de aproximadamente 10^{11} anos. Embora esse tempo de decaimento seja grande, o campo magnético do Sol oscila com um período de 11 anos. Isso requer um mecanismo capaz de tornar o campo magnético oscilatório, portanto, um mecanismo de dínamo é certamente plausível. Os raios do núcleo da Terra e do núcleo do Sol são tomados como escala de comprimento característico l para ambos, enquanto a espessura do disco galáctico ($\approx 100 pc$) é tomada como a escala de comprimento para a Galáxia (para uma discussão mais detalhada, ver, por exemplo, (CHOUDHURI *et al.*, 1998; WEISS, 2002; SCHRIJVER; SISCOE, 2009; PRIEST, 2014; REGEV *et al.*, 2016; MOFFATT; DORMY, 2019)). Agora, considerando o caso em que $R_m \gg 1$, o termo de fluxo domina o termo de difusão e a evolução do campo magnético é governada pelo primeiro termo da Eq. (3.12):

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (3.20)$$

A equação (3.20) implica que, em um fluido altamente condutor, as linhas de campo magnético se movem exatamente com o fluido, em vez de simplesmente se difundir (BIT-

TENCOURT, 2004). Tal implicação, foi proposta por Alfvén (1942), onde afirmou que as linhas de campo magnético movem-se com o fluido como se estivessem “congeladas” no fluido (ALFVÉN, 1942). Para melhor compreender como as linhas de campo se movem com o fluido, pode-se considerar a interação da corona solar com a fotosfera solar. Sabe-se que as linhas de campo magnético da corona solar partem ou retornam à fotosfera, sendo assim, muitas linhas que saem da fotosfera emergem para a corona e depois retornam à mesma, essas linhas de campo magnético encontram-se na forma de *loops* magnéticos. À medida que o fluido se move na fotosfera ao longo de sua superfície, ele move os “pontos de apoio” – manchas solares. Devido a esses movimentos as linhas ficam torcidas e interligadas, assim, o campo magnético na corona fica cada vez mais tenso e sua energia magnética aumenta sem limites, de modo que, como isso não pode acontecer indefinidamente, ou a energia se torna tão grande que os movimentos da fotosfera não têm mais o poder de continuar a amplificá-la e esses movimentos são reduzidos, ou a equação (3.20) não consegue descrever a corona solar e o congelamento das linhas de campo é interrompido. Este último parece ser o caso (KULSRUD, 2005).

Reescrevendo este termo, pode-se ter uma visão mais clara do mesmo, considerando $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, tem-se:

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (3.21)$$

Analisando os termos da Eq. (3.21), tem-se que o primeiro termo do lado direito descreve o efeito advectivo do campo magnético, o segundo termo estica ou alonga as linhas de campo magnético, podendo até mesmo amplificá-lo exponencialmente a uma taxa que depende do gradiente local do campo de velocidades, o terceiro termo tem efeito compressivo (SCHRIJVER; SISCOE, 2009).

3.1.3 Equação de Movimento

A segunda lei de Newton para um elemento de fluido pode ser expressa como

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (3.22)$$

onde ρ é a densidade de massa (massa por unidade de volume), \mathbf{v} é a velocidade do fluido e \mathbf{F} é a força que atua sobre o elemento de fluido δV .

A equação de movimento ou momento em MHD pode ser obtida de forma simplificada (heurística). Considerando um volume fechado e as forças que atuam sobre um elemento de fluido δV com densidade de massa $\rho \delta V$, esses são os seguintes passos:

Considere uma partícula de carga q_j movendo-se com velocidade \mathbf{v}_j através de um

campo eletromagnético \mathbf{E} , \mathbf{B} sujeita à força de Lorentz:

$$\mathbf{F} = q_j (\mathbf{E} + \mathbf{v}_j \times \mathbf{B}). \quad (3.23)$$

A força a agir sobre o fluido macroscópico é a soma das forças que atuam sobre partículas individuais $\delta q \mathbf{E} + \delta \mathbf{J} \times \mathbf{B}$, onde δq é a carga líquida e $\delta \mathbf{J}$ a corrente elétrica transportada pelo elemento de fluido. Visto que na maioria dos fluidos de interesse os campos eletrostáticos impõem a condição de quase-neutralidade de carga em escalas macroscópicas, $dq \simeq 0$ onde a densidade de cargas positivas e negativas são praticamente iguais e não implica no desaparecimento do campo eletrostático, apenas a parte magnética da força de Lorentz contribui:

$$\delta V \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (3.24)$$

com $\delta \mathbf{J} = \mathbf{j} \delta V$, onde \mathbf{j} é a densidade de corrente. A força de pressão (térmica). Considere-se o movimento que resulta quando uma distribuição não uniforme de pressão acelera um elemento de fluido de densidade ρ . A força líquida que atua sobre um volume é dada pela integral de pressão sobre uma superfície $d\mathbf{S}$ que delimita o volume. Pode-se assumir que as condições próximas pertencem ao equilíbrio termodinâmico local; portanto, o tensor de pressão é isotrópico, $p_{ij} = p\delta_{ij}$, exercendo a seguinte força:

$$\mathbf{F} = - \oint_s p d\mathbf{S}. \quad (3.25)$$

O sinal negativo da Eq. (3.25) indica que a força atua na direção oposta à normal orientada para fora do elemento de superfície $d\mathbf{S}$. A integral de superfície da pressão sobre $d\mathbf{S}$ pode ser transformada em uma integral de volume do gradiente de pressão dentro de δV através da relação vetorial (teorema da divergência):

$$- \oint_s p d\mathbf{S} = - \int_v \nabla p dV = -\nabla p \delta V, \quad (3.26)$$

onde ∇p é o gradiente de pressão.

A força gravitacional pode ser expressa como:

$$\mathbf{F}_g = \delta V \rho \mathbf{g}, \quad (3.27)$$

onde \mathbf{g} é a aceleração gravitacional e pode ser escrita em termos do potencial gravitacional ϕ_g :

$$\mathbf{F}_g = -\nabla \phi_g. \quad (3.28)$$

A força viscosa. Tal força é semelhante à força de pressão Eq. (3.26), onde a viscosi-

dade atua sobre a superfície do elemento de volume,

$$\oint_s \sigma^\mu \cdot d\mathbf{S} = \delta V \nabla \cdot \sigma^\mu, \quad (3.29)$$

onde $\sigma^\mu = \{\sigma_{ij}^\mu\}$ é o tensor viscoso de *stress*,

$$\sigma_{ij}^\mu = \mu \left[(\partial_i v_j + \partial_j v_i) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v} \right], \quad (3.30)$$

a viscosidade μ é assumida como constante, δ_{ij} é o tensor de Kronecker. Utiliza-se a viscosidade cinemática $\nu = \frac{\mu}{\rho}$. O primeiro termo do lado direito da Eq. (3.30) é chamado tensor de tensão ou tensor de deformação,

$$w_{ij} = \partial_i v_j + \partial_j v_i. \quad (3.31)$$

Ao somar essas contribuições das forças, obtém-se a equação de momento, ou equação de movimento,

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \rho (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g} + \mu \left(\nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} \right). \quad (3.32)$$

A equação de momento (3.32) representa a segunda lei de Newton (3.22). O lado esquerdo da Eq. (3.32) é a aceleração de um volume unitário do plasma multiplicado pela sua massa, os termos no lado direito representam a força que atua nesse volume devido ao gradiente de pressão, a força de Lorentz, força da gravidade e a viscosidade (BISKAMP, 2003).

3.1.4 Equação de Continuidade

A conservação de massa leva à equação de continuidade para a densidade de massa. Considere-se o elemento de volume fechado dV , como ilustrado na Fig. 3.1,

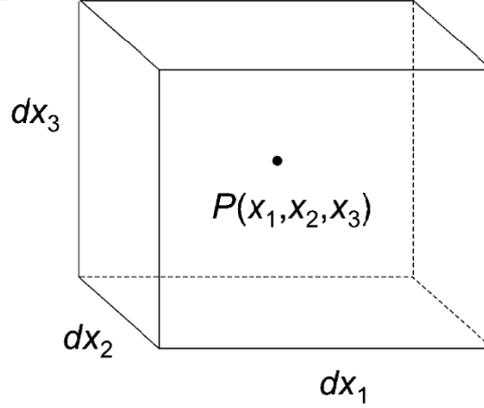


FIGURA 3.1 – Elemento de volume no referencial Euleriano. Fonte: (SCHNACK, 2009) (p. 20).

onde $P(x_1, x_2, x_3)$ é o centro do elemento de volume. Os lados do elemento de volume são fixos no espaço. O fluido pode fluir para dentro e para fora do elemento de volume pelas laterais. Seja $\rho(x_1, x_2, x_3)$ (massa/volume) a densidade de massa em $P(x_1, x_2, x_3)$. Essa é a densidade de massa média (e quase uniforme) ao longo de dV , então a massa total contida em dV é expressa como

$$M = \int_v \rho dV = \int \rho dx_1 dx_2 dx_3. \quad (3.33)$$

A derivada de M em relação a t é dada por:

$$\frac{dM}{dt} = \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (3.34)$$

A massa que flui através de um elemento de superfície $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}}dS$ é $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\hat{\mathbf{n}}$ representa o vetor unitário apontando para fora do elemento, e \mathbf{v} é a velocidade do fluido, e a taxa total de fluxo de massa fora do volume dV é:

$$\sum_{\text{faces}} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \oint_s \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \oint_s \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (3.35)$$

onde a integral está sobre a superfície envolvendo dV , então isso deve ser igual a $-dM/dt$. Temos, então:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_v \rho dV = - \oint_s \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (3.36)$$

Para uma superfície fixa (referencial euleriano), podemos tomar a derivada de tempo total dentro da integral de volume como uma derivada parcial:

$$\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_s \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (3.37)$$

A Eq. (3.37) representa que a variação de massa dentro de V é igual à massa que entra

ou sai da superfície. Aplicando o teorema de Gauss ou teorema da divergência, tem-se que:

$$\oint_s \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_v \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV, \quad (3.38)$$

de modo que:

$$\int_v \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0. \quad (3.39)$$

A Eq. (3.39) deve ser válida para todos os volumes possíveis. Portanto, se o integrando for nulo, obtém-se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}). \quad (3.40)$$

A Eq. (3.40) é chamada *equação de continuidade*². Ela expressa a *conservação de massa* no referencial Euleriano (BISKAMP, 2003; SCHNACK, 2009).

3.1.5 Equação de Energia

Pode-se obter de forma simplificada a equação de energia, considerando-se diversas aproximações. Para condições próximas ao equilíbrio termodinâmico local, a pressão é acoplada à densidade ρ e temperatura T para a equação de estado. Para encontrar a equação de energia pode-se assumir a validade da lei de gases ideais (PRIEST, 2014):

$$p = \frac{\tilde{R}}{\tilde{\mu}} \rho T, \quad (3.41)$$

onde \tilde{R} é a constante do gás, $\tilde{\mu}$ é a massa atômica média (um número adimensional que representa a massa média por partícula medida em unidades de m_p). A massa média das partículas (m) pode ser utilizada no lugar de $\tilde{\mu} = m/m_p$, e a constante de Boltzmann ($k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}$) pode ser inserida, de modo que \tilde{R} seja substituído por $\tilde{R} = k_B/m_p$. A equação (3.41) então, torna-se:

$$p = \frac{k_B}{m} \rho T. \quad (3.42)$$

Em alguns casos, escrevem-se as equações em termos do número total (n) de partículas por unidades de volume em vez de ρ . Então, a lei dos gases ideais torna-se:

$$p = nk_B T. \quad (3.43)$$

Considerando um plasma de hidrogênio totalmente ionizado, existem duas partículas (um próton e um elétron, denotados pelos subscritos n_p e n_e) para cada próton; isto

²O uso do campo de velocidade em função da posição e do tempo fornece a descrição do referencial Euleriano.

implica que $\tilde{\mu} = 0.5$ e, em termos de densidade do número de elétrons (n_e), tem-se:

$$n \equiv n_p + n_e = 2n_e, \quad \rho \equiv n_p m_p + n_e m_e \approx n_e m_p,$$

assumindo a quase-neutralidade. Na atmosfera solar, a presença de elementos extras faz $\tilde{\mu} \approx 0.6$ (e $n \approx 1.9 n_e$), exceto próximo da fotosfera (onde H (hidrogênio) e He (hélio) não foram totalmente ionizados) e no núcleo (onde a composição é diferente).

Como a condução do calor é um processo difusivo, ele pode ser negligenciado em escala suficientemente grande, de modo que a mudança de estado em um elemento de fluido seja adiabática. A equação de energia se reduz à equação adiabática somente quando os efeitos de viscosidade, condutividade térmica e transferência de energia devido às colisões são negligenciadas. A equação de energia adiabática é:

$$d(p\rho^{-\gamma})/dt = 0, \tag{3.44}$$

o qual é equivalente a um fluido isentrópico ³ $ds/dt = 0$, onde a equação de entropia para um gás ideal é dada por:

$$s = c_v \ln(p\rho^{-\gamma}). \tag{3.45}$$

O expoente adiabático é representado por γ , chamado razão de calor específico $\gamma = c_p/c_v$. O parâmetro γ está relacionado ao número de graus de liberdade, N , de um gás. Para o caso de um gás monoatômico, onde os únicos graus de liberdade são aqueles associados com três possíveis direções de movimentos de translação, $N = 3$, portanto, $\gamma = 5/3$. Geralmente γ está entre 1 e 5/3. Para estabelecer o aquecimento e resfriamento local ou os efeitos decorrentes da condução de calor, é frequentemente introduzida uma relação politrópica $p(\rho) \sim \rho^\gamma$ com o expoente γ menor que o valor adiabático. O limite $\gamma = 1$ descreve variações de pressão isotérmica correspondentes à condução infinita de calor; o limite oposto $\gamma \rightarrow \infty$ descreve a dinâmica de um fluido incompressível, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ (BISKAMP, 2003).

3.2 Convecção Rayleigh-Bénard (CRB)

A configuração física do modelo CRB dá-se do seguinte modo: uma fina camada de fluido é confinada entre duas placas horizontais, onde as mesmas são separadas por uma distância d , ilustrada na representação geométrica CRB da Figura 3.2. Um pequeno volume $\delta\mathbf{V}$ do fluido se deslocará para cima (uma distância Δz), quando o gradiente de temperatura δT for suficientemente grande, experimentando uma força de empuxo

³Em termodinâmica, uma transformação isentrópica é aquela em que a entropia do sistema permanece constante.

ascendente. Isso ocorre devido ao fluido ter se deslocado para uma região com densidade mais alta, sendo que a temperatura é mais baixa nessa região (CHANDRASEKHAR, 1981). Pode-se expressar a taxa de variação de temperatura em função do deslocamento em z como:

$$\Delta T = \frac{(\delta T)}{d} \Delta z. \quad (3.46)$$

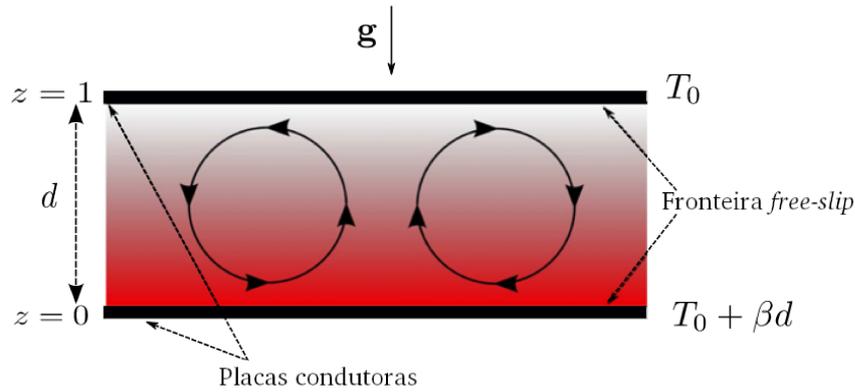


FIGURA 3.2 – Representação geométrica da convecção Rayleigh-Bénard.
Fonte: (PAUL *et al.*, 2011) (p. 2) (modificada).

Para um δT pequeno, a transferência de calor interna do fluido contido entre as duas placas acontece através da condução térmica. Isso deve-se ao fato de que se o gradiente de temperatura δT é pequeno, a força de empuxo ascendente é relativamente fraca e, desse modo, a temperatura da pequena unidade de fluido δV se dissipará antes que ela possa deslocar-se por uma distância significativa. As correntes de convecção ocorrem devido ao fato de que, se o gradiente de temperatura for grande, significa que a força de empuxo ascendente pode ser suficientemente alta, de modo que o pequeno volume de fluido desloca-se para cima mais rapidamente do que perde temperatura para o meio. Tal instabilidade relaciona-se à forma como a transferência de calor interna do fluido contido entre as duas placas acontece (CHANDRASEKHAR, 1981).

3.3 Equações do Modelo CRB Hidrodinâmica

As equações do modelo CRB são caracterizadas na forma adimensional considerando o número de Rayleigh (indicando a magnitude das forças de empuxo térmico); o número de Prandtl (definido como a razão da viscosidade cinemática do fluido e a difusividade térmica), e o número de Taylor (proporcional à velocidade de rotação). Tais grandezas são:

$$R = \frac{\alpha g \delta T d^3}{\nu \kappa}, \quad P = \frac{\nu}{\kappa}, \quad Ta = \frac{4\Omega^2 d^4}{\nu^2}.$$

O número de Rayleigh na zona convectiva é aproximadamente $R \approx 10^{20}$ e na fotosfera

é aproximadamente $R \approx 10^{16}$ (OSSENDRIJVER, 2003). Para um número de Rayleigh pequeno, ou seja, uma pequena diferença de temperatura entre os limites superior e inferior, o fluido não se movimenta e o calor é transportado apenas por difusão térmica. Para que o movimento do fluido ocorra é necessário que o número de Rayleigh exceda um valor crítico R_c e um número de onda crítico k_c (GETLING, 1998). CHANDRASEKHAR (1981) através da análise da estabilidade linear demonstra que o fluido no estado estacionário em um sistema sem rotação ($Ta = 0$) torna-se instável, através da seguinte relação:

$$R_c = \frac{27\pi^4}{4} \approx 657.51, \quad k_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2.221. \quad (3.47)$$

Estima-se que o número de Prandtl P na zona convectiva e de outras estrelas seja extremamente pequeno na ordem de $P \sim 10^{-8}$. A razão para esse valor baixo deve-se ao fato de que nestes corpos astrofísicos a condutividade efetiva é governada por processos radiativos. No núcleo líquido da Terra estima-se que o número de Prandtl seja da ordem de $P \sim 0.1$, devido à natureza metálica de seus materiais (THUAL, 1992). Entretanto, MONDAL *et al.* (2018) considera que para fluidos terrestres o número de Prandtl possa variar da ordem de $10^{-3} \leq P \leq \infty$ (praticamente infinito).

A rotação é uma característica comum da maioria dos corpos astrofísicos, sendo um mecanismo crucial nos mecanismos de dínamo responsáveis pelo campo geomagnético e pelo ciclo magnético solar. Estima-se que o número de Taylor na zona convectiva solar é da ordem $Ta \sim 10^{27}$ (OSSENDRIJVER, 2003).

3.3.1 Equações do Modelo CRB sem Rotação

Considere-se um fluido incompressível Newtoniano, onde a força gravitacional é a única força externa. O sistema convectivo caracteriza-se através das variáveis hidrodinâmicas: velocidade do fluido $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, densidade de massa $\rho(\mathbf{x}, t)$, pressão $p(\mathbf{x}, t)$ e temperatura $T(\mathbf{x}, t)$, que dependem da posição $\mathbf{x} = (x, y, z)$ no espaço euclidiano tridimensional com base ortonormal $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$. Pode-se aplicar a aproximação de Boussinesq, onde se supõe que a densidade depende linearmente da temperatura, então, escreve-se uma equação de estado que relacione a densidade do fluido com a temperatura

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha (T - T_0)), \quad (3.48)$$

onde α é o coeficiente de expansão térmica e T_0 é a referência de temperatura na qual $\rho = \rho_0$, onde ρ_0 é a densidade para T_0 . As propriedades físicas do fluido são constantes: ν - viscosidade cinemática, κ - difusividade térmica. Pode-se, também, negligenciar as variações de densidade na equação de Navier-Stokes, exceto para o termo em que a gravidade

é relacionada (CHANDRASEKHAR, 1981; PROCTOR; WEISS, 1982).

As equações que governam o sistema de convecção térmica podem ser escritas como:

- equação de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \alpha T g \mathbf{e}_3 - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (3.49)$$

onde \mathbf{g} é a aceleração da gravidade, de tal modo que: $\mathbf{g} = (0, 0, -g) = -g \mathbf{e}_3$, atuando apenas na direção z .

- equação de transferência de calor

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T - (\mathbf{v} \cdot \nabla) T, \quad (3.50)$$

- equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.51)$$

Para um fluido incompressível, a densidade é constante e a equação de continuidade (3.51) se reduz à seguinte condição:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.52)$$

Neste caso se diz que o campo de velocidades é solenoidal.

As equações (3.49)-(3.52) governam a convecção Rayleigh-Bénard.

3.3.2 Equações do Modelo CRB com Rotação

Considere-se um fluido em rotação em torno do eixo vertical com velocidade angular constante $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_3$. Sabe-se que duas forças atuam em um corpo em rotação, sendo elas: a força de Coriolis e a força centrífuga (CHANDRASEKHAR, 1981). Então, descrevem-se os movimentos do fluido em rotação através da equação de Navier-stokes (3.49) na seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + g \alpha T \mathbf{e}_3 - \frac{1}{\rho_0} \nabla p + 2 \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2} \nabla |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}|^2, \quad (3.53)$$

onde o termo $2 \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}$ representa a força de Coriolis e o termo $\frac{1}{2} \nabla |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}|^2$ representa a força centrífuga.

Pode-se expressar as equações que descrevem o comportamento do sistema na forma adimensional, onde se escolhe o tamanho vertical do recipiente de fluido d como uma escala de comprimento, o tempo de difusão de térmica $\tau_v = d^2/\kappa$ como uma escala de tempo e o gradiente de temperatura δT como uma escala de temperatura. As variáveis adimensionais \mathbf{x}' , t' , \mathbf{v}' , T' e p' são apresentadas a seguir:

$$\mathbf{x} = d\mathbf{x}', \quad t = \frac{d^2}{\kappa}t', \quad T = \delta T T', \quad \mathbf{v} = \frac{\kappa}{d}\mathbf{v}', \quad p = \frac{\rho_0\kappa^2}{d^2}p'. \quad (3.54)$$

Substituindo as equações de variáveis adimensionais nas equações (3.50) e (3.53), obtém-se

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T - (\mathbf{v} \cdot \nabla) T, \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = P\nabla^2 \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + PRT\mathbf{e}_3 + P\sqrt{Ta}\mathbf{v} \times \mathbf{e}_3 - \nabla \left(p - \frac{1}{8}TaP^2|\mathbf{e}_3 \times \mathbf{x}|^2 \right), \quad (3.56)$$

onde os parâmetros adimensionais são o número de Prandtl, P , o número de Rayleigh, R , e o número de Taylor, Ta .

Utilizando a identidade vetorial a seguir:

$$\frac{1}{2}\nabla \mathbf{v}^2 = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}),$$

pode-se denotar o termo de pressão na Eq. (3.56):

$$\tilde{p} = p - \frac{1}{8}TaP^2|\mathbf{e}_3 \times \mathbf{x}|^2 + \frac{\mathbf{v}^2}{2}.$$

Com a pressão modificada, a equação de Navier-Stokes (3.56) pode ser reescrita na forma:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = P\nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + PRT\mathbf{e}_3 + P\sqrt{Ta}\mathbf{v} \times \mathbf{e}_3 - \nabla \tilde{p}. \quad (3.57)$$

3.3.2.1 Equação do Modelo CRB com Rotação e Campo Magnético

Considerando o modelo CRB na presença de campo magnético, tem-se na forma adimensional o número de Prandtl magnético, P_m (definido como a razão entre a viscosidade do fluido e o coeficiente de difusividade magnética), escreve-se tal grandeza como

$$P_m = \frac{\nu}{\eta}.$$

No núcleo externo de ferro líquido terrestre o valor do número de Prandtl é da ordem

de $P_m \sim 10^{-5}$ (SCHAEFFER *et al.*, 2017). O Prandtl magnético varia aproximadamente de 10^{-2} na base da zona de convecção solar a 10^{-6} abaixo da fotosfera solar. Para um gás no meio intergalático, o número de Prandtl magnético é $P_m \gg 1$ (MONDAL *et al.*, 2018).

Na presença de um campo magnético, em um referencial cartesiano com base ortonormal $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, onde \mathbf{e}_3 é oposto à direção da gravidade, as equações que governam o regime MHD são:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + P \nabla^2 \mathbf{v} + PR \theta \mathbf{e}_3 + P \sqrt{Ta} \mathbf{v} \times \mathbf{e}_3 - \nabla p - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}), \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{P}{P_m} \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla^2 \theta - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta + v_3, \quad (3.60)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (3.61)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.62)$$

onde $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (v_1, v_2, v_3)$ é o campo de velocidades, $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = (b_1, b_2, b_3)$ é o campo magnético, $p(\mathbf{x}, t)$ é a pressão, $\theta(\mathbf{x}, t)$ é a diferença entre a temperatura do fluido e o perfil de temperatura linear. As coordenadas espaciais são $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e t representa o tempo.

3.4 Teoria do Dínamo

A teoria do dínamo é o ramo da astrofísica que procura explicar tanto a origem de campos magnéticos em corpos astrofísicos, quanto a maneira como tais campos variam no espaço e no tempo (PRIEST, 2014). A teoria descreve o processo pelo qual um fluido condutor de eletricidade (plasma) associado ao movimento de rotação e ao processo de convecção térmica pode amplificar um campo magnético fraco (semente) e manter tal campo durante escalas de tempo astronômicas (MESTEL, 2012). A teoria encontra suas raízes na observação humana do universo e na busca da compreensão da origem de campos magnéticos observados em uma ampla variedade de sistemas astrofísicos (PROCTOR; GILBERT, 1994).

A natureza dinâmica e a estrutura espacial dos campos magnéticos em corpos astrofísicos sugerem fortemente que eles devem ter sido amplificados e sustentados por mecanismos dinâmicos internos, como citado anteriormente. Na ausência de qualquer mecanismo, os cálculos de difusão magnética demonstram que os campos “fósseis” presentes nos estágios iniciais de formação de diferentes objetos devem decair em escalas de tempo cosmológica-mente curtas, para o caso de estimativas geomagnéticas. Ademais, mesmo em ambientes de condutividade relativamente alta, como interiores estelares, a suposição do campo fós-

sil também não pode explicar com facilidade a evolução dinâmica, temporal e reversões de campos magnéticos da ordem de alguns anos. Então, questiona-se, quais são esses mecanismos de amplificação e sustentação de campos magnéticos em tais objetos? Em sua grande maioria os objetos astrofísicos são constituídos por plasmas imersos em um estado dinâmico turbulento, e sugere-se a possibilidade de que fluxos internos consigam criar uma força eletromotriz levando à auto-excitação indutiva de campos magnéticos e correntes elétricas (WEISS, 2002).

Joseph Larmor em 1919, buscou compreender como corpos astrofísicos, tal como o Sol, poderiam gerar campos magnéticos através do processo de dínamo auto-excitado. Sintetizou a ideia básica da qual consiste a teoria do dínamo, de que um fluido condutor de eletricidade pode amplificar campos magnéticos (LARMOR, 1919). Entretanto, Cowling em 1934 com o teorema anti-dínamo, considerava que o modelo de dínamo auto-excitado proposto por Larmor tinha um problema de simetria e afirmou que a configuração mais simples para os dínamos auto-excitado não funcionaria para a manutenção de campos magnéticos, o teorema afirma que *“um campo magnético axissimétrico constante não pode ser mantido através da ação do dínamo, por um escoamento axissimétrico”*, excluindo geometrias simples para campos magnéticos gerados pelo processo de dínamo. O artigo de Cowling foi um dos primeiros a tecer críticas a respeito da teoria do dínamo (COWLING, 1934).

Os avanços na teoria do dínamo são relativamente recentes devido à sua natureza não-linear, havendo um progresso neste campo de pesquisa devido aos avanços computacionais durante os últimos anos. Algumas questões importantes incluem se a excitação e sustentação são possíveis, a que taxa o crescimento de campos magnéticos fracos (sementes) pode amplificar, em que energia magnética tais processos saturam e qual é a dependência do tempo e estrutura espacial dos campos gerados por dínamos em diferentes regimes. No âmago de tais questões está uma variedade de problemas difíceis da física linear e não-linear e matemática aplicada a serem respondidos (BRANDENBURG; SUBRAMANIAN, 2005; RINCON, 2019).

3.4.1 Classificação de Dínamos

3.4.1.1 Dínamos Cinemáticos e Não-Lineares

A teoria do dínamo pode ser estudada utilizando as seguintes abordagens. O primeiro é o estudo do regime do dínamo cinemático, ou seja, o campo magnético semente é muito fraco para impactar o campo de velocidade. O segundo é o estudo do regime não-linear onde se considera o comportamento não-linear das equações MHD.

Considerando um campo magnético pequeno, o mesmo não influencia no campo de ve-

locidade, sendo muito fraco para impactar o campo de velocidade, e a equação de indução (3.12) pode ser resolvida isoladamente, para um campo de velocidade prescrito. Se tais soluções existirem, pelo menos para alguns valores de R_m , o campo de velocidade é capaz de amplificar o campo magnético e diz-se que o mesmo atua como um *dínamo cinemático* (BRANDENBURG; SUBRAMANIAN, 2005; RINCON, 2019).

O campo magnético começa a impactar o campo de velocidade, então, à medida que o campo magnético cresce, eventualmente, a energia magnética para de crescer exponencialmente, logo a força de Lorentz não é mais desprezível; ela contribui para a saturação do campo magnético, isso se deve ao termo não-linear da equação de indução (3.12). Agora, as equações MHD devem ser resolvidas incluindo os efeitos não-lineares, diz-se então, que o mesmo atua como um *dínamo não-linear*. O problema do dínamo não-linear é tratado por simulações numéricas diretas resolvendo as equações MHD (BRANDENBURG; SUBRAMANIAN, 2005; RINCON, 2019).

3.4.1.2 Dínamos de Pequena Escala e Dínamos de Grande Escala

Existem duas classificações de dínamos observados em objetos astrofísicos: dínamos de pequena escala e dínamos de grande escala. São as escalas espaciais típicas do campo de velocidade que determinam a sua classificação. Um dínamo é considerado de pequena escala se o campo de velocidade consegue sustentar um campo magnético com escalas de comprimento comparáveis à sua ou menores. Um dínamo é considerado de grande escala se o mesmo gerar um campo magnético com escalas muito maiores do que as do campo de velocidades. Acredita-se que o Sol engloba ambos os dínamos, onde os movimentos do plasma em pequena escala devido à convecção turbulenta contribui para a geração do campo magnético de grande escala (BRANDENBURG; SUBRAMANIAN, 2005; WEISS; THOMPSON, 2009; BRANDENBURG *et al.*, 2012; RINCON, 2019).

3.4.2 Tipos de Dínamos

3.4.3 Dínamo de Herzenberg

Herzenberg e Backus foram os primeiros a obter as primeiras “experiências” da ação do dínamo, onde realizaram uma análise matemática da intermitência no espaço e tempo (HERZENBERG, 1958; BACKUS, 1958). Herzenberg considerou duas esferas, R_1 e R_2 uniformemente rotativas imersas em um meio eletricamente condutor C. As esferas condutoras estão em contato elétrico com a esfera grande C e rotacionam constantemente com velocidades angulares Ω_1 e Ω_2 em direções diferentes, porém com a mesma magnitude Ω . Desde que as velocidades angulares sejam grandes o suficiente, as esferas podem produzir

correntes que se reforçam mutuamente. Um campo magnético, B_1 , criado a partir da esfera R_1 é grande o suficiente para que a esfera R_2 consiga gerar um campo magnético B_2 , ou seja, tal mecanismo baseia-se na interação mútua dos campos magnéticos produzidos por duas esferas R_1 e R_2 que rotacionam em um meio condutor C (HERZENBERG, 1958; BRANDENBURG *et al.*, 1998). Os resultados de Herzenberg são importantes para estabelecer rigorosamente a existência de dínamo através de um fluido eletricamente condutor, porém os fluidos escolhidos são, no entanto, bastante artificiais e, para explicar a origem e evolução dos campos magnéticos astrofísicos, é necessário desenvolver modelos mais próximos de fluidos convectivos.

3.4.4 Dínamo de Zel'dovich

Zel'dovich propôs um modelo de dínamo que ilustra a possibilidade de dínamos rápidos, conhecido como “estica-torce-dobra”, em inglês “*stretch-twist-fold*” (Figura 3.3). O modelo de dínamo de Zel'dovich considera um modelo de fluido incompressível e começa com o esticamento de um tubo de fluxo magnético (Figura 3.3-(a)) até o dobro de seu comprimento (Figura 3.3-(b)), onde o mesmo preserva seu volume. No próximo passo, o tubo é torcido, formando uma figura em formato de oito (Figura 3.3-(c)) e logo em seguida dobra-se (Figura 3.3-(d)), o último passo consiste em unir os dois “*loops*” em apenas um por pequenos efeitos difusivos. O novo “*loop*” formado agora torna topologicamente igual aos do “*loop*” original. Aqui, consideramos que a noção de uma deformação pode ser considerada uma mudança topológica. Desse modo, o modelo de dínamo “*Stretch-Twist-Fold*” (STF), salienta a rapidez com que a ação do dínamo pode ocorrer. Particularmente, enfatiza a importância com a qual as linhas de campo alinham-se (VAINSHTEIN; ZEL'DOVICH, 1972; CHILDRESS; GILBERT, 1995; FRIEDLANDER; SERRE, 2002; SOWARD; DORMY, 2007).

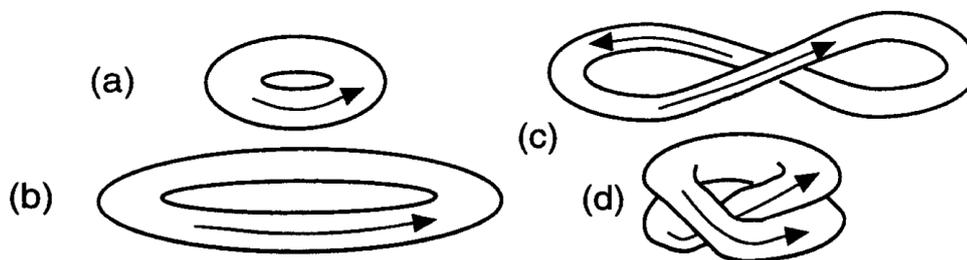


FIGURA 3.3 – Representação do dínamo de Zel'dovich “estica-torce-dobra”.
 Fonte: (CHILDRESS; GILBERT, 1995) (p. 24).

3.4.5 Dínamo de Parker

Eugene Parker (1955) dedicou-se a estudar corpos astrofísicos convectivos, tal como o interior da Terra, o Sol e outras estrelas em geral. Em um artigo publicado em 1955,

descreveu o processo de conversão da energia cinética em energia magnética como resultado de um processo denominado *dínamo hidromagnético*. Tal processo levou à hipótese de que o campo magnético nestes corpos astrofísicos é de fato gerado por um processo de dínamo. Considerou os efeitos dos movimentos turbulentos helicoidais, associados com a rotação diferencial em uma camada relativamente fina na transição entre a zona radiativa e a zona convectiva, chamada *tacoclina* (PARKER, 1955b). Na época, era conhecido o papel que a rotação diferencial desempenha para o entendimento do campo magnético, transformando um campo magnético poloidal em um campo toroidal (efeito Ω). Porém, a regeneração do campo poloidal era pouco compreendida. Logo percebeu-se ser necessário um processo para regenerar linhas de campo poloidais a partir de linhas de campo toroidais. Esse mecanismo de dínamo descrito por Parker ficou conhecido como efeito α (PARKER, 1955a).

3.4.6 Teoria de Dínamo de Campo Médio

A teoria de dínamo de campo médio demonstrou ser uma ferramenta útil para entender a geração de campos magnéticos na Terra e no Sol, assim como em outros corpos estelares e até em galáxias. A mesma fornece uma base para a elaboração de modelos detalhados de dínamo contido nesses objetos. Parker introduziu os fundamentos desta teoria de campo médio para investigar o dínamo solar. Sugeriu que um campo magnético médio $\bar{\mathbf{B}}$ pode ser produzido através de um efeito indutivo turbulento, o termo α . A base matemática foi desenvolvida por (STEENBECK; KRAUSE, 1969). A ideia fundamental sobre a qual se baseia a teoria é a abordagem de duas escalas, que consiste em uma decomposição das variáveis de campo em partes médias e flutuantes, conhecida como média ou decomposição de Reynolds, satisfazendo as propriedades

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \bar{\mathbf{F}} + \mathbf{F}', & \bar{\bar{\mathbf{F}}} &= \bar{\mathbf{F}}, & \bar{\mathbf{F}}' &= 0, \\ \overline{\mathbf{F} + \mathbf{G}} &= \bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{G}}, & \overline{\bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{G}}} &= \bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{G}}, & \overline{\bar{\mathbf{F}}\mathbf{G}'} &= 0,\end{aligned}\tag{3.63}$$

onde \mathbf{F} e \mathbf{G} são campos arbitrários, $(\bar{\cdot})$ indica o valor médio e $(\cdot)'$ indica a flutuação (KRAUSE; RÄDLER, 1980). O campo magnético \mathbf{B} e o campo de velocidade \mathbf{v} são assim expressos como:

$$\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{B}',\tag{3.64}$$

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'.\tag{3.65}$$

Durante a descrição desta seção, admite-se que os movimentos convectivos sejam caracterizados por uma escala de comprimento l_0 , o qual é pequeno se comparado com a escala global L de variação das quantidades médias (Figura 3.4).

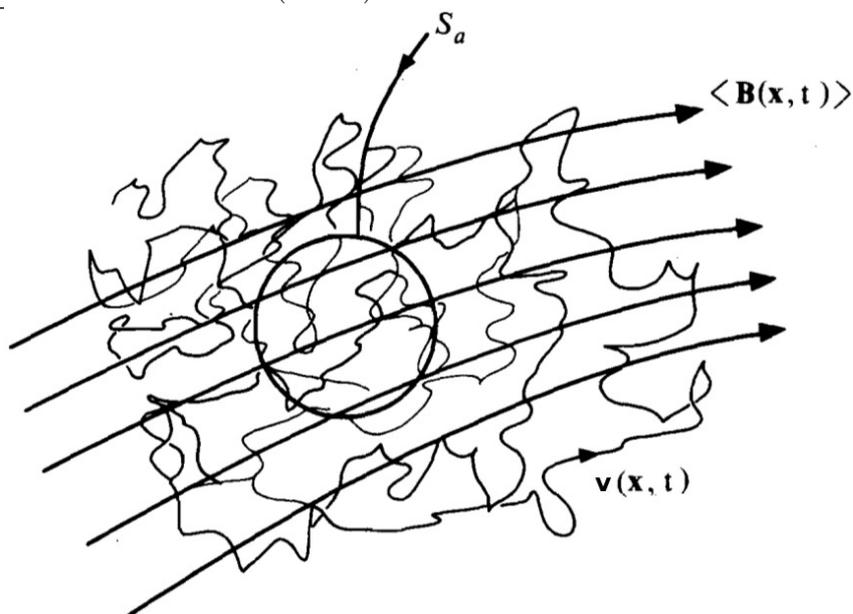


FIGURA 3.4 – Ilustração dos movimentos do campo de velocidade $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, variando na pequena escala de comprimento l_0 e o campo magnético médio variando na escala global L . A média é definida sobre a esfera S_a , de raio a onde $l_0 \ll a \ll L$. Fonte: (MOFFATT, 1978) (p. 146).

As médias do volume são calculadas em uma escala intermediária a tal que,

$$l_0 \ll a \ll L, \quad (3.66)$$

pode-se formar uma média sobre uma esfera de raio intermediário a , ou seja, para qualquer $\psi(\mathbf{x}, t)$, através da avaliação da média de uma dada função sobre todas as pequenas escalas $|\xi| < a$, pode-se definir como:

$$\overline{\psi(\mathbf{x}, t)}_a = \frac{3}{4\pi a^3} \int_{|\xi| < a} \psi(\mathbf{x} + \xi, t) d^3\xi. \quad (3.67)$$

Nota-se que o tempo t permanece constante na média espacial. Pode-se, igualmente, utilizar escalas de tempo em vez das escalas espaciais para definir as quantidades médias. Se T é a escala de tempo de variação de campos globais, ou seja, descreve como o sistema evolui na totalidade (por exemplo, o ciclo periódico de 11 anos das manchas solares), então τ tem que ser muito menor que a escala de tempo T , e muito maior do que o tempo que o fluido leva para atravessar uma única célula convectiva. Se \mathbf{v}' é o movimento convectivo, então a escala de tempo é dada por l_0/\mathbf{v}' . Logo,

$$\frac{l_0}{\mathbf{v}'} \ll \tau \ll T. \quad (3.68)$$

Define-se a média no tempo como,

$$\overline{\psi(\mathbf{x}, t)}_\tau = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \psi(\mathbf{x}, t + t') dt', \quad (3.69)$$

onde t tem sentido somente em uma escala de tempo T global. Assumindo então:

$$\overline{\psi(\mathbf{x}, t)}_a = \overline{\psi(\mathbf{x}, t)}_\tau, \quad (3.70)$$

obtem-se o valor de cada função ψ , calculando a média sobre um conjunto de sistemas (hipótese ergódica). Em um processo ergódico, supõe-se que as médias no tempo são iguais às médias no espaço.

Além disso,

$$\overline{\psi'} = 0, \quad (3.71)$$

ou seja, as médias das flutuações são nulas.

Tendo, assim, definido o operador média, o campo de velocidade e o campo magnético, podem ser decompostos em partes média e flutuantes, então pode-se escrever a Equação de indução (3.12) como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\mathbf{B}} + \mathbf{B}') = \nabla \times [(\overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') \times (\overline{\mathbf{B}} + \mathbf{B}')] + \eta \nabla^2(\overline{\mathbf{B}} + \mathbf{B}'). \quad (3.72)$$

Como as médias das flutuações são nulas devido à Eq. (3.71) e supondo que $\langle df/dt \rangle = d\langle f \rangle/dt = d\langle 0 \rangle/dt = 0$, ou seja, a média da derivada é igual à derivada da média, a Eq. (3.72) fica:

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial t} = \nabla \times (\overline{\mathbf{v}} \times \overline{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'}) + \eta \nabla^2 \overline{\mathbf{B}}. \quad (3.73)$$

Observa-se que na Eq. (3.73) aparece um termo associado a um produto de flutuações ($\overline{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'}$). Este termo é conhecido como força eletromotriz média (FEM). A FEM é importante, pois é a contribuição dos movimentos em pequena escala em relação às grandes escalas, sendo representado como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \overline{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'}. \quad (3.74)$$

Calcula-se a força eletromotriz através de um modelo estatístico de convecção. Primeiro, obtém-se uma equação de evolução para \mathbf{B}' , demonstra-se isso subtraindo (3.73) de (3.72) e através dessa substituição, obtém-se:

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} = \nabla \times [\overline{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}' + \mathbf{v}' \times \overline{\mathbf{B}}] + \eta \nabla^2 \mathbf{B}' + \nabla \times [\mathbf{v}' \times \mathbf{B}' - \overline{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'}]. \quad (3.75)$$

Agora, considera-se uma aproximação em que o campo de flutuação magnético é muito menor que a média, ou seja, $\mathbf{B}' \ll \bar{\mathbf{B}}$, então os dois últimos termos da Eq. (3.75) são desprezados em relação a $\mathbf{v}' \times \bar{\mathbf{B}}$, ou seja, desprezando os termos não-lineares. Esta hipótese é conhecida como aproximação suavizante de 1ª ordem (do inglês, *First-Order Smoothing Approximation - FOSA*) (RINCON, 2019). Então, pode-se escrever a Eq. (3.75) na seguinte forma:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 - \nabla \times (\bar{\mathbf{v}} \times) \right] \mathbf{B}' = \nabla \times (\mathbf{v}' \times \bar{\mathbf{B}}). \quad (3.76)$$

De forma que se tiver $\bar{\mathbf{v}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$, podemos obter \mathbf{B}' para qualquer campo de velocidade flutuante \mathbf{v}' .

O termo do lado direito da Eq. (3.76) atua como um termo fonte gerando o campo flutuante \mathbf{B}' . Supondo que o campo flutuante é estacionário, então a linearidade da Eq. (3.76) garante que os campos \mathbf{B}' e $\bar{\mathbf{B}}$ estejam linearmente relacionados. A FEM $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ são relacionados linearmente. Usa-se o fato que se $g(\mathbf{x})$ depende linearmente do valor local de $f(\mathbf{x})$, onde $g(\mathbf{x})$ é um campo arbitrário e $f(\mathbf{x})$ representa qualquer coordenada espacial, a forma geral da dependência é:

$$g = \alpha f + \beta_k \partial_k f + \gamma_{kl} \partial_k \partial_l f + \dots, \quad (3.77)$$

onde $g = \overline{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'}$ e $f = \bar{\mathbf{B}}$ são vetores. Fazendo $f = \bar{\mathbf{B}}$ e expressando adequadamente as ordens dos tensores, a Eq. (3.77) passa a ser escrita como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \alpha_{ij} \bar{\mathbf{B}}_j + \beta_{ijk} \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_j}{\partial x_k} + \gamma_{ijkl} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{B}}_j}{\partial x_k \partial x_l} + \dots,$$

ou

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \alpha_{ij} \bar{\mathbf{B}}_j + \beta_{ijk} \partial_k \bar{\mathbf{B}}_j + \gamma_{ijkl} \partial_k \partial_l \bar{\mathbf{B}}_j + \dots, \quad (3.78)$$

onde os coeficientes $\alpha_{ij}, \beta_{ijk}, \gamma_{ijkl}$, são pseudotensores (o termo ‘pseudo’ é porque $\boldsymbol{\varepsilon}$ é um vetor polar cujos componentes mudam de sinal ao alternar entre um sistema de coordenadas, enquanto $\bar{\mathbf{B}}$ é um vetor axial cujos componentes permanecem inalterados com a mesma transformação) (MOFFATT, 1978).

Se \mathbf{v}' for isotrópico, α e β são invariantes sob rotações, logo, escreve-se:

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}, \quad (3.79)$$

$$\beta_{ijk} = \beta \varepsilon_{ijk}, \quad (3.80)$$

onde ε_{ijk} é o símbolo de permutação (tensor de Levi-Civita):

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j, j = k \text{ ou } k = i, \\ +1 & \text{se } (i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}, \\ -1 & \text{se } (i, j, k) \in \{(1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3)\}, \end{cases}$$

e δ_{ij} é o tensor delta de Kronecker, substituindo os tensores das Eqs. (3.79) e (3.80) na Eq. (3.78), tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \alpha \overline{\mathbf{B}} - \beta \nabla \times \overline{\mathbf{B}} + \dots, \quad (3.81)$$

onde os coeficientes α e β contêm as contribuições dos campos de flutuações para os campos médios. O termo $\alpha \overline{\mathbf{B}}$ da Eq. (3.81) refere-se ao efeito α , mencionado anteriormente na seção (3.4.8) e β é a difusividade magnética turbulenta. Pode-se somar as duas difusividades para obter-se uma difusividade total $\eta_T = \eta + \beta$. Combinando a expressão (3.81) com a equação (3.73), tem-se:

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial t} = \nabla \times (\overline{\mathbf{v}} \times \overline{\mathbf{B}} + \alpha \overline{\mathbf{B}} - \beta \nabla \times \overline{\mathbf{B}}) + \eta \nabla^2 \overline{\mathbf{B}}. \quad (3.82)$$

A equação (3.82) é conhecida como equação de indução de campo magnético médio.

O termo de difusividade magnética β pode ser interpretado como uma contribuição difusiva da turbulência para a equação do dínamo de campo médio. Pode-se estimar o valor de β utilizando técnicas analíticas como FOSA (veja, por exemplo; (KRAUSE; RÄDLER, 1980)) ou MTA (*Minimal Tau Approximation* — veja, por exemplo; (BLACKMAN; FIELD, 2002)). Tanto no FOSA quanto no MTA, os termos lineares presentes nas equações de evolução do campo magnético para as flutuações são resolvidos exatamente. Tais técnicas calculam os coeficientes da força eletromotriz, $\boldsymbol{\varepsilon}$, considerando que a turbulência seja homogênea e isotrópica, onde os tensores α e β são reduzidos a escalares. Durante a fase do dínamo cinemático, onde o campo de velocidade afeta significativamente o campo magnético, pode-se estimar os parâmetros β e α por (KRAUSE; RÄDLER, 1980):

$$\beta \simeq -\frac{1}{3} \tau \overline{\mathbf{v}^2}, \quad (3.83)$$

onde τ é a escala de tempo de correlação dos movimentos turbulentos (ou tempo de *turnover*), ou seja, é o tempo pretendido para que estruturas de um determinado tamanho sofram significativas mudanças devido à taxa de rotação das suas componentes, $\overline{\mathbf{v}^2}$ é a média do quadrado da componente flutuante da velocidade (SCHRIJVER; ZWAAN, 2000).

Utilizando as mesmas técnicas FOSA ou MTA para o cálculo de β , pode-se calcular o efeito α obtendo a seguinte relação (KRAUSE; RÄDLER, 1980; BLACKMAN; FIELD, 2002;

SCHRIJVER; ZWAAN, 2000):

$$\alpha = -\frac{1}{3}\tau\overline{\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}}, \quad (3.84)$$

onde $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ é a vorticidade e $\overline{\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}}$ é a helicidade cinética. A helicidade cinética conduz o dínamo, levando à geração de campos magnéticos helicoidais, fornecendo uma informação quantitativa a respeito da torção das linhas de campo magnético (RINCON, 2019).

3.4.7 Efeito Ω

Bullard e Gellman (1954) afirmaram que a rotação diferencial era responsável pela geração das linhas de campo magnético toroidal a partir das linhas de campo poloidal (BULLARD; GELLMAN, 1954). A rotação diferencial é causada devido ao Sol rotacionar como um corpo não-sólido. Assim, sua velocidade angular varia conforme a latitude, sendo que no equador sua velocidade de rotação é maior que nos polos. A rotação diferencial do Sol estica as linhas de campo magnético poloidal ao longo do equador solar, contribuindo para a formação de linhas de campo toroidal (Figura 3.5).

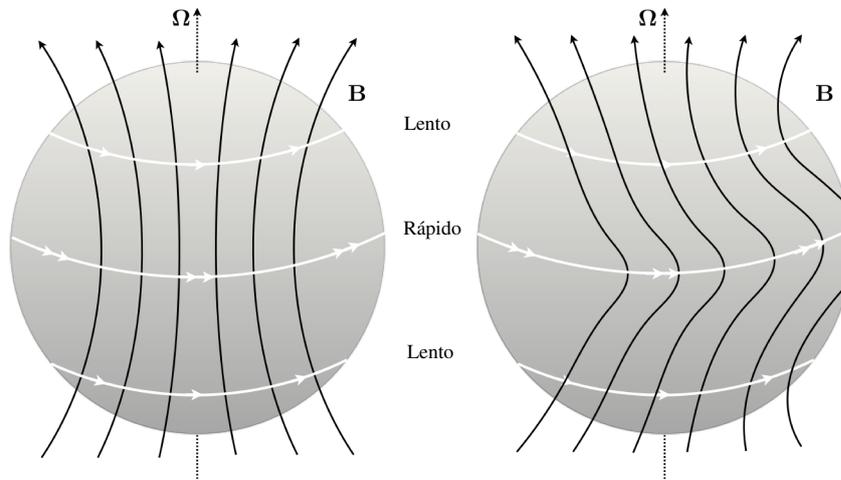


FIGURA 3.5 – Representação do efeito Ω . As linhas de campo magnético poloidal esticam-se através da rotação diferencial, gerando um campo toroidal. Fonte: (RINCON, 2019) (p. 54) (modificada).

3.4.8 Efeito α

Como descrito anteriormente, a partir das linhas de campos magnéticos poloidais geram-se linhas de campos toroidais (efeito Ω), e o campo poloidal pode ser restaurado por meio do efeito α . Tal mecanismo turbulento de regeneração baseia-se na ideia de que o campo poloidal é consequência de movimentos turbulentos convectivos helicoidais operando em pequenos tubos de fluxos magnéticos emergentes orientados na direção toroidal,

ou seja, a convecção que ocorre no interior do Sol fará com que as linhas de campo toroidal sejam esticadas para cima em direção à superfície, os quais sofrem torções (devido à ação da força de Coriolis) de forma que as linhas de campo resultante atue na direção poloidal (ERASO, 2009). A Figura 3.6 representa o efeito α .

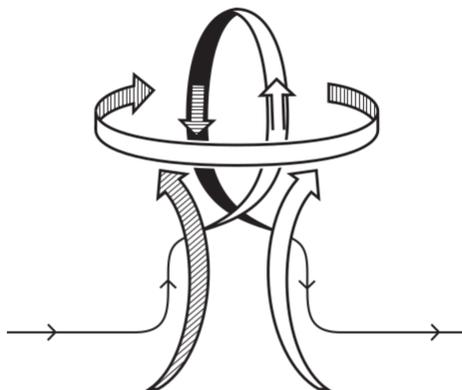


FIGURA 3.6 – Ilustração do efeito α . As linhas de campo magnético toroidal esticam-se através dos movimentos convectivos helicoidais, o campo toroidal converte-se em um campo poloidal, onde as setas indicam os movimentos do fluido. As linhas de campo elevadas e torcidas representam as linhas de campo magnético. Fonte: (PRIEST, 2014) (p. 284).

3.4.9 Dínamo α^2

Vários autores modelam o campo magnético de grande escala de corpos astrofísicos utilizando a teoria $\Omega - \alpha$ (PARKER, 1955b; MOFFATT, 1978; KRAUSE; RÄDLER, 1980; BRANDENBURG; SUBRAMANIAN, 2005; CHARBONNEAU, 2010; PRIEST, 2014; BLACKMAN; HUBBARD, 2014; RINCON, 2019). Entretanto, dínamos sem rotação diferencial (cisalhamento) também podem gerar campos magnéticos de grande escala, onde o dínamo funciona apenas devido aos movimentos turbulentos, gerando assim o dínamo do tipo α^2 . O dínamo α^2 é capaz de regenerar ambos os componentes de linhas de campos poloidais e toroidais (Figura 3.7)(BRANDENBURG; SUBRAMANIAN, 2005).

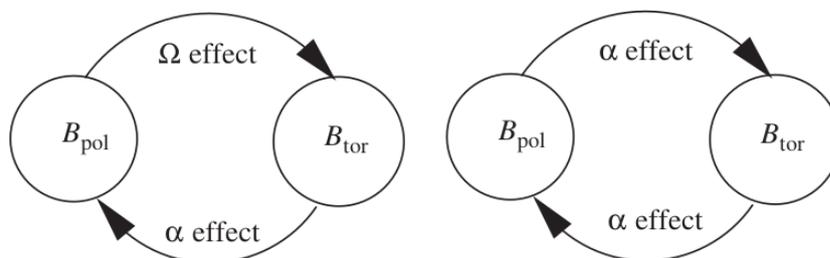


FIGURA 3.7 – Mecanismo de regeneração de linhas de campos poloidais e toroidais. No lado esquerdo tem-se o efeito $\Omega - \alpha$ e no lado direito o efeito α^2 . Fonte: (BRANDENBURG; SUBRAMANIAN, 2005) (p. 83).

Dependendo da importância relativa da rotação diferencial, que dá origem ao chamado efeito Ω , e da convecção helicoidal, que dá origem ao chamado efeito α (KRAUSE;

RÄDLER, 1980), o dínamo de grande escala é caracterizado como α^2 ou $\alpha - \Omega$. Quando a rotação diferencial é significativa, o dínamo é do tipo $\alpha - \Omega$. Por outro lado, quando a rotação diferencial é insignificante, diz-se que o dínamo é do tipo α^2 . Os dínamos solares e galácticos são, portanto, do tipo $\alpha - \Omega$. Porém, podem haver alguns objetos em que a rotação é muito uniforme, como a Terra, e o dínamo é do tipo α^2 (CHABRIER; KÜKER, 2006).

Com a evolução dos corpos astrofísicos ao longo dos anos, a eficiência do dínamo pode mudar. Por exemplo, a rotação estelar diminui com a idade (principalmente devido à frenagem magnética (SKUMANICH, 1972)) e isso reduz a eficiência do dínamo (HARTMANN; NOYES, 1987). Quando a rotação se torna suficientemente lenta, o número do dínamo (D) fica abaixo de um valor crítico (D_c) e o dínamo de grande escala para de operar (KRAUSE; RÄDLER, 1980). Esse número de dínamo é um parâmetro definido como

$$D = \frac{\alpha \Delta \Omega R_{\odot}^3}{\eta_T^2}, \quad (3.85)$$

onde η_T é a difusividade magnética total, $\Delta \Omega$ é a variação de velocidade angular, α é a medida do efeito α e R_{\odot}^3 é o raio solar.

Há indícios de que o dínamo solar está, provavelmente, um pouco acima desse valor crítico (RENGARAJAN, 1984; METCALFE *et al.*, 2016; KITCHATINOV; NEPOMNYASHCHIKH, 2017). No entanto, o dínamo ainda pode persistir quando $D < D_c$.

4 Transientes Caóticos e Histerese em um Modelo de Dínamo α^2

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos numericamente para o modelo de dínamo α^2 . Os resultados foram publicados no artigo OLIVEIRA *et al.* (2021).

Conforme descrito anteriormente, o ciclo solar é mantido através de uma combinação da rotação diferencial do Sol e movimentos turbulentos helicoidais (FAN, 2009). Entretanto, longos períodos de mínimo, onde manchas solares estão praticamente ausentes, têm sido observados. Alguns autores propõem uma explicação baseada na teoria de sistemas dinâmicos, onde tais fases constituem parte de uma dinâmica intermitente que pode ser causada pela presença de mais de um atrator no sistema, um fenômeno chamado histerese. KITCHATINOV; OLEMSKOY (2010) propuseram que um mecanismo de histerese seria responsável pela observação de grandes mínimos de atividade magnética em um modelo de campo médio de dínamo solar. Em tal histerese, observa-se a ausência de campo magnético para um intervalo de valores do número de dínamo (Eq. (3.85)). Para um valor crítico do número de dínamo, ocorre um salto súbito na amplitude do campo magnético toroidal, similarmente ao que ocorre em períodos de máximo do ciclo solar. Ao reduzir o valor do número de dínamo a partir desse estado, o mesmo não retorna ao mínimo anteriormente observado, onde se verifica que o sistema transitou para um atrator diferente na histerese (KITCHATINOV; OLEMSKOY, 2010). Karak *et al.* (KARAK *et al.*, 2015) verificaram uma histerese similar a essa em simulações diretas das equações MHD em 3 dimensões para o dínamo $\alpha - \Omega$. Segundo eles, o modelo exibe uma intermitência que alterna estados de máximos e mínimos aleatoriamente, sendo que tal intermitência só seria observada na presença de rotação diferencial, como pode ser observado na Figura 4.1.

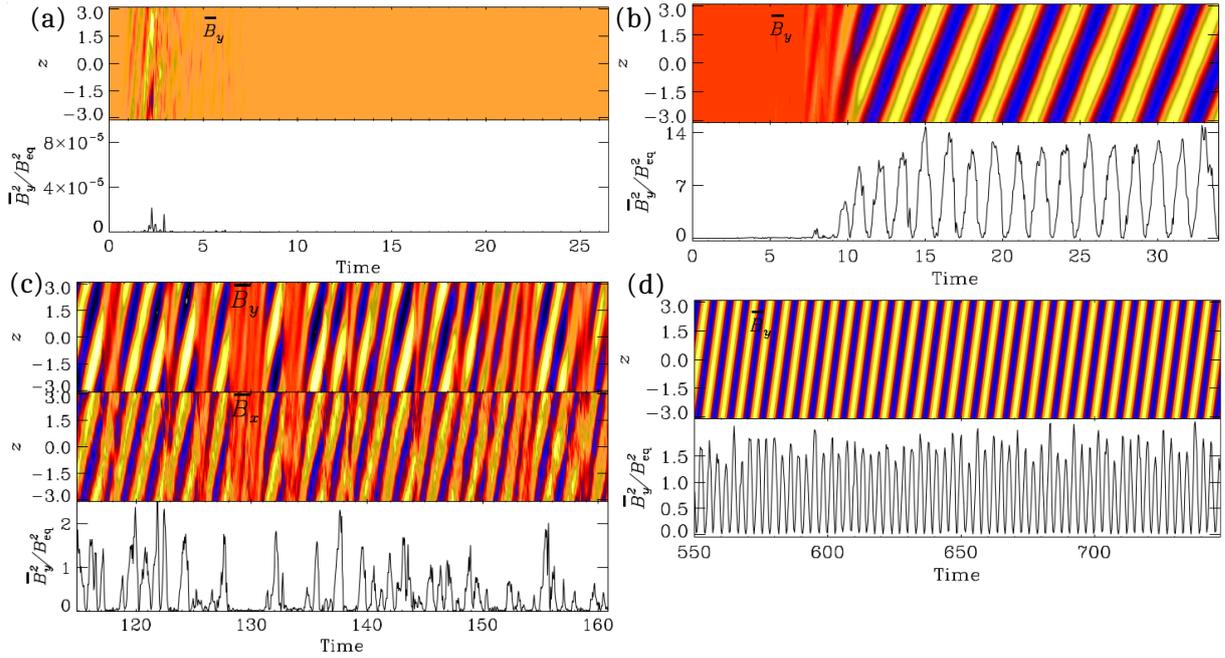


FIGURA 4.1 – Evolução espaço-temporal das médias horizontais de \bar{B}_y em função de z e suas respectivas séries temporais obtidas a partir das médias. O painel (a) mostra uma simulação iniciada com um campo semente para $\sigma = 0.32$, antes do início da ação do dínamo. O painel (b) ilustra uma simulação iniciada logo após a transição para o dínamo para $\sigma = 0.322$. O painel (c) ilustra uma simulação iniciada a partir de um campo inicial forte em seguida reduzida para $\sigma = 0.22$, mostrando o fenômeno de histerese no sistema, o campo magnético não decai, mas retorna com um ramo de energia alto. O painel (d) ilustra uma simulação iniciada com um campo inicial forte, após a transição para o dínamo, variando como parâmetro de controle o número de Prandtl magnético P_m , depois reduziu-se para $P_m = 0.1613$ mostrando a histerese no sistema. Fonte: (KARAK *et al.*, 2015) (p. 3 - 4).

Utilizando simulações numéricas diretas, YADAV *et al.* (2012) investigaram a zona de histerese a partir de um modelo de dínamo de *Taylor-Green*. Construíram uma série de diagramas de bifurcação, variando como parâmetro de controle a amplitude do forçante, como pode ser observado na Figura 4.2 (a) e (b) e o número de Reynolds magnético (Figura 4.2 (c)). Foi observada histerese com diferentes ramos de energia do campo magnético. Eles estudaram a dinâmica do sistema e observaram uma série de comportamentos interessantes, incluindo atratores periódicos, quase-periódicos e caóticos. Observaram, também, transições intermitentes entre os estados caóticos e quase-periódicos. SIMITEV; BUSSE (2009) demonstraram um comportamento histerético em um modelo de dínamo gerado por convecção turbulenta em conchas de fluido esférica com rotação. A histerese aparece como uma transição entre dois regimes distintos de dínamo, variando como parâmetro de controle o número de Rayleigh e o número de Prandtl magnético. BERHANU *et al.* (2009) relataram a primeira observação experimental de um regime de dínamo histerético, onde consideraram um fluido turbulento de sódio líquido gerado entre dois discos em uma geometria de Von Kármán. MORIN; DORMY (2009) realizaram simulações numéricas com uma configuração aplicável ao núcleo externo líquido da terra, ou seja, em uma concha esférica em rotação com convecção, reportando a transição para o dínamo, assim como

um comportamento histerético no sistema, conforme o número de Prandtl magnético diminui. KRSTULOVIC *et al.* (2011) relataram um comportamento semelhante, investigando a transição para dínamo e histerese em um modelo de baixa dimensão. SIMITEV; BUSSE (2012) observaram que uma esfera em rotação poderia mostrar um comportamento histerético em função do parâmetro de rotação τ . YOKOYAMA; TAKAOKA (2017) realizaram simulações numéricas com turbulência forçada com rotação e reportaram transições histeréticas entre o fluxo Q2D (quase bidimensional) e o fluxo 3D (tridimensional). TRIPATHI *et al.* (2021) realizaram simulações numéricas e encontraram histerese no sistema em uma estrela semelhante ao Sol.

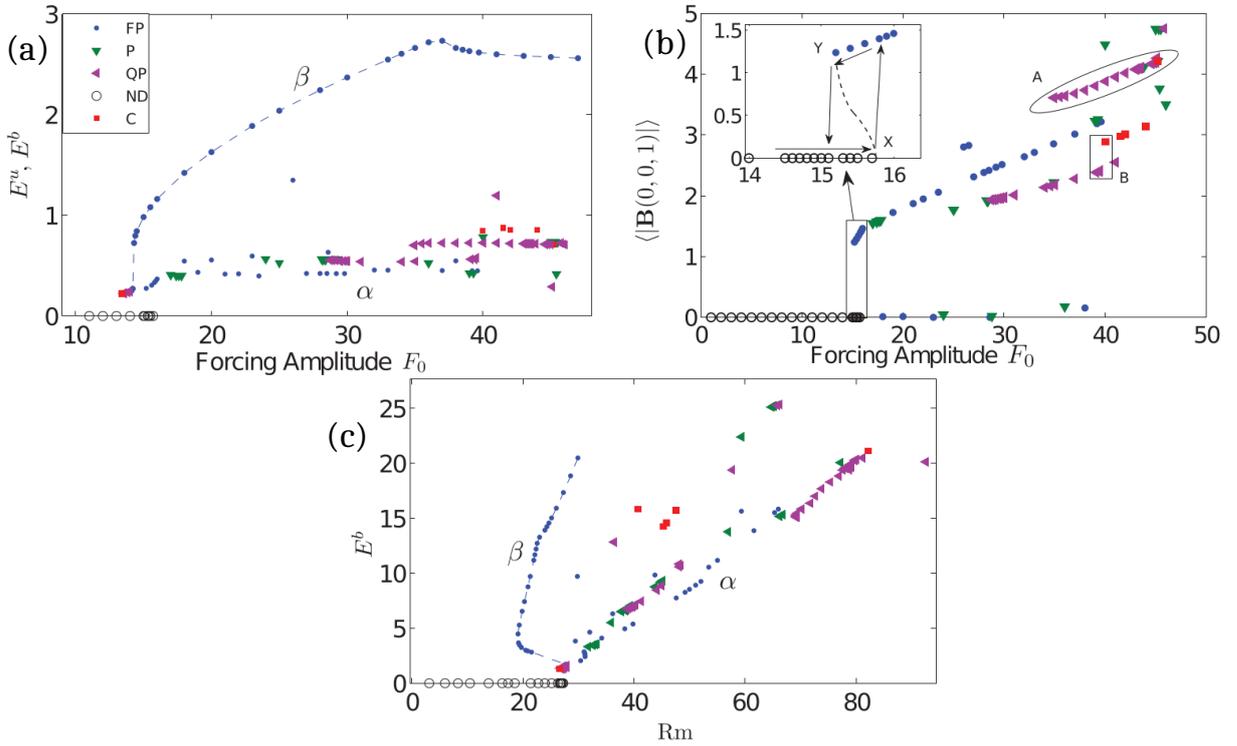


FIGURA 4.2 – Diagramas de bifurcação: O painel (a) ilustra as médias de tempo da energia magnética e cinética em função da amplitude do forçante F_0 , demonstrando a presença de vários estados de dínamo e não-dínamo. No respectivo painel, têm-se as legendas: $ND = no-dynamo\ state$, $FP = fixed-point$, $P = periodic\ state$, $C = caotic\ state$. β e α representam dois estados distintos de energia, os autores classificaram o primeiro estado como um ramo de “campo forte” e o segundo como um ramo de “campo fraco”. O painel (b) ilustra os modos de Fourier do campo magnético. Pode-se observar um salto repentino da amplitude do forçante, ocorrendo o início da ação do dínamo, observa-se um *loop* de histerese indicado na ampliação da figura. A legenda A com formato oval no painel indica uma rota para caos quase-periódica e a legenda B com formato retangular indica uma rota para caos com cenário de *Newhouse-Ruelle-Takens*. O painel (c) ilustra a transição para dínamo, variando como parâmetro de controle o número de Reynolds magnético. Fonte: (YADAV *et al.*, 2012) (p. 3).

Neste capítulo, é mostrado que não é necessário rotação diferencial para se observar uma histerese em uma transição para o dínamo. Isto é feito através de um estudo de transientes caóticos próximos a uma região de transição para o dínamo em um modelo α^2 .

Os transientes caóticos são um fenômeno comum em fluidos e plasmas, geralmente associados à turbulência em decaimento, onde um fluido inicialmente errático converge para um estado laminar. Um exemplo típico é um fluxo de tubulação, onde as turbulências podem durar muito tempo, mas eventualmente desaparecem se a tubulação for suficientemente longa e o número de Reynolds estiver abaixo de um certo limite (HOF *et al.*, 2008). Sabe-se que os transientes caóticos são devidos à presença de conjuntos caóticos não atrativos no espaço de fase (KANTZ; GRASSBERGER, 1985; HSU *et al.*, 1988). Em dois ou mais espaços de fase dimensionais, esses conjuntos caóticos não atrativos têm uma variedade estável e uma variedade instável, sendo as principais direções de atração e repulsão; o conjunto caótico não atrativo encontra-se na interseção de ambas as variedades e é, então, vagamente chamado sela caótica (NUSSE; YORKE, 1989). Em sistemas espacialmente estendidos, onde o espaço de fase tem dimensão infinita, as selas caóticas podem ser responsáveis pelo caos transiente temporal (REMPEL; CHIAN, 2003) ou caos transiente espaço-temporal (REMPEL *et al.*, 2007). Em plasmas espaciais e astrofísicos, transientes caóticos relacionados a selas caóticas foram observados em simulações numéricas de ondas de Alfvén (CHIAN *et al.*, 2007), dínamo magnetohidrodinâmico (MHD) (REMPEL *et al.*, 2009) e discos de acreção (REMPEL *et al.*, 2010). O objetivo do presente capítulo é estudar o aparecimento de transientes caóticos em uma simulação MHD da transição para o dínamo, que se dá através de uma *bifurcação blowout histerética*.

Note-se que os campos magnéticos gerados nas simulações deste capítulo são de grande escala, isto é, a escala de comprimento espacial característico de tais campos magnéticos são comparáveis ao tamanho do sistema em contraste com o de pequena escala que tem uma escala de comprimento característica menor ou igual à escala característica do fluxo de condução (BRANDENBURG; SUBRAMANIAN, 2005). Os ciclos magnéticos solar e estelar são uma manifestação do campo em grande escala.

4.1 O Modelo Numérico de Dínamo α^2

Adotamos o modelo de dínamo α^2 empregado nas Refs. (BRANDENBURG, 2001; REMPEL *et al.*, 2013). O fluido é considerado isotérmico e compressível, com velocidade do som c_s constante, viscosidade dinâmica constante μ , difusividade magnética constante η e permeabilidade magnética constante μ_0 . As equações governantes são:

$$\partial_t \ln \rho + \mathbf{v} \cdot \nabla \ln \rho + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (4.1)$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p / \rho + \mathbf{J} \times \mathbf{B} / \rho + (\mu / \rho) (\nabla^2 \mathbf{v} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} / 3) + \mathbf{f}, \quad (4.2)$$

$$\partial_t \mathbf{A} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \mu_0 \mathbf{J}, \quad (4.3)$$

a Eq. (4.1) é a equação de continuidade, a Eq. (4.2) é a equação de momento, a Eq. (4.3) é a equação de indução, onde ρ é a densidade, \mathbf{v} é a velocidade do fluido, \mathbf{A} é o potencial vetor magnético, $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}/\mu_0$ é a densidade de corrente, p é a pressão, \mathbf{f} é a função forçante externa, e, a partir de uma equação de estado para um gás ideal e isotérmico, $\nabla p/\rho = c_s^2 \nabla \ln \rho$, onde $c_s^2 = \gamma p/\rho$ é assumido como constante. A equação de indução magnética (4.3) é escrita para o potencial vetor \mathbf{A} para garantir um campo magnético solenoidal, uma vez que $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$. A densidade logarítmica também é adotada nas Eqs. (4.1) e (4.2) por razões numéricas, visto que varia espacialmente muito menos do que a densidade. Adotamos unidades não dimensionais com $k_1 = c_s = \rho_0 = \mu_0 = 1$, onde $\rho = \langle \rho \rangle$ é a média espacial de ρ e k_1 é o menor número de onda na caixa de simulação. O tempo é medido em unidades de $(c_s k_1)^{-1}$, o espaço é medido em unidades de k_1^{-1} , \mathbf{v} em unidades de c_s , \mathbf{B} em unidades de $\sqrt{\mu_0 \rho_0} c_s$, ρ em unidades de ρ_0 e o valor da difusividade magnética η está em unidades de c_s/k_1 .

A energia cinética é injetada no sistema através de uma função forçante \mathbf{f} definida por (BRANDENBURG, 2001; BRANDENBURG *et al.*, 2002),

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left\{ N \mathbf{f}_{\mathbf{k}(t)} \exp [i \mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{x} + i \phi(t)] \right\}, \quad (4.4)$$

onde $\mathbf{k}(t) = (k_x, k_y, k_z)$ é um vetor de onda dependente do tempo, $\mathbf{x} = (x, y, z)$ é a posição e $\phi(t)$ com $|\phi| < \pi$ é uma fase aleatória. Aqui, $N = f_0 c_s (k c_s / \delta t)^{1/2}$, onde f_0 é um fator não-dimensional, $k = |\mathbf{k}|$, e δt é o passo de integração no tempo. Escolhemos o número de onda k em torno de $k_f = 5$. Assim, a cada passo de tempo, um vetor $\mathbf{k}(t)$ com $4.5 < |\mathbf{k}| < 5.5$ é selecionado aleatoriamente de um conjunto de 350 vetores previamente gerados com o número de onda dado. O operador $\mathbf{f}_{\mathbf{k}}$ é dado por

$$\mathbf{f}_{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}) - i \sigma k (\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}})}{\sqrt{1 + \sigma^2 k^2} \sqrt{1 - (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{e}})^2 / k^2}}, \quad (4.5)$$

onde $\hat{\mathbf{e}}$ é um vetor unitário arbitrário necessário para gerar um vetor $\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}$ que é perpendicular a \mathbf{k} . Note que para $\sigma = 1$, $|\mathbf{f}_{\mathbf{k}}|^2 = 1$ e a helicidade cinética dessa função forçante satisfaz

$$\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = |\mathbf{k}| \mathbf{f}^2 > 0, \quad (4.6)$$

em cada ponto do espaço. Para $\sigma = 0$, a função forçante não é helicoidal, portanto σ é uma medida da helicidade cinética do forçante. Esta função forçante bastante complexa foi empregada em vários trabalhos anteriores por ser capaz de gerar estatísticas turbulentas mesmo para valores moderados do número de Reynolds (HAUGEN; BRANDENBURG, 2004) e para a nossa pesquisa é interessante, porque nos permite escolher o nível de helicidade cinética adicionada ao fluido, um importante elemento para a geração de dínamos de grande escala.

O número de Reynolds e o número de Reynolds magnético são definidos, respectivamente, como

$$R_e = \frac{v_{rms}}{\nu k_f}, \quad R_m = \frac{v_{rms}}{\eta k_f}, \quad (4.7)$$

onde $\nu = \mu/\rho$ é a viscosidade cinemática, $v_{rms} \equiv \langle \mathbf{v}^2 \rangle^{1/2}$ é a raiz quadrada média da velocidade, do inglês *root-mean-square* (*rms*), e a média espacial é denotada por $\langle \cdot \rangle$.

4.1.1 O Código PENCIL

Desenvolvido especialmente para o estudo de turbulência em plasmas astrofísicos, o *PENCIL* é um código que resolve as equações MHD através de um método de diferenças finitas de alta ordem para derivadas espaciais. Para obter alta precisão, as derivadas espaciais são aproximadas por um polinômio de sexta ordem e a marcha no tempo é feita pelo método Runge-Kutta de terceira ordem. O código está disponibilizado ao público, [http : //pencil-code.nordita.org/](http://pencil-code.nordita.org/) , e é constantemente melhorado por considerável rede de colaboradores. O *PENCIL* já foi usado em vários estudos de dínamo MHD. Podemos citar, por exemplo:

- BRANDENBURG (2001) – em investigações sobre a transferência inversa de energia no efeito α ;
- REMPEL *et al.* (2009) – na avaliação de um novo tipo de intermitência do dínamo com forçante ABC;
- KARAK *et al.* (2015) – no estudo de histerese, onde o modelo com rotação diferencial exibe uma intermitência alternando estados de máximos e mínimos;
- BRANDENBURG *et al.* (2018) – no estudo de dínamo de pequena escala.

O *PENCIL* é escrito em *FORTRAN90* e pode ser compilado para rodar em série ou em paralelo. A paralelização é feita utilizando-se a biblioteca *MPI* (*Message Passage Interface*) com o domínio particionado na direção z e/ou y conforme o número de processadores escolhido. O código é altamente modular, permitindo a escolha do domínio e de quais termos vão ser considerados nas equações MHD que regem a evolução do sistema.

As equações MHD são resolvidas pelo *PENCIL* através de métodos de diferenças finitas. Primeiramente, as derivadas espaciais são aproximadas por um operador de ponto. No caso das derivadas espaciais de primeira ordem, o operador é

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \approx \delta_x = \frac{1}{60\Delta x} [& -()_{i-3,j,k} + 9()_{i-2,j,k} - 45()_{i-1,j,k} \\ & + 45()_{i+1,j,k} - 9()_{i+2,j,k} + ()_{i+3,j,k}], \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \approx \delta_y = \frac{1}{60\Delta y} [& -()_{i,j-3,k} + 9()_{i,j-2,k} - 45()_{i,j-1,k} \\ & + 45()_{i,j+1,k} - 9()_{i,j+2,k} + ()_{i,j+3,k}], \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \approx \delta_z = \frac{1}{60\Delta x} [& -()_{i,j,k-3} + 9()_{i,j,k-2} - 45()_{i,j,k-1} \\ & + 45()_{i,j,k+1} - 9()_{i,j,k+2} + ()_{i,j,k+3}], \end{aligned} \quad (4.10)$$

As equações de diferenças ordinárias obtidas da aplicação do operador de ponto, Eqs (4.8)-(4.10), são, então, avançadas no tempo pelo método Runge-Kutta de terceira ordem,

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \frac{1}{6}(r_1 + 4r_2 + r_3), \quad (4.11)$$

com

$$\begin{aligned} r_1 &= F(\varphi_n, t_n), \\ r_2 &= F(\varphi_n + r_1 \frac{\Delta t}{2}, t_n + \frac{\Delta t}{2}), \\ r_3 &= F(\varphi_n - r_1 \Delta t + 2r_2 \Delta t, t_n + \Delta t), \end{aligned}$$

onde $F(\varphi, t)$ é o lado direito da equação de diferenças obtida para uma variável φ ,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(\varphi, t), \quad (4.12)$$

e $\varphi_n \equiv \varphi(t_n)$. O passo no tempo é dado por

$$\Delta t = \text{CFL} \frac{\Delta x}{|v|},$$

onde, CFL é a constante de Courant-Friedrich-Lewy, mantida em CFL = 0.4, com passo de tempo variável.

O domínio usado nas simulações MHD consiste em um cubo com lados $L_x = L_y = L_z = 2\pi$, como mostrado na Figura 4.3. O domínio é discretizado em uma malha cartesiana uniforme em todas as direções. Nas simulações de dínamo MHD usou-se 64^3 pontos, o que deu um espaçamento de malha $\Delta x = 2\pi/64 = 0.098$.

4.1.2 Condições Iniciais e de Contorno

Inicialmente, $\ln(\rho)$, e a velocidade do plasma são nulos. O potencial vetor magnético inicial é modelado por um ruído com distribuição gaussiana com média zero e desvio padrão igual a 10^{-3} que age como um campo semente. Essas condições assumem que o

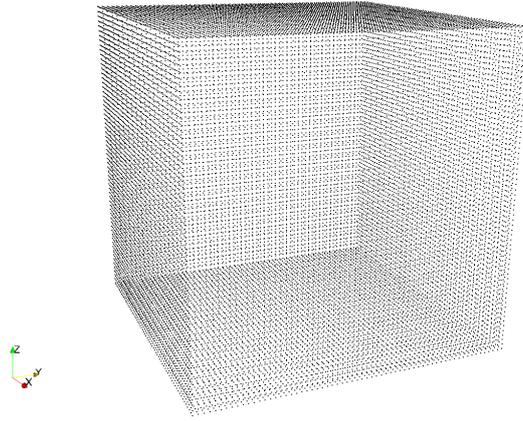


FIGURA 4.3 – Pontos do domínio computacional.

valor da variável no ponto final da malha em uma dada direção é igual ao valor da variável no ponto inicial da malha nessa direção, ou seja, as condições de contorno são periódicas. Por exemplo, no caso 1D isso implica que

$$\varphi_{i=0} = \varphi_{i=Nx}, \quad (4.13)$$

e

$$\varphi_{i=-1} = \varphi_{i=Nx-1}. \quad (4.14)$$

4.2 Resultados

4.2.1 Resolução Numérica

Primeiro, devemos escolher o tamanho da grade para a simulação numérica das Eqs. (4.1)-(4.3). A Figura 4.4 mostra uma comparação das séries temporais do campo magnético (B_{rms} , linha preta) e de velocidade (v_{rms} , linha vermelha) em eixos log-linear para simulações utilizando 64^3 (a) e 128^3 (b) pontos da grade. Os valores dos parâmetros são $f_0 = 0.07$, $\nu = \eta = 0.005$ e $\sigma = 1$. Inicialmente, o campo magnético semente é muito fraco para impactar o campo de velocidade, mas o campo de velocidade tem um forte impacto na equação de indução (4.1), causando um crescimento exponencial da energia magnética durante a fase inicial (cinemática) do dínamo. A taxa de crescimento γ no gráfico log-linear nesta fase pode ser encontrada como a inclinação de uma linha ajustada e é de aproximadamente 0.05 para ambas as resoluções. Conforme o fluxo magnético cresce, ele começa a afetar fortemente o campo de velocidade através da força de Lorentz presente na equação de momento (4.2), causando uma rápida diminuição na energia cinética em torno de $t \simeq 200$ para ambas as resoluções. Eventualmente, as energias magnética e cinética médias atingem um valor saturado que é aproximadamente o mesmo para ambas as

resoluções, para o qual temos $R_e = R_m \approx 20$. Com base nisso, e considerando a grande quantidade de longas séries temporais calculadas neste trabalho, adotamos a resolução inferior de 64^3 pontos nas seções seguintes.

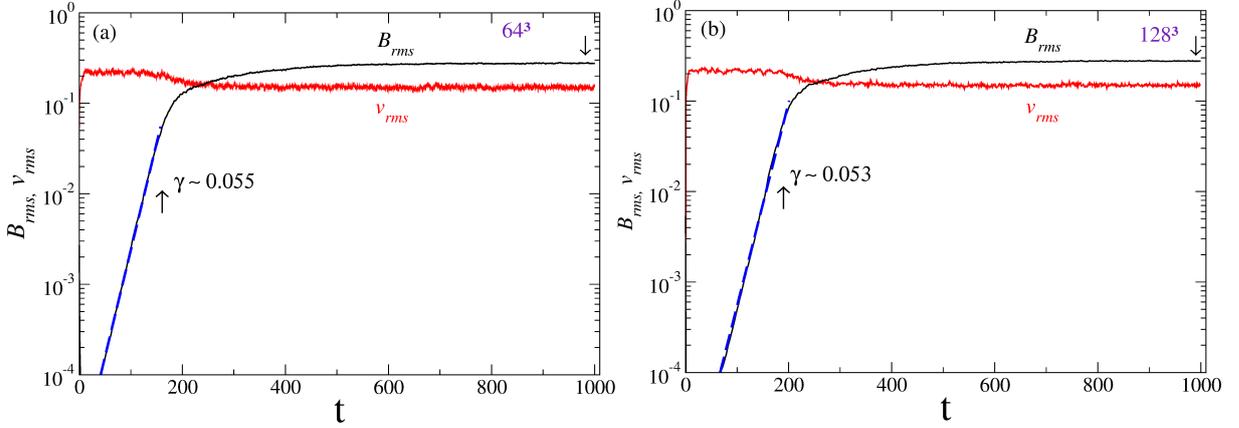


FIGURA 4.4 – Comparação de simulações numéricas com diferentes resoluções de grade. (a) Séries temporais de B_{rms} (linha preta) e v_{rms} (linha vermelha) de simulações de dínamo MHD em escala log-linear para $\sigma = 1$ utilizando 64^3 pontos de grade; a fase cinemática tem uma taxa de crescimento de $\gamma \approx 0.055$. (b) O mesmo que (a), mas para 128^3 pontos de grade; a taxa de crescimento é $\gamma \sim 0.053$.

4.2.2 Dínamo

Em seguida, definimos $f_0 = 0.07$, $\nu = \eta = 0.005$ e variamos σ como um parâmetro de controle. Usar σ como parâmetro de controle é uma escolha natural, visto que se sabe que a presença de helicidade cinética no escoamento pode ser favorável para geração de campo magnético (GILBERT *et al.*, 1988), embora não seja estritamente necessário para dínamo de pequena ou grande escala operar (ver (RASSKAZOV *et al.*, 2018; ANDRIEVSKY *et al.*, 2019) e suas referências).

Como a função forçante utilizada neste trabalho tem k em torno de $k_f = 5$, a energia cinética é injetada nesta escala no fluxo, induzindo a produção de uma série de turbilhões com esse número de onda no espaço físico. Quando $\sigma = 1$, a helicidade é máxima no fluxo, causando uma transferência inversa de energia de $k = 5$ para $k = 1$ que foi relacionada ao efeito α em (BRANDENBURG, 2001). Isso pode ser observado plotando os espectros de potência unidimensionais, como na Fig. 4.5, onde os espectros cinético (linha sólida vermelha) e magnético (linha sólida preta) são calculados como a energia integrada ao longo de cascas esféricas no espaço $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ para $t = 1000$, no regime de dínamo saturado não-linear. Pode-se observar que o espectro cinético tem o pico em $k = 5$ e o magnético em $k = 1$. Isso causa o aparecimento das estruturas magnéticas de grande escala ilustradas no painel superior da Figura 4.6-(a).

Observe que B_y e B_z exibem uma oscilação de grande escala, além das flutuações

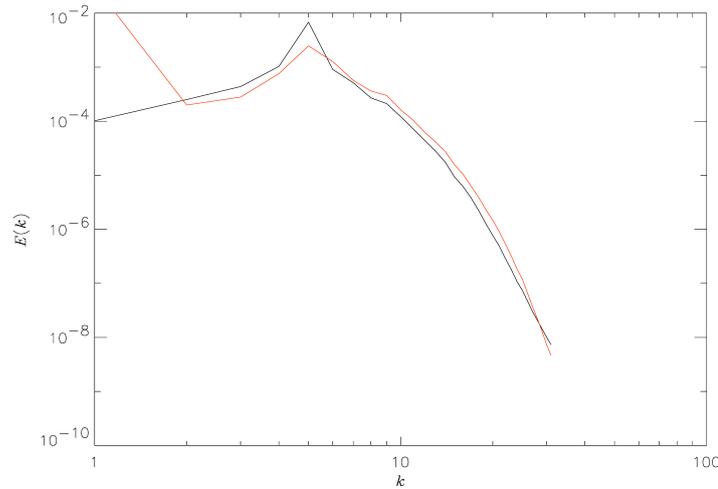


FIGURA 4.5 – Espectros de energia cinética (linha sólida vermelha) e magnética (linha sólida preta) no tempo $t = 1000$ para $\sigma = 1$.

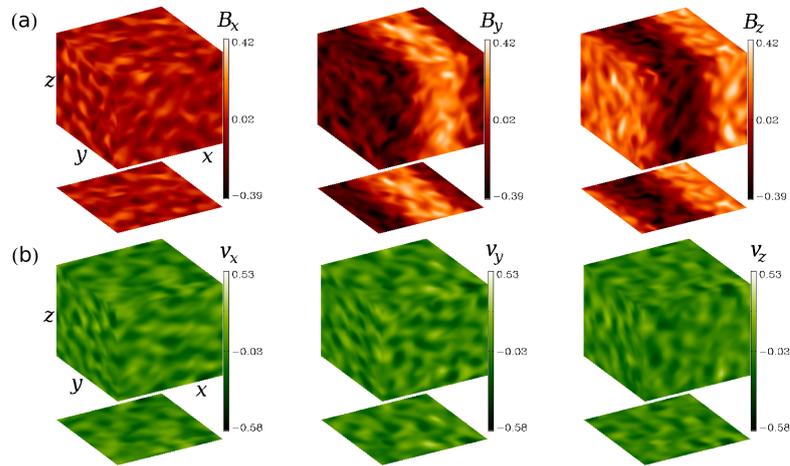


FIGURA 4.6 – Intensidade do campo magnético (a) e componentes do campo de velocidade (b) em $t = 1000$ para $\sigma = 1$.

de pequena escala. O painel inferior mostra os componentes do campo de velocidade, cujas maiores estruturas estão na escala k_f . A Figura 4.7 ilustra a evolução temporal do campo magnético para as componentes $\langle B_x^2 \rangle$, $\langle B_y^2 \rangle$, $\langle B_z^2 \rangle$. Pode-se visualizar que para as componentes $\langle B_y^2 \rangle$ e $\langle B_z^2 \rangle$ o campo magnético apresenta aproximadamente a mesma amplitude de energia. Para a componente $\langle B_x^2 \rangle$ o campo magnético apresenta um crescimento inicial com uma baixa amplitude de energia, decaindo em $t \cong 3.1 \times 10^2$.

Na Figura 4.8, observa-se a dinâmica espaço-temporal do campo magnético por meio das médias horizontais de \overline{B}_y no plano xy e \overline{B}_y no plano yz . Nas respectivas figuras, as intensidades dos campos médios são indicadas através da escala de cores. Observa-se a formação de uma estrutura de campo magnético de grande escala em $\overline{B}_y(z)$ (Fig. 4.8 (a)) para o instante de tempo $t \cong 500$, mas a estrutura não se propaga ao longo do tempo. A Fig. 4.8 (b) mostra a variação da componente $\overline{B}_y(x)$, onde se observa estruturas de campo

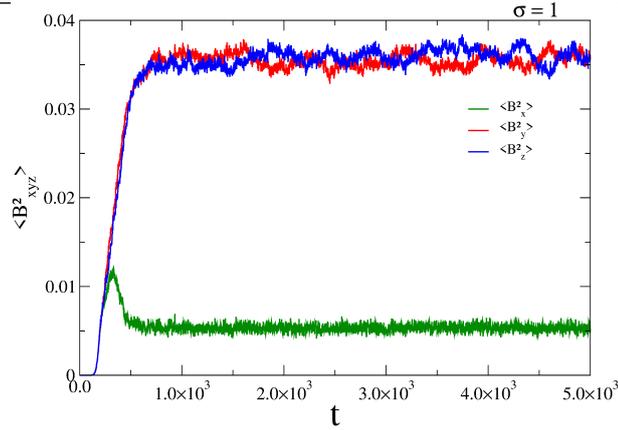


FIGURA 4.7 – Série temporal da energia magnética para as componentes $\langle B_x^2 \rangle$, $\langle B_y^2 \rangle$, $\langle B_z^2 \rangle$.

magnético de grande escala. A direção de propagação do campo é arbitrária, dependendo das condições iniciais.

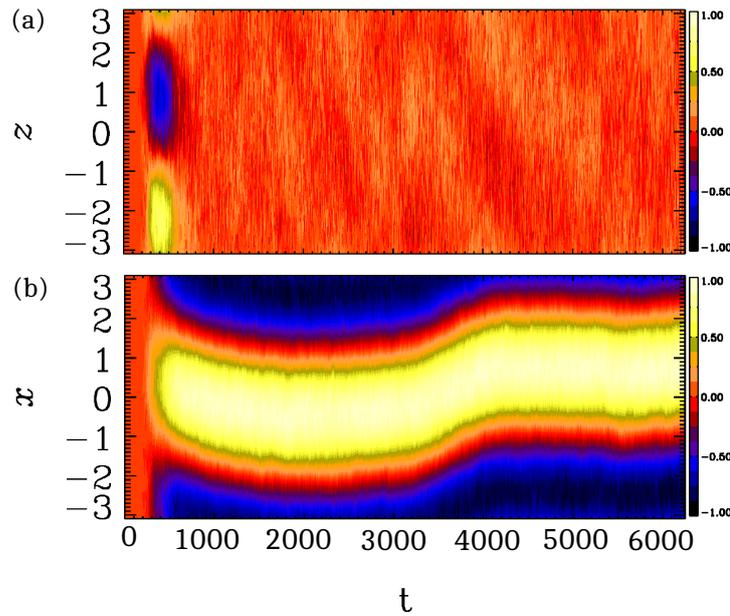


FIGURA 4.8 – Evolução espaço-tempo das médias horizontais de \overline{B}_y no plano xy em função de z (a) e \overline{B}_y no plano yz em função de x (b) para $\sigma = 1$.

Ilustra-se, na Figura 4.9, o atrator caótico hidromagnético para $\sigma = 1$, onde a trajetória descreve a variação temporal das componentes do vetor campo magnético $\mathbf{B} = (B_x(x_0, y_0, z_0, t), B_y(x_0, y_0, z_0, t), B_z(x_0, y_0, z_0, t))$ calculado na origem do domínio espacial $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$. As estruturas do campo magnético são representadas na Figura 4.10 para diferentes valores de σ . Para $\sigma = 0.3$ (Fig. 4.10 (a)), observa-se um padrão coerente de grande escala modulado ao longo da direção y para as componentes B_x e B_z ; a componente B_y exhibe apenas flutuações de pequena escala. Para $\sigma = 0.4$ (Fig. 4.10 (b)), a componente B_x exhibe apenas flutuações de pequena escala; B_y e B_z mostram um

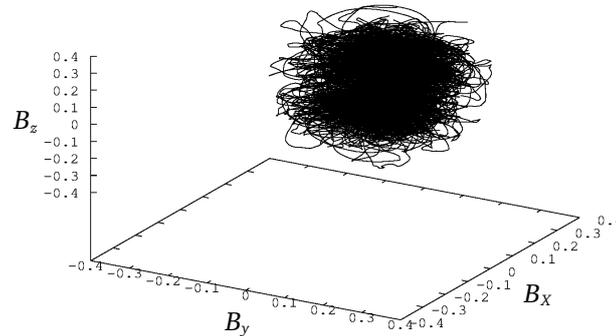


FIGURA 4.9 – Trajetória caótica de $(B_x(x_0, y_0, z_0, t), B_y(x_0, y_0, z_0, t), B_z(x_0, y_0, z_0, t))$ para o atrator hidromagnético para $\sigma = 1$.

padrão coerente de grande escala modulado ao longo da direção x . Para $\sigma = 0.5$, $\sigma = 0.6$ e $\sigma = 0.7$ (Figs. 4.10 (c), (d) e (e)), as componentes B_x e B_z exibem um padrão coerente de grande escala modulado ao longo da direção y ; a componente B_y exhibe apenas flutuações pequena escala, apresentando um mesmo padrão de comportamento do campo magnético. Para $\sigma = 0.8$ e $\sigma = 0.9$ (Figs. 4.10 (f) e (g)), as componentes B_x e B_y exibem um padrão coerente de grande escala modulado ao longo da direção z ; a componente B_z exhibe apenas flutuações de pequena escala.

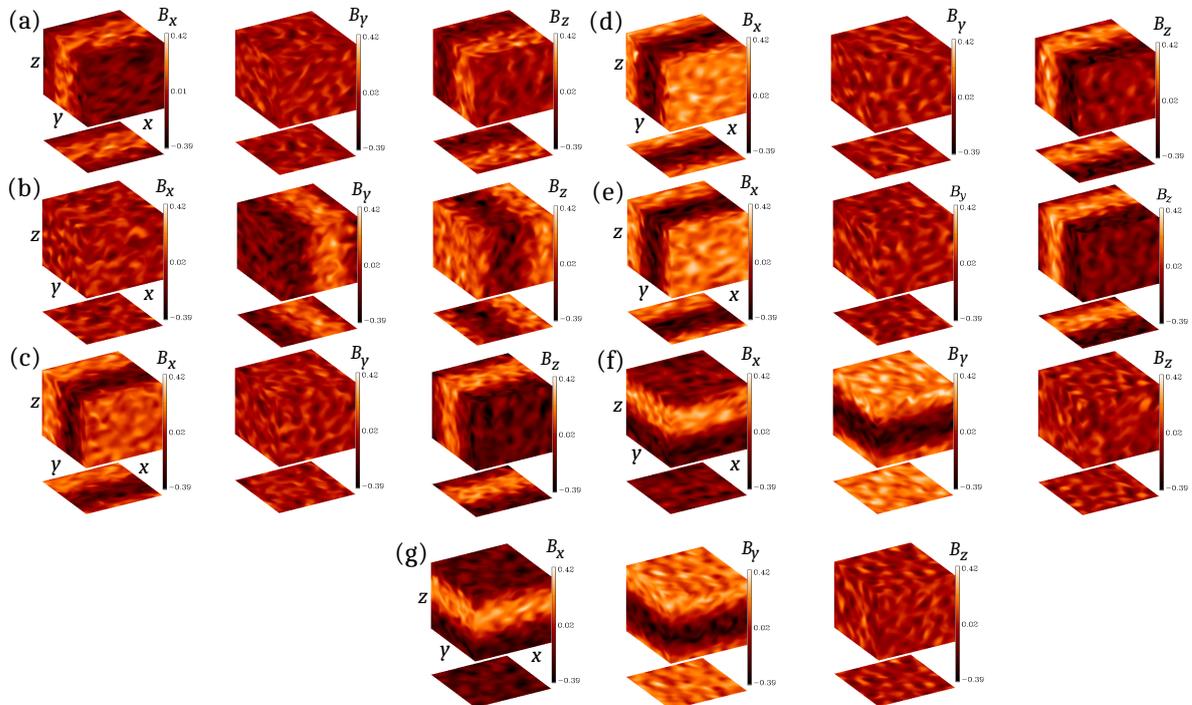


FIGURA 4.10 – Gráfico de intensidade do campo magnético para as componentes B_x, B_y, B_z , para $t = 5 \times 10^3$, ilustrando o aparecimento de estruturas do campo magnético de grande escala, para diferentes valores de σ . (a) $\sigma = 0.3$, (b) $\sigma = 0.4$, (c) $\sigma = 0.5$, (d) $\sigma = 0.6$, (e) $\sigma = 0.7$, (f) $\sigma = 0.8$ e (g) $\sigma = 0.9$.

4.2.3 Diagrama de Bifurcação

O início da ação do dínamo é mostrado na Figura 4.11, a qual representa o diagrama de bifurcação em função de σ para a média no tempo da raiz quadrada média do campo magnético \bar{B}_{rms} . Para cada valor de σ , um campo magnético semente fraco é usado como condição inicial, o transiente inicial é descartado e, em seguida, as médias de tempo de \bar{B}_{rms} são plotadas. A energia magnética do atrator é zero quando σ está abaixo de 0.21, implicando não haver ação do dínamo e o estado do atrator é puramente hidrodinâmico. Para $\sigma > 0.21$ a ação do dínamo ocorre e há um salto repentino na energia magnética do atrator. A energia magnética média deste *atrator hidromagnético* continua crescendo a partir de então, até $\bar{B}_{rms} \approx 0.275$, para $\sigma = 1$. Observe que na transição crítica, o atrator hidrodinâmico perde estabilidade e perturbações magnéticas de pequena amplitude são suficientes para conduzir o sistema em direção ao atrator hidromagnético.

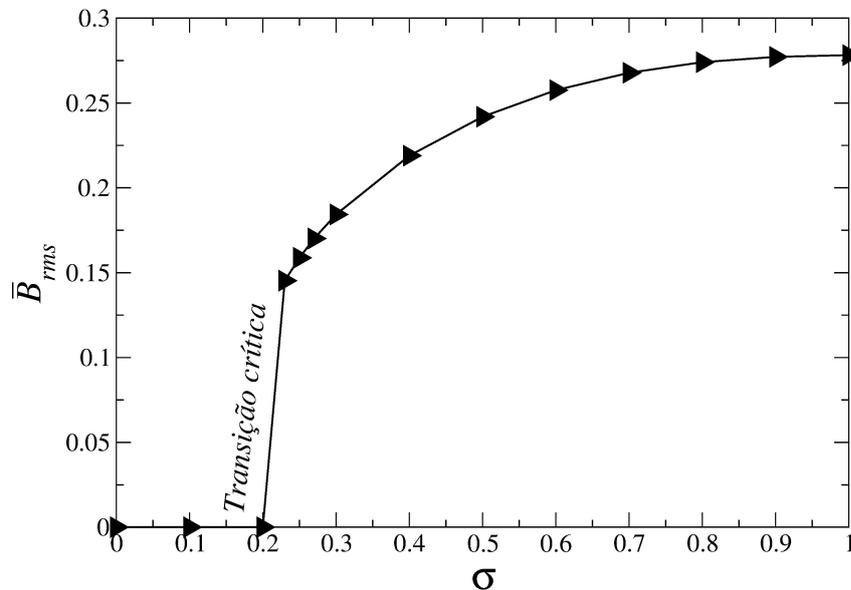


FIGURA 4.11 – Diagrama de bifurcação mostrando a média temporal de \mathbf{B}_{rms} em função de σ .

Em trabalhos anteriores (SWEET *et al.*, 2001a; SWEET *et al.*, 2001b), mostrou-se que a transição para o dínamo em simulações MHD em uma caixa periódica com o forçante ABC helicoidal foi devido a uma *bifurcação blowout não histerética*. Neste tipo de bifurcação, o sistema dinâmico tem uma variedade invariante suave³ dentro da qual está um atrator caótico para valores de parâmetro menores que um valor crítico. À medida que o valor do parâmetro é aumentado, ocorre uma *bifurcação blowout*, onde a variedade perde sua propriedade atratora e o conjunto caótico nele deixa de ser um atrator. Logo após a

³Visualiza-se uma variedade em um espaço de fases como uma superfície suave formando um conjunto no espaço de fases. Uma variedade invariante de um sistema dinâmico é uma variedade com a condição adicional de que órbitas que nela se iniciem permanecem na variedade com a evolução dinâmica do sistema (TÉL, 2015).

transição, as soluções exibem *intermitência on-off*, ou seja, passam muito tempo muito perto da variedade, então são “explodidas” dele em estouros rápidos onde se movem para longe da variedade. Após cada estouro, as trajetórias voltam para as vizinhanças da variedade e o processo se repete intermitentemente (OTT; SOMMERER, 1994), como ilustrado na Figura 4.12. REMPEL *et al.* (2009) encontraram, também, campos magnéticos intermitentes em um dínamo de grande escala em uma caixa periódica com o forçante ABC helicoidal e relataram que a transição para o dínamo foi devido a uma *bifurcação blowout não histerética*, como pode ser ilustrado no diagrama de bifurcação e séries temporais construído pelos autores na Figura 4.13.

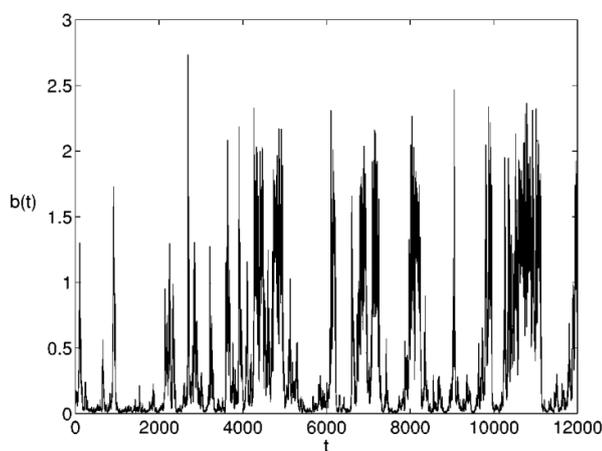


FIGURA 4.12 – Série temporal da energia magnética exibindo *intermitência on-off*, caracterizando uma bifurcação *blowout não histerética*. Fonte: (SWEET *et al.*, 2001a) (p. 3).

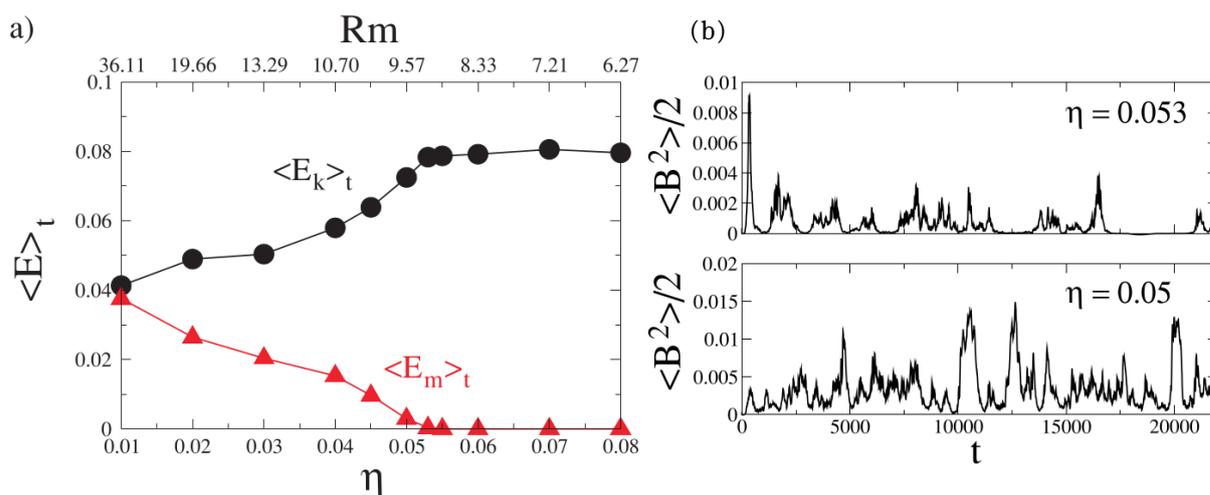


FIGURA 4.13 – (a) Diagrama de bifurcação mostrando a média de tempo da energia magnética (triângulos vermelhos) e energia cinética (círculos pretos) em função de η . (b) Séries temporais intermitentes da energia magnética caracterizando uma bifurcação *blowout não histerética*. Fonte: (REMPEL *et al.*, 2009) (p. 511 – 512).

Tal intermitência caracteriza-se devido à alternância de dois estados diferentes – “on–

off”. O estado “*off*” é quase constante, o mesmo pode permanecer assim por longos períodos. Esses períodos de baixa amplitude são conhecidos como fases laminares. O estado “*on*” caracteriza-se por explosões alternando abruptamente o comportamento do sistema, como pode ser observado na Figura 4.14.

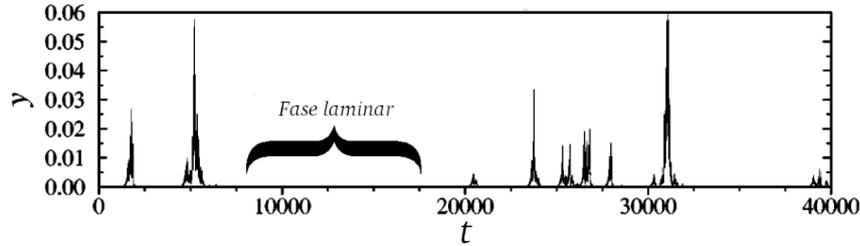


FIGURA 4.14 – Exemplo de uma série temporal exibindo *intermitência on-off*.
 Fonte: (ASHWIN *et al.*, 2001) (p. 7) (modificada).

Tentamos, em vão, encontrar estouros intermitentes na transição para o dínamo usando a função forçante na forma da Eq. 4.4. As Figuras 4.15(a)-(b) mostram que pouco antes da transição, pequenas perturbações magnéticas decaem e as soluções convergem para a variedade puramente hidrodinâmica ($B = 0$). Assim, essa variedade é atratora e há um atrator hidrodinâmico caótico sobre ela, como observado na Figura 4.16 (as flutuações do campo de velocidade são sempre caóticas em nosso trabalho).

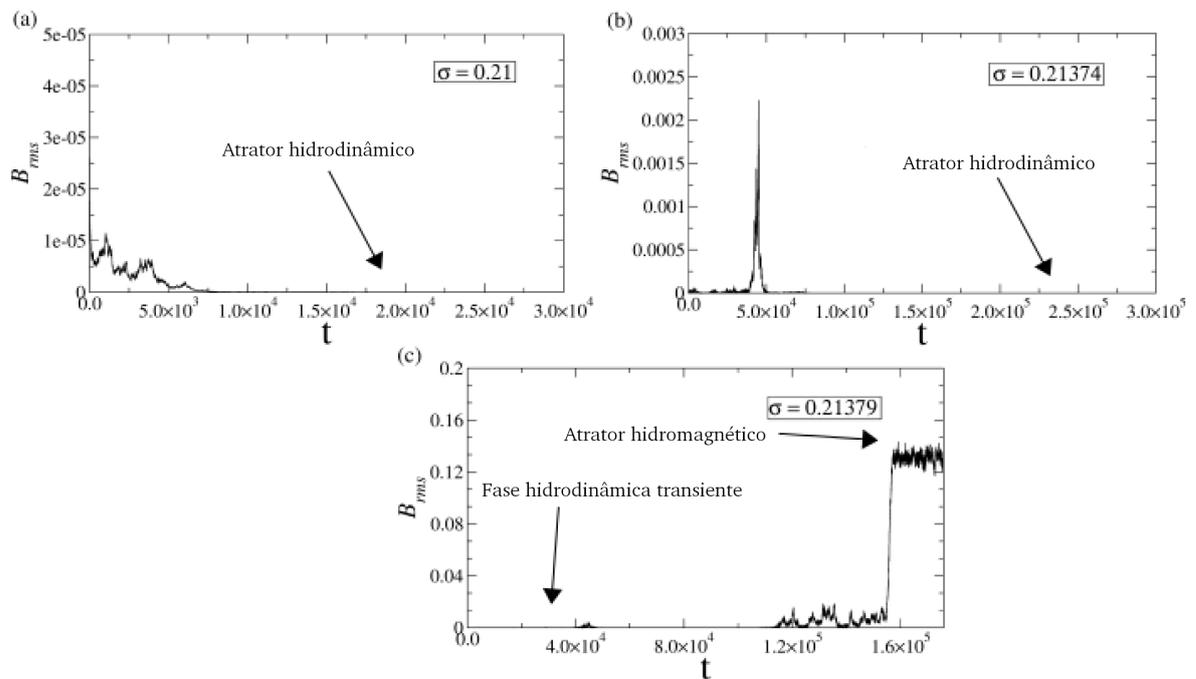


FIGURA 4.15 – Séries temporais de B_{rms} próximas à transição crítica para a ação do dínamo mostrada na Fig. 4.11, para um campo magnético semente aleatório. Antes da transição (a e b), mostrando o decaimento para um atrator puramente hidrodinâmico, e logo após a transição (c), mostrando uma longa fase hidrodinâmica transitória antes de atingir o atrator hidromagnético.

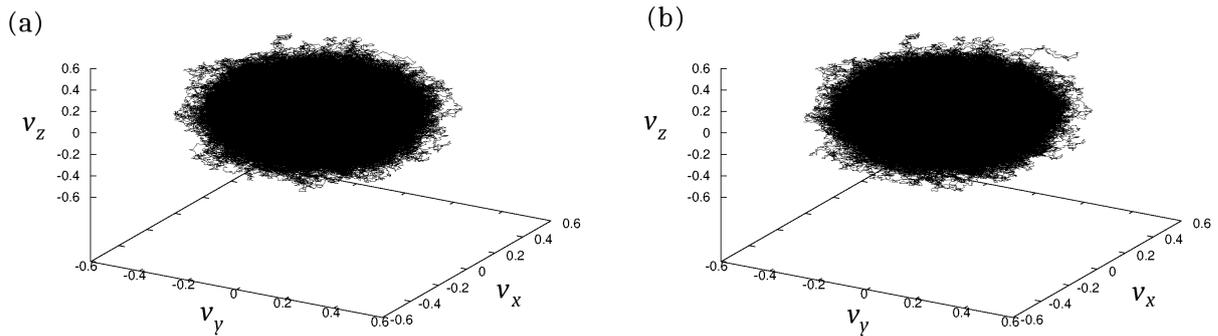
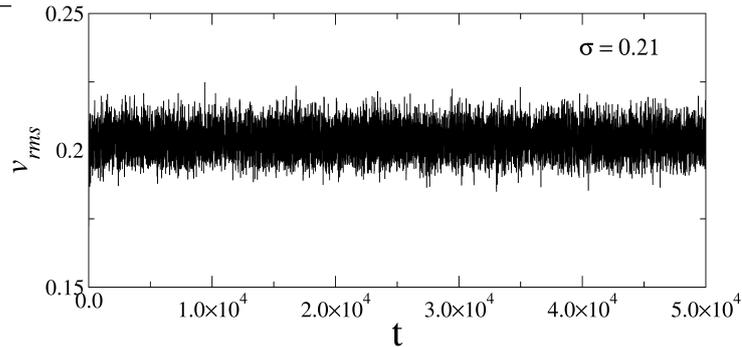


FIGURA 4.16 – Trajetória de $(v_x(x_0, y_0, z_0, t), v_y(x_0, y_0, z_0, t), v_z(x_0, y_0, z_0, t))$ para o atrator hidrodinâmico para (a) $\sigma = 0.21$ e (b) $\sigma = 0.21374$.

Muito perto da transição, alguns estouros magnéticos podem ocorrer, como na Fig. 4.15 (b) para $\sigma = 0.21374$, mas eles têm uma pequena amplitude e, eventualmente, a variedade hidrodinâmica atrai a solução e nenhum outro estouro é observado. Para $\sigma = 0.21379$, logo após a transição, a solução permanece perto da variedade por um longo tempo antes de saltar repentinamente em direção a um atrator caótico com alta energia magnética, o atrator hidromagnético. Isso mostra que a variedade hidrodinâmica perdeu estabilidade transversal, visto que as condições iniciais com $\mathbf{B} = 0$ permanecem na variedade para todos os valores dos parâmetros, mas mesmo pequenos valores não nulos de \mathbf{B} (ou seja, perturbações que são transversais à variedade hidrodinâmica) conseguem expelir trajetórias para longe da variedade e em direção ao atrator hidromagnético. Isso significa que o atrator hidrodinâmico anterior também perdeu sua estabilidade transversal e o que resta é uma fase hidrodinâmica caótica transitória. Pode-se dizer que o atrator caótico hidrodinâmico tornou-se uma sela caótica, mas como esse conjunto caótico ainda atrai todas as condições iniciais da variedade hidrodinâmica, que por sua vez se tornou instável, nos referimos a este conjunto caótico hidrodinâmico como um *atrator caótico relativo* (Figura 4.17), adotando uma nomenclatura introduzida por SKUFCA *et al.*(2006). Observe que, ao contrário do que ocorre tipicamente com selas caóticas, a variedade estável do atrator relativo em questão não é uma estrutura fractal, mas todo o subespaço hidrodinâmico definido por $\mathbf{B} = 0$. A razão para a ausência de explosões intermitentes de alta amplitude em nossa transição para dínamo é explicada na próxima seção.


 FIGURA 4.17 – Série temporal de v_{rms} , ilustrando a fase caótica hidrodinâmica.

4.2.4 Histerese e Transientes Caóticos

Motivados por KARAK *et al.* (2015), buscamos histerese neste sistema de dínamo. Embora o trabalho deles tenha imposto um fluxo de cisalhamento uniforme em grande escala que está ausente em nossas simulações, ainda conseguimos encontrar uma histerese em nosso modelo de dínamo- α^2 .

Lembre-se da seção 4.2.3 onde a transição para o atrator hidromagnético ocorre em $\sigma = \sigma_c \approx 0.21379$, onde os campos magnéticos sementes aleatórios são amplificados; para $\sigma < \sigma_c$, os campos sementes decaem para zero, conforme as soluções se aproximam de um atrator hidrodinâmico. No entanto, se tomarmos como condição inicial um estado com um campo magnético de alta energia, ele não decai para o atrator hidrodinâmico, como mostrado na Fig. 4.18. Aqui, a condição inicial é um estado obtido do atrator hidromagnético em $\sigma = 0.3$; quando o parâmetro de controle é reduzido para $\sigma = 0.2$ (Fig. 4.18(a)) e $\sigma = 0.199$ (Fig. 4.18(b)), as soluções permanecem no atrator hidromagnético, com a energia magnética ainda seguindo o ramo superior na Fig. 4.11. Essa é a assinatura de uma histerese, pois a saturação da amplitude do campo magnético depende do histórico anterior do parâmetro de controle. A Figura 4.19 ilustra a evolução espaço-temporal. Para valores mais baixos de σ , o atrator hidromagnético perde estabilidade e se torna uma sela caótica hidromagnética, deixando um transiente caótico na região do espaço de fase anteriormente ocupado pelo atrator. Dois desses longos transientes caóticos são exibidos na Fig. 4.20 na forma de séries temporais de B_{rms} , e na Fig. 4.21 na forma da evolução espaço-temporal de B_y da componente média no plano horizontal (B_x, B_y) em função do z e do tempo.

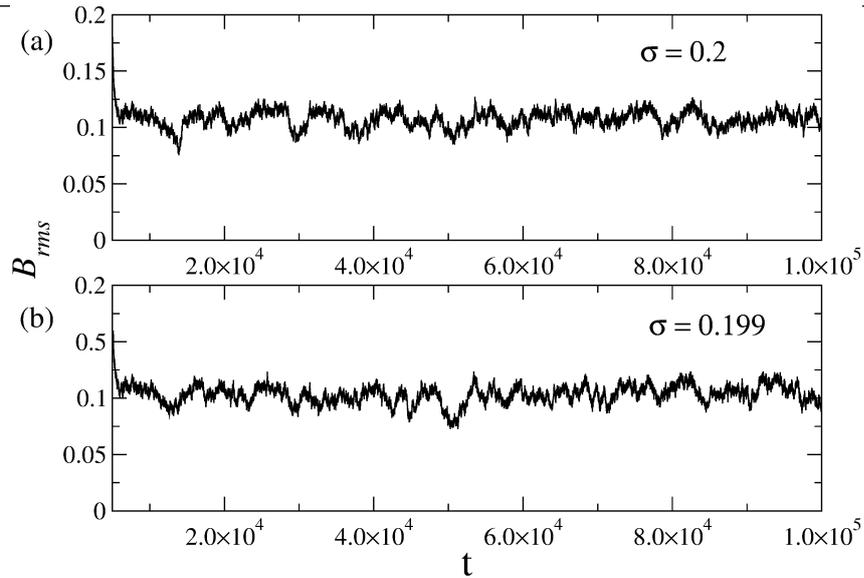


FIGURA 4.18 – Séries temporais de B_{rms} para dois valores diferentes de σ menores que a transição crítica para o dínamo mostrado na Fig. 4.11. As simulações partiram de um forte campo magnético inicial, obtido em $\sigma = 0.3$. Em seguida, o parâmetro de controle foi reduzido para (a) $\sigma = 0.2$ e (b) $\sigma = 0.199$. A solução não decai em direção ao atrator hidrodinâmico com energia magnética nula, indicando histerese.

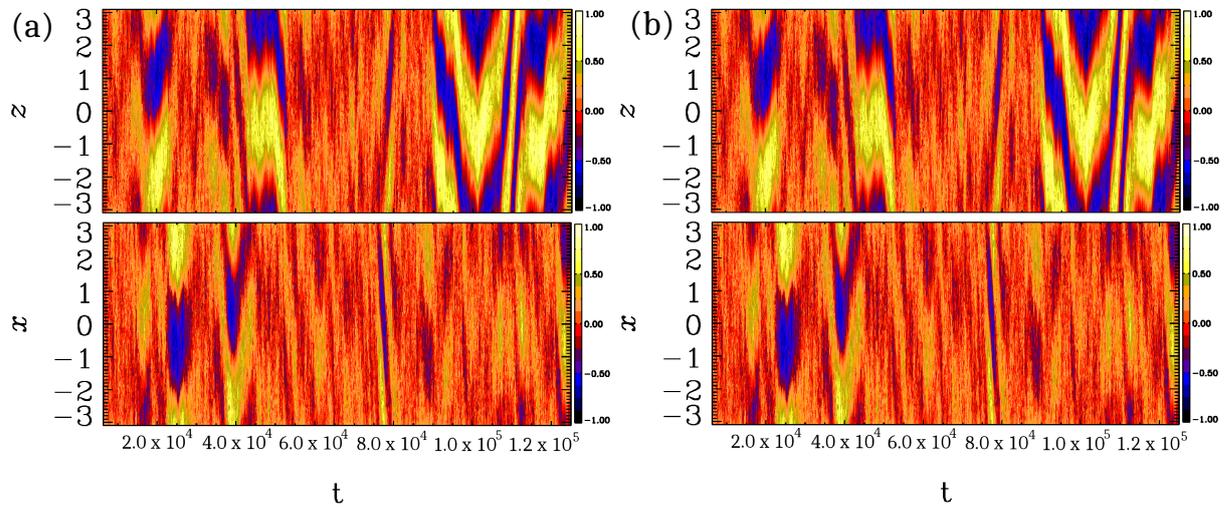


FIGURA 4.19 – Evolução espaço-tempo das médias horizontais de B_y em função de z e tempo para (a) $\sigma = 0.2$ e (b) $\sigma = 0.199$.

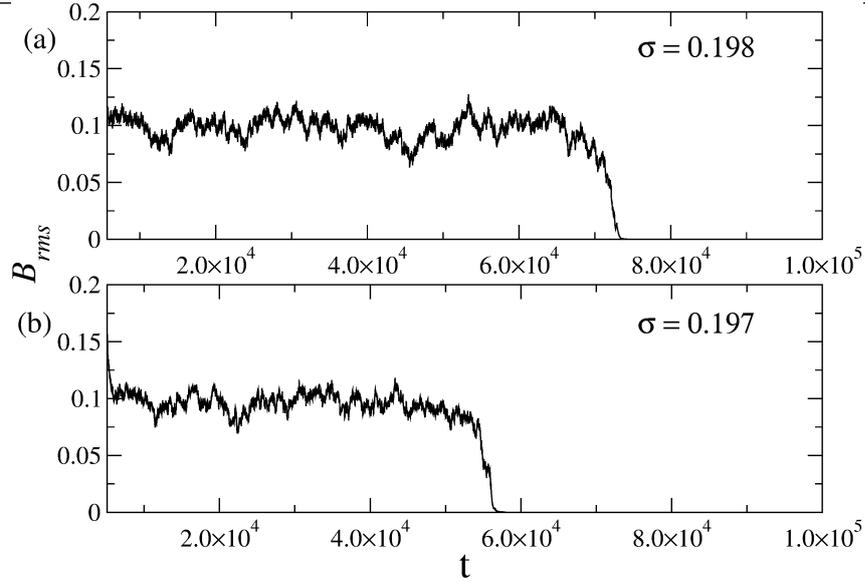


FIGURA 4.20 – Série temporal de B_{rms} exibindo transientes hidromagnéticos caóticos para (a) $\sigma = 0.198$ e (b) $\sigma = 0.197$.

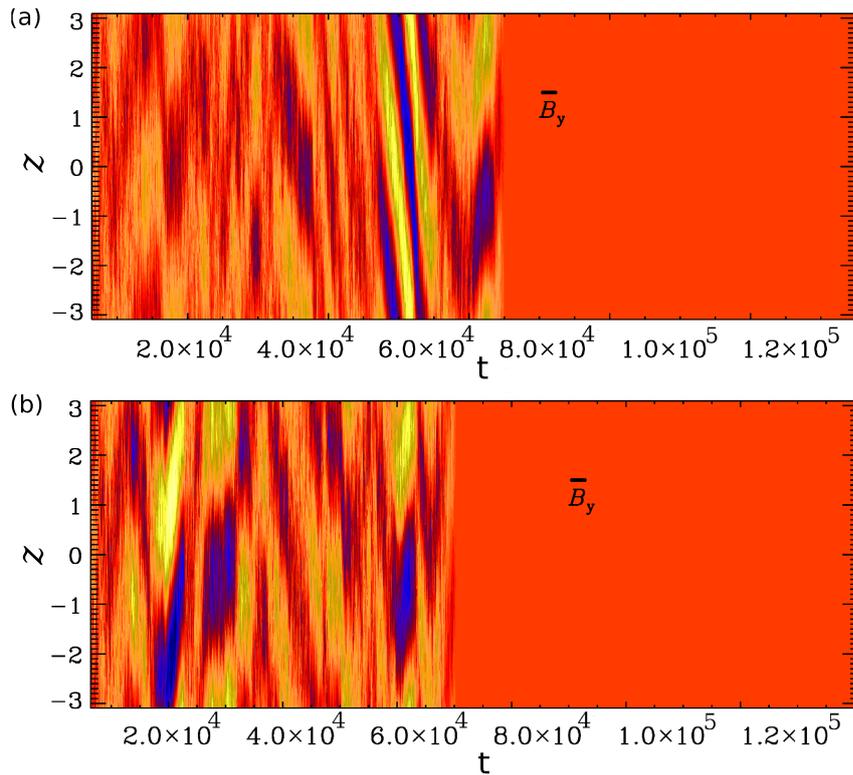


FIGURA 4.21 – Evolução espaço-tempo das médias horizontais de B_y em função de z e tempo para (a) $\sigma = 0.198$ e (b) $\sigma = 0.197$.

O atrator caótico hidromagnético é mostrado na Fig. 4.22 (a) para $\sigma = 0.199$, onde as trajetórias caóticas representam a variação temporal dos componentes do vetor campo magnético $\mathbf{B} = (B_x(x_0, y_0, z_0, t), B_y(x_0, y_0, z_0, t), B_z(x_0, y_0, z_0, t))$ calculado na origem do

domínio espacial $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$. Uma sela caótica hidromagnética é mostrada na Fig. 4.22(b) para $\sigma = 0.198$. Isso sugere que ambos os conjuntos caóticos ocupam aproximadamente a mesma região no espaço de fase, mas uma pequena variação no parâmetro σ é suficiente para reduzir consideravelmente o tamanho do conjunto caótico, seguindo o rápido declínio da energia magnética no ramo superior do diagrama de bifurcação na Fig. 4.11.

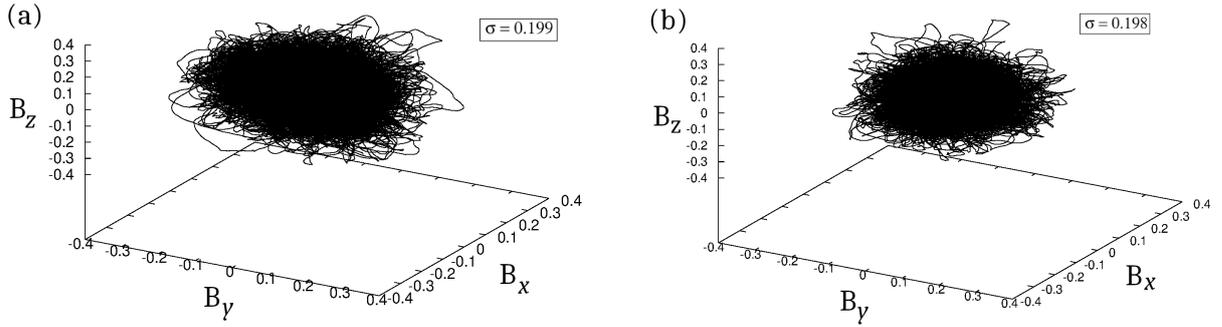


FIGURA 4.22 – Trajetória das condições iniciais em conjuntos invariantes no espaço $(B_x(x_0, y_0, z_0, t), B_y(x_0, y_0, z_0, t), B_z(x_0, y_0, z_0, t))$ para o atrator hidromagnético em $\sigma = 0.199$ (a) e sela caótica hidromagnética em $\sigma = 0.198$ (b). O ponto (x_0, y_0, z_0) está na origem do domínio espacial.

Conforme ilustrado pela Fig. 4.20, a duração média dos transientes caóticos diminui com a diminuição de σ . Esta observação sugere que a desestabilização do atrator caótico hidromagnético em $\sigma = \sigma_{bc} \approx 0.198$ é devido a uma crise de fronteira, onde um atrator caótico colide com o limite de sua própria bacia de atração, levando à destruição tanto do atrator quanto de sua fronteira. Uma sela caótica é, então, deixada no lugar do atrator caótico e, como mostrado por GREBOGI *et al.* (1987), a duração média τ dos transientes caóticos perto de uma crise de fronteira decai com a distância do valor do parâmetro de crise σ_{bc} seguindo a lei

$$\tau \sim (\sigma - \sigma_{bc})^{\Upsilon}, \quad (4.15)$$

para um Υ negativo. Calculamos τ para um conjunto de valores de σ próximo a σ_{bc} e obtivemos os resultados mostrados na Fig. 4.23, onde a linha ajustada tem inclinação $\Upsilon = -0.04$. O seguinte procedimento foi adotado para produzir esta figura. Primeiro, um conjunto de 100 condições iniciais é selecionado a partir do atrator caótico hidromagnético em $\sigma = 0.3 > \sigma_{bc}$; então, essas condições iniciais são usadas para gerar séries temporais caóticas transitórias para um dado $\sigma < \sigma_{bc}$; o tempo transiente para cada condição inicial é registrado quando B_{rms} decai abaixo de um certo limite ($B_{rms} < 0.01$) e o tempo transiente médio τ é calculado a partir de 100 séries temporais. Este processo é repetido para os 10 valores de $\sigma < \sigma_{bc}$ mostrados na Fig. 4.23. A linha ajustada foi obtida através de regressão linear. Tendo estabelecido a existência de histerese no modelo atual de dínamo α^2 , voltamos à questão levantada anteriormente de porquê estourões intermitentes fortes não são observadas na transição para o dínamo perto de $\sigma = 0.21$. Como mencionado

antes, a transição no dínamo ABC é devido a uma bifurcação *blowout não histerética*, onde a intermitência está presente (SWEET *et al.*, 2001a). Diferentemente, a histerese em nosso modelo significa que existe uma região de biestabilidade no espaço de parâmetros para $0.199 \leq \sigma \leq 0.213$, onde dois atratores caóticos coexistem, o hidrodinâmico e o hidromagnético. Nossos resultados revelam que uma *bifurcação blowout histerética* é responsável pela transição do dínamo. De acordo com OTT; SOMMERER (1994), neste tipo de bifurcação há um conjunto caótico atrativo na variedade invariante (hidrodinâmica) e este conjunto caótico perde estabilidade conforme o parâmetro do sistema σ aumenta através de um valor crítico σ_c (como na Fig. 4.11). Para $\sigma < \sigma_c$ as órbitas que não estão na bacia do atrator na variedade invariante, vão para algum outro atrator (hidromagnético) fora da variedade (como na Fig. 4.18). À medida que σ aumenta através de σ_c , o atrator perde estabilidade. Para σ ligeiramente maior do que σ_c , os pontos iniciados perto da variedade podem experimentar um transiente caótico em que suas órbitas inicialmente se assemelham com a do atrator $\sigma < \sigma_c$ da variedade, mas quase todos os pontos iniciados perto da variedade eventualmente se movem para o outro atrator fora da variedade (como na Fig. 4.15(c)). Assim, a *intermitência on-off* não está presente em uma *bifurcação blowout histerética*.

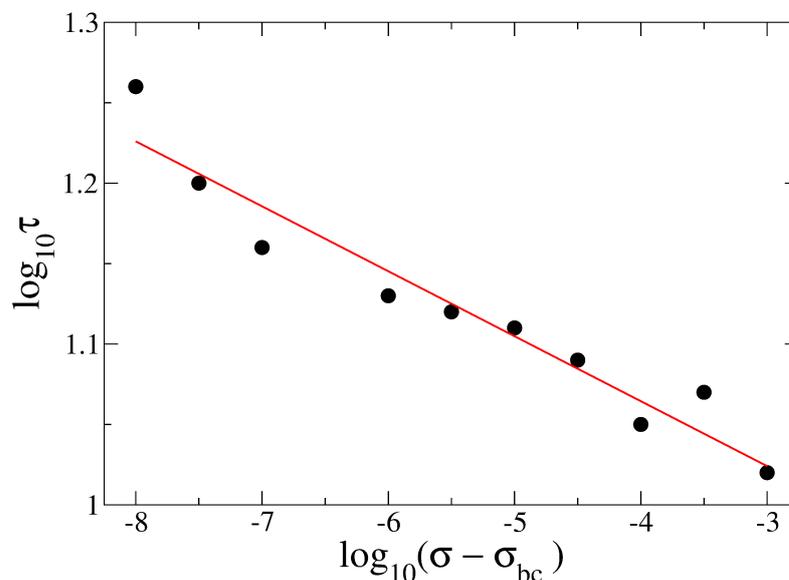


FIGURA 4.23 – Lei de escala dos transientes caóticos hidromagnéticos em função da distância ao valor de crise de fronteira σ_{bc} .

Nossos resultados estão resumidos na Fig. 4.24. A linha horizontal em $\bar{B}_{rms} = 0$ representa a variedade hidrodinâmica, que atrai para $\sigma < \sigma_c$ (linha vermelha sólida) e contém um atrator caótico. Para $\sigma > \sigma_c$, o atrator caótico hidrodinâmico perde estabilidade em uma bifurcação *blowout histerética* e se torna um “atrator relativo” hidrodinâmico (linha vermelha tracejada), onde transientes caóticos hidrodinâmicos são observados para perturbações iniciais perto da variedade hidrodinâmica. No ramo superior, a linha preta

sólida representa o atrator caótico hidromagnético, que perde estabilidade em uma crise de fronteira em σ_{bc} , dando origem a uma sela caótica hidromagnética (linha preta tracejada), responsável por transientes caóticos envolvendo o campo magnético. Existe uma janela de biestabilidade entre σ_{bc} e σ_c onde o atrator caótico hidromagnético coexiste com o atrator caótico hidrodinâmico.

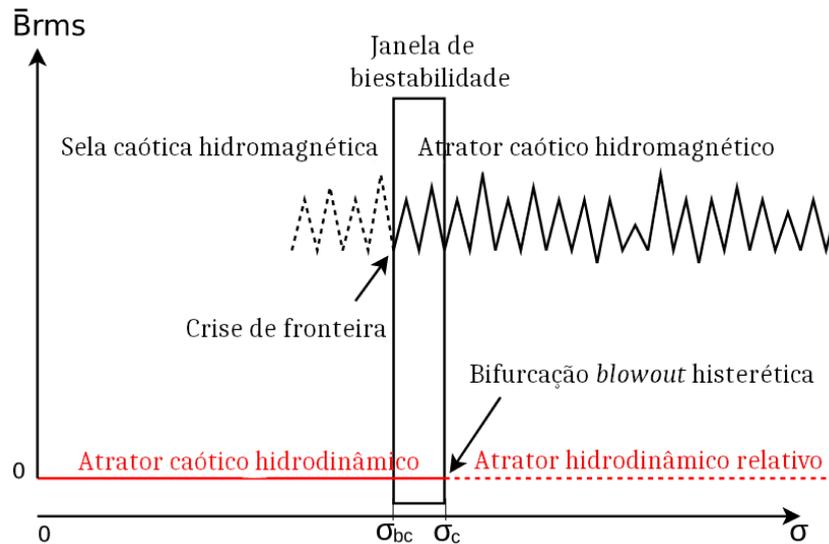


FIGURA 4.24 – Diagrama de bifurcação esquemático de \bar{B}_{rms} em função de σ . Linhas sólidas indicam soluções atrativas e linhas tracejadas indicam soluções não atrativas responsáveis por transientes caóticos; as linhas vermelhas representam estados hidrodinâmicos e as linhas pretas quebradas representam estados caóticos hidromagnéticos.

4.2.5 Conclusão

Encontramos uma transição para o dínamo em uma *bifurcação blowout histerética* em simulações numéricas diretas de um modelo de dínamo MHD α^2 . Nossa transição difere de (SWEET *et al.*, 2001a) onde a deles é devido a uma *bifurcação blowout não histerética* e difere de (KARAK *et al.*, 2015) em que eles adotaram um modelo de dínamo $\alpha - \Omega$. Até onde sabemos, esta é a primeira vez que uma *bifurcação de blowout histerética* é observada em um modelo de dínamo α^2 . Anteriormente, uma *bifurcação blowout não histerética* foi observada em um modelo de dínamo de campo médio truncado (COVAS *et al.*, 1997). O atrator caótico hidromagnético no ramo de histerese superior é destruído em uma crise de fronteira. Embora não tenhamos caracterizado formalmente a *bifurcação blowout* e a crise de fronteira, o comportamento dos transientes caóticos gerados por nossas transições sugere fortemente que este é, de fato, o caso. Assim, nosso trabalho ilustra a importância dos transientes caóticos para revelar as transições dinâmicas complexas presentes em escoamentos turbulentos.

5 Resultados e Discussão do Modelo CRB 3D

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos através de simulações numéricas diretas do modelo CRB 3D, sem rotação ($Ta = 0$) e com rotação ($Ta = 10, Ta = 50$ e $Ta = 100$). Para estudar os atratores convectivos hidrodinâmicos, variou-se o número de Rayleigh entre $657.51 < R < 4000$ com número de Prandtl $P = 0.3$ e caixa de simulação com lado $L = 4$. Os parâmetros adotados neste trabalho foram escolhidos seguindo PODVIGINA (2008), onde o referido estudo mostra que os menores valores do número de Prandtl são benéficos para a geração de campos magnéticos, mesmo com números de Rayleigh pequenos.

Foram utilizadas condições iniciais aleatórias em $t = 0.0$. O tempo médio do transiente inicial demonstra ser curto, considerando-se apenas as séries temporais da energia cinética. Em outras variáveis, o transiente inicial demonstrou ser longo. Com base nessas informações, decidiu-se realizar simulações numéricas longas, para que o tempo de transiente fosse descartado corretamente. Para a construção do diagrama de bifurcação, descartou-se o transiente inicial das séries temporais da energia cinética, e construiu-se um mapa de Poincaré selecionando apenas os pontos de máximos locais da energia cinética. Esse tipo de mapa é apresentado em ALLIGOOD *et al.* (1996).

As regiões de estabilidade dos atratores em questão são estudados pelo método de continuação de parâmetro. Entretanto, na vizinhança de um ponto de bifurcação a convergência para a solução é muito lenta, portanto, a identificação precisa do ponto de bifurcação no espaço paramétrico é computacionalmente cara.

5.1 Condições de Contorno

O domínio computacional é representado por uma célula de periodicidade quadrada, ilustrada na Figura 5.1, dado por:

$$\mathcal{D} = [0, L] \times [0, L] \times [0, 1],$$

onde L é o tamanho horizontal da célula. A razão entre a largura e a altura da camada, denominada razão de aspecto, neste caso é igual a L .

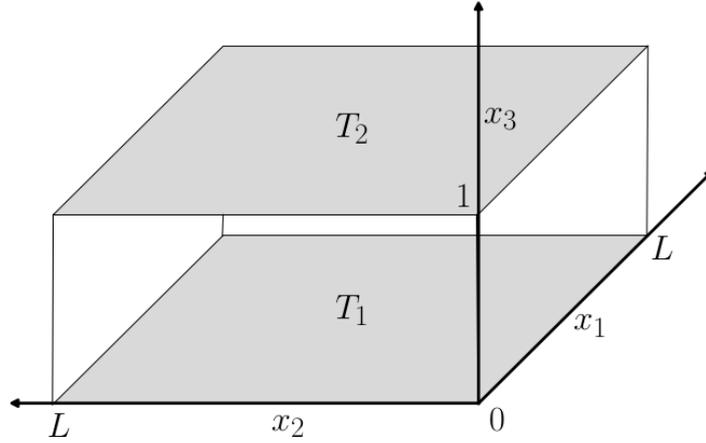


FIGURA 5.1 – Representação geométrica do domínio computacional na camada do plano horizontal.
Fonte: (CHERTOVSKIИ, 2010) (p. 14).

Sejam $x_3 = 0$ e $x_3 = 1$ as fronteiras horizontais da camada, mantidas a temperaturas constantes T_1 e T_2 ,

$$T(\mathbf{x}, t)|_{x_3=0} = T_1, \quad T(\mathbf{x}, t)|_{x_3=1} = T_2, \quad T_1 > T_2. \quad (5.1)$$

Então, o perfil de temperatura θ é dado por:

$$\theta(\mathbf{x}, t) = T(\mathbf{x}, t) - (T_1 + (T_2 - T_1)x_3), \quad (5.2)$$

representando o desvio do campo de temperatura na convecção do estado estacionário, onde o fluxo está em repouso e o calor é transferido apenas por difusão.

Substituindo a Eq. (5.2) na Eq. (3.57) e Eq. (3.55), obtém-se:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = P\nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + PR\theta \mathbf{e}_3 + P\sqrt{Ta} \mathbf{v} \times \mathbf{e}_3 - \nabla p, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla^2 \theta - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta + v_3. \quad (5.4)$$

O fluxo de fluido é considerado livre de tensões nas fronteiras horizontais, isto é:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = v_3 = 0. \quad (5.5)$$

As fronteiras horizontais são mantidas em temperaturas constantes (sendo perfeitamente

condutores térmicos), então:

$$\theta = 0. \quad (5.6)$$

A periodicidade nas direções horizontais com o mesmo período L é assumida:

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{v}(x + mL, y + Nl, z), \quad (5.7)$$

$$\theta(x, y, z) = \theta(x + mL, y + Nl, z), \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}. \quad (5.8)$$

5.2 Métodos Espectrais

Para resolver as equações do modelo CRB utilizamos um código desenvolvido pelo Professor Dr. Roman Chertovskih da Universidade do Porto. O código resolve as equações do modelo utilizando o método pseudo-espectral. Os métodos pseudo-espectrais representam uma classe de discretizações espaciais para equações diferenciais. Caracterizam-se pela expansão da solução em termos de uma série truncada (por exemplo, série de Fourier, polinômios de Legendre ou Chebyshev) (PEYRET, 2002). No modelo de simulação CRB os campos são representados como séries de Fourier em todas as variáveis espaciais (exponenciais complexos nas direções horizontais, seno/cosseno na direção vertical), as derivadas são calculadas no espaço de Fourier, as multiplicações são realizadas no espaço físico. Para mais detalhes sobre o método implementado consulte o apêndice B.

5.3 Resolução Numérica

Nesta seção é discutida a resolução numérica necessária para as simulações computacionais realizadas para o modelo CRB 3D.

Na Figura 5.2 é mostrada uma comparação dos espectros de energia cinética média no tempo em eixos log-log para simulações computacionais utilizando $48 \times 48 \times 24$ (linha pontilhada preta) e $64 \times 64 \times 32$ (linha vermelha contínua). Os valores dos parâmetros de controle são: $P = 0.3$, $R = 3000$ e $Ta = 100$. A energia cinética é calculada como

$$E_c(n) = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \int_0^1 \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 d\mathbf{x}, \quad (5.9)$$

e o espectro de energia cinética é definido como

$$E_c(n) = \sum_{\mathbf{k} \in C_n} \frac{1}{2} |\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}|^2, \quad (5.10)$$

onde $\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}$ são os coeficientes de Fourier do campo de velocidade e C_n representa as cascas

esféricas no espaço de Fourier e pode ser definido como

$$C_n = \{\mathbf{k} : n - 1 < |\mathbf{k}| \leq n\}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.11)$$

Na Figura 5.2 são plotados dois espectros de energia cinética média no tempo, ambas para o mesmo valor de parâmetro, mas com diferentes resoluções numéricas espaciais. Ambas as curvas estão sobrepostas e apresentam dissipação em grandes números de onda. Verificamos que aumentar a resolução numérica leva a um aumento significativo do tempo computacional necessário para resolver as equações do sistema. Portanto, adotamos a resolução espacial de $48 \times 48 \times 24$ harmônicos de Fourier para as simulações numéricas dos atratores convectivos hidrodinâmicos, considerando a grande quantidade de séries temporais calculadas neste trabalho.

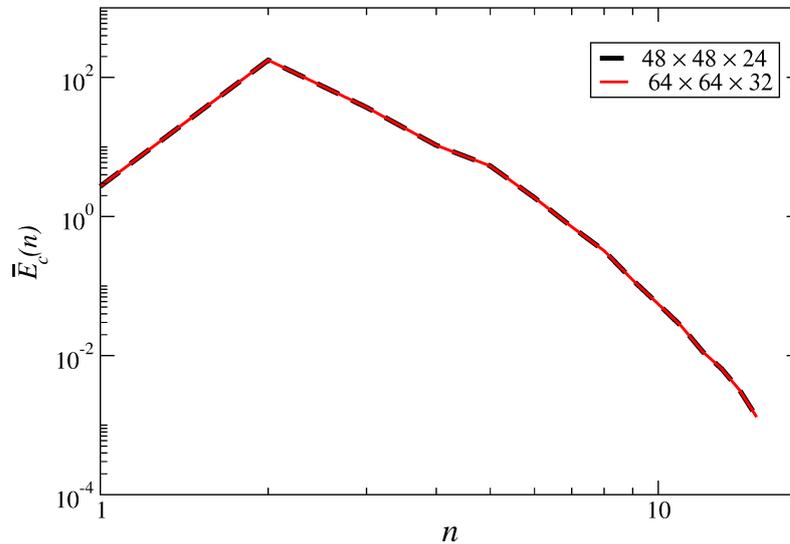


FIGURA 5.2 – Espectro de energia cinética média no tempo para o atrator caótico em $R = 3000$ e $Ta = 100$, calculado com resolução espacial de $48 \times 48 \times 24$ (linha pontilhada preta) e $64 \times 64 \times 32$ (linha vermelha contínua) harmônicos de Fourier, onde n é o número de onda.

5.4 Simulações Numéricas sem Rotação para $Ta = 0$

Os atratores convectivos hidrodinâmicos do sistema sem rotação foram estudados numericamente por PODVIGINA (2008) e os cálculos numéricos foram realizados para $0 < R \leq 2500$. Os resultados das simulações numéricas dos atratores convectivos hidrodinâmicos são resumidos no diagrama de bifurcação (Figura 14) e na tabela 3 (Figura 5.3) de PODVIGINA (2008). Reproduzimos apenas alguns resultados do artigo de PODVIGINA (2008), com base na tabela 3 (Figura 5.3), página 428. Encontramos atratores convectivos hidrodinâmicos, entre $700 < R \leq 736$, os mesmos encontrados no referido artigo. Estendemos o diagrama de bifurcação construído pela autora, realizamos simulações

numéricas e obtivemos os atratores convectivos hidrodinâmicos caóticos considerando o intervalo $2550 < R \leq 4000$.

Legenda	Tipo de atrator	Intervalo de existência	\bar{E}_k
S_0	Steady state	$R \leq 657$	0
SR	Steady state	$658 \leq R \leq 684$	0–3.6
S_2	Steady state	$685 \leq R \leq 731$	1.7–3.7
P	Periodic, $f_1^9 = 0.31 \div 0.32$	$732 \leq R \leq 736$	2.4–2.9
Q	Quasiperiodic, $f_1^{10} = 0.31$ $f_2^{10} = 0.20 \div 0.22$	$737 \leq R \leq 739$	2.9
C	Chaotic	$740 \leq R \leq 995$	3.0–18
Q	Quasiperiodic, $f_1^{11} = 5.5 \div 7.1$ $f_2^{11} = 2.7 \div 3.3$	$996 \leq R \leq 1050$	16–22
P	Periodic, $f_1^{11} = 7.5 \div 9.0$	$1060 \leq R \leq 1180$	23–31
P	Periodic, $f_1^{12} = 9.0 \div 14.0$	$1190 \leq R \leq 1510$	32–61
Q	Quasiperiodic, $f_1^{12} = 14.1 \div 16.1$ $f_2^{12} = 9.6 \div 11.1$	$1520 \leq R \leq 1800$	62–85
P	Periodic, $f_1^{13} = 13.4 \div 13.6$	$1720 \leq R \leq 1780$	63–67
P	Periodic, $f_1^{14} = 13.7 \div 14.2$	$1790 \leq R \leq 1890$	67–73
Q	Quasiperiodic, $f_1^{14} = 15.0 \div 15.4$ $f_2^{14} = 9.9 \div 10.3$	$1900 \leq R \leq 1980$	84–91
C	Chaotic	$1990 \leq R \leq 2500$	92–135

FIGURA 5.3 – Atratores para o sistema hidrodinâmico convectivo para $Ta = 0$. Tabela retirada de PODVIGINA (2008) (p. 428) (modificada).

5.5 Simulações Hidrodinâmicas para $P = 0.3, Ta = 0$

5.5.1 Atratores Convectivos Hidrodinâmicos

Adotando os mesmos parâmetros utilizados por PODVIGINA (2008), fixou-se o número de Prandtl em $P = 0.3$, variou-se o número de Rayleigh em $700 < R < 736$ e utilizou-se uma condição inicial aleatória em $R = 700$ e $t = 0.0$ para a realização das simulações convectivas hidrodinâmicas.

A série temporal da energia cinética, ilustrada na Figura 5.4 apresenta um transiente inicial. Após um certo tempo de simulação a mesma converge para o atrator apresentando um comportamento de ponto fixo, o mesmo comportamento representado na tabela 3 de PODVIGINA (2008). Em seguida, utilizando a técnica de continuação do parâmetro (consiste em utilizar um estado passado como condição inicial após o mesmo atingir o estado de regime ao variar o parâmetro de controle), aumentou-se o valor do parâmetro de controle, encontrando o primeiro ponto de bifurcação do sistema. O sistema sofre uma bifurcação de Hopf, passando a se comportar como um atrator periódico.

Utilizando como condição inicial o estado final da simulação em $R = 700$ e aumentando

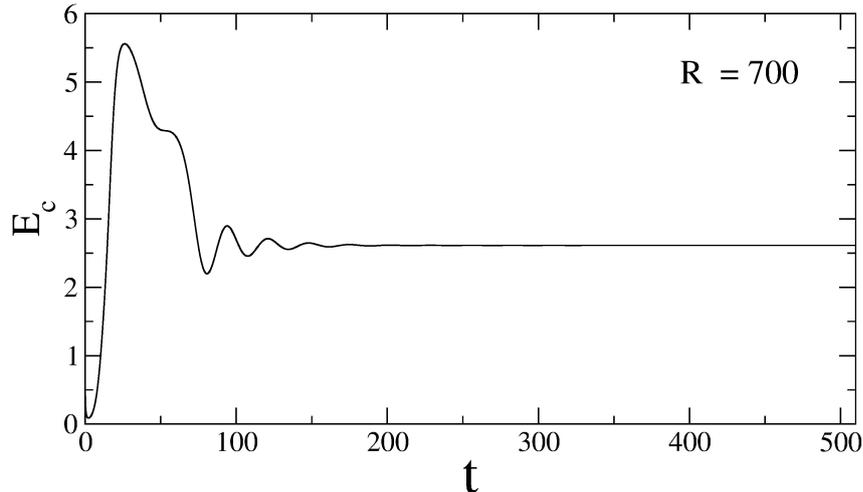


FIGURA 5.4 – Série temporal da energia cinética para $R = 700$, gerada a partir de uma condição inicial aleatória, ilustrando um comportamento ponto fixo.

o valor do parâmetro para $R = 710, 720, 730, 731$, visualizando apenas as séries temporais da energia cinética, pode-se observar que as séries temporais apresentam um transiente inicial e após um certo tempo de simulação, convergem para o atrator ponto fixo, o mesmo comportamento encontrado por PODVIGINA (2008). Tal comportamento pode ser observado na Figura 5.5.

Inicialmente, como observado na Figura 5.5, o sistema se comporta como um ponto fixo, até sofrer a primeira bifurcação de Hopf, passando a demonstrar um comportamento periódico. Essa primeira bifurcação ocorre no intervalo $731 < R < 732$. Em $R = 732$, visualizando apenas a série temporal da energia cinética (Fig. 5.6 (a)) o sistema se comporta como um ponto fixo. Porém, ao se visualizar a série temporal da parte real do modo de Fourier ($Re(\hat{v}_{222}^z)$) (Fig. 5.6 (b)), e ao ampliarmos a mesma, pode-se observar um comportamento periódico (Fig. 5.6 (c)). O comportamento periódico do sistema permanece até $R = 736$ (Fig. 5.6 (g), (h)), o mesmo comportamento relatado na tabela 3 de PODVIGINA (2008). Tais simulações reproduzidas servem como base para validação dos resultados obtidos nos próximos passos do trabalho, onde se inseriu rotação no sistema, utilizando como parâmetros os números de Rayleigh e Taylor.

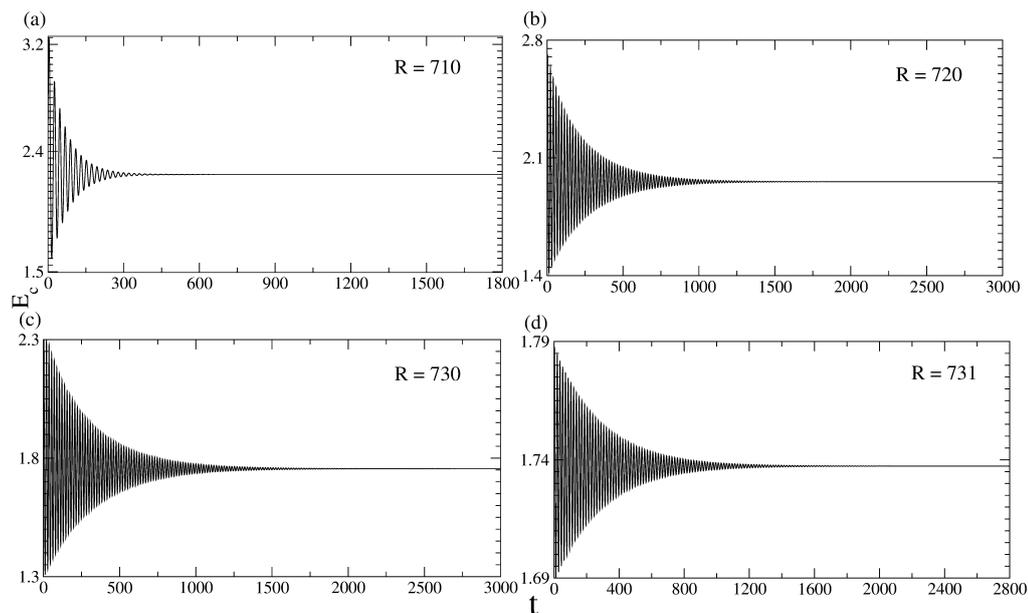


FIGURA 5.5 – Séries temporais da energia cinética, apresentando um comportamento de ponto fixo, utilizando a técnica de continuação de parâmetro. Em (a) $R = 710$, (b) $R = 720$, (c) $R = 730$ e (d) $R = 731$.

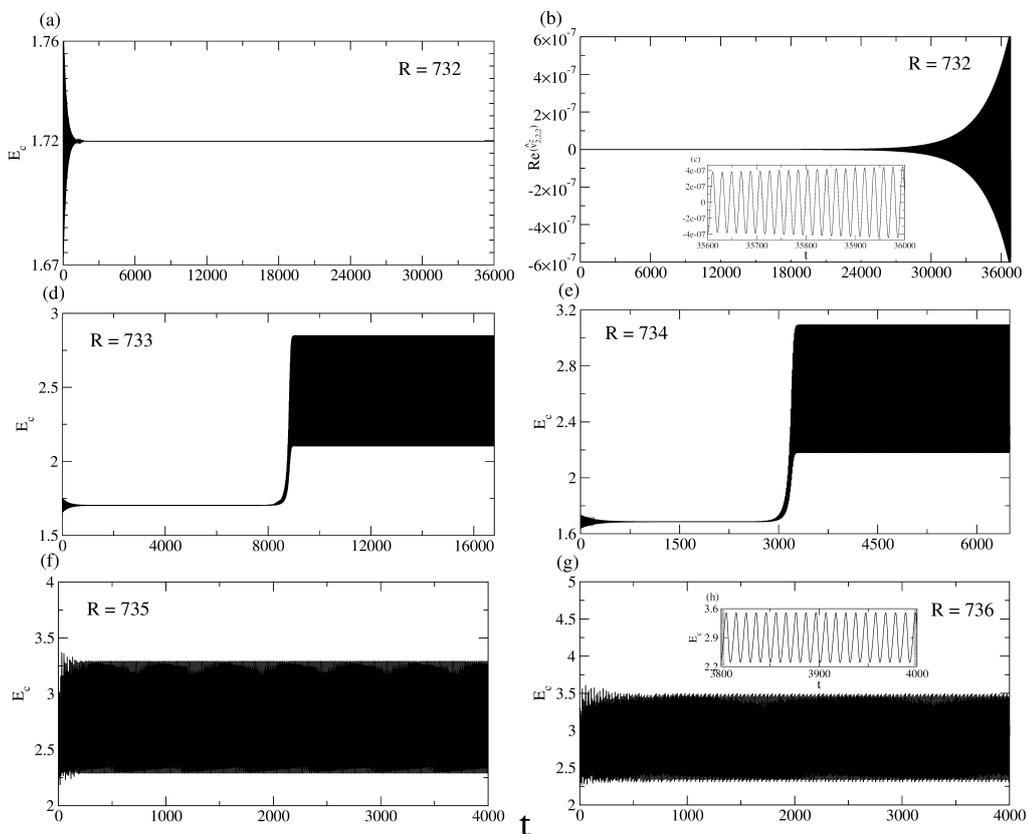


FIGURA 5.6 – Séries temporais da energia cinética e série temporal do modo de Fourier, utilizando a técnica de continuação de parâmetro. Em (a) $R = 732$, energia cinética, (b) $R = 732$ e (c) $R = 732$ sendo a ampliação de (b), representando a série temporal do modo de Fourier ($Re(\hat{v}_{222}^z)$), (d) $R = 733$, (e) $R = 734$, (f) $R = 735$, (g) $R = 736$ e (h) $R = 736$ sendo a ampliação de (g).

5.5.2 Diagrama de Bifurcação da Energia Cinética sem Rotação para Taylor = 0

PODVIGINA (2008) construiu um diagrama de bifurcação da energia cinética variando o número de Rayleigh entre $657 < R \leq 2500$ (Figura 5.7) e classificou o comportamento do sistema conforme a tabela 3 (Figura 5.3) daquele artigo e detectou vários atratores no sistema. Então, complementamos o ramo final do diagrama de bifurcação de energia cinética em função do número de Rayleigh $2550 < R \leq 4000$, ilustrado na Figura 5.8, onde detectamos os mesmos atratores caóticos mencionados em seu estudo, representados pelos círculos em vermelho no respectivo diagrama de bifurcação. Tais simulações serão utilizadas para a comparação com os diagramas de bifurcação construídos posteriormente, inserindo rotação no sistema.

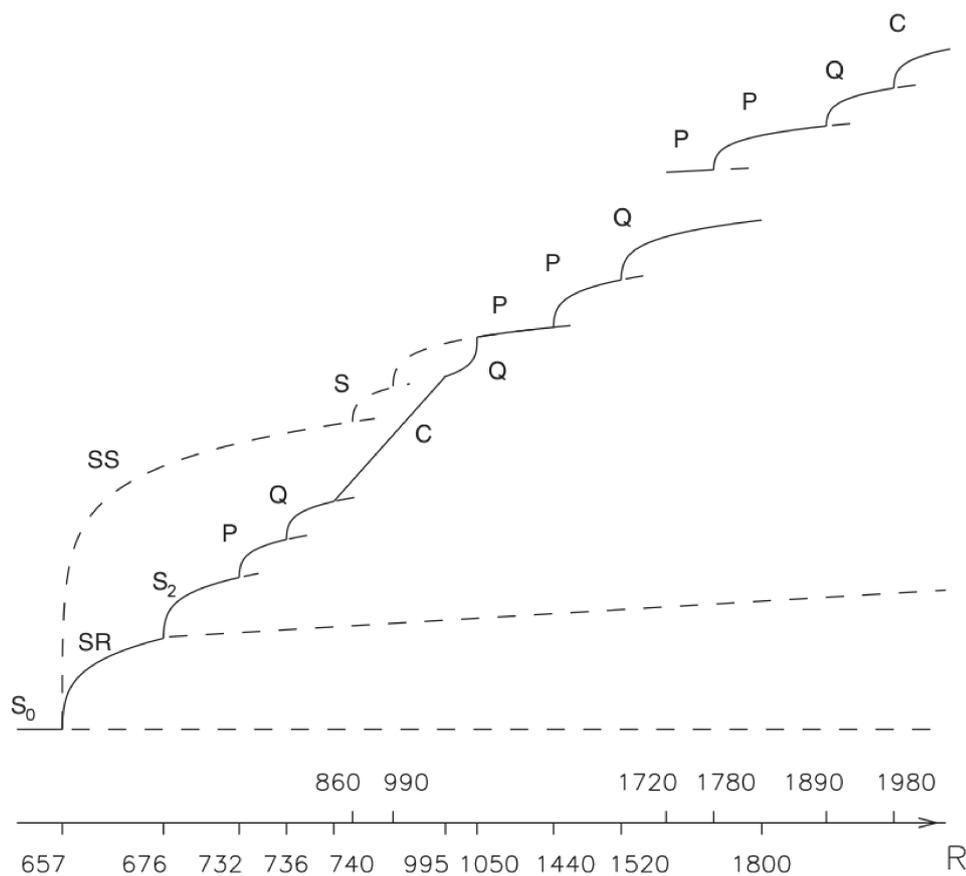


FIGURA 5.7 – Diagrama de bifurcação dos atratores convectivos hidrodinâmicos para $Ta = 0$. Fonte: (PODVIGINA, 2008) (p. 427) (modificado).

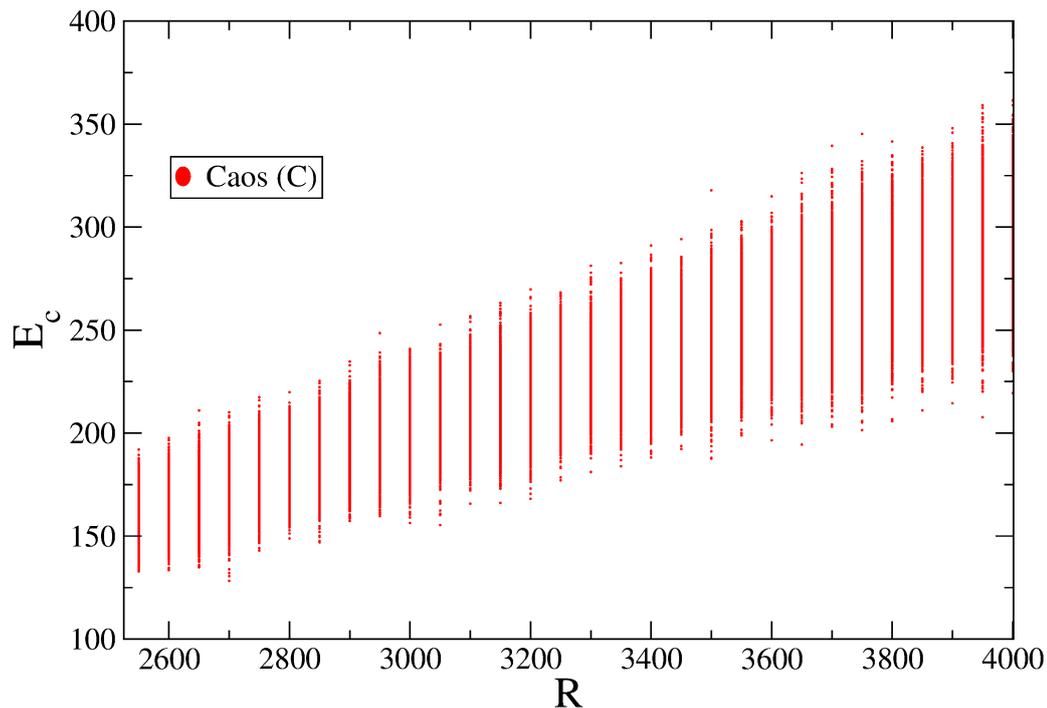


FIGURA 5.8 – Diagrama de bifurcação da energia cinética em função do número de Rayleigh R , para $Ta = 0$. As linhas em vermelho representam os atratores caóticos convectivos hidrodinâmicos.

5.6 Simulações Numéricas com Rotação para $Ta = 10$

5.6.1 Diagrama de Bifurcação da Energia Cinética com Rotação para $Ta = 10$

Os resultados dos cálculos dos atratores convectivos hidrodinâmicos com rotação, obtidos numericamente, são resumidos no diagrama de bifurcação (Figura 5.9) e na tabela 5.1.

Legenda	Tipo de atrator	Intervalo de existência	Média da energia cinética
PF	Ponto Fixo	$657 \leq R \leq 730$	0 – 3.48
P	Periódico	$740 \leq R \leq 780.96$	6.4 – 12
C	Caótico	$780.97 \leq R \leq 823.4$	14 – 15.4
P	Periódico	$823.5 \leq R \leq 849$	15.4 – 18.4
C	Caótico	$850 \leq R \leq 1008$	15 – 16.5
ITM	Intermitente	$R = 1009$	25
P	Periódico	$1010 \leq R \leq 1619$	16.1– 79.5
C	Caótico	$1620 \leq R \leq 2191$	80 – 135
QP	Quase-Periódico	$2200 \leq R \leq 2210$	137.5 – 138.5
C	Caótico	$2220 \leq R \leq 2271$	138 – 144
P	Periódico	$2272 \leq R \leq 3050$	139.2 – 200.5
QP	Quase-Periódico	$3060 \leq R \leq 3240$	201.5 – 216
C	Caótico	$3250 \leq R \leq 4000$	217 – 300

TABELA 5.1 – Atratores para o sistema hidrodinâmico convectivo para $Ta = 10$.

No início do diagrama de bifurcação representado na Figura 5.9, o sistema apresenta um comportamento ponto fixo (PF), demarcado pelos círculos na cor magenta, até sofrer uma primeira bifurcação de Hopf, passando a demonstrar um comportamento periódico (P), demarcado pelos círculos na cor azul. Essa primeira bifurcação de (PF) para um periódico (P) ocorre no intervalo de $730 < R < 740$. O sistema continua periódico até o ciclo limite tornar-se instável e uma órbita de duplo período aparecer, caracterizando assim, uma bifurcação de duplicação de período. Esta bifurcação de duplicação de período ocorre no intervalo $780 < R < 780.96$; o comportamento do sistema além desse ponto é caótico. Na Figura 5.9 o comportamento caótico (C) é demarcado pelos círculos vermelhos. No intervalo $823.5 < R < 828.6$ ocorre uma bifurcação de duplicação de período inversa. Esta bifurcação de duplicação de período pode ser visualizada no refinamento da Figura 5.9 ilustrada na Figura 5.10-(a)-(b). O comportamento do sistema se mantém periódico até $R = 849$, ponto em que o sistema sofre uma bifurcação do tipo sela-nó (seção 2.5.1.1). Nesta bifurcação o atrator (P) deixa de existir e observamos no diagrama de bifurcação para $R = 850$ um atrator (C). O comportamento do sistema permanece caótico até $R = 1009$, ponto em que o atrator caótico (C) perde estabilidade e o sistema é alterado para um atrator (P) em $R = 1010$. Então, o sistema sofre uma bifurcação sela-nó via cenário de Pomeau-Manneville via intermitência do tipo-I. Esta bifurcação sela-nó pode ser visualizada na Figura 5.11. O comportamento intermitente é relatado na série temporal da energia cinética da parte real do modo de Fourier $Re(\hat{v}_{222}^x)$ ilustrado na Figura 5.12-(a). O comportamento do sistema permanece periódico até sofrer novamente uma bifurcação sela-nó, alterando o comportamento de um atrator (P) para um atrator

(C). Esta bifurcação ocorre no intervalo $1610 < R < 1620$. Este comportamento caótico permanece até $R = 2190$. No intervalo $2190 < R < 2200$ o atrator (C) perde estabilidade ao sofrer uma nova bifurcação, alterando o comportamento do sistema de (C) para quase-periódico (QP). O comportamento (QP) é demarcado pelos círculos em preto no diagrama de bifurcação. Entre o intervalo $2210 < R < 2220$ o atrator (QP) perde estabilidade e sofre uma bifurcação de Hopf secundária, voltando a apresentar um atrator (C) em $R = 2220$. O comportamento do sistema permanece caótico até o intervalo de $2270 < R < 2280$, quando o sistema sofre uma bifurcação sela-nó, originando um atrator (P). Este comportamento periódico permanece até o intervalo de $3050 < R < 3060$, e então, o sistema sofre uma bifurcação de Hopf e o comportamento do sistema é alterado para um atrator (QP). No intervalo de $3240 < R < 3250$, o sistema sofre novamente uma bifurcação de Hopf, onde o atrator (QP) perde estabilidade e migra para um comportamento caótico. Este comportamento caótico permanece até o final do diagrama de bifurcação da Figura 5.9 fim da janela de parâmetro analisada até $R = 4000$.

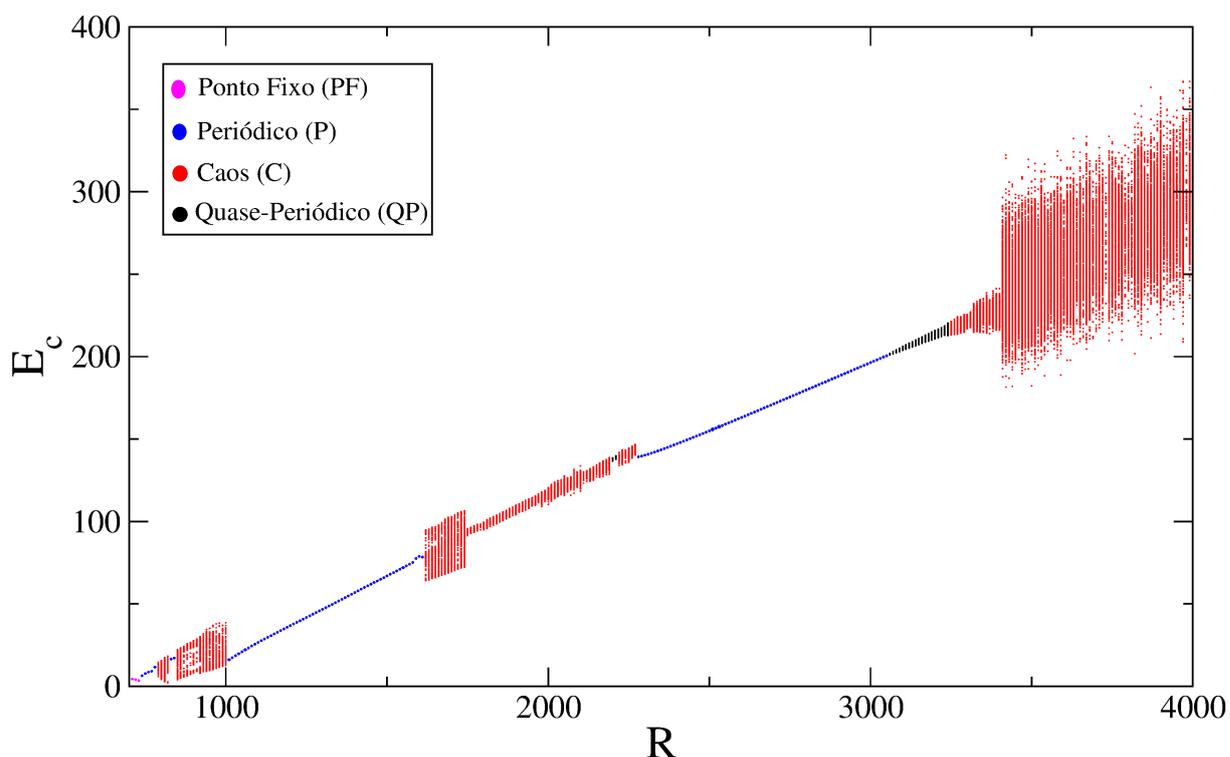


FIGURA 5.9 – Diagrama de Bifurcação da energia cinética em função do número de Rayleigh R , para $Ta = 10$. Os círculos em magenta representam os valores de parâmetro onde o sistema apresenta o comportamento de ponto fixo. Os círculos em azul representam o comportamento periódico. Os círculos em preto representam um comportamento quase-periódico e os círculos em vermelho representam um comportamento do sistema caótico.

5.6.1.1 Cenário via Duplicação de Período

A rota para caos via cascata de duplicações de período é constituída por uma sequência infinita de bifurcações de duplicação de período (ALLIGOOD *et al.*, 1996). A *cascata de duplicações de período* como uma rota para caos foi estudada experimentalmente por LIBCHABER *et al.* (1982) e numericamente utilizando o modelo CRB sem rotação por HSIA; NISHIDA (2022).

Para compreendermos as rotas para caos, refinamos ainda mais a variação do número de Rayleigh R na vizinhança de transições. Na Figura 5.10 é apresentado um refinamento do diagrama de bifurcação apresentado na Figura 5.9, onde o sistema sofre algumas bifurcações de duplicação de período (Figura 5.10 (a)) e de período inversa (Figura 5.10 (b)). Tal refinamento ocorre entre os valores de parâmetro $780.8 < R < 828.8$. Os círculos em azul representam o comportamento periódico e as linhas em vermelho representam o comportamento caótico do sistema. Inicialmente, observamos uma primeira bifurcação de Hopf, então as soluções periódicas de período 1 permanecem estáveis para uma determinada faixa de número de Rayleigh R e, então, a órbita periódica de período 1 perde estabilidade e dobra seu período na próxima bifurcação. Novamente, a órbita de período duplo se bifurca para uma órbita de período 4, e a órbita de período 4 perde estabilidade e o sistema se torna caótico. Tal sequência é representada na Figura 5.10 (a). Note-se que, ao contrário das cascatas de duplicação de período, onde um número infinito de bifurcações ocorre em uma faixa estreita de valores do parâmetro de controle, aqui o sistema salta bruscamente de período quatro para caos. Deixamos a investigação desse quadro para ocasião futura e prosseguimos com o diagrama. A partir de $R \approx 823.2$, uma cascata inversa ocorre, ou seja, após o sistema se tornar caótico e se manter estável para uma determinada faixa de R , a órbita caótica perde estabilidade, dando origem a uma órbita periódica de período 16 e, então, à medida que aumentamos o parâmetro de controle, a órbita de período 16 é substituída por outra órbita com a metade do período e essas bifurcações de redução de período se repetem até que seja obtida uma única órbita periódica de período 1 (Figura 5.10 (b)).

5.6.1.2 Cenário de Pomeau-Manneville via Intermitência

O fenômeno de intermitência caracteriza-se por uma mudança abrupta no comportamento do sistema, onde ocorre a transição entre as fases laminares e caóticas. Um sistema apresenta um comportamento regular — periódico, quase-periódico ou fracamente caótico — durante um certo intervalo de tempo até que ele evolui e começa a apresentar “estouros” (do inglês, *bursts*) fortemente caóticos durante breves períodos de tempo; então o sistema retorna ao seu comportamento regular e o processo recomeça com “estouros” de oscilação aperiódica em intervalos irregulares (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994). Pomeau e

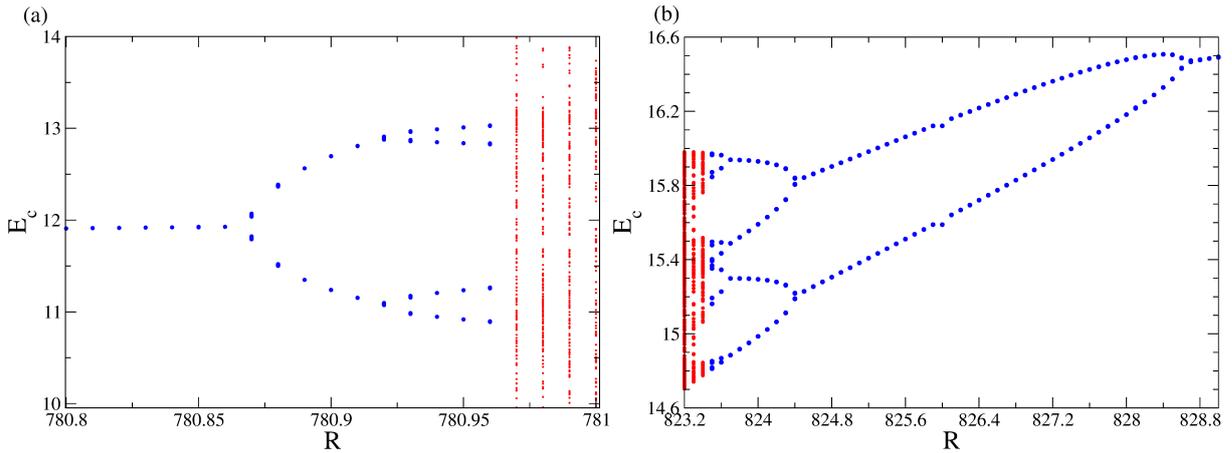


FIGURA 5.10 – (a) bifurcações de duplicação de período. Observa-se uma seqüência de duplicações de período até $R = 780.96$, além do qual o comportamento é caótico. (b) bifurcação de duplicação de período inversa. Em tal bifurcação, o atrator caótico perde instabilidade, sendo substituído por um atrator periódico, então uma seqüência de bifurcações ocorrem, até que seja obtido um único atrator periódico de período 1.

Manneville (1979) introduziram seu conceito de intermitência considerando um sistema de Lorenz (MANNEVILLE; POMEAU, 1979). Os mesmos descreveram três tipos de intermitência em sistemas dinâmicos. A intermitência tipo-I está relacionada à bifurcação sela-nó, a do tipo-II está relacionada com a bifurcação de Hopf e a do tipo-III está relacionado com a bifurcação de duplicação de período (ELASKAR; RÍO, 2017). Restringimo-nos aqui à intermitência do tipo-I.

Na Figura 5.11 é apresentado um refinamento do diagrama de bifurcação da Figura 5.9 entre os intervalos $1000 < R < 1010$. Utilizando a técnica de continuação de parâmetro, partindo de $R = 1000$ e aumentando o valor do parâmetro de controle, o sistema apresenta um atrator caótico (C) até $R = 1009$. Então, o atrator (C) perde estabilidade e o sistema sofre uma bifurcação sela-nó, via cenário de Pomeau-Manneville, alterando o atrator (C) intermitente para um atrator (P) de período 1. Na Figura 5.12 (a) pode-se constatar o comportamento intermitente do sistema, ilustrando a série temporal da parte real do modo de Fourier, referente ao atrator (C) logo antes da bifurcação, em $R = 1009$. A Figura 5.12 (b) representa a projeção $Re(\hat{v}_{222}^x) \times Im(\hat{v}_{222}^z)$ do atrator (C) intermitente no espaço de fase do sistema.

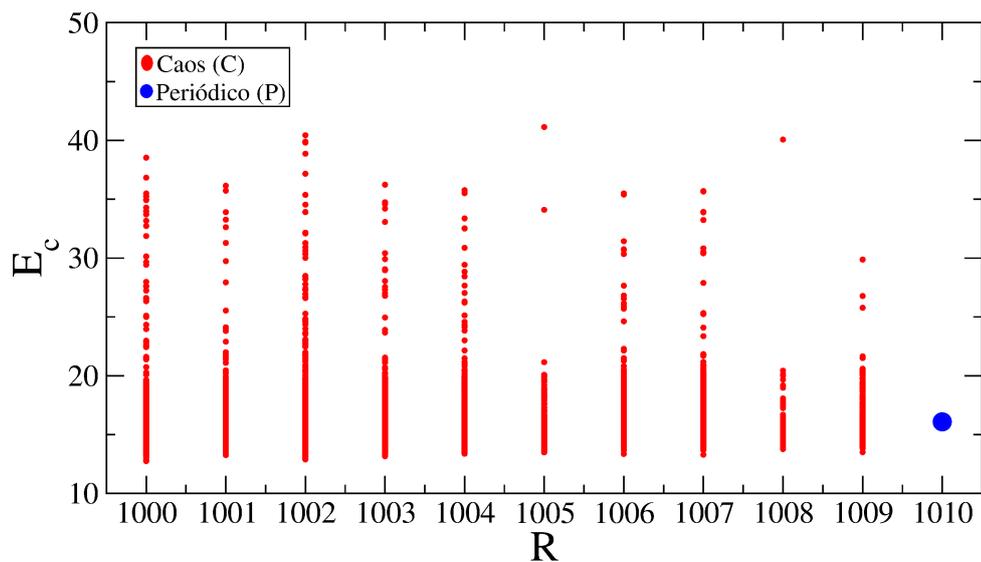


FIGURA 5.11 – Refinamento do diagrama de bifurcação apresentado na Figura 5.9 utilizando a técnica de continuação de parâmetro. Os círculos em vermelho representam o atrator (C). O círculo em azul representa o atrator (P).

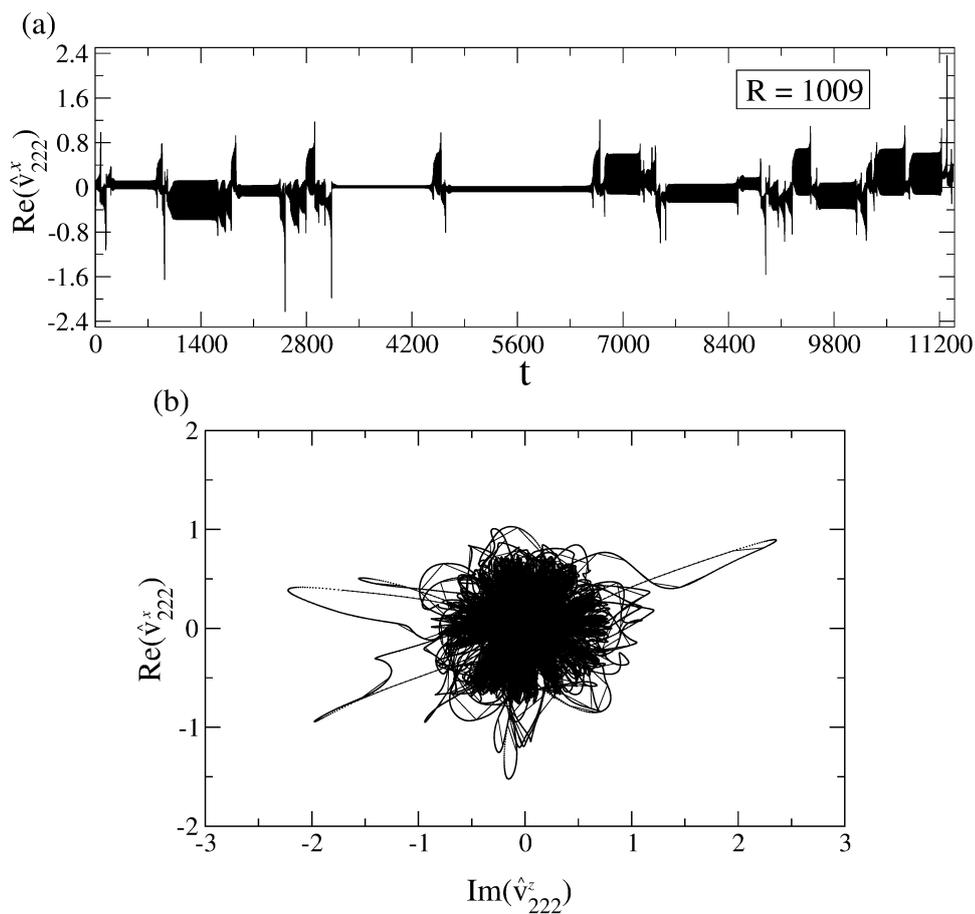


FIGURA 5.12 – (a) série temporal intermitente da parte real do modo de Fourier para $R = 1009$. (b) projeção do atrator caótico intermitente no espaço de fase.

5.7 Identificação de Bifurcações

5.7.1 Análise dos Espectros de Potência da Energia Cinética para $Ta = 10$

Na seção 5.6.1 identificamos o comportamento do sistema dinâmico quanto às suas bifurcações, classificamos os atratores do sistema em: ponto fixo (PF), periódico (P), quase-periódico (QP) (com duas ou mais frequências independentes) e caótico (C), que não se encaixa em nenhum dos comportamentos anteriores. Para classificar um atrator do sistema, analisamos os espectros de potência da série temporal da energia cinética, considerando os valores de parâmetro onde o sistema altera seu comportamento dinâmico, identificado no diagrama de bifurcação da Figura 5.9.

O espectro de potência (PSD, do inglês — *Power Spectral Density*) é uma ferramenta excelente para a análise de sistemas dinâmicos. O espectro de potência da série temporal da energia cinética descreve a distribuição de energia em componentes de frequência que compõem o sinal. Pode-se observar como a energia é distribuída nas componentes de frequência, sendo possível identificar o comportamento do sistema dinâmico e classificar os atratores do sistema. Se o sistema apresentar um comportamento periódico, seu espectro de energia pode ser representado como a combinação linear de oscilações cujas frequências são múltiplas inteiras de uma frequência básica f_1 . Se o comportamento do sistema for quase-periódico, seu espectro de energia é representado por duas ou mais frequências independentes e incomensuráveis. Por outro lado, se o sistema apresentar um comportamento caótico, seu espectro de energia é contínuo. Tal espectro pode ser visto como um número grande de frequências independentes, sendo que os picos do espectro de energia serão tantos e muito próximos, formando um espectro contínuo. (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994; STOICA *et al.*, 2005). A seguir são apresentados alguns espectros de potência para diferentes valores de R .

Na Figura 5.13 (a) é apresentada a energia cinética e sua respectiva PSD para $R = 740$. Para este valor de parâmetro de controle, o sistema sofre uma primeira bifurcação de Hopf, alterando seu comportamento de ponto fixo para um regime periódico, apresentando apenas uma frequência fundamental $f_1 \approx 0.0568003$ e suas múltiplas, $2f_1 \approx 0.1136006$ e $3f_1 \approx 0.1704009$. Na Figura 5.13 (b), a PSD é calculada para $R = 780.87$. No intervalo $780.86 \leq R \leq 780.87$ o sistema sofre uma bifurcação de duplicação de período, onde uma órbita de período duplo aparece (seção 2.5.1.3), com frequência fundamental igual a $f_1/2$. O comportamento do sistema além desse ponto é caótico em $R = 790$, como ilustrado na Figura 5.13 (c) da série temporal da energia cinética e a PSD. No intervalo de $820 < R < 830$ o sistema sofre uma cascata de bifurcações de duplicação de período inversa. Na Figura 5.13 (d), para $R = 820$, o sistema passa a apresentar um comportamento caótico,

como observado na PSD. Após o comportamento caótico, o sistema passa a apresentar um comportamento periódico de período 1 para $R = 830$; este comportamento pode ser visualizado na Figura 5.13 (e), onde é calculada a PSD e a mesma apresenta apenas uma frequência fundamental, $f_1 \approx 0.0724142$, e suas múltiplas, $2f_1 \approx 0.1448284$, $3f_1 \approx 0.2172426, \dots$

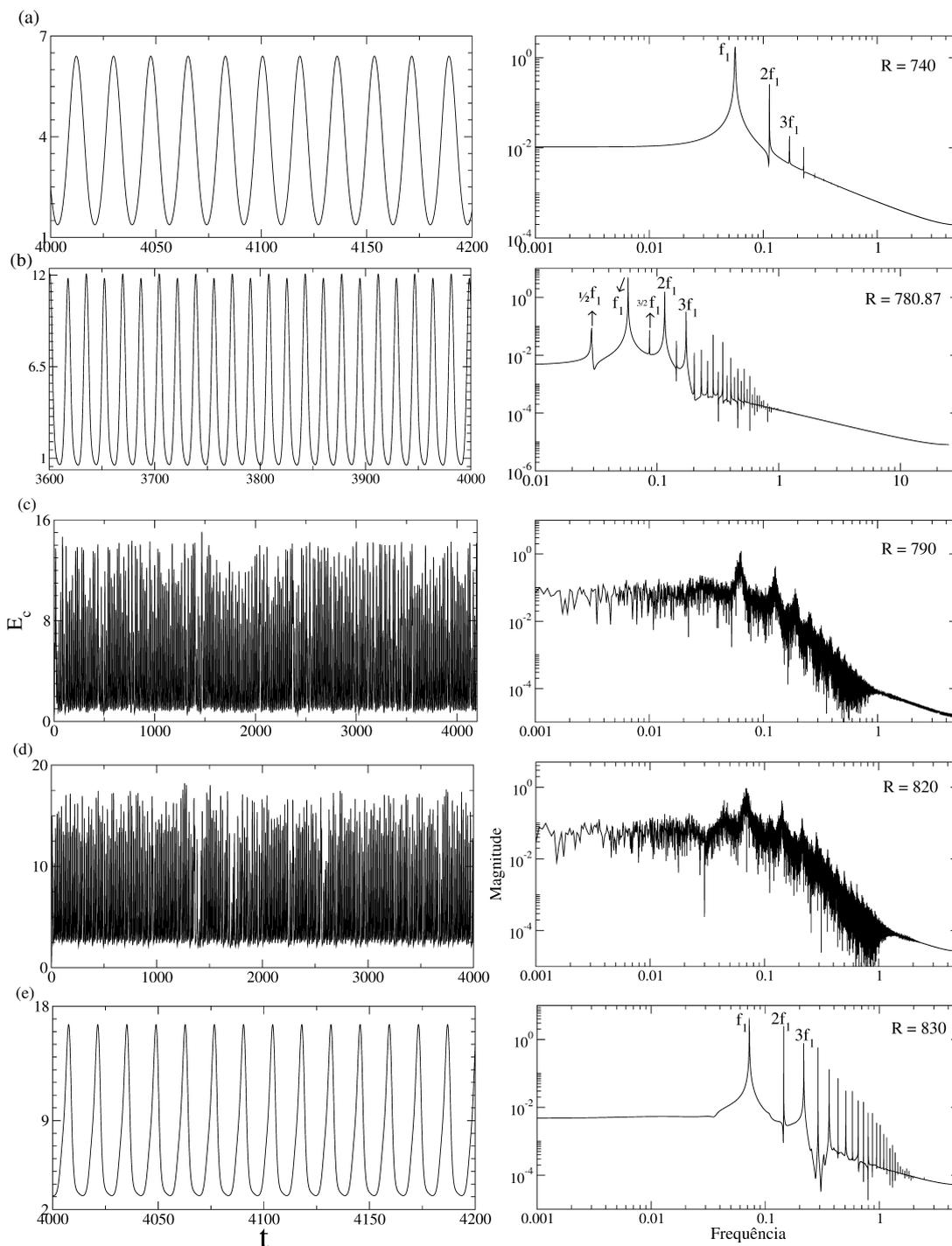


FIGURA 5.13 – Espectros de energia calculados a partir da série temporal da energia cinética para diferentes valores do parâmetro de controle R .

Seguindo a análise dos espectros de energia da Figura 5.13, no intervalo $840 < R < 850$ o sistema sofre uma bifurcação sela-nó, alterando seu comportamento de um atrator periódico, ilustrado na PSD da Figura 5.14 (a) com apenas uma frequência fundamental $f_1 \approx 0.0740982$ e suas múltiplas, $2f_1 \approx 0.1481964$, $3f_1 \approx 0.2222946$, para um atrator caótico e intermitente apresentado na Figura 5.14 (b). No intervalo $1000 < R < 1010$, o sistema sofre uma bifurcação sela-nó via cenário de Pomeau-Manneville com intermitência do tipo-I, onde o atrator caótico em $R = 1000$ representado na PSD da Figura 5.14 (c) perde estabilidade, alterando o comportamento do sistema para um atrator periódico em $R = 1010$ apresentando apenas uma frequência fundamental $f_1 \approx 0.936996$ e suas múltiplas, $2f_1 \approx 1.873992$ e $3f_1 \approx 2.810988$, ilustrado na PSD da Figura 5.14 (d).

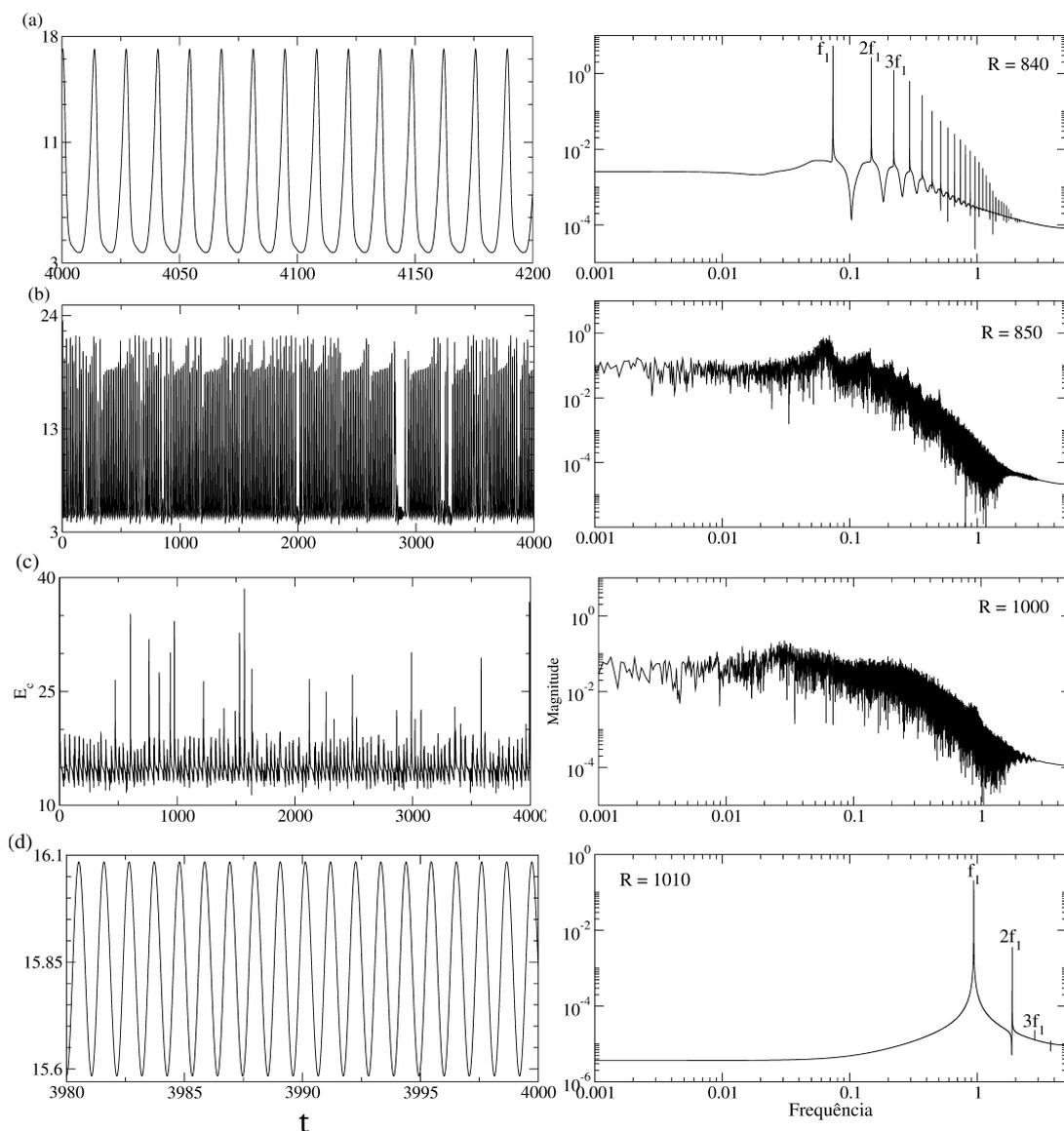


FIGURA 5.14 – Espectros de energia calculados a partir da série temporal da energia cinética para diferentes valores do parâmetro de controle R .

Continuando as análises dos espectros de energia na Figura 5.15, no intervalo $1610 \leq$

$R \leq 1620$ o sistema perde estabilidade e sofre uma bifurcação sela-nó, mudando seu comportamento de um regime periódico, apresentando uma frequência fundamental $f_1 \approx 2.43607$ e suas múltiplas, $2f_1 \approx 4.87214$ e $3f_1 \approx 7.30821$, representado na PSD da Figura 5.15 (a), para um regime caótico intermitente representado na série temporal da energia cinética e na PSD da Figura 5.15 (b). No intervalo $2190 \leq R \leq 2220$ o sistema perde de estabilidade, mudando o comportamento caótico para um quase-periódico, com duas frequências independentes f_1 e f_2 . O comportamento quase-periódico é ilustrado na Figura 5.15 (c). Analisando o espectro de potência para $R = 2200$, podemos observar o aparecimento da nova frequência $f_2 \approx 0.0671276$. Com o surgimento de uma nova frequência f_2 , associa-se um novo grau de liberdade ao atrator do sistema e, deste modo, produz-se um toro T^2 . Em seguida, o sistema sofre uma quebra de toro, onde o regime muda de um estado quase-periódico, representando por um toro T^2 , para um comportamento caótico, como pode ser visualizado na PSD da Figura 5.15 (d).

Nas Figuras 5.16 (a)-(b), o espectro de potência da energia cinética é calculado para $2270 \leq R \leq 2280$. Para $R = 2270$, o sistema sofre uma bifurcação sela-nó. Em $R = 2270$ o sistema apresenta um atrator caótico, ilustrado na PSD da Figura 5.16 (a). O atrator caótico perde estabilidade e em $R = 2280$ o sistema passa a apresentar um atrator periódico, onde se tem apenas uma frequência fundamental $f_1 \approx 7.16434$ e suas múltiplas, $2f_1 \approx 14.32868$ e $f_3 \approx 21.49302$, como ilustrado na PSD da Figura 5.16 (b). O comportamento do sistema permanece periódico até $R = 3050$, ilustrado na PSD da Figura 5.16 (c). No intervalo de $3050 < R \leq 3060$ o sistema sofre novamente uma bifurcação, desta vez uma bifurcação de Hopf secundária. Após essa bifurcação, o sistema passa a apresentar um comportamento quase-periódico ilustrado na PSD da Figura 5.16 (d). Seguindo o cenário de Ruelle-Takens de rota para caos (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994), na Figura 5.16 (d), para $R = 3060$, têm-se frequências fundamentais iniciais, $f_1 \approx 8.59031$ e $2f_1 \approx 17.18062$. Este comportamento quase-periódico permanece até o intervalo de $3240 < R < 3250$, neste intervalo o sistema sofre uma bifurcação mudando seu comportamento de um estado quase-periódico para um regime caótico. Este comportamento caótico permanece até $R = 4000$, como apresentado na Figura 5.17.

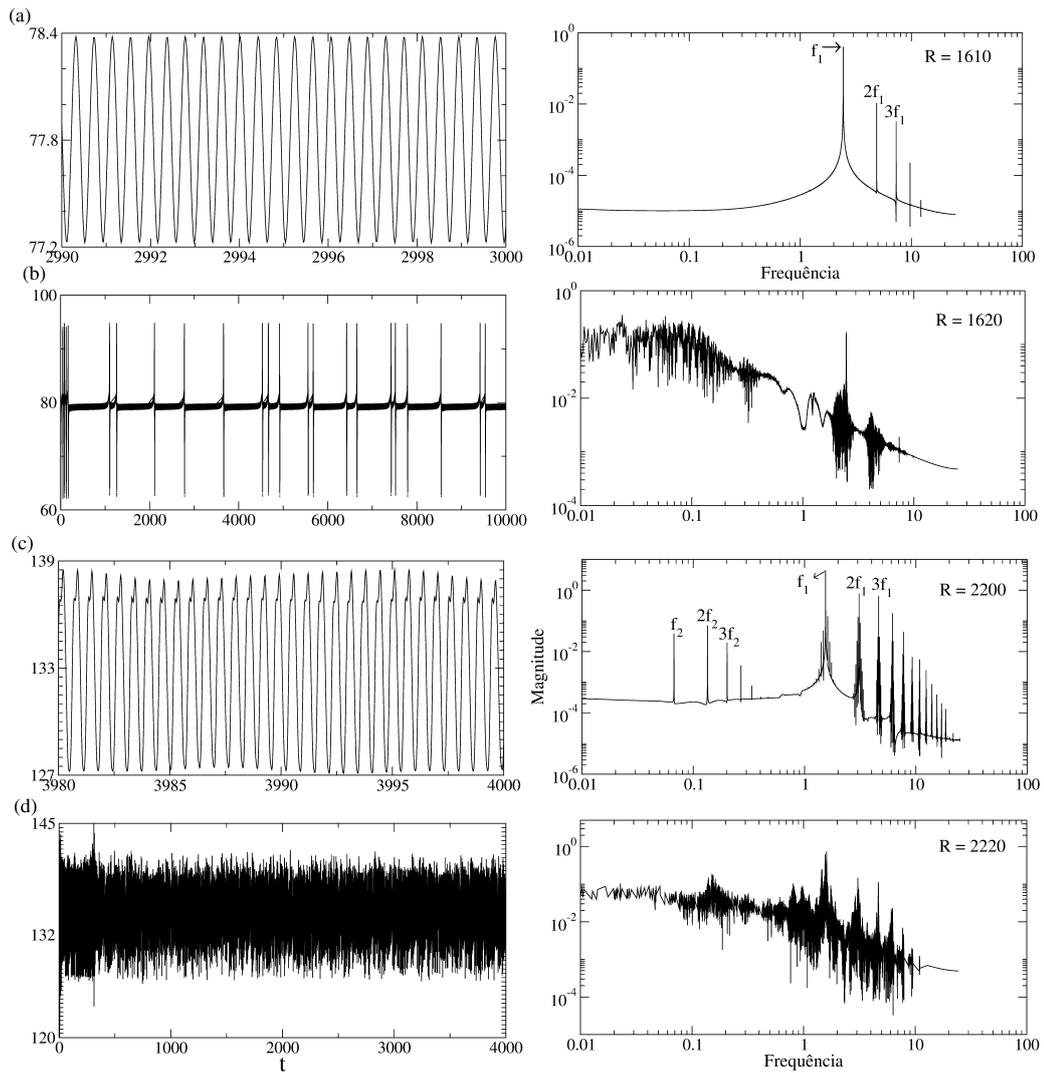


FIGURA 5.15 – Espectros de energia calculados a partir da série temporal da energia cinética para diferentes valores do parâmetro de controle R .

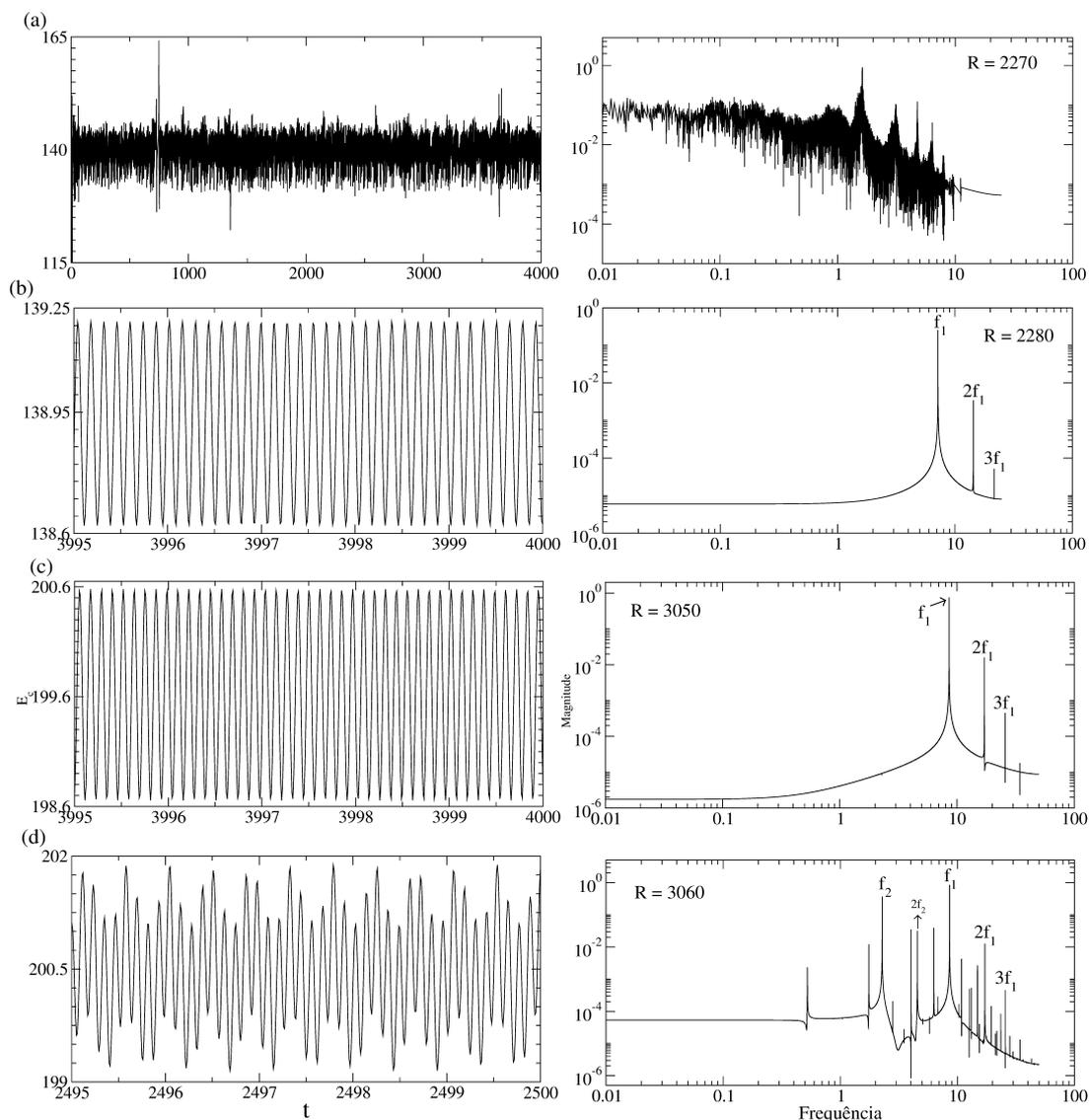


FIGURA 5.16 – Espectros de energia calculados a partir da série temporal da energia cinética para diferentes valores do parâmetro de controle R .

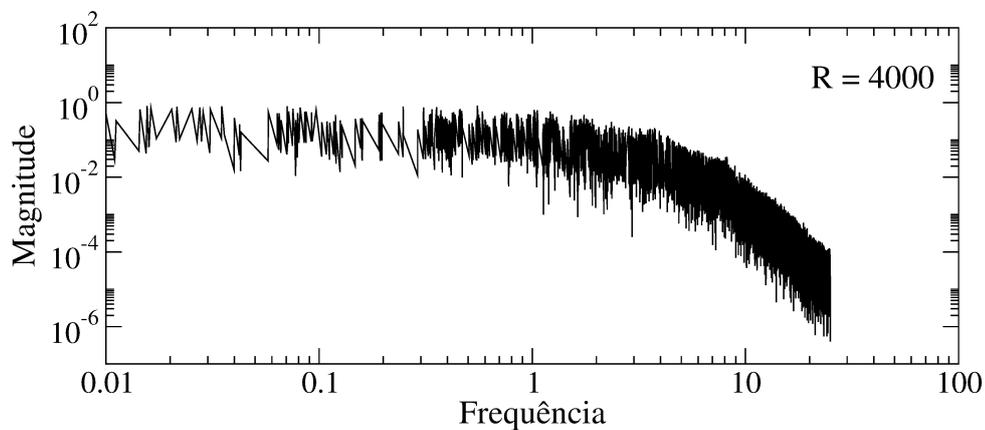


FIGURA 5.17 – Espectro de energia calculado a partir da série temporal da energia cinética para $R = 4000$.

5.8 Simulações Numéricas com Rotação para $Ta = 50$

5.8.1 Diagrama de Bifurcação da Energia Cinética com Rotação para $Ta = 50$

Os resultados dos cálculos dos atratores convectivos hidrodinâmicos obtidos para $Ta = 50$ são resumidos no diagrama de bifurcação representado na Figura 5.18 e na tabela 5.2.

Legenda	Tipo de atrator	Intervalo de existência	Média da energia cinética
PF	Ponto Fixo	$770 < R < 800$	0 – 8.4
P	Periódico	$810 < R < 840$	10.3 – 17
C	Caótico	$850 < R \leq 861$	16.5 – 22.2
P	Periódico	$862 \leq R \leq 864$	24.8 – 25.1
C	Caótico	$865 \leq R \leq 868$	23.2 – 25.1
P	Periódico	$869 \leq R \leq 938$	25.3 – 17.8
QP	Quase-Periódico	$R = 939$	17.7
C	Caótico	$940 \leq R \leq 1134$	13.7 – 22.5
QP	Quase-Periódico	$1135 \leq R \leq 1169$	22 – 24.8
P	Periódico	$1170 \leq R \leq 1178$	24.9 – 25.5
QP	Quase-Periódico	$1179 \leq R \leq 1199$	25.7 – 28
P	Periódico	$1200 \leq R \leq 1975$	29.1 – 105
QP	Quase-Periódico	$1976 \leq R \leq 2039$	105.2 – 120
C	Caótico	$2040 \leq R \leq 4000$	115.5 – 300

TABELA 5.2 – Atratores para o sistema hidrodinâmico convectivo para $Ta = 50$.

Inicialmente, no diagrama de bifurcação da energia cinética representado na Figura 5.18, no intervalo $770 \leq R \leq 800$, o sistema apresenta um comportamento de ponto fixo (PF). Este comportamento (PF) é demarcado pelos círculos na cor magenta. Após esse intervalo, o sistema sofre uma primeira bifurcação de Hopf, onde o sistema muda de um comportamento (PF) para um comportamento periódico (P) de período 1. Este comportamento periódico é demarcado pelos círculos na cor azul. Essa primeira bifurcação de Hopf ocorre no intervalo de $800 < R < 810$. O comportamento do sistema continua periódico até que o ciclo limite torna-se instável e uma órbita de duplo período aparece, tal como visto no diagrama de bifurcação da Figura 5.9, para Taylor = 10. Essa bifurcação de duplicação de período ocorre no intervalo $810 \leq R \leq 840$. O movimento associado além desse ponto é caótico (C). O comportamento caótico é demarcado pelas linhas na cor vermelha. No intervalo $860 \leq R \leq 870$ o sistema sofre uma série de bifurcações. Em $R = 860$ e $R = 861$ o sistema inicialmente apresenta um comportamento (C). Então, em $R = 861$ o atrator (C) perde estabilidade e o sistema muda seu estado de um comportamento (C) para um comportamento (P); essa mudança de regime ocorre em $R = 862$. Este comportamento (P) permanece até o valor de parâmetro $R = 864$,

quando o sistema sofre novamente uma perda de estabilidade, alterando o estado do sistema de um comportamento (P) para um comportamento (C), que ocorre em $R = 865$. O comportamento (C) do sistema permanece até $R = 868$. Então, o atrator (C) perde estabilidade e altera o comportamento (C) para um comportamento (P) em $R = 869$. Em algum ponto no intervalo $930 < R < 940$, o sistema sofre uma segunda bifurcação de Hopf, passando de periódico para quase-periódico. Esse comportamento quase-periódico é demarcado pelos círculos na cor preta. Seguido o cenário Ruelle-Takens de rota para caos via quase-periodicidade, o sistema altera o comportamento (QP) de $R = 939$ para um comportamento (C) em $R = 940$. Este comportamento (C) permanece até $R = 1134$, então o sistema sofre novamente uma perda de estabilidade, onde o regime muda de um estado caótico para um quase-periódico em $R = 1135$. Este comportamento (QP) se mantém até $R = 1169$, ponto em que o sistema sofre uma bifurcação dando origem a um atrator (P). Essa mudança ocorre em $R = 1170$. Este comportamento periódico se mantém até $R = 1176$, ponto em que o sistema sofre uma bifurcação de Hopf, alterando seu estado para um regime quase-periódico em $R = 1177$. Para o valor de parâmetro $R = 1169$ e $R = 1170$ o sistema apresenta multiestabilidade, onde observamos a coexistência de quatro atratores, (QP) e (P), cada um coexistindo com sua própria bacia de atração. No intervalo de $1170 < R < 1180$, o sistema apresenta novamente multiestabilidade. Onde, o atrator (P) coexiste com o atrator (QP). Este comportamento (QP) permanece até $R = 1199$, sendo que em $R = 1200$ o sistema sofre uma bifurcação, alterando seu estado de um regime (QP) para um regime (P). Então, em $R = 1200$ o sistema apresenta novamente multiestabilidade, onde observamos a coexistência de dois atratores (QP) e (P). Este comportamento periódico do sistema permanece até $R = 1975$, até o sistema sofrer uma bifurcação de Hopf, alterando o comportamento do sistema de um regime (P) para um regime (QP). No intervalo de $2040 < R < 2050$ o atrator (QP) perde estabilidade, resultando no aparecimento de um atrator (C). Esse comportamento caótico permanece até $R = 4000$, fim do intervalo de parâmetro estudado.

5.9 Identificação de Bifurcações

5.9.1 Análise dos Espectros de Potência da Energia Cinética para $Ta =$

50

A seguir, são apresentados os espectros de potência da série temporal da energia cinética E_c para diferentes valores de R e mantendo $Ta = 50$ fixo. Aqui, aplicamos a mesma análise que a utilizada anteriormente na seção 5.7.1 para classificar os regimes do sistema com base nas respectivas PSDs, considerando os valores de parâmetro onde o sistema altera seu comportamento dinâmico, identificados no diagrama de bifurcação da Figura

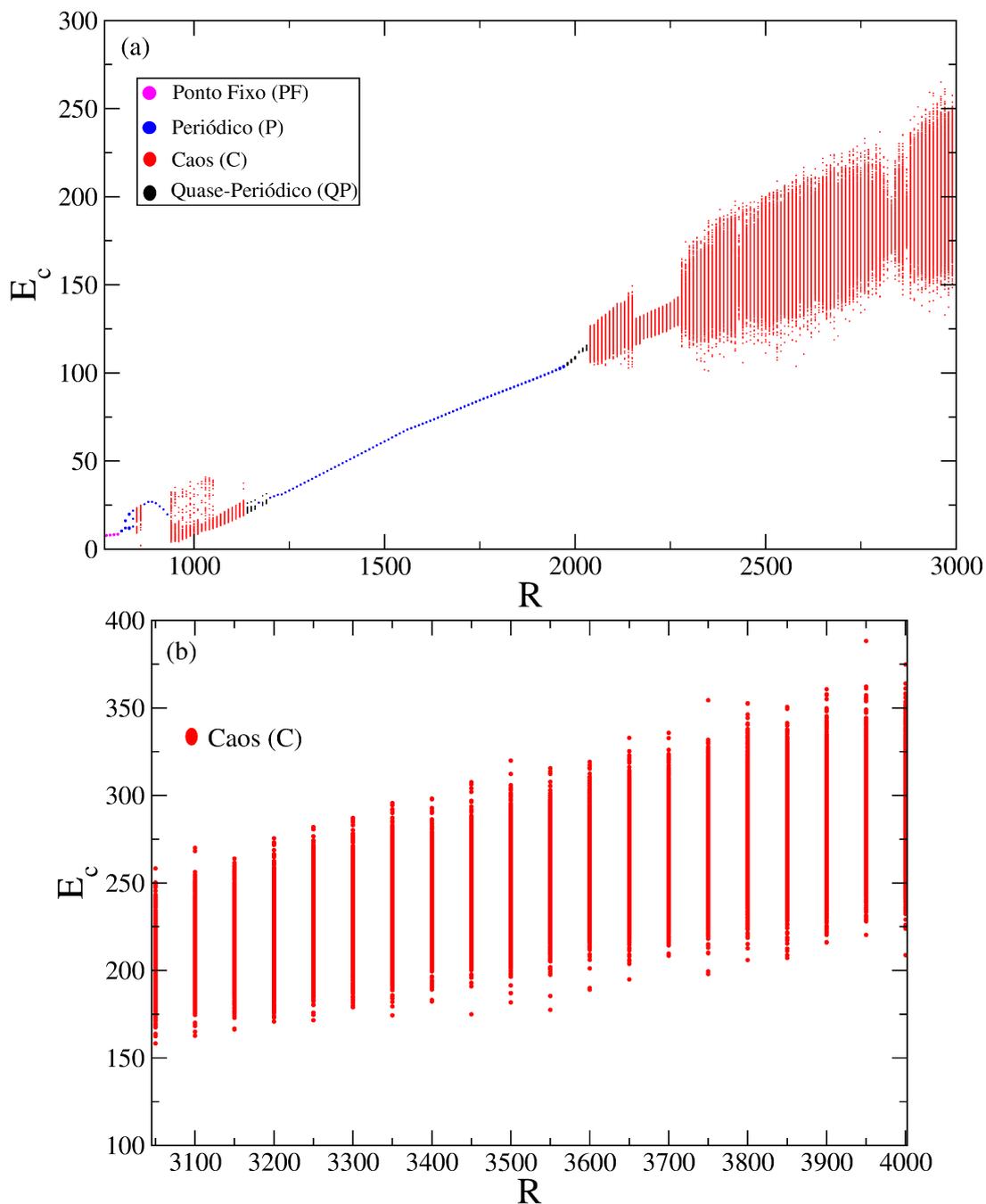


FIGURA 5.18 – Diagrama de bifurcação da energia cinética em função do número de Rayleigh, R , para $Ta = 50$. Os círculos em magenta representam os valores de parâmetro onde o sistema apresenta o comportamento de ponto fixo. Os círculos em azul representam o comportamento periódico. Os círculos em preto representam um comportamento quase-periódico e os círculos em vermelho representam um comportamento do sistema caótico.

5.18.

Na Figura 5.19-(a) é apresentado o espectro de energia do sistema, para $R = 810$, após o sistema sofrer uma primeira bifurcação de Hopf, alterando o comportamento de um estado estacionário para um regime periódico, apresentando apenas uma frequência fundamental $f_1 \approx 0.0913419$ e suas múltiplas $2f_1 \approx 0.1826838$ e $3f_1 \approx 0.2740257$. Em

$R = 820$, o sistema sofre uma bifurcação de duplicação de período, representada na PSD da Figura 5.19-(b). Este comportamento periódico permanece até $R \approx 840$. O comportamento do sistema além desse ponto é caótico, ilustrado na Figura 5.19-(c). No intervalo de $860 \leq R \leq 870$ o sistema passa por uma bifurcação sela-nó, alterando o estado caótico para um regime periódico, podendo ser verificado na Figura 5.19-(d), apresentando uma frequência fundamental $f_1 \approx 0.0772856$ e suas múltiplas $2f_1 \approx 0.1545712$ e $3f_1 \approx 0.23185668$. Este comportamento periódico se mantém até $R = 938$. No intervalo de $938 \leq R \leq 940$ o sistema perde estabilidade passando por uma bifurcação de Hopf. Nesta bifurcação, o regime muda de um estado periódico para um regime quase-periódico, e então, novamente o sistema perde estabilidade e sofre uma bifurcação de Hopf, alterando o comportamento do sistema para um regime caótico, esta sequência de bifurcações pode ser visualizada na Figura 5.20-(a)-(b) e (c). No intervalo $1130 < R < 1140$ o sistema perde estabilidade e sofre uma bifurcação, alterando seu comportamento de um estado caótico, representado na PSD da Figura 5.20-(d), para um regime quase-periódico, ilustrado na Figura 5.20-(e).

No intervalo $1160 < R < 1170$ o sistema sofre uma bifurcação, mudando seu comportamento de um estado quase-periódico, representado na PSD da Figura 5.21-(a), para um regime periódico, representado na Figura 5.21-(b). E então, o sistema dinâmico sofre uma sequência de bifurcações, alterando o comportamento do sistema entre regimes periódicos e quase-periódicos. Em $R = 2030$ o comportamento quase-periódico do sistema, representado na Figura 5.21-(c) perde estabilidade e sofre uma bifurcação de Hopf, alterando o estado do sistema para um regime caótico. Este regime caótico permanece até $R = 4000$, representado na série temporal da energia cinética e na PSD da Figura 5.21-(d).

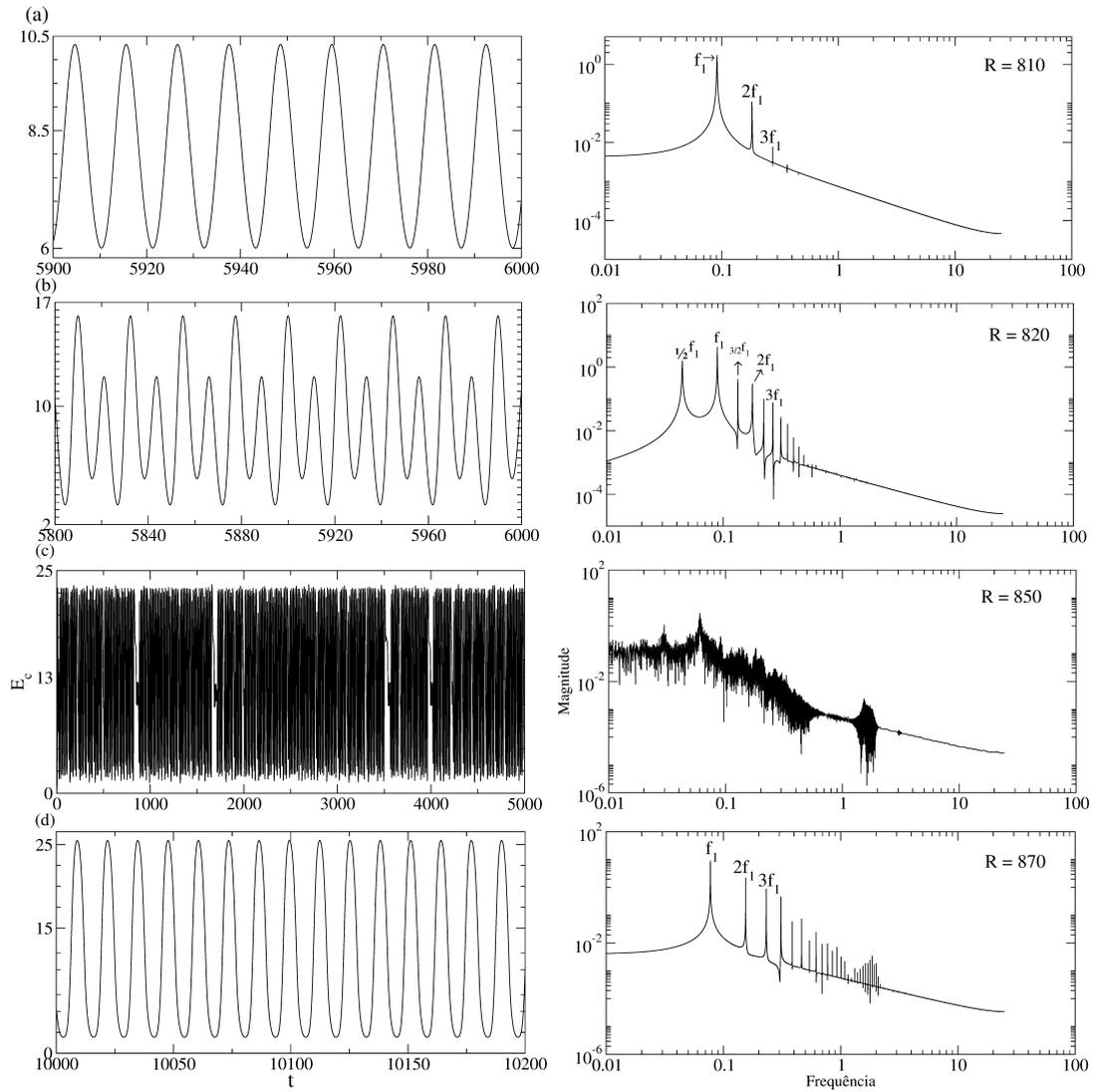


FIGURA 5.19 – Espectros de energia calculados a partir da série temporal da energia cinética para diferentes valores do parâmetro de controle R .

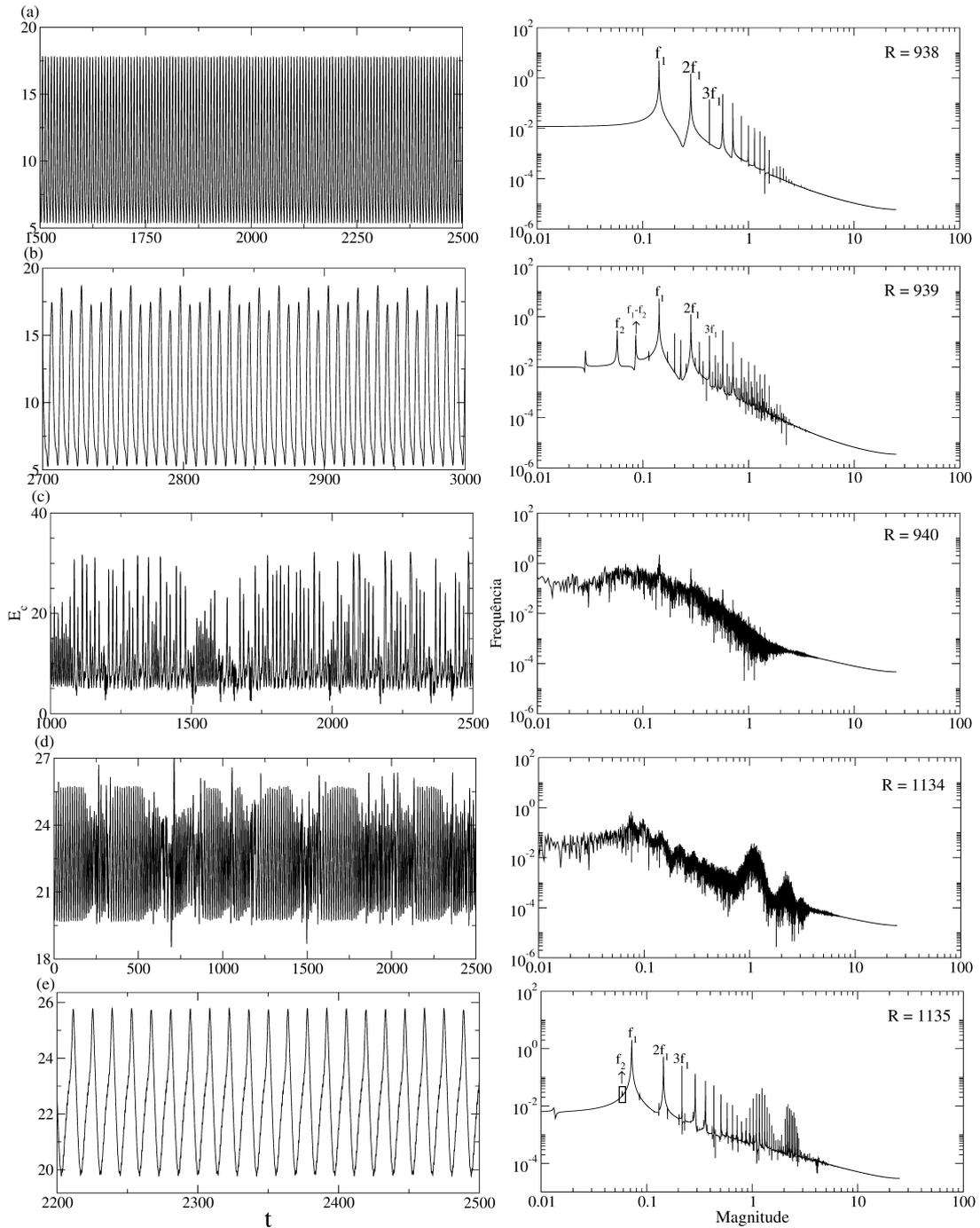


FIGURA 5.20 – Espectros de energia calculados a partir da série temporal da energia cinética para diferentes valores do parâmetro de controle R .

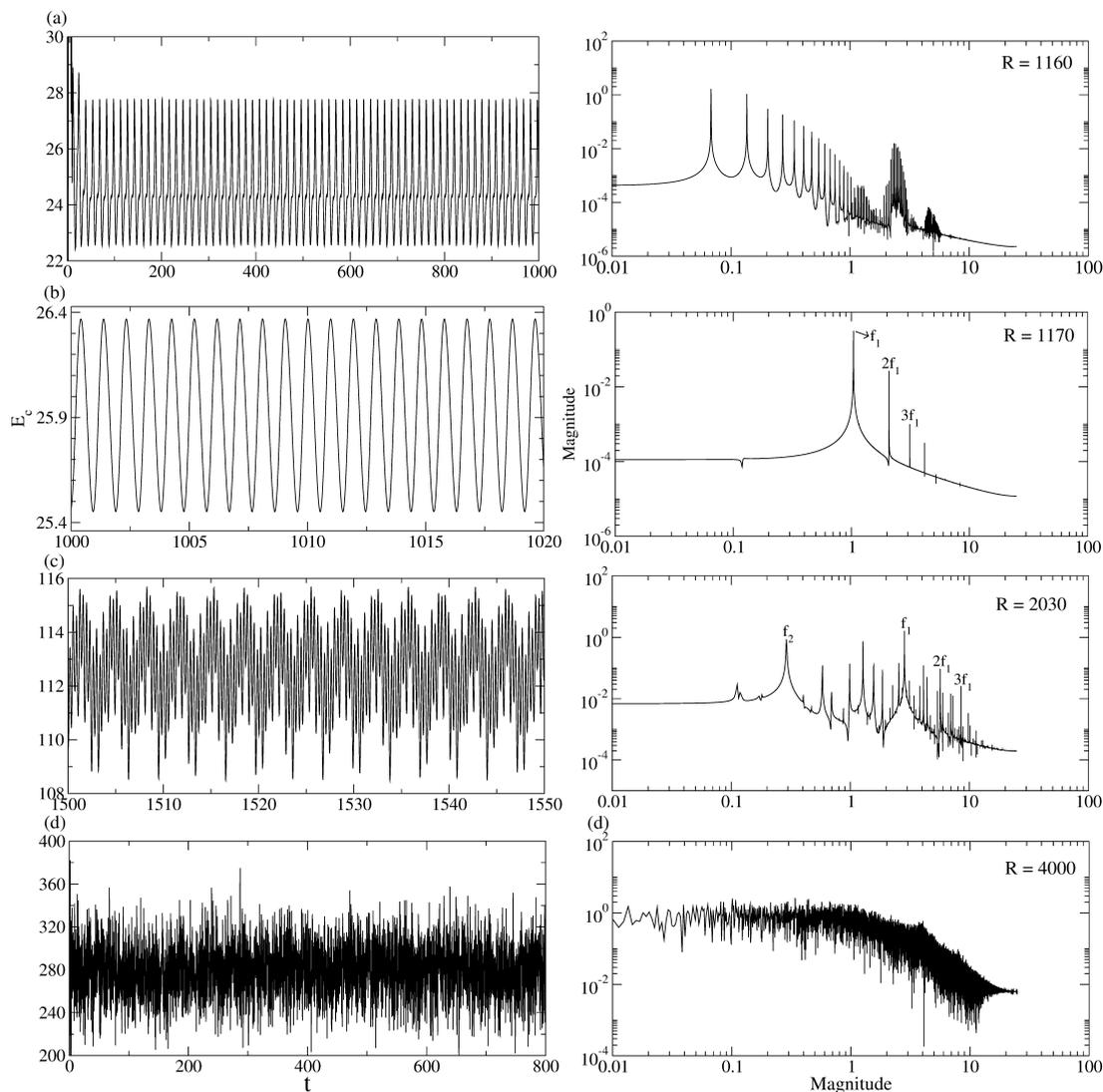


FIGURA 5.21 – Espectros de energia calculados a partir da série temporal da energia cinética para diferentes valores do parâmetro de controle R .

5.10 Histerese – Coexistência de Atratores

5.10.1 Histerese entre $1160 \leq R \leq 1170$

Na Figura 5.22 é apresentado um refinamento do diagrama de bifurcação da Figura 5.18 utilizando a técnica continuação de parâmetro analisando o intervalo de valores $1160 \leq R \leq 1170$, região em que o sistema perde estabilidade e sofre uma bifurcação. Na Figura 5.22-(a) construímos o diagrama de bifurcação da energia cinética E_c em função do número de Rayleigh R plotando os pontos de máximo da série temporal, partindo da esquerda para a direita, como indica a seta. As linhas na cor preta representam o comportamento do sistema quase-periódico. Em $R = 1170$ o sistema apresenta um

comportamento histerético, possuindo 2 atratores, o atrator periódico e o atrator quase-periódico coexistindo no sistema, cada um com sua própria bacia de atração. A Figura 5.23 representa os atratores quase-periódico (representado pela cor preta) e o periódico (representado pelo cor azul) coexistindo no espaço de fase do sistema. A Figura 5.22-(b) representa o diagrama de bifurcação plotando a média da série temporal da energia cinética E_c em função de R . Os triângulos na cor preta e violeta sobrepostos representam o comportamento quase-periódico do sistema, onde a seta indica a direção de partida. Partindo de $R = 1170$ (representando um comportamento periódico na Figura 5.18) e reduzindo o valor do parâmetro de controle da direita para a esquerda (sentido da seta) o espaço de fase do sistema apresenta dois atratores periódicos até $R = 1169$, coexistindo com dois atratores quase-periódicos. Para $R = 1168$, o espaço de fase do sistema apresenta apenas um atrator quase-periódico. Este comportamento quase-periódico se mantém até $R = 1160$. Com isso, observamos um comportamento histerético do sistema, com uma sequência de atratores no sentido da esquerda para a direita e outra no sentido da direita para a esquerda.

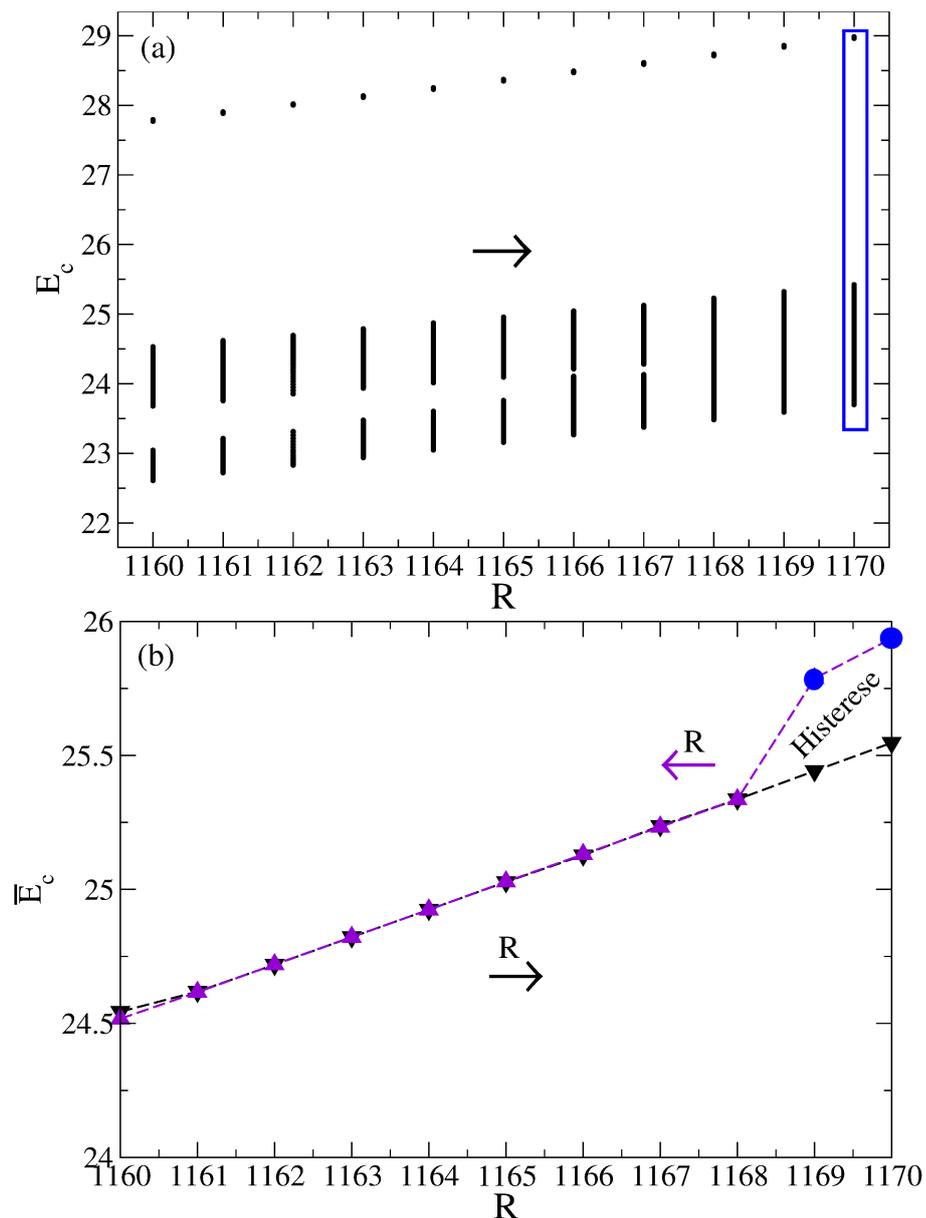


FIGURA 5.22 – Refinamento do diagrama de bifurcação da Figura 5.18. (a) diagrama de bifurcação da energia cinética em função de R , plotando os pontos máximos da série temporal da energia cinética. As linhas em preto representam o comportamento quase-periódico do sistema. O retângulo demarcado em azul para $R = 1170$ representa a região em que o sistema apresenta histerese. (b) diagrama de bifurcação da média da energia cinética em função de R . A seta demarcada pela cor preta indica o sistema partindo da esquerda para a direita, partindo de $R = 1160$ até $R = 1170$. A seta demarcada pela cor violeta indica o sistema retornando, ou seja, diminuindo o valor de R da direita para a esquerda, partindo de $R = 1170$ até $R = 1160$. Os pontos em azul no diagrama para os valores de $R = 1170$ e $R = 1169$ representam os atratores periódicos coexistindo com os atratores quase-periódicos, demarcados pelos triângulos em preto. Os triângulos sobrepostos preto e violeta são as soluções em que o sistema apresenta o mesmo comportamento quase-periódico.

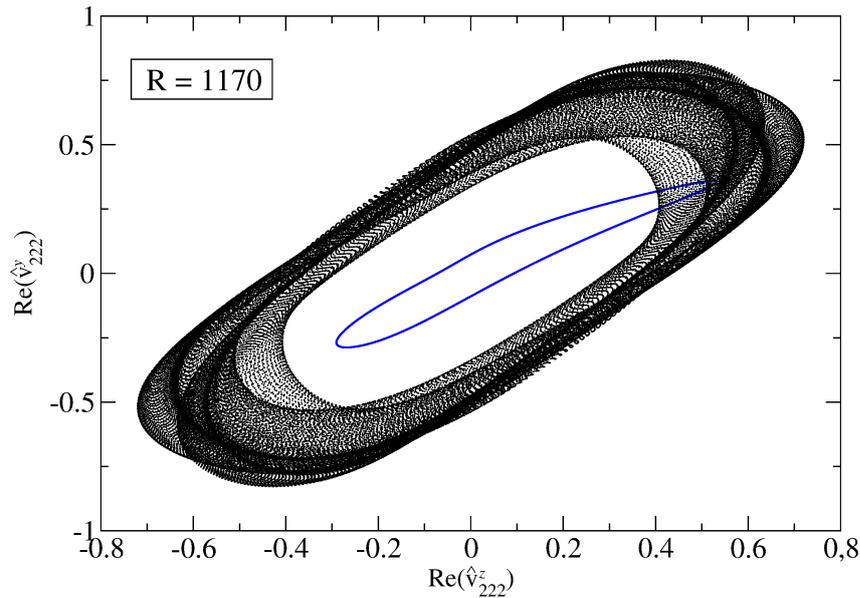


FIGURA 5.23 – Projeção no espaço de fase no plano $Re(\hat{v}_{222}^y) \times Re(\hat{v}_{222}^z)$ representando a coexistência do atrator quase-periódico (preto) e do atrator periódico (azul).

5.11 Simulações Numéricas com Rotação para $Ta = 100$

5.11.1 Diagrama de Bifurcação da Energia Cinética com Rotação para $Ta = 100$

Os resultados dos cálculos dos atratores convectivos hidrodinâmicos obtidos para $Ta = 100$ são resumidos no diagrama de bifurcação representado na Figura 5.24 e na tabela 5.3.

Legenda	Tipo de atrator	Intervalo de existência	Média da energia cinética
PF	Ponto Fixo	$870 < R < 880$	12.5 – 12.7
P	Periódico	$890 < R < 927$	15.3 – 28
C	Caótico	$928 \leq R \leq 976$	28.2 – 21.1
QP	Quase-periódico	$977 \leq R \leq 980$	21 – 21.6
C	Caótico	$981 \leq R \leq 983$	22.4 – 22.9
QP	Quase-Periódico	$R = 984$	21.8
C	Caótico	$985 \leq R \leq 1524$	22.7 – 56.1
QP	Quase-Periódico	$1525 \leq R \leq 1949$	56.2 – 106.1
P	Periódico	$1950 \leq R \leq 2022$	106 – 112.3
QP	Quase-Periódico	$2023 \leq R \leq 2034$	112.2 – 111.7
C	Caótico	$2035 \leq R \leq 2076$	110.9 – 113
QP	Quase-Periódico	$2077 \leq R \leq 2412$	111.1 – 143.1
C	Caótico	$2413 \leq R \leq 4000$	143.5 – 289.6

TABELA 5.3 – Atratores para o sistema hidrodinâmico convectivo para $Ta = 100$.

Inicialmente, no diagrama de bifurcação da energia cinética da Figura 5.24, o sistema se comporta como um ponto fixo (PF) até sofrer uma primeira bifurcação de Hopf, passando a demonstrar um comportamento periódico (P). Essa primeira bifurcação de (PF) para (P) ocorre no intervalo $870 < R < 890$. O comportamento do sistema permanece periódico até sofrer uma segunda bifurcação, uma bifurcação de duplicação de período, onde o atrator periódico de período 1 passa a ter período 2; essa bifurcação ocorre entre $926 \leq R \leq 927$. No intervalo de $928 \leq R \leq 929$, o sistema perde estabilidade e sofre uma bifurcação sela-nó, passando de um atrator (P), para um atrator caótico (C). Este comportamento caótico permanece até $R = 976$, ponto em que o sistema perde estabilidade e volta a apresentar um comportamento (QP). Este comportamento quase-periódico permanece até $R = 980$. Então, o sistema sofre uma quebra de toro, alterando o comportamento para um atrator (C) em $R = 981$. No intervalo de $983 \leq R \leq 984$, o atrator (C) perde estabilidade e o sistema sofre novamente uma bifurcação, alterando o comportamento do sistema para um atrator (QP). Este atrator (QP) perde estabilidade e o comportamento do sistema é alterado para um atrator (C). Este comportamento caótico permanece até $R = 1525$. No intervalo de $1524 < R \leq 1525$, o sistema passa novamente por uma bifurcação, alterando o comportamento do sistema para um atrator (QP). Este comportamento quase-periódico permanece até $R = 1949$, ponto em que o sistema perde estabilidade e apresenta um atrator (P) para $R = 1950$. Para $R = 1949$ o sistema apresenta multiestabilidade, onde observamos a coexistência dos atratores (QP) e (P). Para $R = 1950$, observamos a existência de apenas um atrator (P). O comportamento do sistema permanece periódico até $R = 2022$, ponto em que o sistema sofre uma bifurcação de Hopf, onde o atrator (P) é alterado para um atrator (QP) em $R = 2023$. Este comportamento quase-periódico permanece até $R = 2034$. Então, em $R = 2035$ o sistema sofre uma quebra de toro, onde o atrator (QP) é alterado para um atrator (C). Este comportamento caótico permanece até $R = 2076$. Neste ponto, o atrator (C) perde estabilidade e o comportamento do sistema é alterado para um atrator (QP) para o valor de parâmetro $R = 2077$. O comportamento quase-periódico do sistema permanece até $R = 2412$, ponto em que o sistema novamente sofre uma bifurcação, alterando o atrator (QP) para um atrator (C) em $R = 2413$. Este comportamento caótico permanece até o fim do intervalo de parâmetro estudado, $R = 4000$.

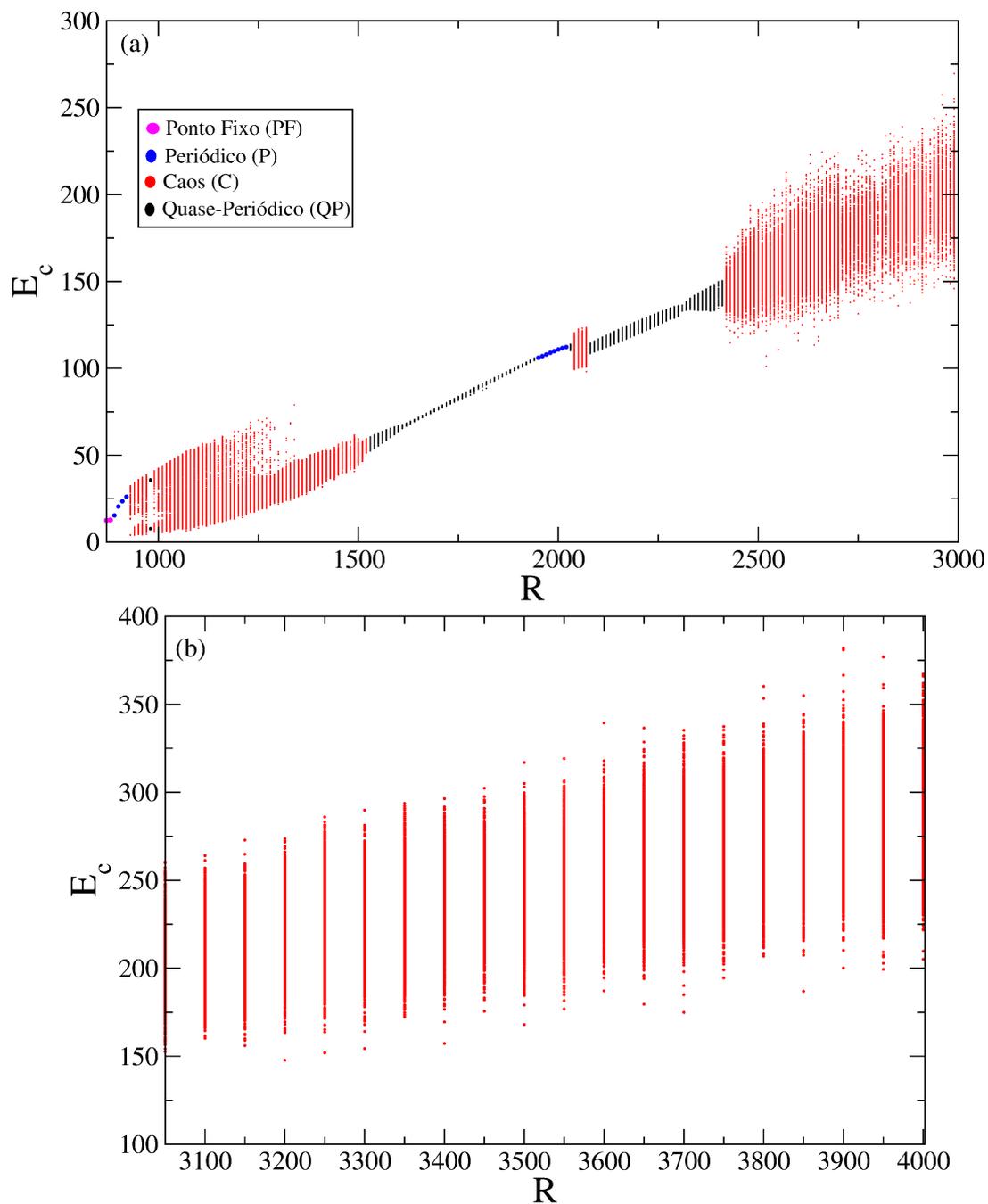


FIGURA 5.24 – Diagrama de Bifurcação da energia cinética em função do número de Rayleigh R para $Ta = 100$. Os círculos em magenta representam os valores de parâmetro onde o sistema apresenta o comportamento de ponto fixo. Os círculos em azul representam o comportamento periódico. Os círculos em preto representam um comportamento quase-periódico e os círculos em vermelho representam um comportamento do sistema caótico.

5.12 Identificação de Bifurcações

5.12.1 Análise dos Espectros de Potência da Energia Cinética para $Ta = 100$

A seguir são apresentados os espectros de potência para diferentes valores de R e $Ta = 100$ fixo. Aqui, aplicamos a mesma análise utilizada anteriormente para calcular as PSDs para $Ta = 10$ e $Ta = 50$.

Na Figura 5.25(a) são apresentados a série temporal da energia cinética e o espectro de energia para $R = 890$, após o sistema sofrer uma primeira bifurcação de Hopf, alterando o comportamento de um ponto fixo para um regime periódico apresentando uma frequência fundamental $f_1 \approx 0.153021$ e suas múltiplas $2f_1 \approx 0.306042$ e $3f_1 \approx 0.459063$. No intervalo de $920 \leq R \leq 927$, o sistema passa por uma bifurcação de duplicação de período, onde a órbita periódica de período 1 perde estabilidade e dobra seu período. Essa bifurcação é ilustrada na Figura 5.25 (b) na série temporal da energia cinética e sua respectiva PSD. No intervalo $927 \leq R \leq 930$, o sistema sofre uma bifurcação sela-nó, onde o regime periódico perde estabilidade e altera o comportamento do sistema para um regime caótico. Este regime caótico é ilustrado na Figura 5.25 (c). O comportamento do sistema permanece caótico até $R = 976$ e sua energia cinética e a PSD são apresentados na Figura 5.25 (d). Em $R = 976$ o regime caótico perde estabilidade e o comportamento do sistema é alterado para um regime quase-periódico, representado na Figura 5.25 (e) através da série temporal da energia cinética e a PSD para o valor de parâmetro $R = 977$.

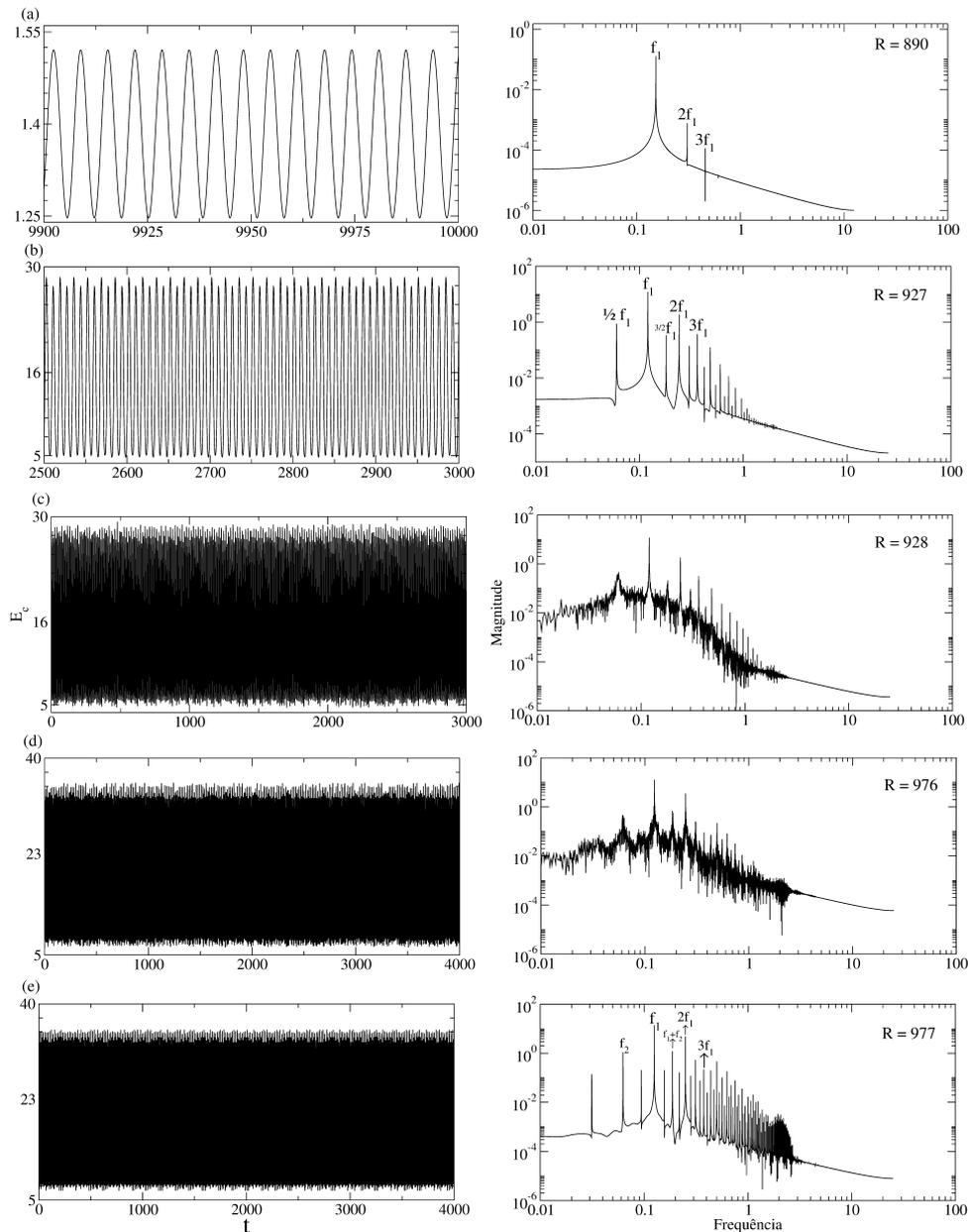


FIGURA 5.25 – Espectros de energia calculados a partir da série temporal da energia cinética para diferentes valores do parâmetro de controle R .

Seguindo a análise dos espectros de energia apresentado anteriormente, no intervalo de $980 \leq R \leq 985$ o sistema sofre uma série de bifurcações, como apresentado na Figura 5.26 (a) para $R = 980$, tem-se um comportamento quase-periódico, com as frequências fundamentais, $f_1 \approx 0.128458$ e $f_2 \approx 0.0784954$. Na Figura 5.26 (b) é apresentado o PSD do sistema para $R = 981$, representando um comportamento caótico. O comportamento permanece caótico até $R = 983$, ponto em que o sistema sofre uma bifurcação, mudando seu comportamento de um regime caótico para um quase-periódico. A série temporal da energia cinética e o PSD do regime caótico são apresentados na Figura 5.26 (c) para $R = 983$. Na Figura 5.26 (d) são apresentados a série temporal da energia cinética e

o PSD do sistema para o regime quase-periódico com $R = 984$. Então, o sistema sofre novamente uma bifurcação, alterando seu comportamento de um estado quase-periódico para um caótico, como é apresentado na Figura 5.26-(e) para $R = 985$, representado um regime caótico.

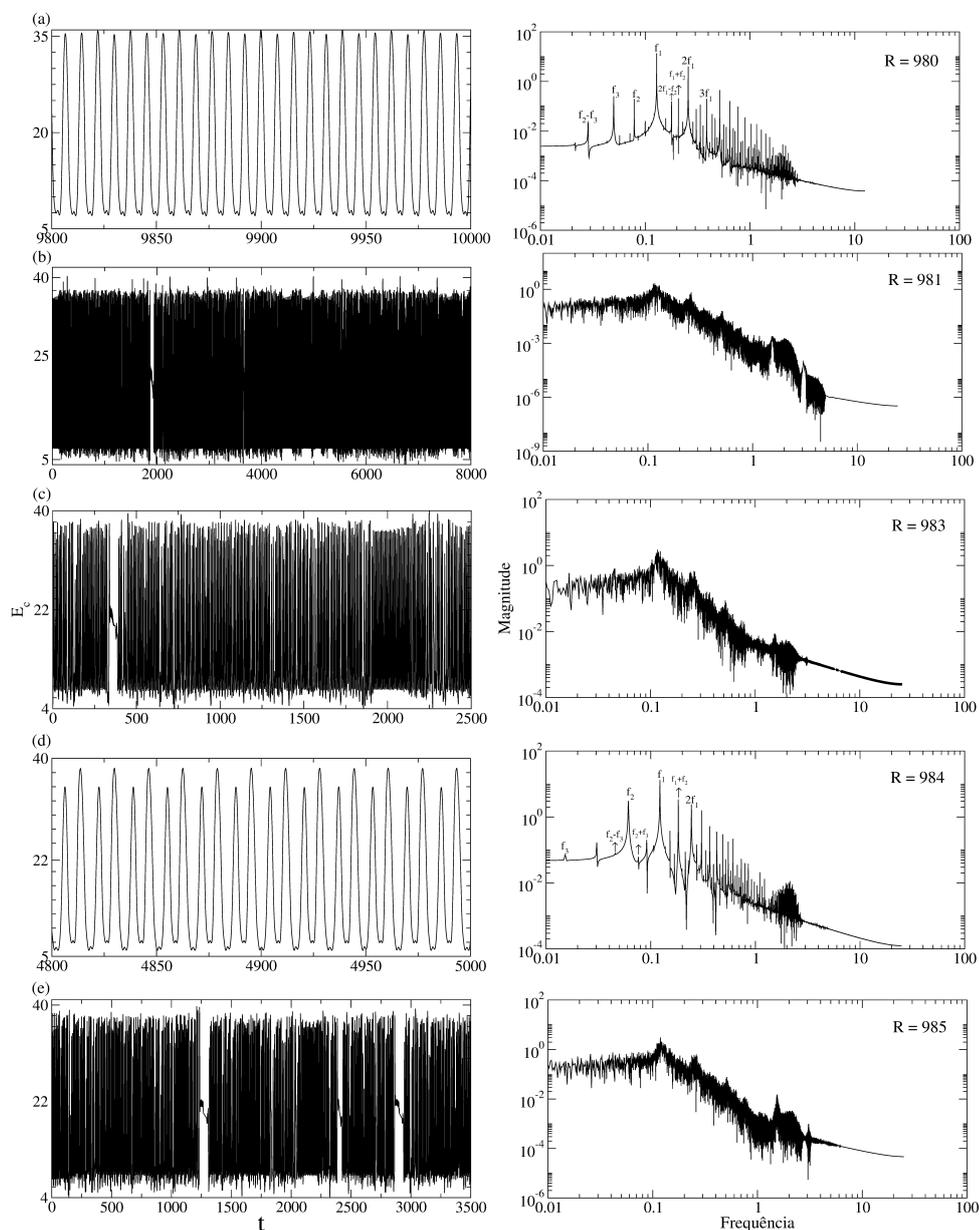


FIGURA 5.26 – Espectros de energia calculados a partir da série temporal da energia cinética para diferentes valores do parâmetro de controle R .

No intervalo $1523 \leq R \leq 1524$ o comportamento do sistema é alterado de um estado caótico para um quase-periódico. Na Figura 5.27 (a) tem-se a série temporal da energia cinética e a PSD do sistema com $R = 1523$ para um regime caótico. Na Figura 5.27 (b) tem-se a série temporal da energia cinética e a PSD do sistema com $R = 1524$, representando um regime quase-periódico. O comportamento quase-periódico do sistema

permanecerá até $R = 1949$, como apresentado na PSD da Figura 5.27 (c), ponto em que o sistema sofre novamente uma mudança de estabilidade e, então, o comportamento do sistema é alterado para um regime periódico, como apresentado na Figura 5.27 (d). Até $R = 2022$ o comportamento do sistema permanece periódico e sua série temporal e a PSD são apresentadas na Figura 5.27 (e).

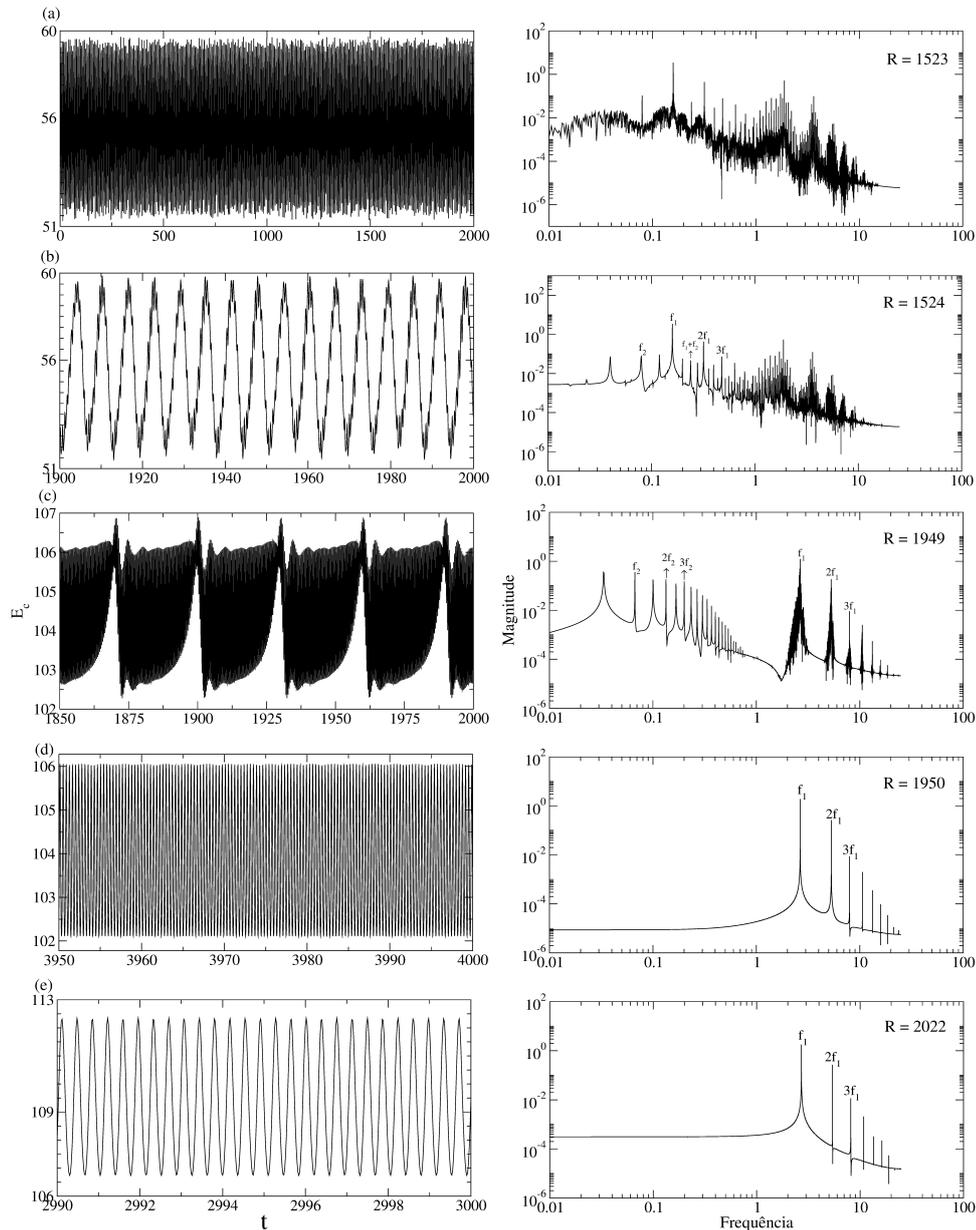


FIGURA 5.27 – Espectros de energia calculados a partir da série temporal da energia cinética para diferentes valores do parâmetro de controle R .

Continuando as análises das PSDs nos pontos de bifurcação do sistema, no intervalo de $2022 \leq R \leq 2023$ o regime periódico perde sua estabilidade e passa por uma bifurcação de Hopf, alterando o comportamento do sistema para um regime quase-periódico, passando a exibir duas frequências fundamentais, apresentadas na PSD da Figura 5.28 (a). Este

comportamento quase-periódico se mantém até $R = 2034$, como apresentada na PSD da Figura 5.28 (b), ponto em que o sistema sofre novamente uma bifurcação. Após essa bifurcação, o sistema passa a exibir um regime caótico, como apresentada na série temporal e na PSD da Figura 5.28 (c). Este comportamento caótico se mantém até $R = 2076$, como pode ser visto na PSD da Figura 5.28 (d). Entre o intervalo de $2076 \leq R \leq 2077$ o sistema perde sua estabilidade e sofre uma nova bifurcação, alterando seu comportamento de um estado caótico para um quase-periódico, representado por um toro T^2 , como apresentado na PSD da Figura 5.28 (e) para $R = 2077$.

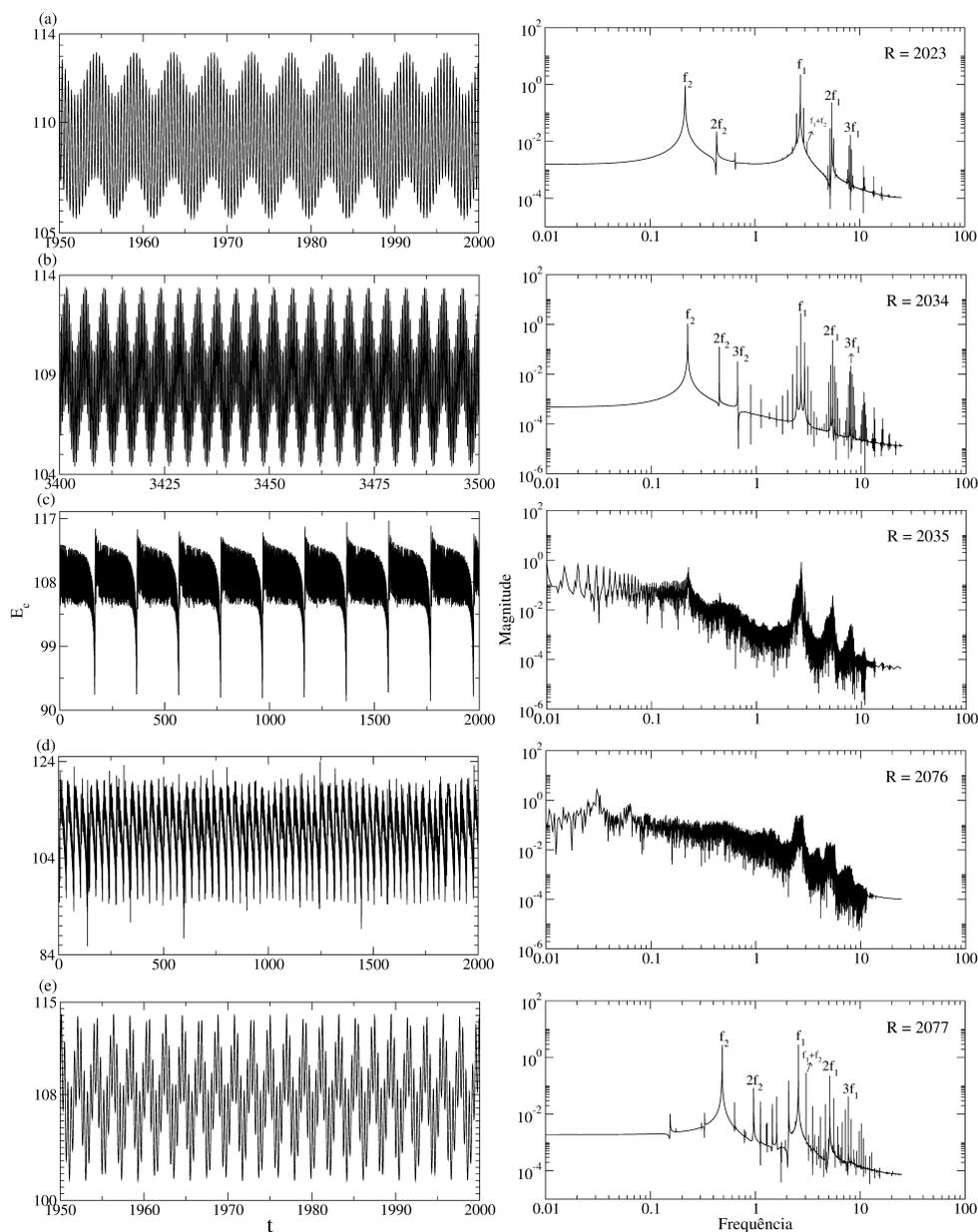


FIGURA 5.28 – Espectros de energia calculados a partir da série temporal da energia cinética para diferentes valores do parâmetro de controle R .

O comportamento quase-periódico apresentado anteriormente na Figura 5.28-(e) se

mantém até $R = 2412$. No intervalo de $2412 \leq R \leq 2413$ o sistema perde estabilidade e sofre uma bifurcação, alterando seu comportamento de um estado quase-periódico para um regime caótico, representado na série temporal da energia cinética e na PSD da Figura 5.29-(b). Este comportamento caótico se mantém até $R = 4000$, como apresentado na série temporal da energia cinética e na PSD da Figura 5.29-(c).

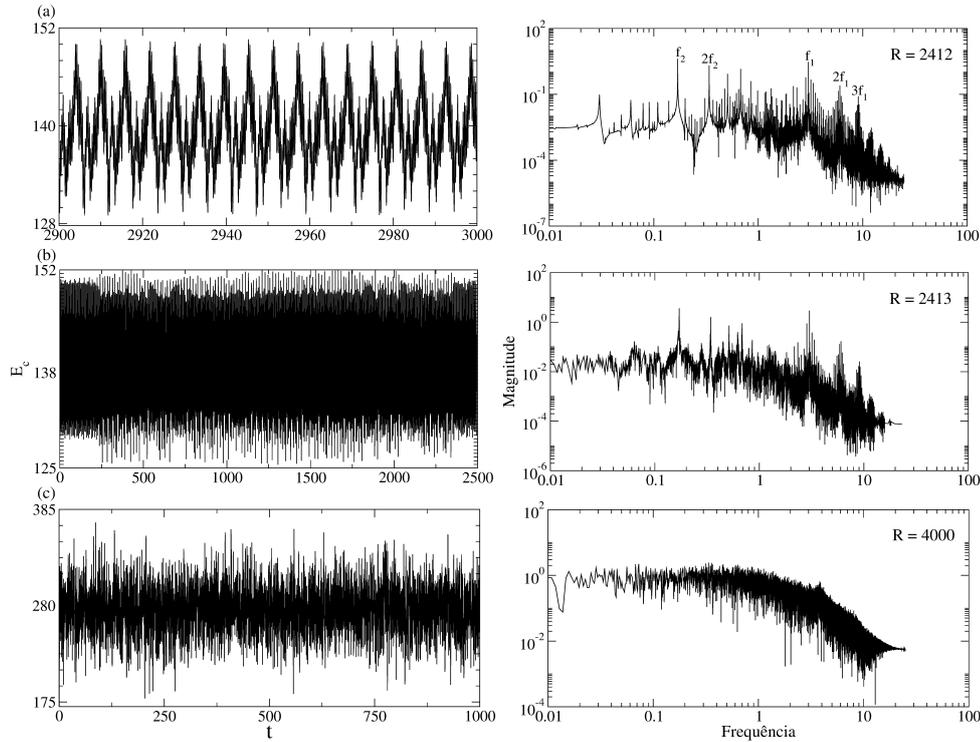


FIGURA 5.29 – Espectros de energia calculados a partir da série temporal da energia cinética para diferentes valores do parâmetro de controle R .

5.13 Histerese – Coexistência de Atratores

5.13.1 Histerese entre $1940 \leq R \leq 1950$

Na Figura 5.30 (a) é apresentado um refinamento do diagrama de bifurcação da Figura 5.24 utilizando a técnica de continuação de parâmetro para o intervalo de valores $1940 \leq R \leq 1950$, região em que o sistema perde estabilidade e sofre uma bifurcação. Na Figura 5.30 (a) o diagrama de bifurcação da energia cinética E_c é construído plotando os pontos de máximos da série temporal em função de R , partindo da esquerda para a direita. As linhas na cor preta representam o comportamento quase-periódico e o ponto em verde representa o comportamento periódico. A Figura 5.30 (b) representa o diagrama de bifurcação da média da energia cinética E_c em função de R . Os quadrados na cor azul e preto sobrepostos representam o comportamento quase-periódico do sistema. Os círculos

em verde representam o comportamento periódico do sistema. Partindo de $R = 1950$ e reduzindo o valor do parâmetro de controle (sentido da seta), o espaço de fase apresenta dois atratores periódicos até $R = 1949$, ponto em que os mesmos deixam de existir. Para $R = 1948$, o espaço de fase do sistema apresenta apenas o atrator quase-periódico permanecendo até $R = 1940$. Assim, observamos um comportamento histerético do sistema, com uma sequência de atratores no sentido da direita para a esquerda e outra no sentido da esquerda para a direita. Na Figura 5.31 é apresentada a coexistência, no espaço de fase, dos atratores quase-periódico (representado pela cor violeta) e periódico (representado na cor preta) em $R = 1949$.

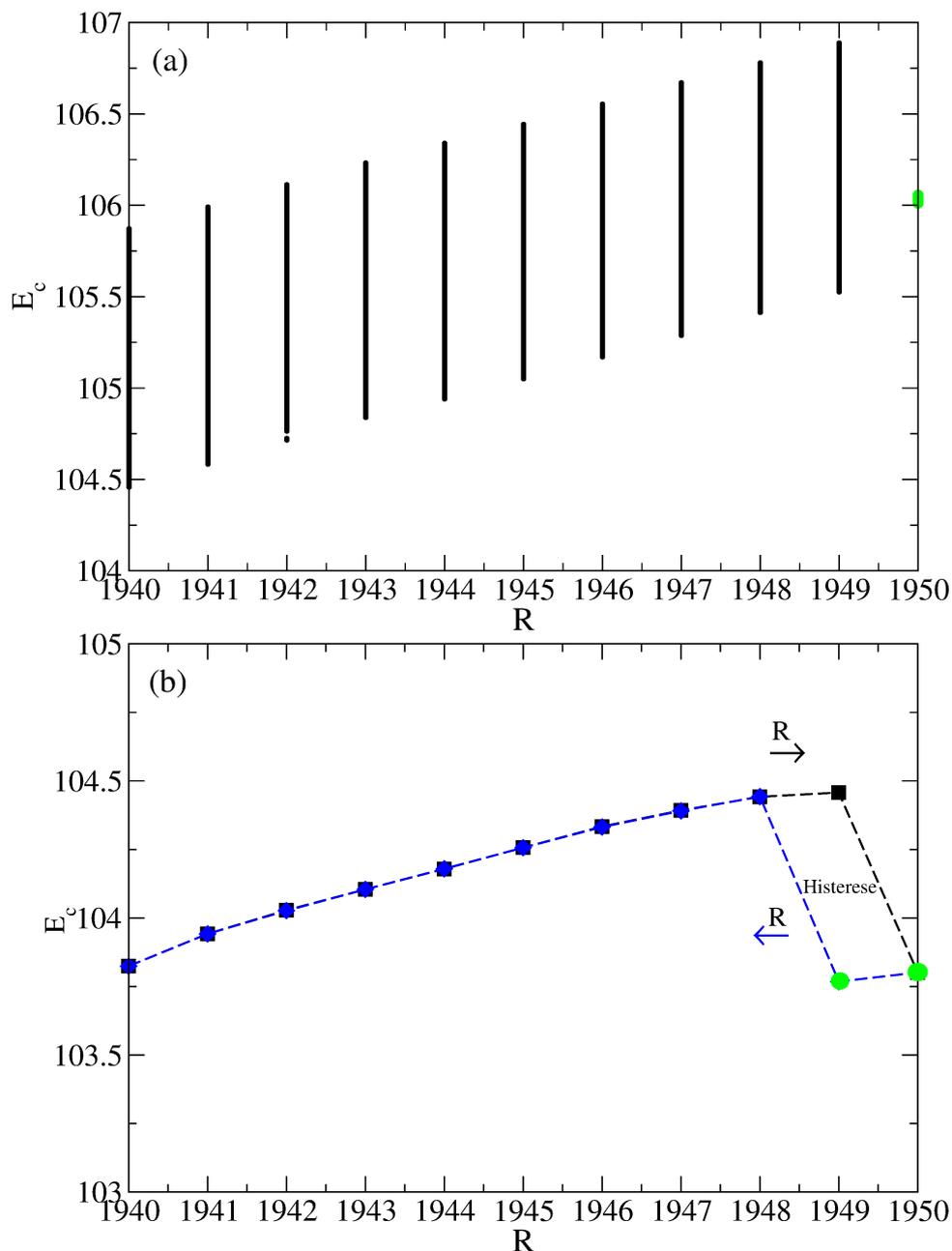


FIGURA 5.30 – Refinamento do diagrama de bifurcação da Figura 5.24. (a) diagrama de bifurcação da energia cinética em função de R , plotando os pontos máximos da seção de Poincaré da série temporal da energia cinética. As linhas em preto representam as soluções do sistema em um regime quase-periódico. O círculo em verde representa a solução do sistema em um regime periódico. (b) diagrama de bifurcação da média da energia cinética em função de R . A seta demarcada pela cor preta indica o sistema partindo da esquerda para a direita, de $R = 1940$ a $R = 1950$. A seta demarcada pela cor azul indica o sistema retornando (diminuindo o valor do parâmetro de controle R) da direita para a esquerda, de $R = 1950$ a $R = 1940$. Os quadrados sobrepostos representam as soluções em que o sistema apresenta o mesmo comportamento quase-periódico. Em $R = 1950$ o sistema apresenta um comportamento periódico, tanto partindo da esquerda para a direita como partindo da direita para a esquerda, e ao reduzir o valor do parâmetro de controle para $R = 1949$ o sistema apresenta dois regimes, um quase-periódico, representado pelo quadrado na cor preta e outro regime periódico, representado pelo círculo na cor verde.

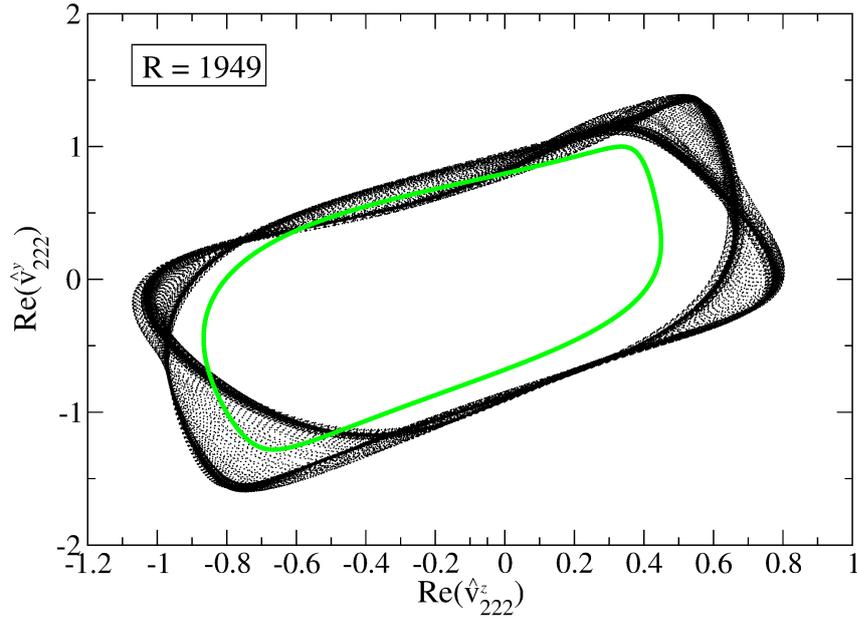


FIGURA 5.31 – Projeção no espaço de fase no plano $Re(\hat{v}_{222}^x) \times Re(\hat{v}_{222}^y)$ do atrator quase-periódico (preto) e do atrator periódico (verde).

5.13.2 Histerese entre $2070 \leq R \leq 2080$

Utilizando o mesmo procedimento adotado na seção 5.13.1 observamos um comportamento histerético do sistema ao reduzir o valor do parâmetro de controle. A Figura 5.32 (a) é um refinamento do diagrama de bifurcação da Figura 5.24. Utilizando a técnica de continuação de parâmetro e partindo da esquerda para a direita, como indica a direção da seta, construímos a Figura 5.32 (a) utilizando um mapa de Poincaré selecionando apenas os pontos máximos das séries temporais da energia cinética. Partindo de $R = 2070$ até $R = 2076$ o sistema apresenta um comportamento caótico, demarcado pelas linhas em vermelho. Em $R = 2076$ o sistema perde estabilidade e o comportamento do sistema é alterado para um regime quase-periódico, demarcado pela linha em preto, como indica as PSDs da Figura 5.28 (d), (e). A Figura 5.32 (b) representa o diagrama de bifurcação da média da energia cinética. Os círculos demarcados pela cor laranja representam o comportamento caótico, partindo da esquerda para a direita e os quadrados na cor magenta representam o comportamento quase-periódico, partindo da direita para a esquerda. Porém, partindo de $R = 2080$ (da esquerda para a direita) e reduzindo o valor do parâmetro de controle, como indica a seta na cor magenta, o espaço de fase do sistema apresenta o mesmo comportamento quase-periódico até $R = 2077$. Em $R = 2076$ o espaço de fase apresenta um atrator quase-periódico. Este comportamento quase-periódico permanece até $R = 2071$, ponto em que estes atratores deixam de existir. Para $R = 2070$, o espaço de fase do sistema apresenta apenas o atrator caótico. Então, podemos observar a formação de um comportamento histerético do sistema, possuindo uma sequência de atratores no sentido da direita para a esquerda e outra no sentido da esquerda para a direita. A Figura

5.33 representa os atratores caótico e quase-periódico coexistindo no mesmo espaço de fase do sistema.

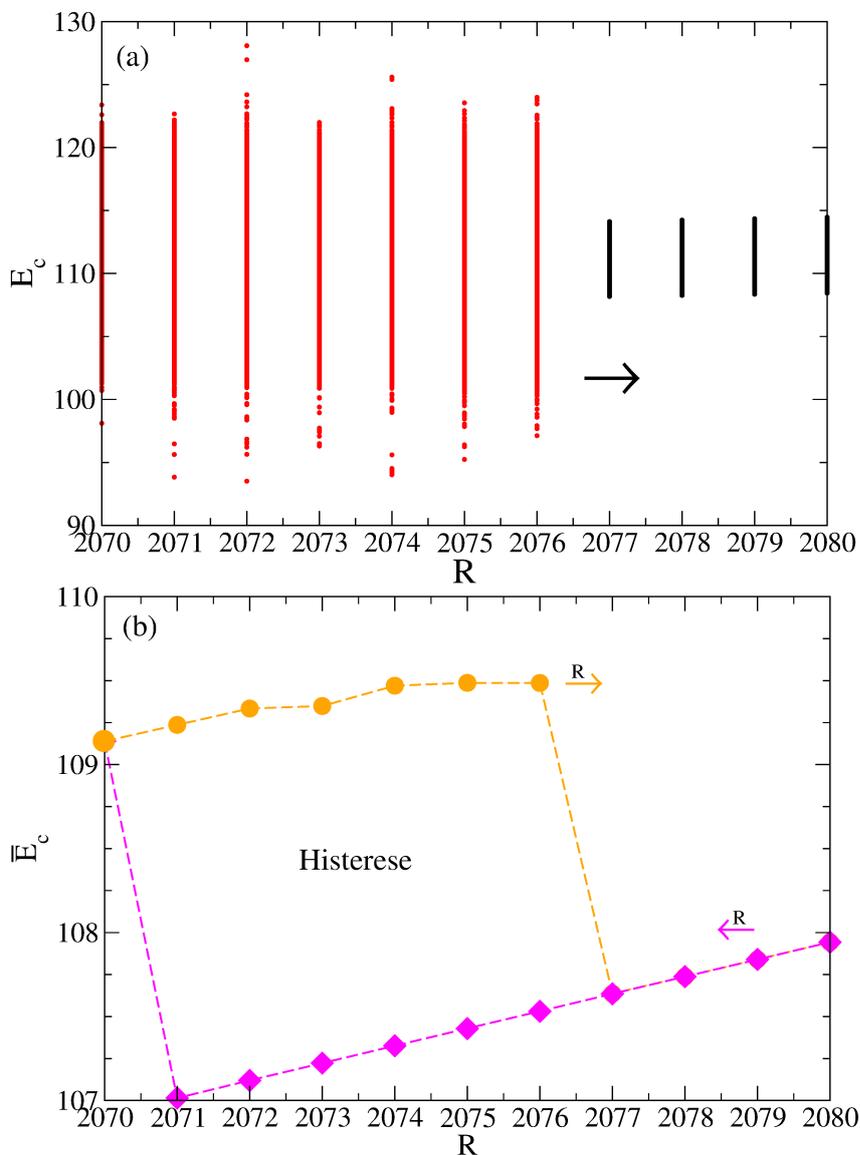


FIGURA 5.32 – Refinamento do diagrama de bifurcação da Figura 5.24. (a) diagrama de bifurcação da energia cinética em função de R , plotando os máximos da série temporal. As linhas em vermelho representam o comportamento caótico do sistema. As linhas em preto representam o comportamento quase-periódico do sistema. A seta indica a direção de partida do diagrama. (b) diagrama de bifurcação da média da energia cinética em função de R . A seta demarcada pela cor laranja indica o sistema partindo da direita para a esquerda, de $R = 2070$ até $R = 2080$. Os círculos em laranja representam o comportamento caótico do sistema. A seta demarcada pela cor magenta indica o sistema retornando (diminuindo o valor de parâmetro R) da direita para a esquerda, partindo de $R = 2080$ até $R = 2070$. Os quadrados na cor magenta representam o comportamento quase-periódico. Os quadrados em magenta e os círculos em laranja sobrepostos representam as soluções em que o sistema apresenta o mesmo comportamento quase-periódico. Em $R = 2076$ o sistema apresenta coexistência de atratores. O atrator caótico coexiste com o atrator quase-periódico.

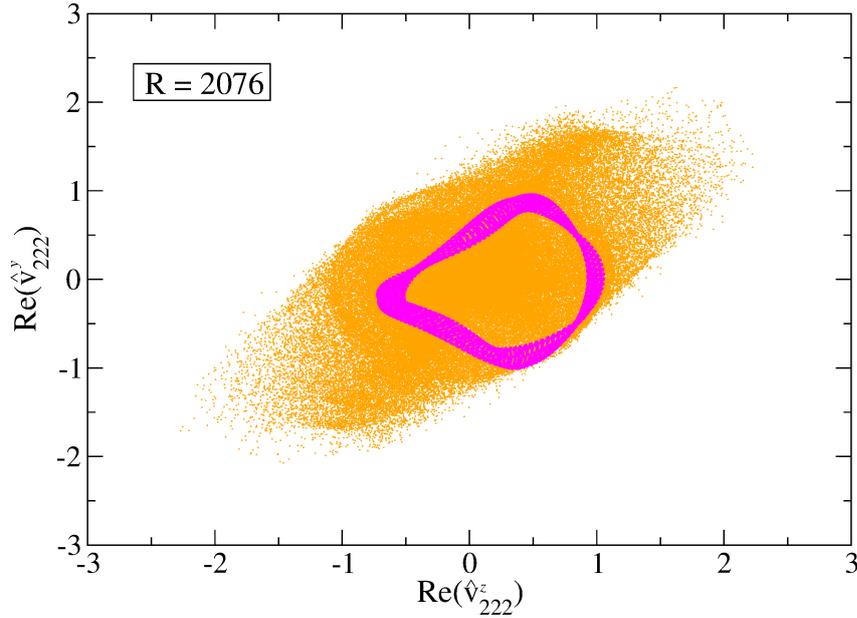


FIGURA 5.33 – Projeção no espaço de fase no plano $Re(\hat{v}_{222}^x) \times (Re\hat{v}_{222}^y)$ do atrator caótico (laranja) e do atrator quase-periódico (magenta).

5.14 Conclusão

Em nossas simulações realizamos um estudo do modelo CRB 3D considerando um fluido em rotação. Construímos uma série de diagramas de bifurcação, variando o número de Rayleigh no intervalo $657.51 \leq R \leq 4000$ e fixamos o número de Taylor em $Ta = 10$, $Ta = 50$ e $Ta = 100$, mostrando o papel que a rotação desempenha no sistema. À medida que o número de Rayleigh é aumentado investigamos a rota para caos a partir de uma sequência de bifurcações, incluindo histerese, intermitência. Primeiro para $Ta = 10$ relatamos 3 possíveis rotas para caos, uma rota via bifurcação de duplicação de período, uma rota via cenário de Pomeau-Maneville e uma rota via quase-periódica. Para $Ta = 50$, relatamos duas possíveis rotas para caos, uma via duplicação de período e uma via quase-periódica, observamos dois cenários de histerese (coexistência de atratores) no diagrama de bifurcação, entre $1160 \leq R \leq 1170$. Para $Ta = 100$, relatamos uma rota para caos via quase-periódica, observamos dois cenários de histerese no sistema entre os intervalos de $1940 \leq R \leq 1950$ e $2070 \leq R \leq 2080$.

Uma característica de nossa análise é que rastreamos os atratores periódicos, quase-periódicos e caóticos nos pontos de bifurcação do sistema, assim como, observamos que o espaço de fase do sistema apresentou coexistência de atratores. Esta análise foi feita utilizando a técnica de continuação de parâmetro, obtendo assim uma imagem detalhada das bifurcações. Portanto, em nossos resultados observamos que o número de Rayleigh crítico para o início dos movimentos convectivos aumenta com o número de Taylor. Observamos

também que ao aumentar o número de Taylor têm-se mais regimes caóticos e que rotação rápida interrompe os fluxos convectivos.

6 Geração de Campo Magnético em CRB 3D com Rotação - Resultados e Discussão

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos através de simulações numéricas diretas do modelo CRB MHD 3D com rotação. Estudamos o comportamento do dínamo na presença de rotação. Os parâmetros adotados neste capítulo foram escolhidos seguindo CHERTOVSKIH *et al.* (2017), onde foi considerado um modelo CRB MHD 3D na ausência de rotação. CHERTOVSKIH *et al.* (2017) determinaram o número de Prandtl magnético crítico, P_m^c , em função do número de Rayleigh, R , para o início da ação do dínamo; os mesmos identificaram quais os regimes são mais benéficos para a geração de campo magnético, assim como relataram um comportamento intermitente na energia magnética. Em nossas simulações para investigarmos a geração de campos magnéticos, utilizamos atratores convectivos hidrodinâmicos capazes de gerar campos magnéticos. Um pequeno campo magnético semente da ordem de 10^{-7} (energia magnética) é utilizado como condição inicial. Fixamos o número de Prandtl em $P = 0.3$ e variamos o número de Prandtl magnético, P_m . O domínio computacional utilizado é uma célula de periodicidade quadrada com tamanho $L = 4$. Utilizamos um passo no tempo para o integrador numérico com $dt = 5 \times 10^{-4}$. Construímos duas tabelas (Tabelas 6.1 e 6.2) integrando o sistema para diferentes valores de R e Ta . Calculamos o P_m^c para diferentes números de Ta e R . Os atratores convectivos hidrodinâmicos periódicos, quase-periódicos e caóticos foram utilizados para investigarmos a ação do dínamo não-linear para, assim, estudarmos o regime mais benéfico para a geração de campo magnético.

6.1 O Modelo Numérico de CRB MHD

Adotamos o modelo de simulações empregado nas referências CHERTOVSKIH (2010) e CHERTOVSKIH *et al.* (2017), onde o fluido é considerado incompressível, sendo o fluido aquecido por baixo em uma camada plana horizontal girando em torno do eixo verti-

cal. Conforme descrito no capítulo 3, em um referencial cartesiano com base ortonormal $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, onde \mathbf{e}_3 é oposto à direção da gravidade, as equações que governam o regime MHD são:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + P \nabla^2 \mathbf{v} + PR\theta \mathbf{e}_3 + P\sqrt{Ta} \mathbf{v} \times \mathbf{e}_3 - \nabla p - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}), \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{P}{P_m} \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla^2 \theta - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta + v_3, \quad (6.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (6.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (6.5)$$

onde $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (v_1, v_2, v_3)$ é o campo de velocidades, $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = (b_1, b_2, b_3)$ é o campo magnético, $p(\mathbf{x}, t)$ é a pressão, $\theta(\mathbf{x}, t)$ é a diferença entre a temperatura do fluido e o perfil de temperatura linear. As coordenadas espaciais são $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e t representa o tempo.

As unidades de comprimento e tempo são d e o tempo de difusão vertical de calor, d^2/κ , respectivamente; \mathbf{v} , \mathbf{B} e θ são medidos em unidades de κ/d , $\sqrt{\mu_0 \rho \kappa}/d$ e δT . Onde, μ_0 representa a permeabilidade magnética do vácuo e ρ a densidade de massa.

As fronteiras horizontais da camada plana são consideradas livres de tensão:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = v_3 = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{em } x_3 = 0, 1, \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial x_3} = \frac{\partial b_2}{\partial x_3} = b_3 = 0, \quad \text{em } x_3 = 0, 1, \quad (6.7)$$

e a periodicidade nas direções horizontais com o mesmo período L é assumida,

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{v}(x_1 + mL, x_2 + nL, x_3), \quad (6.8)$$

$$\theta(x_1, x_2, x_3) = \theta(x_1 + mL, x_2 + nL, x_3), \quad (6.9)$$

$$\mathbf{B}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{B}(x_1 + mL, x_2 + nL, x_3), \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}. \quad (6.10)$$

Assim como na seção 5.2 as equações são resolvidas numericamente usando os métodos pseudoespectrais onde cada um dos campos é representado na forma de uma série de

Fourier truncada, satisfazendo as condições de contorno (Eqs. 6.6 - 6.7):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= \sum_{\mathbf{n}} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}^{x_1} \cos(\pi n_3 z) \\ \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}^{x_2} \cos(\pi n_3 z) \\ \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}^{x_3} \sin(\pi n_3 z) \end{pmatrix} \mathbf{e}^{\frac{2\pi i}{L}(n_1 x_1 + n_2 x_2)}, \\
 \mathbf{B} &= \sum_{\mathbf{n}} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{n}}^{x_1} \cos(\pi n_3 z) \\ \hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{n}}^{x_2} \cos(\pi n_3 z) \\ \hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{n}}^{x_3} \sin(\pi n_3 z) \end{pmatrix} \mathbf{e}^{\frac{2\pi i}{L}(n_1 x_1 + n_2 x_2)}, \\
 \theta &= \sum_{\mathbf{n}} \hat{\theta}_{\mathbf{n}} \sin(\pi n_3 z) \mathbf{e}^{\frac{2\pi i}{L}(n_1 x_1 + n_2 x_2)}.
 \end{aligned}$$

6.2 Resolução Numérica

Nesta seção é discutida a resolução numérica necessária para as simulações computacionais realizadas para o modelo de CRB MHD 3D.

A Figura 6.1 mostra uma comparação das séries temporais da energia magnética em escalas log-linear para simulações CRB MHD utilizando $64 \times 64 \times 32$ (linha preta) e $96 \times 96 \times 48$ (linha vermelha) pontos da grade. Para a comparação da grade de resolução numérica, utilizamos como condição inicial um atrator convectivo hidrodinâmico periódico calculado na seção 5.6.1 e utilizamos um Prandtl magnético supercrítico (o cálculo do Prandtl magnético crítico será visto posteriormente). Consideramos os seguintes valores dos parâmetros de controle: número de Prandtl magnético, $P_m = 8$, número de Rayleigh, $R = 3050$, número de Taylor, $Ta = 10$, e o número de Prandtl, $P = 0.3$. A taxa de crescimento, γ , nesta fase cinemática pode ser encontrada com a inclinação de uma linha ajustada (linha tracejada azul), sendo de aproximadamente $\gamma \sim 0.172$ para ambas as resoluções. Portanto, simulações com grade de resolução $96 \times 96 \times 48$ indicam que o mesmo comportamento é esperado para resoluções numéricas mais altas, como mostrado na Figura 6.1. Na maior parte das simulações numéricas utilizadas neste trabalho, optamos por utilizar simulações de baixa resolução numérica $64 \times 64 \times 32$ devido aos recursos computacionais limitados, o tempo computacional e a quantidade de séries temporais calculadas. Para algumas simulações utilizamos a alta resolução numérica $96 \times 96 \times 48$, para uma maior confiabilidade dos resultados obtidos. Os valores calculados nesta parte do trabalho para $P_m = 10$ para ambas as resoluções mostraram-se adequadas. Para alguns resultados obtidos consideramos um $P_m > 10$, porém é preciso aumentar a resolução numérica das simulações, pois a falta de resolução numérica afeta a difusividade do sistema.

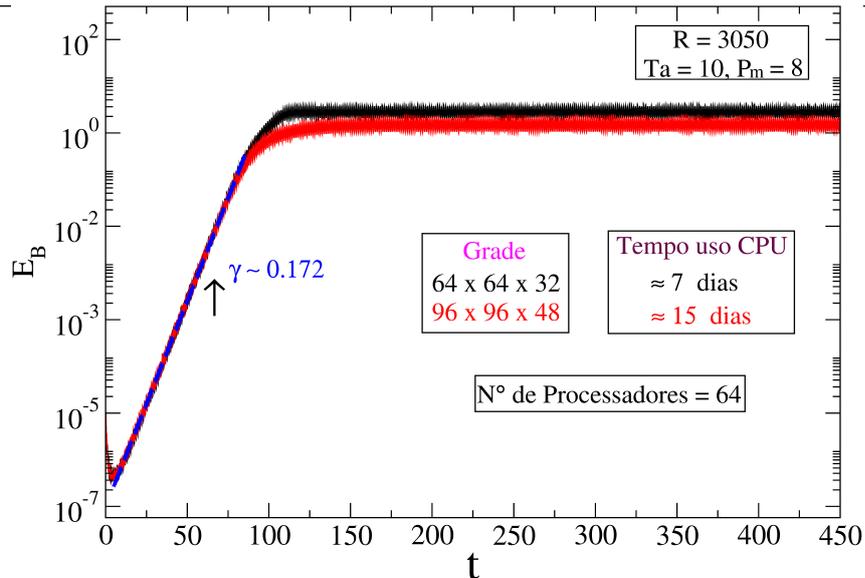


FIGURA 6.1 – Comparação das séries temporais da energia magnética em escala log-linear com diferentes grades de resolução, para $P_m = 8$, $Ta = 10$ e $R = 3050$. A linha em preto corresponde à grade numérica de $64 \times 64 \times 32$; a linha vermelha corresponde à grade numérica de $96 \times 96 \times 32$. A fase cinemática tem uma taxa de crescimento de aproximadamente $\gamma \approx 0.172$ em ambas resoluções.

6.3 Regimes Convectivos

No capítulo 5 apresentamos o estudo para o modelo CRB 3D na ausência de rotação e na presença de rotação sem campo magnético, com o número de Prandtl sendo fixo em $P = 0.3$, sendo construídos 3 diagramas de bifurcação utilizando a série temporal da energia cinética, E_c , variando como parâmetro de controle o número de Rayleigh, R , no intervalo $657.5 \leq R \leq 4000$ com o número de Taylor fixo em $Ta = 10$, $Ta = 50$ e $Ta = 100$. A análise das transições, as séries temporais, assim como os tipos de bifurcações foram investigados a partir dos espectros de potência da energia cinética. Nesta seção, são apresentados alguns regimes convectivos – periódicos, quase-periódicos e caóticos – que serão utilizados para a geração de campo magnético. A identificação desses regimes em função de R e Ta são resumido nas Tabelas 6.1 e 6.2.

R/Ta	0	2	5	10	50	100	400	600	1000
700	-	-	-	-	-	-	-	-	-
800	C	C	QP	C	-	-	-	-	-
900	C	P	C	C	P	P	-	-	-
1000	QP	P	C	C	C	C	-	-	-
1100	QP	QP	P	P	C	C	-	-	-
1200	QP	QP	P	P	P	C	C	-	-
1300	QP	QP	P	P	P	C	C	-	-
1400	QP	QP	P	P	P	C	C	C	-
1500	QP	C	P	P	P	C	C	C	-
1600	QP	C	P	P	P	QP	C	C	-
1700	QP	C	QP	C	P	QP	C	C	C
1800	QP	QP	C	QP	P	QP	C	C	C
1900	QP	QP	QP	C	P	QP	C	C	C
2000	QP	C	QP	C	QP	P	C	C	C
2100	QP	C	C	C	C	QP	C	C	C
2200	C	C	C	QP	C	QP	C	C	C
2300	C	C	C	P	C	QP	C	C	C
2400	C	C	P	P	C	QP	C	C	C
2500	C	QP	P	P	C	C	C	C	C
2600	C	QP	P	P	C	C	C	C	C
2700	C	QP	QP	P	C	C	C	C	C
2800	C	QP	QP	P	C	C	C	C	C
2900	C	QP	QP	P	C	C	C	C	C
3000	C	C	QP	P	C	C	C	C	C
3100	C	C	C	QP	C	C	C	C	C
3200	C	C	C	QP	C	C	C	C	C
3300	C	C	C	QP	C	C	C	C	C
3400	C	C	C	C	C	C	C	C	C
3500	C	C	C	C	C	C	C	C	C

TABELA 6.1 – Atratores para o sistema hidrodinâmico convectivo em função de R e Ta para $P = 0.3$. Os traços indicam ausência de movimentos, ou seja, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. As legendas denotam os respectivos comportamentos do sistema: periódico (P), quase-periódico (QP) e caótico (C).

Na ausência de campo magnético, o regime convectivo para $R = 3000$ e $Ta = 2$, apresenta um comportamento caótico, como ilustrado na série temporal da energia cinética (painel esquerdo) e na projeção no plano $Re(\hat{v}_{222}^y) \times Re(\hat{v}_{222}^z)$ do atrator caótico no espaço de fase (painel direito) (Fig. 6.2-(a)). Para $Ta = 5$ o regime convectivo apresenta

R/Ta	1500	1600	2000	2500	3000	3600
700	-	-	-	-	-	-
800	-	-	-	-	-	-
900	-	-	-	-	-	-
1000	-	-	-	-	-	-
1100	-	-	-	-	-	-
1200	-	-	-	-	-	-
1300	-	-	-	-	-	-
1400	-	-	-	-	-	-
1500	-	-	-	-	-	-
1600	-	-	-	-	-	-
1700	-	-	-	-	-	-
1800	-	-	-	-	-	-
1900	-	-	-	-	-	-
2000	-	-	-	-	-	-
2100	C	-	-	-	-	-
2200	C	C	-	-	-	-
2300	C	C	C	-	-	-
2400	C	C	C	QP	-	-
2500	C	C	C	C	QP	-
2600	C	C	C	C	C	C
2700	C	C	C	C	C	C
2800	C	C	C	C	C	C
2900	C	C	C	C	C	C
3000	C	C	C	C	C	C
3100	C	C	C	C	C	C
3200	C	C	C	C	C	C
3300	C	C	C	C	C	C
3400	C	C	C	C	C	C
3500	C	C	C	C	C	C

TABELA 6.2 – Continuação da Tabela 6.1.

um comportamento quase-periódico. A série temporal da energia cinética e a projeção $Re(\hat{v}_{222}^y) \times Re(\hat{v}_{222}^z)$ do atrator no espaço de fase (painel direito) é representada na Figura 6.2-(b). O retângulo delimitado em vermelho mostra um transiente caótico inicial antes que a trajetória se estabeleça para um atrator quase-periódico. Para $Ta = 10$ o regime convectivo apresenta um comportamento periódico. A série temporal da energia cinética e a projeção $Re(\hat{v}_{222}^y) \times Re(\hat{v}_{222}^z)$ do atrator no espaço de fase (painel direito) é representada na Figura 6.2-(c). O triângulo delimitado em vermelho também ilustra um transiente caótico inicial antes que a trajetória se estabeleça para um regime periódico. Para $Ta = 50$ e $Ta = 100$ os regimes convectivos são caóticos. As séries temporais da energia cinética e as projeções $Re(\hat{v}_{222}^y) \times Re(\hat{v}_{222}^z)$ dos atratores no espaço de fase são representadas pelas Figuras 6.2-(d)-(e).

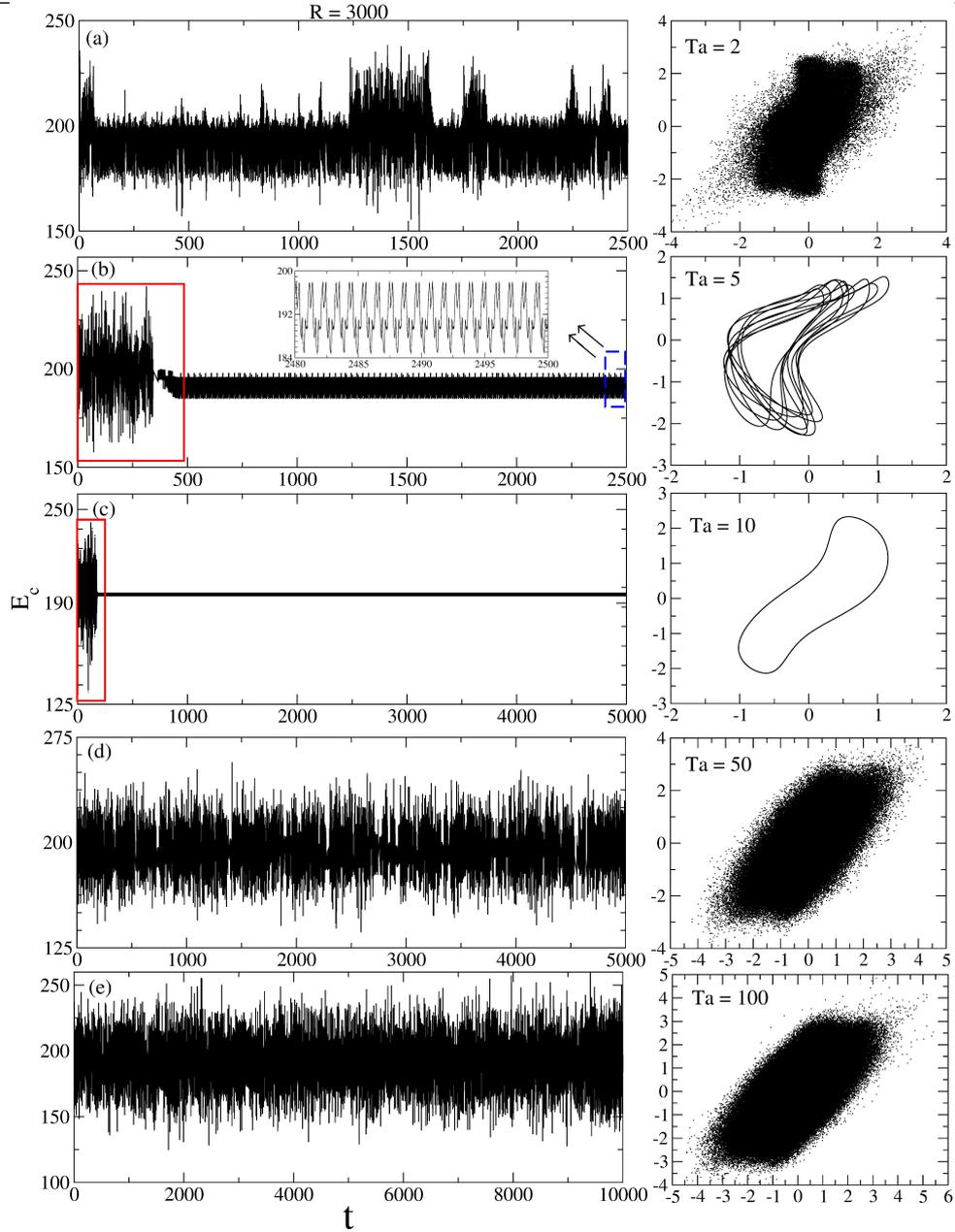


FIGURA 6.2 – Séries temporais da energia cinética na ausência de campo magnético (painéis da esquerda) e projeções $Re(\hat{v}_{222}^y) \times Re(\hat{v}_{222}^z)$ dos atratores no espaço de fase dos coeficientes de Fourier (painéis da direita). Em (a) tem-se o comportamento caótico do sistema. Em (b) tem-se o comportamento quase-periódico. O retângulo pontilhado em azul representa a ampliação da Figura-(b). Em (c) tem-se o comportamento periódico. Em (d)-(e) tem-se o comportamento caótico sistema.

6.4 Geração de Campo Magnético

Investigamos a geração de campo magnético através dos atratores convectivos hidrodinâmicos encontrados nas Tabelas 6.1 e 6.2 e estimamos o número de Prandtl magnético crítico, P_m^c , para o início da ação do dínamo, representados na Figura 6.3. Realizamos uma série de simulações para calcularmos o P_m^c para diferentes números de Taylor, man-

tendo o número de Rayleigh fixo em $R = 3000$. Assim, se $P_m > P_m^c$, o campo magnético é mantido no sistema (ocorre a ação do dínamo), para $P_m < P_m^c$, o campo magnético decai (não ocorre a ação do dínamo). Para a maioria das simulações, consideramos valores de P_m variando de 1 a 10 com o passo 1. Para o início da geração de campo magnético, primeiro calculamos o P_m^c para $Ta = 0$ (sem rotação), estimando o valor em $P_m^c = 8.5$, ou seja, $8 < P_m^c < 9$. Ao inserirmos rotação no sistema com $Ta = 2$, observamos um aumento no P_m^c , estimando o número de Prandtl crítico em $P_m^c = 9.5$, ou seja, $9 < P_m^c < 10$. Ao aumentarmos o número de Ta , observamos uma diminuição do P_m^c até $Ta = 1500$, depois observamos um aumento em $Ta = 1600$ e $Ta = 2500$ com $P_m^c = 7.5$.

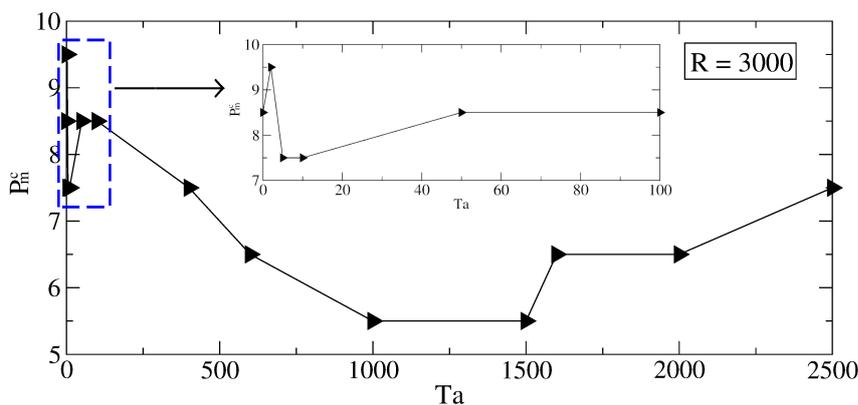


FIGURA 6.3 – Estimativa para o número de Prandtl magnético crítico, P_m^c , para o início da ação do dínamo, em $R = 3000$. O retângulo pontilhado em azul indica uma ampliação do número de Taylor entre $0 \leq Ta \leq 100$.

A ação do dínamo dos respectivos atratores é estudada para diversos números de Prandtl magnético e com dois tipos de resoluções numéricas: $64 \times 64 \times 32$ e $96 \times 96 \times 48$. Primeiro, utilizando uma resolução numérica de $96 \times 96 \times 48$ e a partir de um atrator convectivo hidrodinâmico quase-periódico (ver Tabela 6.1) analisamos a geração de campo magnético em $R = 3000$, $Ta = 5$ considerando o valor de $P_m = 8$ (Prandtl magnético supercrítico). Após um crescimento exponencial inicial (fase cinematográfica) do dínamo gerado pelo atrator convectivo, o mesmo satura e atinge um regime caótico. Nessa transição para o regime MHD saturado, a energia magnética sofre uma diminuição no estado saturado. A taxa de crescimento, γ , observada na Figura 6.4-(a) no eixo log-linear nesta fase cinematográfica, pode ser encontrada como a inclinação de uma linha (linha vermelha tracejada) ajustada, sendo de aproximadamente $\gamma \sim 0.2$. A energia cinética sofre um aumento significativo com a perturbação do campo magnético, como observado na Figura 6.4-(b).

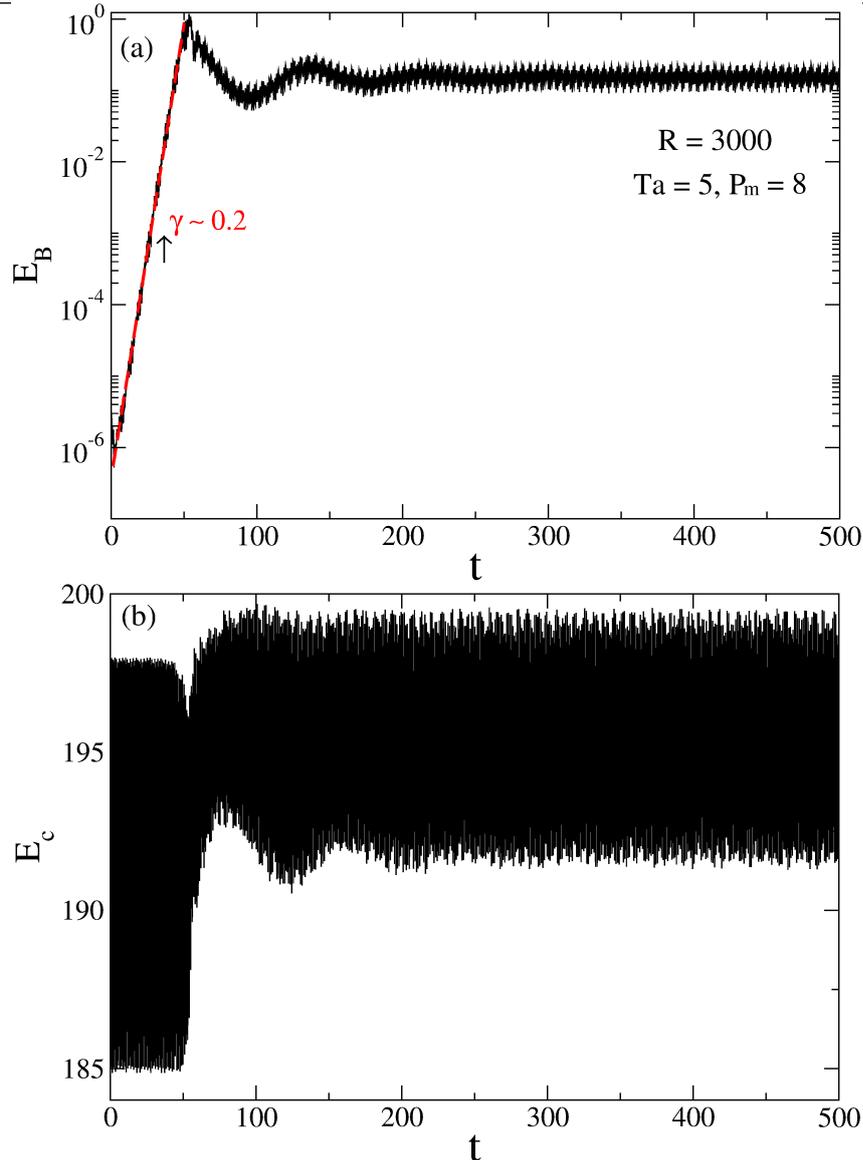


FIGURA 6.4 – (a) Série temporal da energia magnética gerada a partir de um atrator convectivo hidrodinâmico quase-periódico. (b) Série temporal da energia cinética, após sofrer uma perturbação do campo magnético.

A seguir, padronizamos a resolução numérica para $64 \times 64 \times 32$, visto que para $R = 3000$ as duas resoluções testadas ($64 \times 64 \times 32$ e $96 \times 96 \times 48$) mostraram-se adequadas. Em $R = 3000$, $Ta = 10$ e $P_m = 8$ (valor supercrítico) investigamos a geração de campo magnético gerado a partir de um atrator hidrodinâmico convectivo periódico (ver Tabela 6.1 e Figura 6.2-(c)). Após um crescimento exponencial inicial (fase cinemática) do dínamo gerado pelo atrator convectivo o mesmo satura e atinge um estado quase-periódico e mostra um comportamento muito diferente do esperado. O atrator convectivo periódico é afetado pelo campo magnético, como pode ser visto na série temporal da energia magnética, na Figura 6.5-(a). Pode-se observar um comportamento quase-periódico do sistema. A taxa de crescimento γ observada na Figura 6.5-(a) é $\gamma \sim 0.04$. Nesta transição para o regime MHD, a energia cinética sofre uma diminuição, sendo afetada pelo campo magnético,

como visto na Figura 6.5-(b).

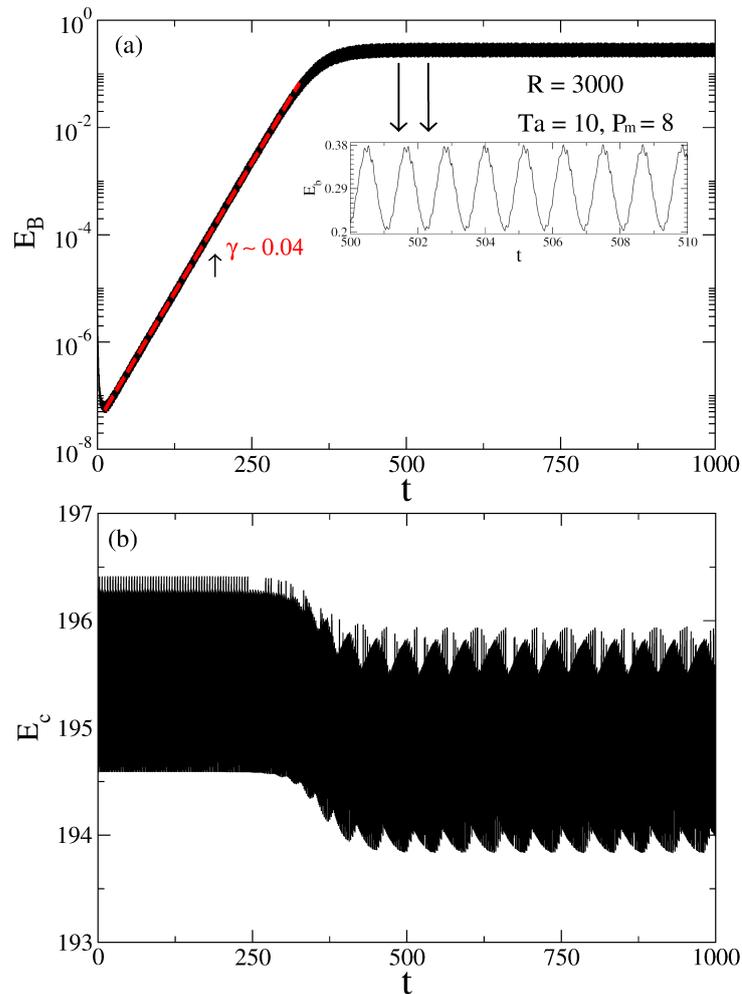


FIGURA 6.5 – (a) Série temporal da energia magnética gerada a partir de um atrator convectivo hidrodinâmico quase-periódico. As setas indicam o intervalo mostrado na ampliação da série temporal. (b) Série temporal da energia cinética, após sofrer uma perturbação do campo magnético.

A Figura 6.6 mostra a evolução temporal da energia magnética para $Ta = 10$, três diferentes números de Rayleigh, R , e três atratores convectivos: periódico, quase-periódico e caótico. O número de Prandtl magnético crítico, P_m^c , para o atrator convectivo periódico em $R = 3050$ é $7 < P_m^c < 8$ (Fig. 6.6-(a)), para o atrator convectivo quase-periódico em $R = 3150$ é $7 < P_m^c < 8$ (Fig. 6.6-(b)) e para o atrator convectivo caótico em $R = 3250$ é $8 < P_m^c < 9$ (Fig. 6.6-(c)). Em $R = 3050$, para o valor supercrítico $P_m = 8$, após um crescimento exponencial inicial, o campo magnético gerado pelo atrator convectivo satura. A taxa de crescimento, γ , observada na Figura 6.6-(a) nesta fase de crescimento cinemática é $\gamma \sim 0.17$. Em $R = 3150$, o número de Prandtl supercrítico gerado pelo atrator convectivo quase-periódico é $P_m = 8$, o mesmo P_m que o encontrado para $R = 3050$. A taxa de crescimento (linha vermelha tracejada), γ , no regime cinemático é $\gamma \sim 0.05$. Em $R = 3250$, o número de Prandtl supercrítico gerado pelo atrator convectivo caótico é $P_m = 9$. A taxa de crescimento é $\gamma \sim 0.16$. Com base nesses resultados, conclui-se que nos casos testados

os regimes periódico e quase-periódico são preferidos para o início da ação do dínamo, considerando que os melhores geradores de campo magnético são aqueles onde a geração ocorre no menor valor de P_m . Por outro lado, em termos da maior taxa de crescimento na fase cinemática, o atrator convectivo caótico possui o regime mais benéfico para a geração de campo magnético. Nessa transição para o regime MHD a energia cinética sofre uma diminuição significativa em sua amplitude, sendo afetada pelo campo magnético, como visto na Figura 6.7-(a)-(b). A Figura 6.7-(c) ilustra o comportamento errático da série temporal da energia cinética, após a mesma sofrer uma perturbação do campo magnético.

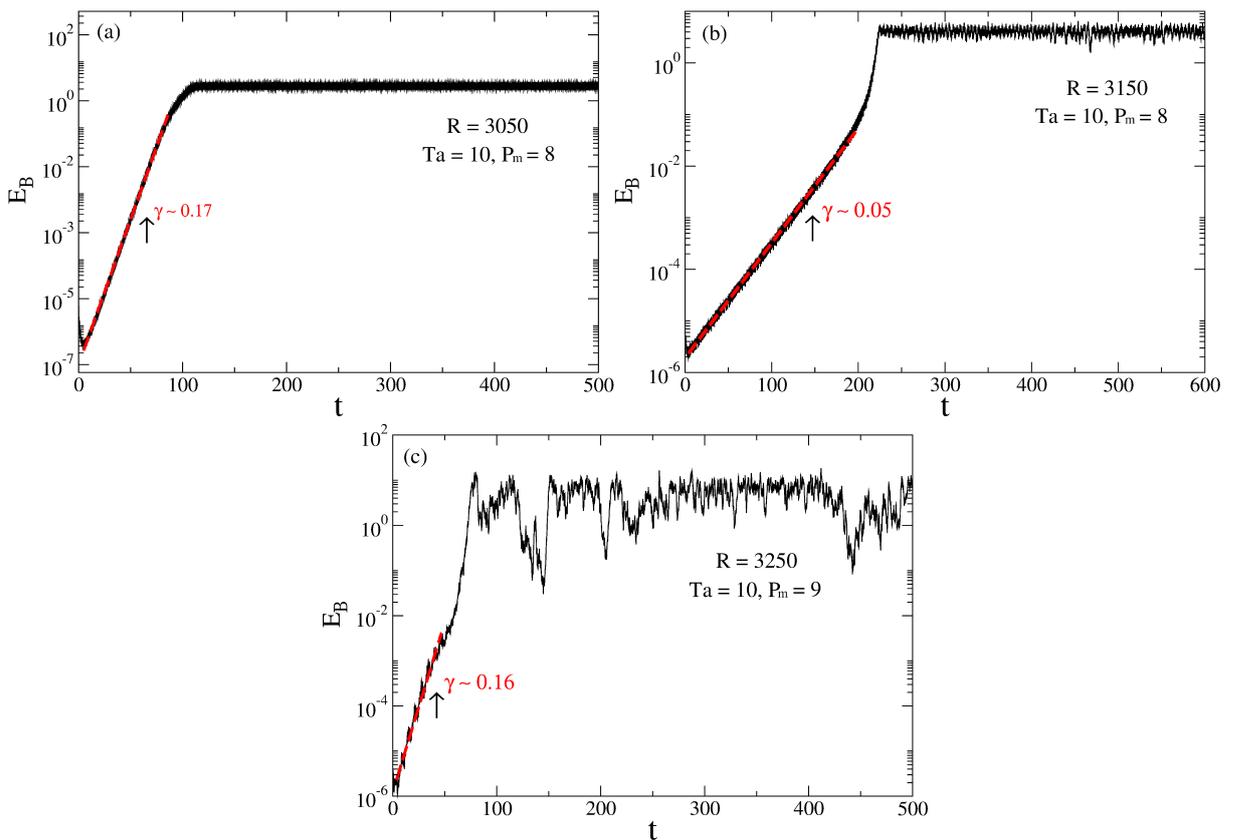


FIGURA 6.6 – Séries temporais da energia magnética em escala log-linear geradas através dos atratores convectivos. Em (a) $R = 3050$ atrator periódico, (b) $R = 3150$ atrator quase-periódico e (c) $R = 3250$ atrator caótico.

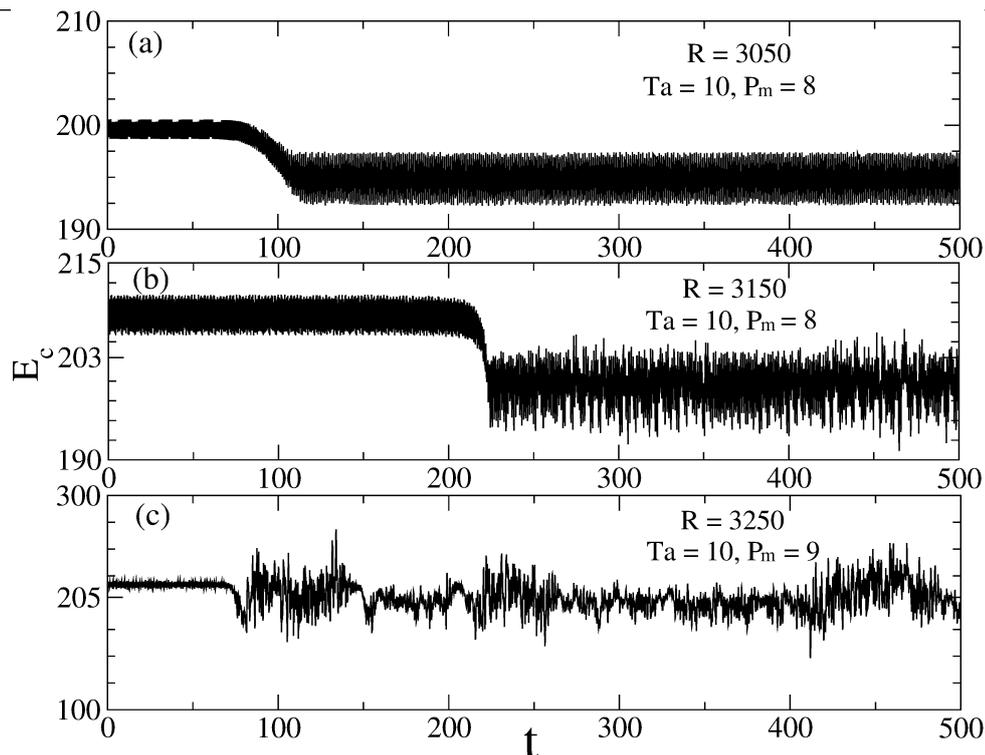


FIGURA 6.7 – Séries temporais da energia cinética para os atratores convectivos para $Ta = 10$ em $R = 3050$ e $P_m = 8$ (a), $R = 3150$ e $P_m = 8$ (b) em $R = 3250$ e $P_m = 9$ (c).

A seguir, investigamos a geração de campos magnéticos para pequenos números de Rayleigh, R , utilizando a resolução numérica de $64 \times 64 \times 32$ para, assim, analisarmos qual é o atrator convectivo mais benéfico para a geração de campo magnético. Esses próximos resultados ainda são preliminares e não são conclusivos, visto que a falta de resolução numérica adequada para pequenos números de Rayleigh e $P_m > 10$ pode comprometer as conclusões. Futuramente, as simulações serão repetidas com maior resolução.

Normalmente, grandes números de Rayleigh são mais benéficos para a geração de campos magnéticos em simulações de dínamo de cascas esféricas, isto é, o Prandtl magnético crítico, P_m^c , diminui com o aumento do número de Rayleigh, R (BUSSE, 2000). Em nosso caso, estudamos a geração de campo magnético para pequenos valores de R , considerando três diferentes tipos de atratores: periódico, quase-periódico e caótico. Calculamos a taxa de crescimento, γ , na fase cinemática para os três casos, como visto na Figura 6.8 para $Ta = 100$. Para $R = 2020$ e $R = 2030$, utilizamos como condição inicial um campo semente da ordem 10^{-7} . Para $R = 2020$, após um crescimento exponencial inicial, o campo magnético satura. A taxa de crescimento cinemática, γ , na fase inicial é $\gamma \sim 0.18$. Para $R = 2030$, o mesmo ocorre com o campo magnético, porém a taxa de crescimento é $\gamma \sim 0.12$. Para $R = 2040$, utilizamos como condição inicial um campo semente da ordem 10^{-20} e calculamos o P_m^c , para o atrator caótico convectivo, sendo $12 < P_m^c < 13$. Após o crescimento exponencial inicial, o campo magnético gerado pelo atrator convectivo satura

e atinge um regime caótico. Entretanto, visto que próximo ao valor crítico os atratores caóticos estudados neste trabalho geram campos magnéticos altamente intermitentes, consideramos um $P_m = 14$ (supercrítico), onde o comportamento do sistema é caótico, mas menos intermitente, facilitando o cálculo da taxa de crescimento. Esse é o caso mostrado na Fig. 6.8-(c) para $R = 2040$ (atrator caótico), onde se tem uma taxa de crescimento $\gamma \sim 0.14$. Portanto, $R = 2020$ demonstra ser o regime mais benéfico para a geração de campo magnético na fase de crescimento cinemática. Para este caso, os regimes periódico e quase-periódico são preferidos para o início da ação do dínamo em termos de exigirem um menor valor de P_m , assim como nas simulações para $R > 3000$, como na Figura 6.6. Como explicado anteriormente, é preciso utilizar uma resolução numérica maior para termos uma maior confiabilidade nos resultados para R pequenos e $P_m > 10$. Além disso, é preciso utilizar outros números de Taylor, para verificarmos a influência da rotação na geração de campo magnético.

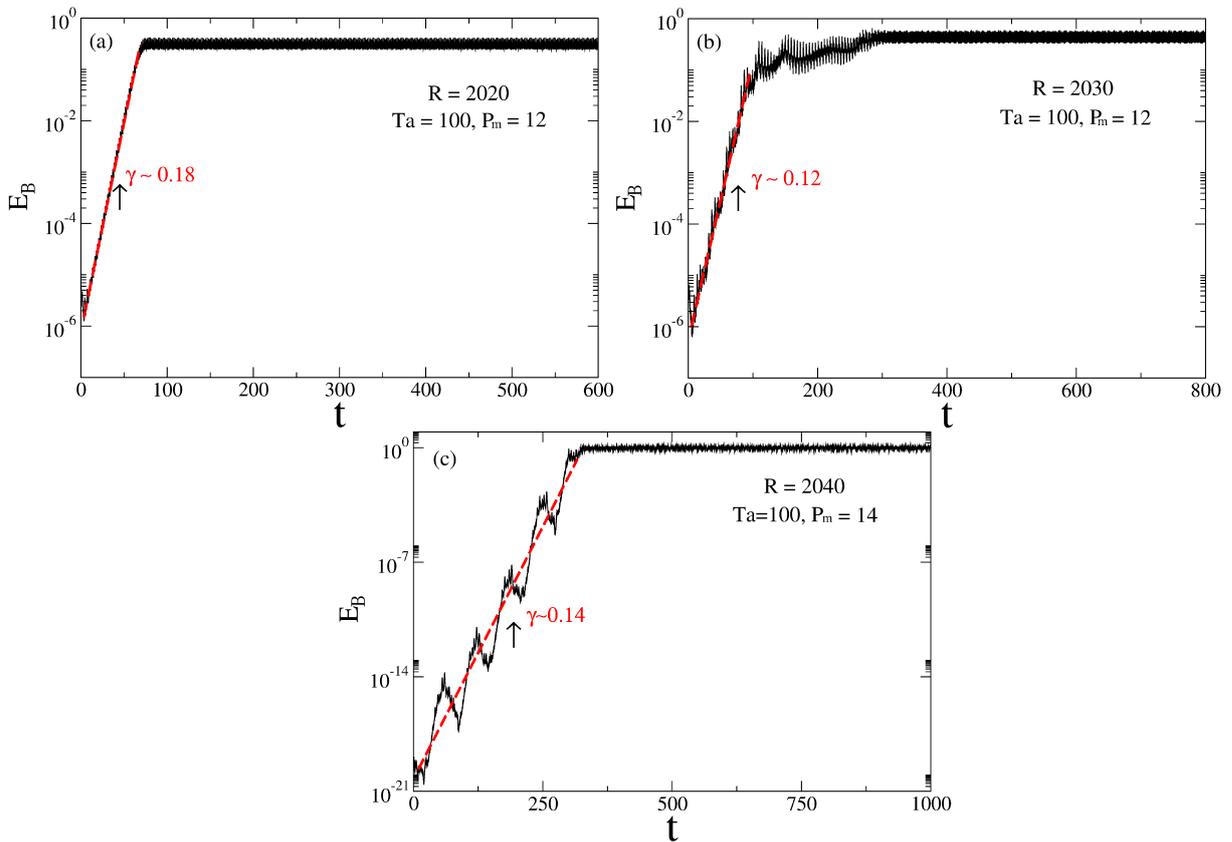


FIGURA 6.8 – Séries temporais da energia magnética em escalas log-linear geradas através dos atratores convectivos. Em (a) $R = 2020$ atrator periódico, (b) $R = 2030$ atrator quase-periódico e (c) $R = 2040$ atrator caótico.

6.4.1 Início da Ação do Dínamo

Nesta seção, analisamos o comportamento transiente do sistema próximo da transição para o dínamo não-linear. A Figura 6.9 representa as séries temporais da energia magnética, antes do início da ação do dínamo, para diferentes números de Ta e P_m . Pode-se observar que para as três séries temporais há um crescimento inicial da energia magnética. Depois de um certo tempo de simulação, o campo magnético decai e as soluções convergem para a variedade puramente hidrodinâmica ($\mathbf{B} = \mathbf{0}$). Perto da transição, alguns estouros de energia magnética ocorrem, como visto na Figura 6.9, porém esses estouros possuem uma pequena amplitude, e assim como na seção 4.2.3 a variedade hidrodinâmica atrai a solução e nenhum outro estouro é observado. Assim como em REMPEL *et al.* (2009), as Figuras 6.9(a),(b) e (c) ilustram o comportamento de um dínamo transitório. O estado do dínamo não é um atrator do sistema e também acreditamos que essa dinâmica transitória e aparentemente caótica exibida pelo campo magnético é uma assinatura de conjuntos caóticos não atrativos. Sabe-se que esses conjuntos caóticos não atrativos, também chamados de sela caóticas, são responsáveis por tais transientes caóticos (FRANCO; REMPEL, 2020).

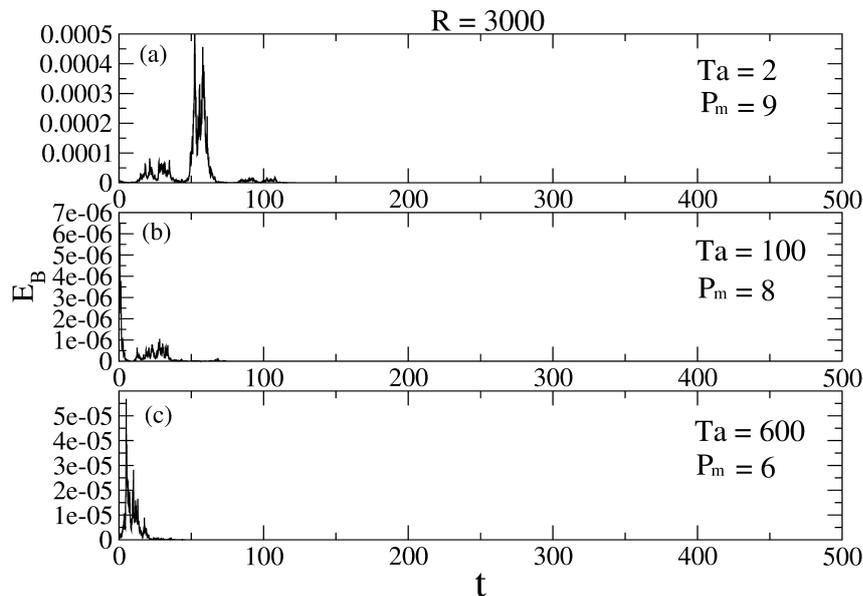


FIGURA 6.9 – Séries temporais da energia magnética em $R = 3000$ mostrando fases dinâmicas transitórias próximas à transição para o início da ação do dínamo, para diferentes números de Taylor e Prandtl magnético.

6.4.2 Dínamo Intermitente

O termo intermitente refere-se a sistemas que sofrem mudanças abruptas e recorrentes em seu comportamento, e tem sido observada em um grande número de modelos numéricos (ver, por exemplo - (PLATT *et al.*, 1993b; GALUZIO *et al.*, 2010)). A intermitência, requer

pelo menos dois estados dinâmicos distintos disponíveis para o sistema transitar de um estado para o outro. No contexto do modelo do ciclo solar, as análises baseadas na intermitência supõem que dois estados (“*on-off*”) dinamicamente distintos caracterizam o ciclo solar: um estado ativo – estado “*on*” – correspondendo à atividade cíclica “normal” e um estado quiescente – estado “*off*” – onde o dínamo se “desliga”. Este tipo de intermitência é conhecida como *intermitência “on-off”*, sendo comentada na seção 4.2.3. A transição entre os dois estados ocorre em intervalos irregulares e pode ser conduzida através da dinâmica interna do modelo do dínamo solar. Este comportamento intermitente já foi observado em diversos modelos de dínamo solar de vários níveis de complexidade e realismo físico (PLATT *et al.*, 1993a; SCHMITT *et al.*, 1996; COVAS; TAVAKOL, 1999; MOSS; BROOKE, 2000; AUGUSTSON *et al.*, 2015; USOSKIN, 2017; PETROVAY, 2020). OLEMSKOY; KITCHATINOV (2013) realizaram simulações numéricas do dínamo solar em uma camada esférica e simularam campos magnéticos oscilantes (intermitentes) semelhantes aos campos magnéticos dos ciclos solares, como visto na Figura 6.10.

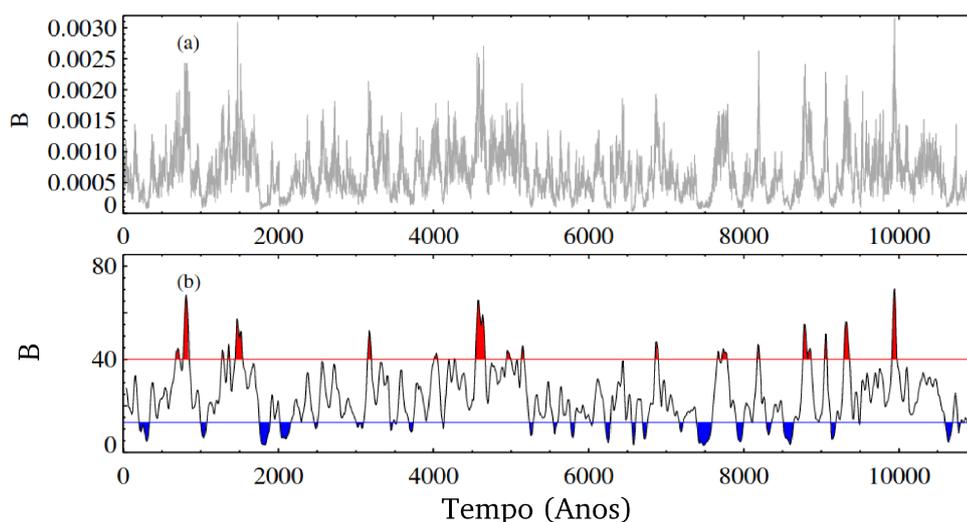


FIGURA 6.10 – (a) Série temporal do campo magnético exibindo intermitência “*on-off*” com comportamento cíclico semelhante ao ciclo solar. (b) Série temporal do campo magnético suavizada representando os estados máximos (linha vermelha) – “*on*” – e mínimos (linha azul) – “*off*” – do ciclo solar. Fonte: (OLEMSKOY; KITCHATINOV, 2013) (p. 6) (modificada).

No capítulo 4, mencionamos que alguns autores sugerem uma explicação para o ciclo solar baseada na teoria de sistemas dinâmicos. OSSENDRIJVER; COVAS (2003) relataram evidências do ciclo solar através de análises de séries temporais de energia magnética e espectros de potência, mostrando que o comportamento do modelo de dínamo 2D de campo médio adotado por eles é um exemplo de um comportamento intermitente e associaram tal fenômeno a uma intermitência induzida por crises, devido à expansão do atrator. SPIEGEL (2008) utilizou a teoria de sistemas dinâmicos com modelos que apresentam caos e principalmente intermitência “*on-off*”, para discutir os possíveis mecanismos de formação do ciclo solar. COVAS; TAVAKOL (1999) utilizaram um modelo de dínamo de campo médio

e demonstraram evidências de um sistema apresentando mais de um tipo de intermitência: intermitência induzida por crises e intermitência do tipo I via Pomeau-Maneville, reportando que mais de um tipo de intermitência pode ocorrer em modelos de dínamos solar e estelar.

Na seção 4.2.3 tentamos em vão encontrar estouros intermitentes na transição para o dínamo. A ausência do comportamento intermitente no sistema foi em razão de uma *bifurcação blowout histerética* (a ausência de estouros intermitentes foi explicada na seção 4.2.4). Em nossas simulações considerando o modelo CRB MHD 3D sem rotação e com rotação, encontramos diversos comportamentos intermitentes e classificamos tal intermitência como uma *bifurcação blowout*, sem caracterizá-la formalmente. Primeiro, consideramos o modelo CRB MHD sem rotação, seguindo o estudo de PODVIGINA (2008), onde a mesma investigou a geração de campo magnético sem rotação ($Ta = 0$) através dos atratores convectivos hidrodinâmicos (Figura 5.3). A partir da Tabela 6.1 e dos atratores obtidos no diagrama de bifurcação da Figura 5.8, investigamos a geração de campo magnético a partir de um atrator caótico convectivo hidrodinâmico para $R = 3000$. O número de Prandtl magnético crítico, P_m^c , para o atrator caótico é $8 < P_m^c < 9$ (veja a Fig. 6.3 e sua ampliação). Em $R = 3000$, para o valor supercrítico, $P_m = 9$, há uma transição para a ação sustentada do dínamo. A série temporal da energia magnética exibe mudanças abruptas em seu comportamento, exibindo oscilações entre fases de atividades magnéticas com estouros e fases quiescentes com atividade magnética quase-nula, como visto na Figura 6.11-(a). Uma *bifurcação blowout*, onde o estado hidrodinâmico perde estabilidade transversal, é sugerida como sendo responsável pelo comportamento intermitente, o qual é chamado *intermitência “on-off”*, visto que as soluções se aproximam arbitrariamente de uma variedade definida pelo estado puramente hidrodinâmico $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ (fases “on”) e repentinamente se afastam da variedade durante os fortes estouros de energia magnética (fases “off”). Este é o mesmo tipo de comportamento relatado por (SWEET *et al.*, 2001b) e (REMPEL *et al.*, 2009), onde encontraram campos magnéticos intermitentes de grande escala logo após o início da ação do dínamo.

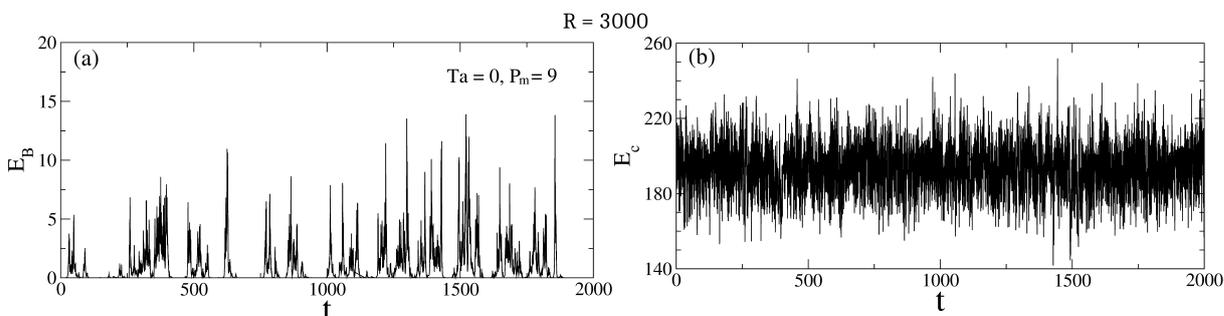


FIGURA 6.11 – (a) Série temporal da energia magnética exibindo intermitência “on-off” em $R = 3000$, $Ta = 0$ e $P_m = 9$. (b) Série temporal da energia cinética.

Na Figura 6.11-(a) mostramos uma bifurcação *blowout* (intermitência “*on-off*”) considerando o sistema sem rotação ($Ta = 0$). A partir da Tabela 6.1, calculamos o número de Prandtl magnético crítico, P_m^c , como visto na seção 6.4, e investigamos a ação do dínamo com rotação gerado a partir de atratores caóticos convectivos hidrodinâmicos, para diferentes números de Taylor e com o número de Rayleigh fixo em $R = 3000$. O número de Prandtl magnético crítico, P_m^c , para $Ta = 2$ é $9 < P_m^c < 10$. Após a transição para a ação do dínamo para o valor supercrítico, $P_m = 10$, o comportamento do sistema exibe uma intermitência “*on-off*”, como visto na Figura 6.12-(a). Para esse valor de P_m , o dínamo é fortemente intermitente, com um período curto de mínimos (estado “*off*”) observado entre $t \sim 0$ a $t \sim 20$. Para $Ta = 50$ e $P_m = 9$ a série temporal da energia magnética exibe fases de atividade magnética oscilando entre fases de estouros e fases quiescentes, como visto na Figura 6.12-(b), incluindo longos períodos de mínimos com atividade magnética quase-nula, como aquele entre $t \sim 0$ e $t \sim 282$, exibindo intermitência “*on-off*”. Para $Ta = 100$ e $P_m = 9$, observamos um dínamo fortemente intermitente, como visto na Figura 6.12-(c); o mesmo comportamento intermitente pode ser visto na Figura 6.12-(d), porém nenhum grande mínimo é observado na série temporal da energia magnética. Há fortes estouros alternando entre picos mais baixos de energia magnética, mas a amplitude da energia raramente é quase-nula. Em $Ta = 1000$ e $P_m = 6$ a série temporal da energia magnética exibe um dínamo intermitente oscilando entre fases de estouros e quiescente, como visto na Figura 6.13-(a), uma possível relação com longos períodos de mínimos de atividade magnética quase-nula pode ser constatado, como entre $t \sim 1490$ e $t \sim 1580$. A Figura 6.13-(b) representa o atrator caótico intermitente hidromagnético no espaço de fase do sistema. Neste caso, considerando um modelo de dínamo com rotação, estes comportamentos intermitentes são semelhantes aos relatados por (PLATT *et al.*, 1993a), onde se encontrou uma intermitência “*on-off*” onde as variações cíclicas da atividade solar se “desligam” (estado “*off*”), mantendo-se quase-nulas por longos períodos.

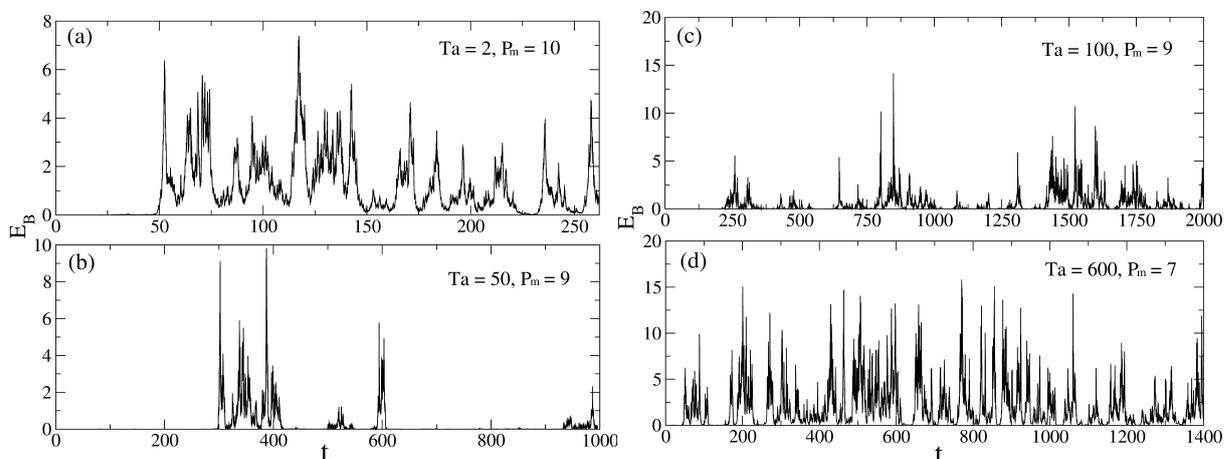


FIGURA 6.12 – Série temporal da energia magnética exibindo intermitência “*on-off*” em $R = 3000$. Em (a) $Ta = 2$, $P_m = 10$. (b) $Ta = 50$, $P_m = 9$. (c) $Ta = 100$, $P_m = 9$. Em (d) $Ta = 600$ e $P_m = 7$.

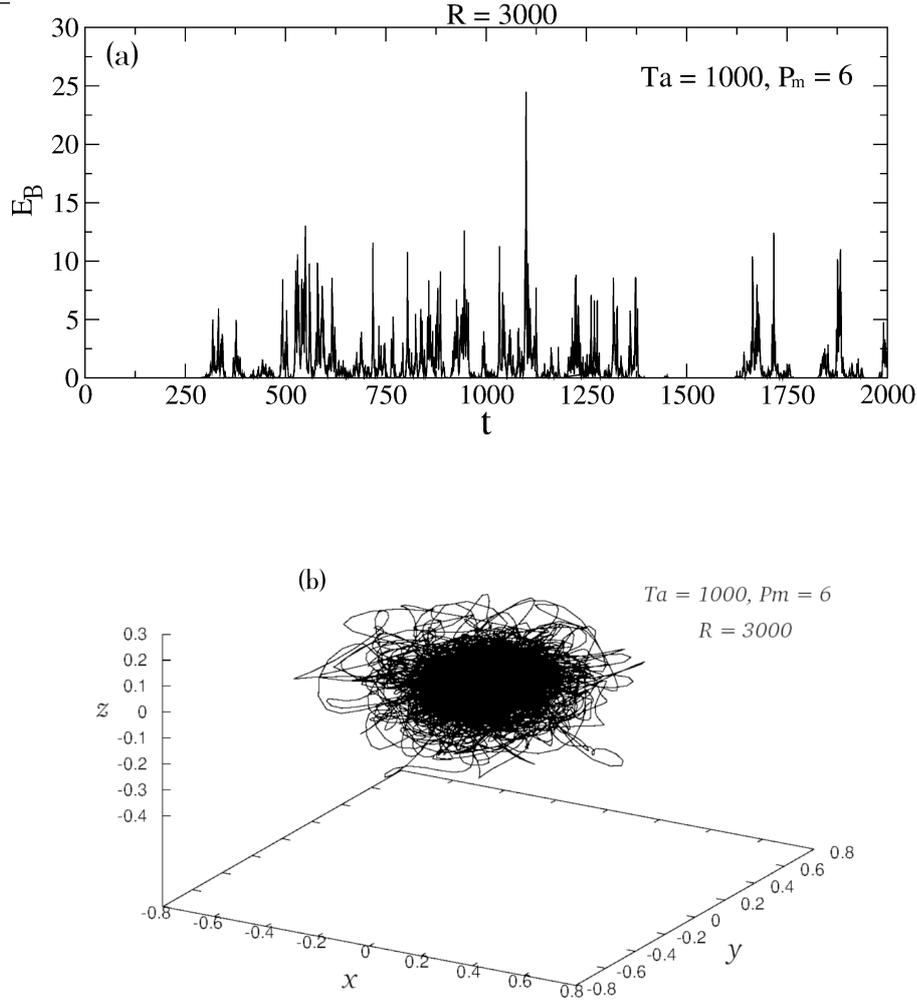


FIGURA 6.13 – (a) Série temporal da energia magnética exibindo intermitência “on-off”. (b) Representação do atrator caótico intermitente hidromagnético no espaço de fase no plano $Im(\hat{b}_{212}^x) \times Im(\hat{b}_{121}^y) \times Im(\hat{b}_{222}^z)$.

A duração média das fases de comportamento laminar τ entre os estouros na intermitência “on-off” é reduzida com a distância do valor do parâmetro de crise, P_m^c . De acordo com GREBOGI *et al.* (1987), τ segue a lei de escala

$$\tau \sim (P_m - P_m^c)^\Upsilon. \quad (6.11)$$

Calculamos, τ , para diversos valores de P_m próximos a P_m^c e obtivemos os resultados mostrados na Figura 6.14, onde a linha ajustada possui uma inclinação $\Upsilon = -0.03$. Para a construção da desta figura, adotamos o mesmo procedimento visto na seção 4.2.4 na Figura 4.23. Primeiro, selecionamos um conjunto de 100 condições iniciais geradas a partir de um atrator caótico intermitente hidromagnético em $P_m = 6 > P_m^c$; então, essas condições iniciais são utilizadas para gerar séries temporais intermitentes; o tempo de estouro para cada condição inicial é registrado quando \mathbf{E}_B atinge um certo limite ($\mathbf{E}_B < 2$) e o tempo de estouro médio, τ , é calculado a partir de 100 séries temporais. Este processo repete-se

para os 10 valores de $P_m < P_m^c$, como visto na Figura 6.14. A linha ajustada foi obtida através de regressão linear. Nossos resultados indicam que uma *bifurcação blowout não histerética* é responsável pela transição do dínamo.

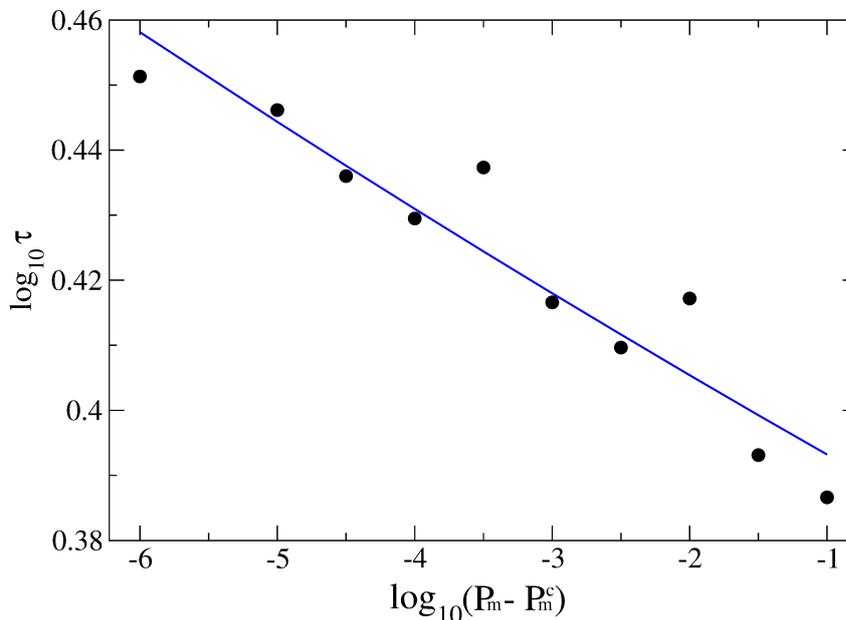


FIGURA 6.14 – Lei de escala da duração média das fases laminares entre estouros em função da distância ao valor crítico onde a intermitência aparece.

6.5 Conclusão

Mostramos como atratores convectivos hidrodinâmicos podem levar à geração de campos magnéticos. O Prandtl magnético crítico para a geração de campo magnético é menor para grandes números de Rayleigh. Entre os atratores convectivos analisados, os atratores periódicos e quase-periódicos são os melhores geradores de campo magnético, aqueles onde a geração de campo magnético ocorre no menor P_m . No regime cinemático, a partir da análise da taxa de crescimento, γ , o atrator periódico é mais benéfico para a ação do dínamo do que o quase-periódico. Espera-se que o P_m^c se torne cada vez menor à medida que R aumenta. Esta diminuição do P_m em MHD é de particular interesse em problemas geofísicos e astrofísicos. Por exemplo, no Sol, o P_m varia entre 10^{-7} a 10^{-4} entre o topo e o fundo da zona de convecção (KAMIDE; CHIAN, 2007); no núcleo externo da Terra, o P_m é da ordem de 5×10^{-6} (PETITDEMANGE, 2018). Mostramos também que atratores convectivos caóticos geram campos magnéticos intermitentes. A intermitência “on-off” relatada em nossas séries temporais de energia magnética também mostra semelhança com a intermitência “on-off” considerando o dínamo de fluxo ABC na ausência de rotação relatado por SWEET *et al.* (2001) e por REMPEL *et al.* (2009), onde as séries temporais de energia magnética intercalam entre fases de estouros e fases quiescentes com atividades de energia magnética quase-nula. Espera-se que esse tipo de intermitência ocorra próximo a valores

críticos dos parâmetros de controle onde aconteça uma bifurcação *blowout*. Relatamos que uma bifurcação *blowout* é conjecturada como a responsável pelo comportamento intermitente das séries temporais de energia magnética encontradas em nosso estudo. Deste modo, ilustramos que se a transição para o início da ação dínamo gerado por um atrator caótico convectivo for não histerética, a mesma será caracterizada por campos magnéticos intermitentes.

7 Conclusão e Trabalhos Futuros

7.1 Conclusões

A geração e evolução de campos magnéticos em plasmas astrofísicos permanece como uma área de intensos debates, onde a simulação de modelos MHD tem se mostrado particularmente útil para se explorar os modelos existentes. Nesta tese foi estudada a geração de campos magnéticos através de simulações numéricas de fluidos condutores e da teoria de sistemas dinâmicos. Para isso, dois modelos de simulações tridimensionais foram empregados: um utilizando o código *PENCIL* na ausência de rotação, e o outro modelo na presença de rotação, utilizando o código desenvolvido pelo Prof. Dr. Roman Chertovskih, da Universidade do Porto. Assim, investigamos o comportamento dinâmico de ambos os modelos variando certos parâmetros de controle.

Conforme discutido no Capítulo 4 transientes caóticos são um fenômeno comum em fluidos e plasmas, sendo geralmente associados à turbulência em decaimento, onde um fluido inicialmente errático converge para um estado laminar. Em um sistema dinâmico, transientes são evoluções temporais que precedem a dinâmica assintótica. A dinâmica transitória de um sistema dinâmico pode ser mais relevante que os estados assintóticos do sistema. Porém, o tópico de transientes caóticos ou caos transiente é um assunto pouco abordado na maioria dos livros sobre sistemas dinâmicos. Uma percepção comum abordada em livros e trabalhos existentes sobre dinâmica não-linear é que os autores dedicam-se a se concentrar na dinâmica assintótica, após as trajetórias convergirem para um atrator, como discutido por LAI; TÉL (2011). Entretanto, torna-se impossível provar se um comportamento de um sistema observado é assintótico ou não, pois os resultados experimentais só podem confirmar um determinado comportamento em uma escala de tempo finita. Então, estudar apenas o comportamento assintótico de um sistema dinâmico significaria perder a parte interessante e caótica contida nos transientes caóticos (TÉL, 2015).

Os resultados apresentados no Capítulo 4 utilizando o modelo de geração de campos magnéticos na ausência de rotação (dínamo α^2) ilustram a importância de transientes caóticos para a geração de campos magnéticos. Neste caso, utilizamos como parâmetro

de controle do sistema a helicidade cinética do fluxo, σ , e construímos um diagrama de bifurcação para a média no tempo da raiz quadrada média do campo magnético em função de σ . Assim, investigamos a presença de transientes caóticos em um dínamo não-linear e conjecturamos pela primeira vez uma *bifurcação blowout histerética* no modelo de dínamo α^2 .

No Capítulo 5 utilizando o modelo de simulações numéricas com rotação, primeiro investigamos a transição para caos utilizando o modelo CRB 3D. Para isso, construímos 3 diagramas de bifurcação para diferentes números de Taylor, $Ta = 10$, $Ta = 50$ e $Ta = 100$, onde relatamos rotas para caos via bifurcação de duplicação de período, via cenário de Pomeau-Maneville com intermitência e via quase-periodicidade. Relatamos para $Ta = 50$ e $Ta = 100$ um comportamento histerético do sistema apresentando coexistência de atratores no espaço de fase. Observamos que o aumento do número de Taylor impacta significativamente o início dos movimentos convectivos no sistema. A partir desses estudos dos regimes convectivos hidrodinâmicos, investigamos a geração de campos magnéticos com rotação. No Capítulo 6 mostramos como atratores convectivos caóticos podem levar à ação intermitente do dínamo, onde encontramos intermitência “*on-off*”, oscilando entre fases laminares e explosivas. O Prandtl magnético crítico para a ação do dínamo é menor para os atratores periódicos e quase-periódicos. Então, o Prandtl magnético crítico começa a diminuir com o aumento do número de Rayleigh, como esperado em sistemas fortemente turbulentos. Portanto, na transição para a turbulência os regimes periódicos são os mais benéficos para o início da ação do dínamo. Este regime de baixo P_m em MHD é de particular interesse, visto que diversos problemas geofísicos e astrofísicos dizem respeito a baixos valores de P_m .

O comportamento intermitente relatado em nossas séries temporais da energia magnética demonstram semelhanças com os resultados de REMPEL *et al.* (2009), que relataram um comportamento intermitente “*on-off*” considerando o dínamo ABC. KARAK *et al.* (2015) relatou o mesmo comportamento intermitente “*on-off*”, onde as séries temporais de energia magnética intercalam entre fases de estouros e quiescentes de energia magnética. Ambos os trabalhos realizaram uma possível relação com o dínamo solar. No nosso caso, mostramos que os atratores periódicos são os mais benéficos para a geração de campos magnéticos e o atrator caótico é o responsável por apresentar um comportamento intermitente entre fases quiescentes/regulares. Para maiores valores de R , quando a cascata de energia e a complexidade espaço-temporal aumentam, o P_m crítico diminui. Seria interessante verificar se o mesmo ocorre em geometrias esféricas, em uma configuração mais próxima da encontrada em problemas astrofísicos e geofísicos.

7.2 Trabalhos Futuros

Esta tese contém uma ampla variedade de resultados novos que, juntamente com pesquisas anteriores, pode colaborar na compreensão dos fenômenos não-lineares no modelo CRB com rotação na ausência de campo magnético e na presença de campo magnético, assim como, na compreensão do modelo de dínamo MHD. Entretanto, ainda há diversas perguntas a serem investigadas nestes tópicos de pesquisas. A seguir, apresentamos algumas ideias de trabalhos futuros que podem contribuir com o entendimento de tais tópicos.

Para o modelo de dínamo α^2 , desejamos caracterizar formalmente a *bifurcação blowout histerética* e a crise de fronteira, assim como explorar a evolução dinâmica do dínamo em função de outros parâmetros de controle, tais como, o número de Prandtl magnético, a difusividade magnética, assim como, investigar a helicidade cinética negativa. Para o modelo de convecção hidrodinâmica, desejamos explorar as bifurcações de duplicação de período, caracterizar os pontos de bifurcação utilizando o expoente de Lyapunov, uma ferramenta utilizada para quantificar o comportamento dinâmico de um sistema. Além disso, planejamos caracterizar formalmente o que ocorre nos pontos de histerese do sistema. Para as simulações de CRB MHD com rotação, desejamos aumentar a resolução do sistema para que possamos investigar a ação do dínamo para números de Rayleigh menores, assim como para números de Prandtl magnéticos maiores. Também intencionamos explorar o sistema com geometria esférica, para verificar se o mesmo comportamento ocorre em tal configuração.

Referências

ALFVÉN, H. Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves. **Nature**, v. 150, n. 3805, p. 405–406, 1942.

ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **Chaos an introduction to dynamical systems**. New York: Springer, 1996.

ANDRIEVSKY, A.; CHERTOVSKIH, R.; ZHELIGOVSKY, V. Pointwise vanishing velocity helicity of a flow does not preclude magnetic field generation. **Physical Review E**, v. 99, n. 3, p. 033204, 2019.

ARFKEN, G.; WEBER, H. H. **Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física**. [S.l.]: Elsevier, 2007.

ARLT, R.; SULE, A.; RÜDIGER, G. Three-dimensional stability of the solar tachocline. **Astronomy & Astrophysics**, v. 441, n. 3, p. 1171–1175, 2005.

ASHWIN, P.; COVAS, E.; TAVAKOL, R. Influence of noise on scalings for in-out intermittency. **Physical Review E**, v. 64, n. 6, p. 066204, 2001.

AUGUSTSON, K.; BRUN, A. S.; MIESCH, M.; TOOMRE, J. Grand minima and equatorward propagation in a cycling stellar convective dynamo. **The Astrophysical Journal**, v. 809, n. 2, p. 149, 2015.

BACKUS, G. A class of self-sustaining dissipative spherical dynamos. **Annals of Physics**, v. 4, n. 4, p. 372–447, 1958.

BÉNARD, H. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. **Rev. Gen. Sci. Pures Appl.**, v. 11, p. 1261–1271, 1900.

BÉNARD, H. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en regime permanent. *In*: **Annales de chimie et de physique. Proceedings** [...]. [S.l.: s.n.], 1901. v. 23, p. 62–144.

BERDYUGINA, S. V. Starspots: a key to the stellar dynamo. **Living Reviews in Solar Physics**, v. 2, n. 1, p. 1–62, 2005.

BERHANU, M.; GALLET, B.; MONCHAUX, R.; BOURGOIN, M.; ODIER, P.; PINTON, J.-F.; PLIHON, N.; VOLK, R.; FAUVE, S.; MORDANT, N. *et al.* Bistability between a stationary and an oscillatory dynamo in a turbulent flow of liquid sodium. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 641, p. 217–226, 2009.

- BISKAMP, D. **Magnetohydrodynamic turbulence**. New York: Cambridge University Press, 2003.
- BITTENCOURT, J. A. **Fundamentals of plasma physics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2004.
- BLACKMAN, E. G.; FIELD, G. B. New dynamical mean-field dynamo theory and closure approach. **Physical Review Letters**, v. 89, n. 26, p. 265007, 2002.
- BLACKMAN, E. G.; HUBBARD, A. Ribbons characterize magnetohydrodynamic magnetic fields better than lines: a lesson from dynamo theory. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 442, n. 2, p. 1040–1048, 2014.
- BORRERO, J. M.; ICHIMOTO, K. Magnetic structure of sunspots. **Living Reviews in Solar Physics**, v. 8, n. 1, p. 4, 2011.
- BOYD, J. P. **Chebyshev and Fourier spectral methods**. [S.l.]: Dover Publications, 2001.
- BRANDENBURG, A. The inverse cascade and nonlinear alpha-effect in simulations of isotropic helical hydromagnetic turbulence. **The Astrophysical Journal**, v. 550, n. 2, p. 824, 2001.
- BRANDENBURG, A. The case for a distributed solar dynamo shaped by near-surface shear. **The Astrophysical Journal**, v. 625, n. 1, p. 539, 2005.
- BRANDENBURG, A.; DOBLER, W.; SUBRAMANIAN, K. Magnetic helicity in stellar dynamos: new numerical experiments. **Astronomische Nachrichten: Astronomical Notes**, v. 323, n. 2, p. 99–122, 2002.
- BRANDENBURG, A.; HAUGEN, N. E. L.; LI, X.-Y.; SUBRAMANIAN, K. Varying the forcing scale in low prandtl number dynamos. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 479, n. 2, p. 2827–2833, 2018.
- BRANDENBURG, A.; KEMEL, K.; KLEEORIN, N.; MITRA, D.; ROGACHEVSKII, I. Detection of negative effective magnetic pressure instability in turbulence simulations. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 740, n. 2, p. L50, 2011.
- BRANDENBURG, A.; MOSS, D.; SOWARD, A. New results for the herzenberg dynamo: steady and oscillatory solutions. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 454, n. 1973, p. 1283–1300, 1998.
- BRANDENBURG, A.; ROGACHEVSKII, I.; KLEEORIN, N. Magnetic concentrations in stratified turbulence: the negative effective magnetic pressure instability. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 18, n. 12, p. 125011, 2016.
- BRANDENBURG, A.; SOKOLOFF, D.; SUBRAMANIAN, K. Current status of turbulent dynamo theory. **Space Science Reviews**, Springer, v. 169, n. 1-4, p. 123–157, 2012.
- BRANDENBURG, A.; SUBRAMANIAN, K. Astrophysical magnetic fields and nonlinear dynamo theory. **Physics Reports**, v. 417, n. 1, p. 1–209, 2005.

- BULLARD, E. C.; GELLMAN, H. Homogeneous dynamos and terrestrial magnetism. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences**, v. 247, n. 928, p. 213–278, 1954.
- BUSSE, F. H. Homogeneous dynamos in planetary cores and in the laboratory. **Annual review of fluid mechanics**, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 32, n. 1, p. 383–408, 2000.
- CHABRIER, G.; KÜKER, M. Large-scale α^2 -dynamo in low-mass stars and brown dwarfs. **Astronomy & Astrophysics**, v. 446, n. 3, p. 1027–1037, 2006.
- CHANDRASEKHAR, S. **Hydrodynamic and hydromagnetic stability**. New York: Dover Publications, 1981.
- CHARBONNEAU, P. Dynamo models of the solar cycle. **Living Reviews in Solar Physics**, Springer, v. 7, n. 1, p. 3, 2010.
- CHERTOVSKIH, A. R. **Thermal convection and magnetic field generation by conducting fluid flows in rotating layer**. 143 f. Thesis (Doutorado) — Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal, 2010.
- CHERTOVSKIH, R.; CHIMANSKI, E.; REMPEL, E. Route to hyperchaos in rayleigh-bénard convection. **Europhysics Letters**, v. 112, n. 1, p. 14001, 2015.
- CHERTOVSKIH, R.; REMPEL, E.; CHIMANSKI, E. Magnetic field generation by intermittent convection. **Physics Letters A**, v. 381, n. 38, p. 3300–3306, 2017.
- CHIAN, A.-L.; SANTANA, W.; REMPEL, E.; BOROTTO, F.; HADA, T.; KAMIDE, Y. Chaos in driven alfvén systems: unstable periodic orbits and chaotic saddles. **Nonlinear Process in Geophysics**, v. 14, p. 17–29, 2007.
- CHILDRESS, S.; GILBERT, A. D. **Stretch, twist, fold: the fast dynamo**. New York: Springer, 1995.
- CHIMANSKI, E. V.; REMPEL, E. L.; CHERTOVSKIH, R. On-off intermittency and spatiotemporal chaos in three-dimensional rayleigh-bénard convection. **Advances in Space Research**, v. 57, n. 6, p. 1440–1447, 2016.
- CHOUDHURI, A. R. *et al.* **The physics of fluids and plasmas: an introduction for astrophysicists**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1998.
- COVAS, E.; ASHWIN, P.; TAVAKOL, R. Non-normal parameter blowout bifurcation: An example in a truncated mean-field dynamo model. **Physical Review E**, American Physical Society, v. 56, n. 6, p. 6451, 1997.
- COVAS, E.; TAVAKOL, R. Multiple forms of intermittency in partial differential equation dynamo models. **Physical Review E**, v. 60, n. 5, p. 5435, 1999.
- COWLING, T. G. The magnetic field of sunspots. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 94, p. 39–48, 1934.
- COX, S. M.; MATTHEWS, P. C. Exponential time differencing for stiff systems. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 176, n. 2, p. 430–455, 2002.

- CROSS, M. C.; HOHENBERG, P. C. Pattern formation outside of equilibrium. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society, v. 65, n. 3, p. 851, 1993.
- DEVANEY, R. L. **A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment**. [S.l.]: Westview Press, 1992.
- DIKPATI, M.; CHARBONNEAU, P. A babcock-leighton flux transport dynamo with solar-like differential rotation. **The Astrophysical Journal**, v. 518, n. 1, p. 508, 1999.
- ELASKAR, S.; RÍO, E. D. **New advances on chaotic intermittency and its applications**. [S.l.]: Springer, 2017.
- ERASO, G. A. G. **Estudos numéricos do dínamo Solar**. 229 f. Thesis (Doutorado) — Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, 2009.
- FAN, Y. Magnetic fields in the solar convection zone. **Living Reviews in Solar Physics**, v. 6, n. 1, p. 4, 2009.
- FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C. P. C. do. **Caos: uma introdução**. [S.l.]: Editora Blucher, 1994.
- FRANCO, F. F. **Transição para Caos e Hipercaos em Magnetoconvecção**. 181 f. Thesis (Doutorado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, Brasil, 2020.
- FRANCO, F. F.; REMPEL, E. L. Chaotic saddles in a generalized lorenz model of magnetoconvection. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, World Scientific, v. 30, n. 12, p. 2030034, 2020.
- FRIEDLANDER, S.; SERRE, D. **Handbook of mathematical fluid dynamics**. [S.l.]: Elsevier, 2002.
- FRIGO, M.; JOHNSON, S. G. The design and implementation of fftw3. **Proceedings of the IEEE**, IEEE, v. 93, n. 2, p. 216–231, 2005.
- GALUZIO, P.; LOPES, S.; VIANA, R. Two-state on-off intermittency and the onset of turbulence in a spatiotemporally chaotic system. **Physical review letters**, v. 105, n. 5, p. 055001, 2010.
- GETLING, A. V. **Rayleigh-Bénard convection: structures and dynamics**. [S.l.]: World Scientific, 1998.
- GILBERT, A. D.; FRISCH, U.; POUQUET, A. Helicity is unnecessary for alpha effect dynamos, but it helps. **Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics**, Taylor & Francis, v. 42, n. 1-2, p. 151–161, 1988.
- GLATZMAIER, G. A. **Introduction to modeling convection in planets and stars**. [S.l.]: Princeton University Press, 2013.
- GLATZMAIER, G. A.; ROBERTS, P. H. Dynamo theory then and now. **International Journal of Engineering Science**, v. 36, n. 12-14, p. 1325–1338, 1998.

- GRASSO, D.; RUBINSTEIN, H. R. Magnetic fields in the early universe. **Physics Reports**, Elsevier, v. 348, n. 3, p. 163–266, 2001.
- GREBOGI, C.; OTT, E.; ROMEIRAS, F.; YORKE, J. A. Critical exponents for crisis-induced intermittency. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 36, n. 11, p. 5365, 1987.
- GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 7, n. 1-3, p. 181–200, 1983.
- GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. **Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- GUERRERO, G.; KÄPYLÄ, P. Dynamo action and magnetic buoyancy in convection simulations with vertical shear. **Astronomy & Astrophysics**, v. 533, p. A40, 2011.
- GUPTA, V. K.; BHADOURIA, B.; HASIM, I.; JAWDAT, J.; SINGH, A. Chaotic convection in a rotating fluid layer. **Alexandria Engineering Journal**, v. 54, n. 4, p. 981–992, 2015.
- HALE, G. E. On the probable existence of a magnetic field in sun-spots. **The Astrophysical Journal**, v. 28, p. 315, 1908.
- HARTMANN, L. W.; NOYES, R. W. Rotation and magnetic activity in main-sequence stars. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, v. 25, n. 1, p. 271–301, 1987.
- HAUGEN, N. E. L.; BRANDENBURG, A. Inertial range scaling in numerical turbulence with hyperviscosity. **Physical Review E**, v. 70, n. 2, p. 026405, 2004.
- HAUGEN, N. E. L.; BRANDENBURG, A.; DOBLER, W. Simulations of nonhelical hydromagnetic turbulence. **Physical Review E**, American Physical Society, v. 70, n. 1, p. 016308, 2004.
- HERZENBERG, A. Geomagnetic dynamos. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences**, The Royal Society London, v. 250, n. 986, p. 543–583, 1958.
- HILBORN, R. C. **Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers**. [S.l.]: Oxford University Press, 2000.
- HOF, B.; LOZAR, A. D.; KUIK, D. J.; WESTERWEEL, J. Repeller or attractor? selecting the dynamical model for the onset of turbulence in pipe flow. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 101, n. 21, p. 214501, 2008.
- HSIA, C.-H.; NISHIDA, T. A route to chaos in rayleigh–bénard heat convection. **Journal of Mathematical Fluid Mechanics**, v. 24, n. 2, p. 1–18, 2022.
- HSU, G.-H.; OTT, E.; GREBOGI, C. Strange saddles and the dimensions of their invariant manifolds. **Physics Letters A**, v. 127, n. 4, p. 199–204, 1988.
- HUGHES, D. W.; ROSNER, R.; WEISS, N. O. **The solar tachocline**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007.

- KAMIDE, Y.; CHIAN, A. **Handbook of the solar-terrestrial environment**. [S.l.]: Springer, 2007.
- KANTZ, H.; GRASSBERGER, P. Repellers, semi-attractors, and long-lived chaotic transients. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 17, n. 1, p. 75–86, 1985.
- KARAK, B. B.; KITCHATINOV, L. L.; BRANDENBURG, A. Hysteresis between distinct modes of turbulent dynamos. **The Astrophysical Journal**, v. 803, n. 2, p. 95, 2015.
- KARTTUNEN, H.; KRÖGER, P.; OJA, H.; POUTANEN, M.; DONNER, K. J. **Fundamental astronomy**. [S.l.]: Springer, 2016.
- KITCHATINOV, L.; NEPOMNYASHCHIKH, A. How supercritical are stellar dynamos, or why do old main-sequence dwarfs not obey gyrochronology? **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 470, n. 3, p. 3124–3130, 2017.
- KITCHATINOV, L.; OLEMSKOY, S. Dynamo hysteresis and grand minima of solar activity. **Astronomy Letters**, v. 36, n. 4, p. 292–296, 2010.
- KLEEORIN, N.; MOND, M.; ROGACHEVSKII, I. Magnetohydrodynamic instabilities in developed small-scale turbulence. **Physics of Fluids B: Plasma Physics**, American Institute of Physics, v. 5, n. 11, p. 4128–4134, 1993.
- KLEEORIN, N.; MOND, M.; ROGACHEVSKII, I. Magnetohydrodynamic turbulence in the solar convective zone as a source of oscillations and sunspots formation. **Astronomy and Astrophysics**, v. 307, p. 293, 1996.
- KLEEORIN, N.; ROGACHEVSKII, I. Effective ampère force in developed magnetohydrodynamic turbulence. **Physical Review E**, v. 50, n. 4, p. 2716, 1994.
- KLEEORIN, N.; ROGACHEVSKII, I.; RUZMAIKIN, A. Negative magnetic pressure as a trigger of large-scale magnetic instability in the solar convective zone. **Sov. Astron. Lett**, v. 15, p. 274–277, 1989.
- KLEEORIN, N.; ROGACHEVSKII, I.; RUZMAIKIN, A. Magnetic force reversal and instability in a plasma with advanced magnetohydrodynamic turbulence. **Zh. Eksp. Teor. Fiz**, v. 97, p. 1555–1565, 1990.
- KRAUSE, F.; RÄDLER, K.-H. **Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory, 1980**. [S.l.]: Akademie-Verlag, Berlin, 1980.
- KRSTULOVIC, G.; THORNER, G.; VEST, J.-P.; FAUVE, S.; BRACHET, M. Axial dipolar dynamo action in the Taylor-Green vortex. **Physical Review E**, v. 84, n. 6, p. 066318, 2011.
- KULSRUD, R. M. **Plasma physics for astrophysics**. [S.l.]: Princeton University Press, 2005.
- KUZNETSOV, Y. A. **Elements of applied bifurcation theory**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- LAI, Y.-C.; TÉL, T. **Transient chaos: complex dynamics on finite time scales**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.

- LARMOR, J. How could a rotating body such as the sun become a magnet. **Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci**, v. 159, p. 412, 1919.
- LAYEK, G. **An introduction to dynamical systems and chaos**. [S.l.]: Springer, 2015.
- LIBCHABER, A.; FAUVE, S.; LAROCHE, C. Two-parameter study of the routes to chaos. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 7, n. 1-3, p. 73–84, 1983.
- LIBCHABER, A.; LAROCHE, C.; FAUVE, S. Period doubling cascade in mercury, a quantitative measurement. **Journal de Physique Lettres**, v. 43, n. 7, p. 211–216, 1982.
- MANNEVILLE, P. **Turbulence: an introduction to nonlinear dynamics and complex systems**. [S.l.]: Imperial College Press, 2004.
- MANNEVILLE, P.; POMEAU, Y. Intermittency and the lorenz model. **Physics Letters A**, v. 75, n. 1-2, p. 1–2, 1979.
- MESTEL, L. **Stellar magnetism**. [S.l.]: Oxford University Press, 2012.
- METCALFE, T. S.; EGELAND, R.; SADERS, J. V. Stellar evidence that the solar dynamo may be in transition. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 826, n. 1, p. L2, 2016.
- MOFFATT, H. K. **Magnetic Field generation in electrically conducting fluids**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1978.
- MOFFATT, K.; DORMY, E. **Self-exciting fluid dynamos**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019.
- MONDAL, H.; DAS, A.; KUMAR, K. Onset of oscillatory rayleigh-bénard magnetoconvection with rigid horizontal boundaries. **Physics of Plasmas**, AIP Publishing LLC, v. 25, n. 1, p. 012119, 2018.
- MORIN, V.; DORMY, E. The dynamo bifurcation in rotating spherical shells. **International Journal of Modern Physics B**, v. 23, n. 28n29, p. 5467–5482, 2009.
- MOSS, D.; BROOKE, J. Towards a model for the solar dynamo. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 315, n. 3, p. 521–533, 2000.
- NUSSE, H. E.; YORKE, J. A. A procedure for finding numerical trajectories on chaotic saddles. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 36, n. 1-2, p. 137–156, 1989.
- OLEMSKOY, S.; KITCHATINOV, L. Grand minima and north–south asymmetry of solar activity. **The Astrophysical Journal**, v. 777, n. 1, p. 71, 2013.
- OLIVEIRA, D. N.; REMPEL, E. L.; CHERTOVSKI, R.; KARAK, B. B. Chaotic transients and hysteresis in an α^2 dynamo model. **Journal of Physics: Complexity**, v. 2, n. 2, p. 025012, 2021.
- ORSZAG, S. A. On the elimination of aliasing in finite-difference schemes by filtering high-wavenumber components. **Journal of Atmospheric Sciences**, v. 28, n. 6, p. 1074–1074, 1971.

- OSSENDRIJVER, M. The solar dynamo. **The Astronomy and Astrophysics Review**, Springer, v. 11, n. 4, p. 287–367, 2003.
- OSSENDRIJVER, M.; COVAS, E. Crisis-induced intermittency due to attractor-widening in a buoyancy-driven solar dynamo. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 13, n. 08, p. 2327–2333, 2003.
- OTT, E. **Chaos in dynamical systems**. [S.l.]: Cambridge university press, 2002.
- OTT, E.; SOMMERER, J. C. Blowout bifurcations: the occurrence of riddled basins and on-off intermittency. **Physics Letters A**, v. 188, n. 1, p. 39–47, 1994.
- PARKER, E. N. The formation of sunspots from the solar toroidal field. **The Astrophysical Journal**, v. 121, p. 491, 1955.
- PARKER, E. N. Hydromagnetic dynamo models. **The Astrophysical Journal**, v. 122, p. 293, 1955.
- PARKER, T. S.; CHUA, L. **Practical numerical algorithms for chaotic systems**. New York: Springer-Verlag, 1989.
- PAUL, S.; WAHI, P.; VERMA, M. K. Bifurcations and chaos in large-prandtl number rayleigh–bénard convection. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 46, n. 5, p. 772–781, 2011.
- PETITDEMANGE, L. Systematic parameter study of dynamo bifurcations in geodynamo simulations. **Physics of the Earth and Planetary Interiors**, Elsevier, v. 277, p. 113–132, 2018.
- PETROVAY, K. Solar cycle prediction. **Living Reviews in Solar Physics**, v. 17, n. 1, p. 1–93, 2020.
- PEYRET, R. **Spectral methods for incompressible viscous flow**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2002.
- PLATT, N.; SPIEGEL, E.; TRESSER, C. The intermittent solar cycle. **Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics**, v. 73, n. 1-4, p. 147–161, 1993.
- PLATT, N.; SPIEGEL, E.; TRESSER, C. On-off intermittency: A mechanism for bursting. **Physical Review Letters**, v. 70, n. 3, p. 279, 1993.
- PODVIKINA, O. Magnetic field generation by convective flows in a plane layer. **The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems**, v. 50, n. 4, p. 639–652, 2006.
- PODVIKINA, O. Magnetic field generation by convective flows in a plane layer: the dependence on the prandtl numbers. **Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics**, v. 102, n. 4, p. 409–433, 2008.
- PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. **Numerical recipes in Fortran 90 the art of parallel scientific computing**. [S.l.]: Cambridge university press, 1992.

- PRIEST, E. **Magnetohydrodynamics of the Sun**. New York: Cambridge University Press, 2014.
- PROCTOR, M. Dynamo action and the sun. **European Astronomical Society Publications Series**, v. 21, p. 241–273, 2006.
- PROCTOR, M.; GILBERT, A. D. **Lectures on solar and planetary dynamos**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1994.
- PROCTOR, M.; WEISS, N. Magnetoconvection. **Reports on Progress in Physics**, v. 45, n. 11, p. 1317, 1982.
- RASSKAZOV, A.; CHERTOVSKIY, R.; ZHELIGOVSKY, V. Magnetic field generation by pointwise zero-helicity three-dimensional steady flow of an incompressible electrically conducting fluid. **Physical Review E**, v. 97, n. 4, p. 043201, 2018.
- RAYLEIGH, L. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, v. 32, n. 192, p. 529–546, 1916.
- REGEV, O.; UMURHAN, O. M.; YECKO, P. A. **Modern fluid dynamics for physics and astrophysics**. [S.l.]: Springer, 2016.
- REMPEL, E. L. **Análise de conjuntos caóticos atrativos e não atrativos em sistemas dinâmicos de baixa e alta dimensão: aplicação para a dinâmica de ondas de plasma na conexão Sol - Terra**. 206 f. Thesis (Doutorado) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, Brasil, 2006.
- REMPEL, E. L.; CHIAN, A. C.-L. High-dimensional chaotic saddles in the kuramoto–sivashinsky equation. **Physics Letters A**, v. 319, n. 1-2, p. 104–109, 2003.
- REMPEL, E. L.; CHIAN, A. C.-L.; BRANDENBURG, A.; MUÑOZ, P. R.; SHADDEN, S. C. Coherent structures and the saturation of a nonlinear dynamo. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge Univ Press, v. 729, p. 309–329, 2013.
- REMPEL, E. L.; CHIAN, A. C.-L.; MIRANDA, R. A. Chaotic saddles at the onset of intermittent spatiotemporal chaos. **Physical Review E**, v. 76, n. 5, p. 056217, 2007.
- REMPEL, E. L.; LESUR, G.; PROCTOR, M. R. Supertransient magnetohydrodynamic turbulence in keplerian shear flows. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 105, n. 4, p. 044501, 2010.
- REMPEL, E. L.; PROCTOR, M. R.; CHIAN, A. C.-L. A novel type of intermittency in a non-linear dynamo in a compressible flow. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 400, n. 1, p. 509–517, 2009.
- RENGARAJAN, T. Age-rotation relationship for late-type main-sequence stars. **The Astrophysical Journal**, v. 283, p. L63–L65, 1984.
- RINCON, F. Dynamo theories. **Journal of Plasma Physics**, Cambridge University Press, v. 85, n. 4, 2019.

- SCHAEFFER, N.; JAULT, D.; NATAF, H.-C.; FOURNIER, A. Turbulent geodynamo simulations: a leap towards earth's core. **Geophysical Journal International**, Oxford University Press, v. 211, n. 1, p. 1–29, 2017.
- SCHMITT, D.; SCHÜSSLER, M.; FERRIZ-MAS, A. Intermittent solar activity by an on-off dynamo. **Astronomy and Astrophysics**, v. 311, p. L1–L4, 1996.
- SCHNACK, D. D. **Lectures in magnetohydrodynamics: with an appendix on extended MHD**. [S.l.]: Springer, 2009.
- SCHRIJVER, C. J.; SISCOE, G. L. **Heliophysics: Plasma physics of the local cosmos**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- SCHRIJVER, C. J.; ZWAAN, C. **Solar and stellar magnetic activity**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000.
- SIMITEV, R.; BUSSE, F. Bistability and hysteresis of dipolar dynamos generated by turbulent convection in rotating spherical shells. **Europhysics Letters**, v. 85, n. 1, p. 19001, 2009.
- SIMITEV, R. D.; BUSSE, F. H. Bistable attractors in a model of convection-driven spherical dynamos. **Physica Scripta**, v. 86, n. 1, p. 018409, 2012.
- SKUFCA, J. D.; YORKE, J. A.; ECKHARDT, B. Edge of chaos in a parallel shear flow. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 96, n. 17, p. 174101, 2006.
- SKUMANICH, A. Time scales for Ca II emission decay, rotational braking, and lithium depletion. **The Astrophysical Journal**, v. 171, p. 565, 1972.
- SOWARD, A. M.; DORMY, E. **Mathematical aspects of natural dynamos**. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2007.
- SPIEGEL, E. A. Chaos and intermittency in the solar cycle. *In*: **The Origin and Dynamics of Solar Magnetism**. [S.l.]: Springer, 2008. p. 25–51.
- STEENBECK, M.; KRAUSE, F. Zur dynamotheorie stellarer und planetarer magnetfelder i. berechnung sonnenähnlicher wechselfeldgeneratoren. **Astronomische Nachrichten**, v. 291, n. 2, p. 49–84, 1969.
- STIX, M. **The Sun: an introduction**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2004.
- STOICA, P.; MOSES, R. L. *et al.* **Spectral analysis of signals**. [S.l.]: Pearson Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2005.
- STROGATZ, S. H. **Nonlinear dynamics and chaos**. New York: Addison-Wesley, 1994.
- SWEET, D.; OTT, E.; FINN, J. M.; JR, T. M. A.; LATHROP, D. P. Blowout bifurcations and the onset of magnetic activity in turbulent dynamos. **Physical Review E**, v. 63, n. 6, p. 066211, 2001.
- SWEET, D.; OTT, E.; JR, T. M. A.; LATHROP, D. P.; FINN, J. M. Blowout bifurcations and the onset of magnetic dynamo action. **Physics of Plasmas**, American Institute of Physics, v. 8, n. 5, p. 1944–1952, 2001.

- SWINNEY, H. L.; GOLLUB, J. P. **Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence**. [*S.l.*]: Springer-Verlag, 1981.
- TÉL, T. The joy of transient chaos. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, AIP Publishing LLC, v. 25, n. 9, p. 097619, 2015.
- THUAL, O. Zero-prandtl-number convection. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 240, p. 229–258, 1992.
- TRIPATHI, B.; NANDY, D.; BANERJEE, S. Stellar mid-life crisis: subcritical magnetic dynamos of solar-like stars and the breakdown of gyrochronology. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters**, v. 506, n. 1, p. L50–L54, 2021.
- USOSKIN, I. G. A history of solar activity over millennia. **Living Reviews in Solar Physics**, v. 14, n. 1, p. 1–97, 2017.
- VAINSHTEIN, S.; ZEL'DOVICH, Y. B. Origin of magnetic fields in astrophysics (turbulent “dynamo” mechanisms). **Soviet Physics Uspekhi**, IOP Publishing, v. 15, n. 2, p. 159, 1972.
- VERHOOGEN, J. Heat balance of the earth’s core. **Geophysical Journal International**, v. 4, n. Supplement_1, p. 276–281, 1961.
- WEISS, N. Dynamos in planets, stars and galaxies. **Astronomy & Geophysics**, v. 43, n. 3, p. 3–9, 2002.
- WEISS, N.; THOMPSON, M. The solar dynamo. **Space Science Reviews**, Springer, v. 144, n. 1-4, p. 53–66, 2009.
- WOLF, R. Sonnenflecken beobachtungen in der zweiten hälfte des jahres 1849. **Mitt. Nat.forsch. Ges. Bern**, v. 207, p. 89, 1849.
- YADAV, R. K.; VERMA, M. K.; WAHI, P. Bistability and chaos in the taylor-green dynamo. **Physical Review E**, APS, v. 85, n. 3, p. 036301, 2012.
- YOKOYAMA, N.; TAKAOKA, M. Hysteretic transitions between quasi-two-dimensional flow and three-dimensional flow in forced rotating turbulence. **Physical Review Fluids**, v. 2, n. 9, p. 092602, 2017.

Apêndice A - Trabalho Publicado

A.1 Trabalho publicado em *Journal of Physics: Complexity*

PAPER • OPEN ACCESS

Chaotic transients and hysteresis in an α^2 dynamo model

To cite this article: Dalton N Oliveira *et al* 2021 *J. Phys. Complex.* **2** 025012

View the [article online](#) for updates and enhancements.

OPEN ACCESS

PAPER

Chaotic transients and hysteresis in an α^2 dynamo model

RECEIVED

28 September 2020

REVISED

26 November 2020

ACCEPTED FOR PUBLICATION

8 December 2020

PUBLISHED

10 March 2021

Dalton N Oliveira¹, Erico L Rempel^{1,*} , Roman Chertovskih²  and Bidya B Karak³¹ Institute of Aeronautical Technology - ITA, 12228-900, São José dos Campos, SP, Brazil² Research Center for Systems and Technologies (SYSTEC), Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Rua Dr. Roberto Frias, s/n 4200-465, Porto, Portugal³ Department of Physics, Indian Institute of Technology (Banaras Hindu University), Varanasi 221005, India

* Author to whom any correspondence should be addressed.

E-mail: dalton@ita.br, rempel@ita.br, roman@fe.up.pt and karak.phy@iitbhu.ac.in**Keywords:** chaotic transients, nonlinear dynamo, MHD simulation, boundary crisis, hysteretic blowout bifurcation

Original content from this work may be used under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 licence](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Any further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the title of the work, journal citation and DOI.

**Abstract**

The presence of chaotic transients in a nonlinear dynamo is investigated through numerical simulations of the 3D magnetohydrodynamic equations. By using the kinetic helicity of the flow as a control parameter, a hysteretic blowout bifurcation is conjectured to be responsible for the transition to dynamo, leading to a sudden increase in the magnetic energy of the attractor. This high-energy hydromagnetic attractor is suddenly destroyed in a boundary crisis when the helicity is decreased. Both the blowout bifurcation and the boundary crisis generate long chaotic transients that are due, respectively, to a chaotic saddle and a relative chaotic attractor.

1. Introduction

Chaotic transients are a common phenomenon in fluids and plasmas, being usually associated with decaying turbulence, where an initially erratic fluid converges to a laminar state. A typical example is a pipe flow, where turbulent puffs can last for a long time, but eventually disappear if the pipe is sufficiently long and the Reynolds number is below a certain threshold [1]. Chaotic transients are known to be due to the presence of nonattracting chaotic sets in the phase space [2, 3]. In two or more-dimensional phase spaces, these nonattracting chaotic sets have a stable and an unstable manifold, which are main directions of attraction and repulsion; the nonattracting chaotic set lies in the intersection of both manifolds and is, then, duly called a chaotic saddle [4]. In spatially extended systems, where the phase space is infinite-dimensional, chaotic saddles may be responsible for transient temporal chaos [5] or transient spatiotemporal chaos [6]. In space and astrophysical plasmas, chaotic transients related to chaotic saddles have been observed in numerical simulations of Alfvén waves [7], magnetohydrodynamic (MHD) dynamo [8] and accretion disks [9]. The goal of the present paper is to study the appearance of chaotic transients in an MHD simulation of transition to dynamo, a crucial topic in the study of the origin and evolution of astrophysical magnetic fields.

Many astrophysical systems—such as planets, stars, and galaxies—show variable magnetic fields. In some cases, the field even shows coherent structures and polarity reversals. The characteristic spatial length-scale of such magnetic fields is comparable to the size of the system and thus this is technically called the large-scale field, in contrast to the small-scale one which has a characteristic length-scale smaller or equal to the characteristic scale of the driving flow [10]. As an example, the solar and stellar magnetic cycles are a manifestation of the large-scale field.

A large-scale dynamo is responsible for the generation and maintenance of large-scale magnetic fields and cycles in all astrophysical bodies mentioned above. The plasma in such bodies usually displays differential rotation, where the angular velocity is not uniform but varies according to the latitude. Depending on the relative importance of the differential rotation, which gives rise to the so-called Ω -effect, and the helical convection, which gives rise to the so-called α -effect [11], the large-scale dynamo is characterized as α^2 or $\alpha\Omega$ dynamo. When the differential rotation is significant, the dynamo is of $\alpha\Omega$ type. On the other hand, when the differential rotation is negligible, the dynamo is said to be of α^2 type. The solar and galactic dynamos are thus of $\alpha\Omega$ type. However, there can be some objects in which the rotation is very uniform, like the Earth, and the

dynamo is of α^2 type. In rapidly rotating stars, the differential rotation is highly quenched, while the α effect remains strong and thus the dynamo is expected to be of α^2 type [12].

With the evolution of the astrophysical bodies over the age, the dynamo efficiency may change. For example, the stellar rotation decreases with the age (primarily due to magnetic braking [13]) and this reduces the efficiency of the dynamo [14]. When the rotation becomes sufficiently slow, the dynamo number (D) goes below a critical value (D_c) and the large-scale dynamo ceases to operate [11]. There are indications that the solar dynamo is probably slightly above this critical value [15–17]. However, the dynamo can still persist when $D < D_c$. Both the mean-field dynamo model [18] and MHD simulations [19] reveal that near the onset of the large-scale dynamo, two stable states can coexist and attract different initial conditions. The magnetic field vanishes when started with a weak initial field but the magnetic energy remains high (the strong-field branch) when started with a strong field. Thus, the dynamo displays a hysteresis near the dynamo onset.

The motivation of the present study is to explore the origin of chaotic transients nearby the onset of an α^2 dynamo in the presence of hysteresis. For this, we consider a simple 3D MHD model of isothermal compressible fluid which is driven by a helical forcing function. The advantage of including an external driver is that we can vary the net helicity in our model to explore the dynamo transition. Transition to dynamo is shown to be due to a hysteretic blowout bifurcation, which takes place when a smooth invariant manifold with a chaotic attractor loses transversal stability [20]. Blowout bifurcations can be of two types, hysteretic (characterized by bistability) or nonhysteretic (characterized by on-off intermittency). The paper is organized as follows. In section 2, the α^2 dynamo model is described; section 3 shows the main results of the paper and the conclusions are given in section 4.

2. The model

We adopt the model of α^2 dynamo employed in references [21, 22]. The fluid is assumed to be isothermal and compressible, with constant sound speed c_s , constant dynamical viscosity μ , constant magnetic diffusivity η and constant magnetic permeability μ_0 . The governing equations are:

$$\partial_t \ln \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \ln \rho + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p / \rho + \mathbf{J} \times \mathbf{B} / \rho + (\mu / \rho) (\nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} / 3) + \mathbf{f}, \quad (2)$$

$$\partial_t \mathbf{A} = \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \mu_0 \mathbf{J}, \quad (3)$$

where ρ is the density, \mathbf{u} is the fluid velocity, \mathbf{A} is the magnetic vector potential, $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} / \mu_0$ is the current density, p is the pressure, \mathbf{f} is an external forcing function and $\nabla p / \rho = c_s^2 \nabla \ln \rho$ where $c_s^2 = \gamma p / \rho$ is assumed to be constant. The magnetic induction equation (3) is written for the vector potential \mathbf{A} to ensure a solenoidal magnetic field, since $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$. The logarithmic density is also adopted in equations (1) and (2) for numerical reasons, since it varies spatially much less than density. The domain is a box with dimensions $L_x = L_y = L_z = 2\pi$ and periodic boundary conditions in all three directions for all variables. We adopt nondimensional units with $k_1 = c_s = \rho_0 = \mu_0 = 1$, where $\rho = \langle \rho \rangle$ is the spatial average of ρ and k_1 is the smallest wave number in the simulation box. Time is measured in units of $(c_s k_1)^{-1}$, space is measured in units of k_1^{-1} , \mathbf{u} in units of c_s , \mathbf{B} in units of $\sqrt{\mu_0 \rho_0} c_s$, p in units of ρ_0 and the magnetic diffusivity η is in units of c_s / k_1 .

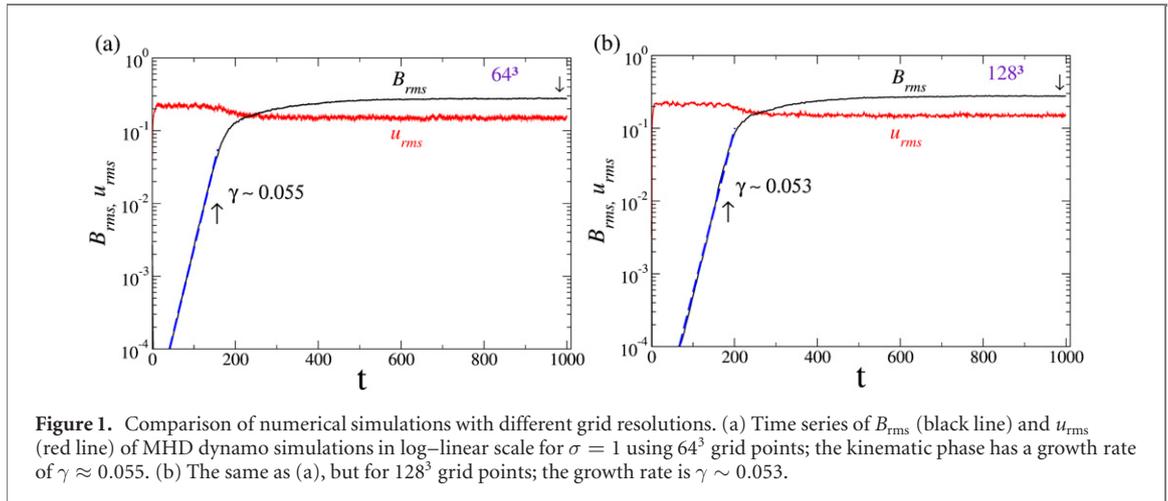
Equations (1)–(3) are solved with the PENCIL CODE⁴, a thoroughly tested MHD solver frequently employed in astrophysical works (see, e.g., [23] and the journal issue dedicated to the physics and algorithms of the PENCIL CODE). The code adopts sixth-order finite differences in space and third-order variable step Runge–Kutta in time. The initial conditions are $\ln \rho = 0$ and $\mathbf{u} = 0$. The initial magnetic vector potential is modeled by noise with Gaussian distribution with zero mean and standard deviation equal to 10^{-3} . Kinetic energy is injected in the system by a forcing function \mathbf{f} , which is defined by [21, 24]

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left\{ N \mathbf{f}_{\mathbf{k}(t)} \exp [i \mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{x} + i \phi(t)] \right\}, \quad (4)$$

where $\mathbf{k}(t) = (k_x, k_y, k_z)$ is a time dependent wave vector, $\mathbf{x} = (x, y, z)$ is position, and $\phi(t)$, with $|\phi| < \pi$, is a random phase. Here, $N = f_0 c_s (k c_s / \delta t)^{1/2}$, where f_0 is a nondimensional factor, $k = |\mathbf{k}|$, and δt is the integration time step. We choose the forcing wave number k around $k_f = 5$ and every time step, a vector $\mathbf{k}(t)$ with $4.5 < k < 5.5$ is randomly selected from a set of 350 previously generated vectors with the given wave number. The operator $\mathbf{f}_{\mathbf{k}}$ is given by

$$\mathbf{f}_{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}) - i \sigma k (\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}})}{\sqrt{1 + \sigma^2 k^2} \sqrt{1 - (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{e}})^2 / k^2}}, \quad (5)$$

⁴ <http://pencil-code.nordita.org/>



where \hat{e} is an arbitrary unit vector needed in order to generate a vector $\mathbf{k} \times \hat{e}$ which is perpendicular to \mathbf{k} . Note that for $\sigma = 1$, $|\mathbf{f}_k|^2 = 1$ and the kinetic helicity density of this forcing function satisfies

$$\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = |\mathbf{k}|f^2 > 0 \quad (6)$$

at each point in space. For $\sigma = 0$, the forcing function is nonhelical, so σ is a measure of the kinetic helicity of the forcing. This rather complex forcing function has been employed in several previous works for being able to generate turbulent statistics even for moderate Reynolds numbers [25] and for us it is interesting because it allows us to choose the level of helicity added to the flow, an important element for the generation of large-scale dynamos.

The Reynolds number and magnetic Reynolds number are defined, respectively, as

$$Re = \frac{u_{rms}}{\nu k_f}, \quad R_m = \frac{u_{rms}}{\eta k_f}, \quad (7)$$

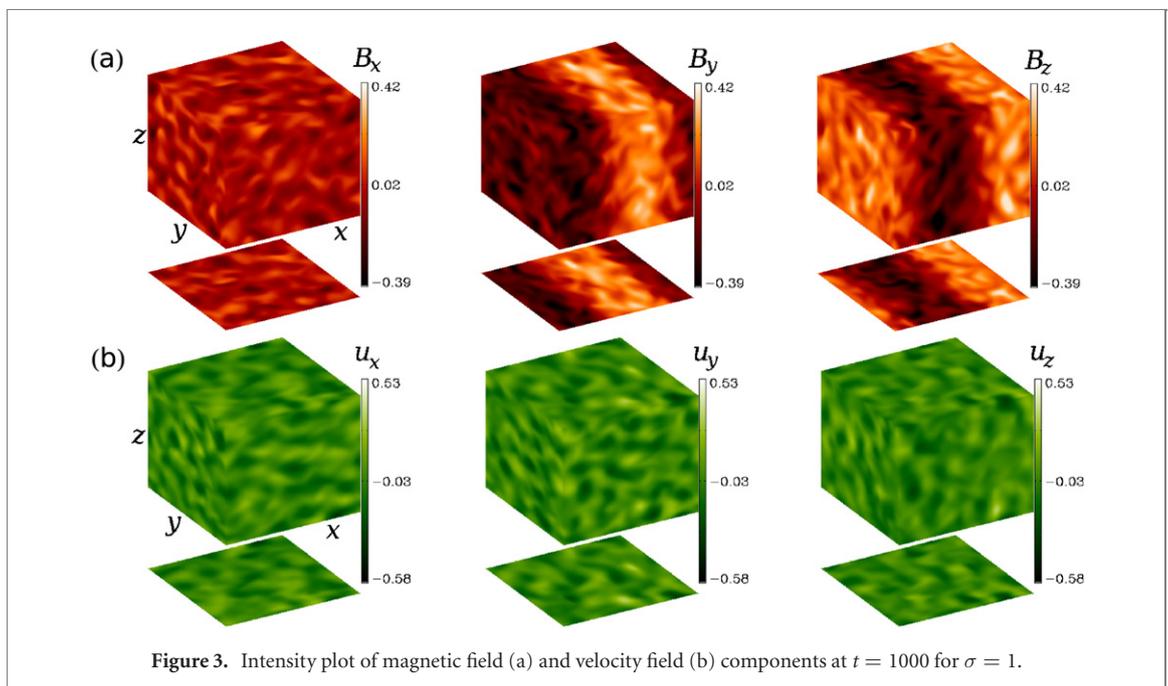
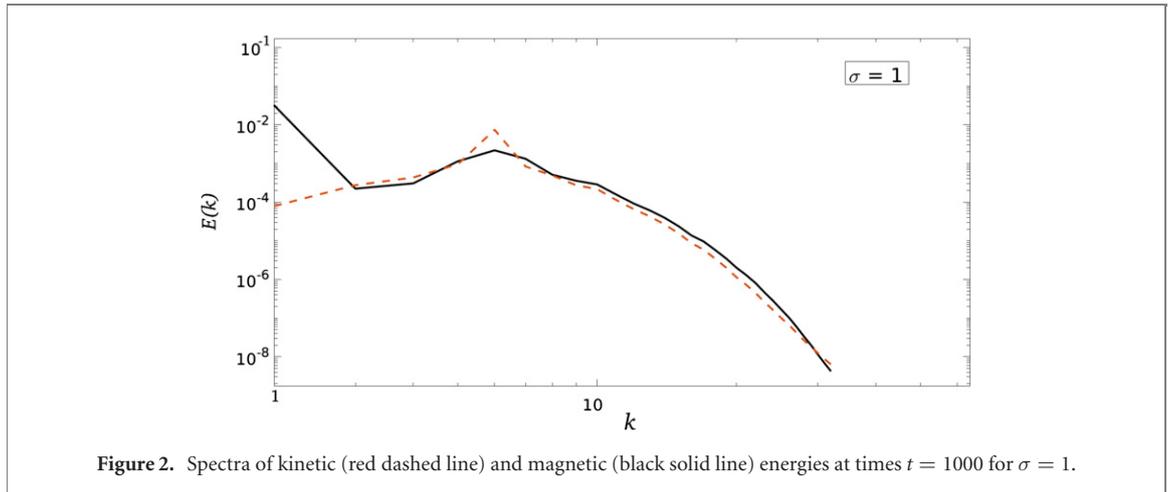
where $\nu = \mu/\rho$ is the kinematic viscosity, $u_{rms} \equiv \langle \mathbf{u}^2 \rangle^{1/2}$ is the root-mean-square (r.m.s) velocity and spatial average is denoted by $\langle \cdot \rangle$.

3. Results

First we must choose the grid resolution for the numerical simulation of equations (1)-(3). Figure 1 shows a comparison of the time series of the r.m.s of the magnetic (B_{rms} , black line) and velocity (u_{rms} , red line) fields in log-linear axes for simulations using 64^3 (a) and 128^3 (b) grid points. The parameter values are $f_0 = 0.07$, $\nu = \eta = 0.005$ and $\sigma = 1$. Initially, the seed magnetic field is too weak to impact the velocity field, but the velocity field has a strong impact on the induction equation (3), causing an exponential growth of the magnetic energy during the initial (kinematic) phase of the dynamo. The growth rate γ in this phase can be found as the slope of a fitted line in the log-linear plot, and it is approximately 0.05 for both resolutions. As the magnetic flux grows, it starts to strongly affect the velocity field through the Lorentz force in the momentum equation (2), causing a rapid decrease in the kinematic energy around $t = 200$ for both resolutions. Eventually, the mean magnetic and kinetic energies reach a saturated value which is approximately the same for both resolutions, for which we have $Re = R_m \approx 20$. Based on that, and considering the large amount of long time series that must be computed in this work, we adopted the lower resolution of 64^3 points in the following sections.

Next, we set $f_0 = 0.07$, $\nu = \eta = 0.005$ and vary σ as a control parameter. Using σ as the control parameter is a natural choice, since it is known that the presence of kinetic helicity in the flow can be favorable for magnetic field generation [26], although it is not strictly needed for either small- or large-scale dynamo to operate (see [27, 28] and references therein).

Since our forcing function has k around $k_f = 5$, kinetic energy is injected at this scale in the flow, inducing the production of a series of eddies with that wave number in the physical space. When $\sigma = 1$, helicity is maximum in the flow, causing an inverse energy transfer from $k = 5$ to $k = 1$ that has been related to the α -effect in [21]. This can be observed by plotting the one-dimensional power spectra, as in figure 2, where the kinetic (red dashed line) and magnetic (black solid line) spectra are computed as the integrated energy along spherical shells in the $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ space for $t = 1000$, well inside the nonlinearly saturated dynamo regime. It is clear that the kinetic spectrum is peaked at $k = 5$ and the magnetic at $k = 1$. This causes the appearance

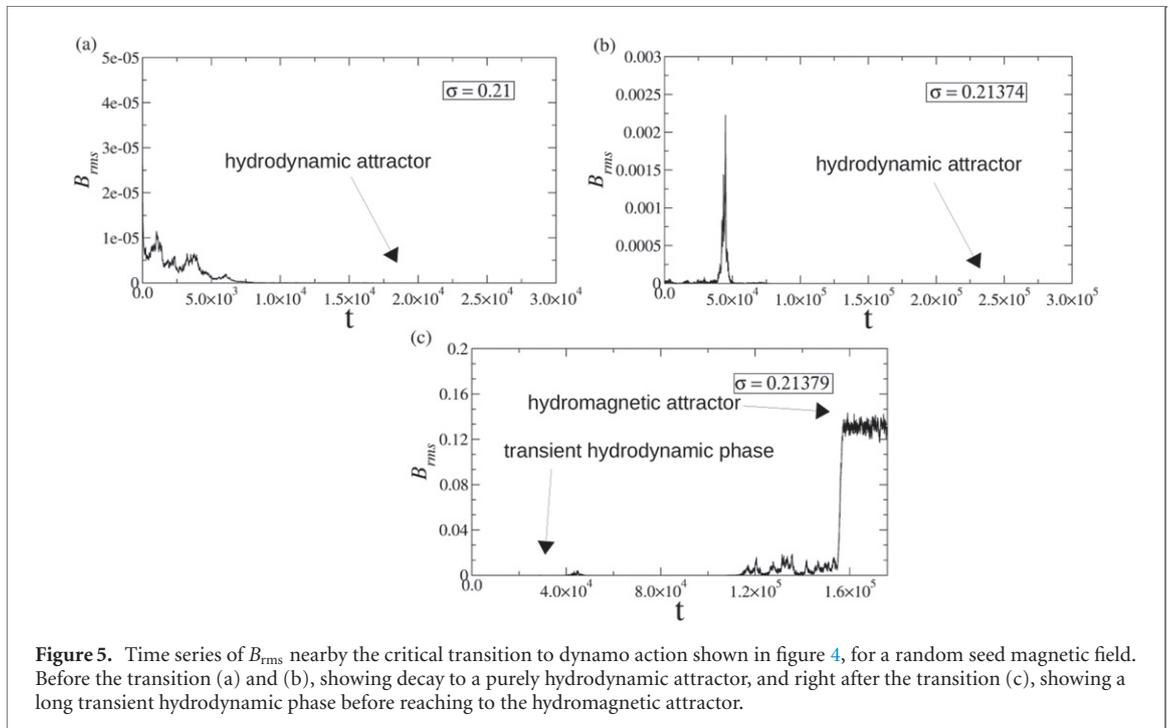
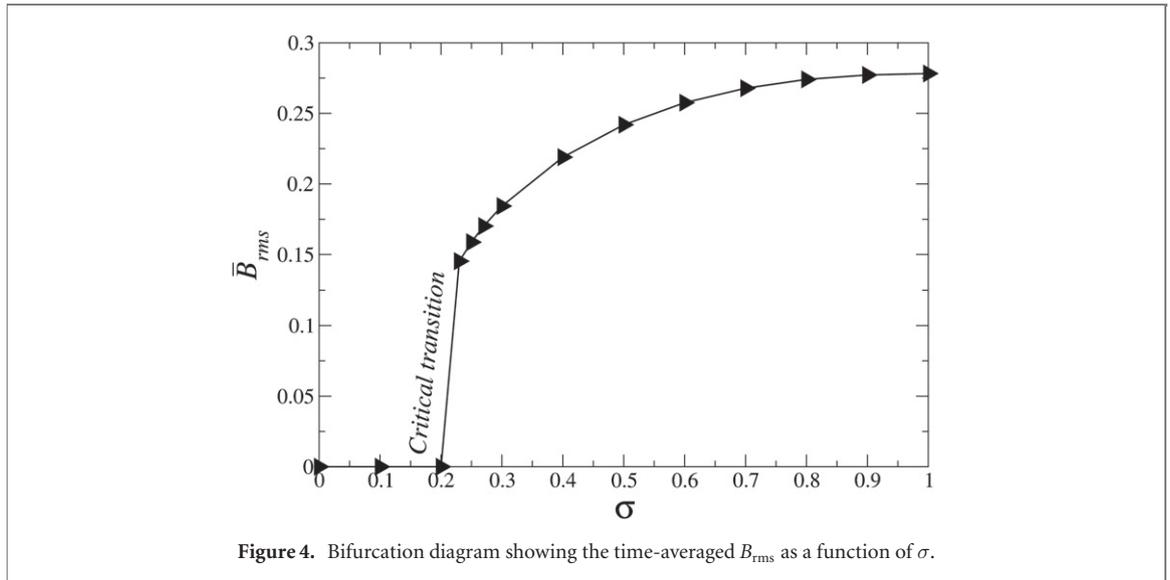


of large scale magnetic structures that are illustrated in the upper panel of figure 3. Note that B_y and B_z display a large scale oscillation in addition to the small scale fluctuations. The lower panel shows the velocity field components, whose largest structures are at the k_f scale.

3.1. Bifurcation diagram

The onset of dynamo action is shown in figure 4, which represents the bifurcation diagram as a function of σ for the time-averaged r.m.s magnetic field \bar{B}_{rms} . For each value of σ , a weak seed magnetic field is used as initial condition, the initial transient is discarded and then, time averages of B_{rms} are plotted. The magnetic energy of the attractor is zero when σ is below 0.21, implying that there is no dynamo action and the attracting state is purely hydrodynamic. For $\sigma > 0.21$ dynamo action takes place and there is a sudden jump in the B_{rms} of the attractor. The average magnetic energy of this *hydromagnetic attractor* keeps growing from then on, up to $\bar{B}_{\text{rms}} \approx 0.275$ for $\sigma = 1$. Note that at the critical transition, the hydrodynamic attractor loses stability and small amplitude magnetic perturbations are sufficient to drive the system toward the hydromagnetic attractor.

In previous works [29], transition to dynamo in MHD simulations in a periodic box with the helical ABC-forcing was shown to be due to a nonhysteretic *blowout bifurcation*. In this type of bifurcation, the dynamical system has a smooth invariant manifold within which lies a chaotic attractor for parameter values less than a critical value. As the parameter value is increased, a blowout bifurcation takes place, in which the manifold loses its attracting property and the chaotic set on it ceases to be an attractor. Right after the transition, solutions display *on-off intermittency*, i.e., they spend long times very near the manifold, then are 'blown out' of it in fast bursts where they move far from the manifold. After each burst, trajectories go back to the vicinity of



the manifold and the process repeats intermittently [20]. We tried in vain to find intermittent bursts in the transition to dynamo using the forcing function in the form (4). Figures 5(a) and (b) show that just before the transition, small magnetic perturbations decay and the solutions converge to the purely hydrodynamic ($\mathbf{B} = 0$) manifold. Thus, this manifold is attracting and there is a chaotic hydrodynamic attractor in it (based on observation, velocity field fluctuations are always chaotic in our work). Very near the transition, some magnetic bursts may occur as in figure 5(b) for $\sigma = 0.21374$, but they have a tiny amplitude and, eventually, the hydrodynamic manifold attracts the solution and no more bursts are observed. For $\sigma = 0.21379$, right after the transition, the solution stays near the manifold for a long time before suddenly jumping toward a chaotic attractor with high magnetic energy, the hydromagnetic attractor. This shows that the hydrodynamic manifold has lost transversal stability, since initial conditions with $\mathbf{B} = 0$ stay on the manifold for all parameter values, but even small nonzero values of \mathbf{B} (i.e., perturbations that are transversal to the hydrodynamic manifold) are able to expel trajectories away from the manifold and toward the hydromagnetic attractor. This means that the previous hydrodynamical attractor has also lost its transversal stability and what is left is a transient chaotic hydrodynamic phase. It could be said that the hydrodynamic chaotic attractor has become a chaotic saddle, but since this chaotic set still attracts all initial conditions on the hydrodynamic manifold, which itself has become unstable, we refer to this hydrodynamic chaotic set as a *relative chaotic attractor*, adopting a nomenclature

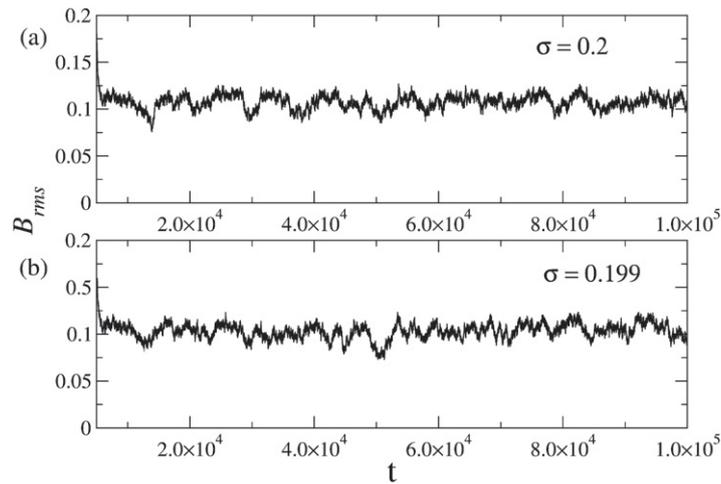


Figure 6. Time series of B_{rms} for two different values of σ smaller than the critical transition to dynamo shown in figure 4. The simulations started from a strong initial magnetic field obtained at $\sigma = 0.3$. Then the control parameter was reduced to (a) $\sigma = 0.2$ and (b) $\sigma = 0.199$. The solution does not decay toward the hydrodynamic attractor with null magnetic energy, indicating hysteresis.

introduced by Skufca *et al* [30]. Note that the stable manifold of the relative attractor in question is not a fractal structure, but the whole hydrodynamic subspace defined by $\mathbf{B} = 0$. The reason for the absence of high-amplitude intermittent bursts in our dynamo transition is explained in the next section.

3.2. Hysteresis and chaotic transients

Motivated by Karak *et al* [19], we search for hysteresis in this dynamo system. Although their work has an imposed uniform large-scale shear flow that is absent in our simulations, we still managed to find a hysteresis in our α^2 -dynamo model. Recall from section 3.1 that the transition to the hydromagnetic attractor takes place at $\sigma = \sigma_c \approx 0.21379$, where random seed magnetic fields are amplified; for $\sigma < \sigma_c$, the seed fields decay to zero, as the solutions approach a hydrodynamic attractor. However, if one takes as initial condition a state with a high energy magnetic field, it may not decay to the hydrodynamic attractor, as shown in figure 6. Here, the initial condition is a state taken from the hydromagnetic attractor at $\sigma = 0.3$; when the control parameter is reduced to $\sigma = 0.2$ (figure 6(a)) and $\sigma = 0.199$ (figure 6(b)), the solutions remain in the hydromagnetic attractor, with the magnetic energy still following the upper branch in figure 4. That is a signature of a hysteresis, as the saturation of the magnetic field amplitude depends on the previous history of the control parameter.

For lower values of σ , the hydromagnetic attractor loses stability and becomes a hydromagnetic chaotic saddle, leaving a chaotic transient in the region of phase space previously occupied by the attractor. Two of such long chaotic transients are exhibited in figure 7 in the form of time series of B_{rms} , and in figure 8 in the form of the spatiotemporal evolution of the B_y component averaged in the horizontal plane (B_x, B_y) as a function of z and time.

The hydromagnetic chaotic attractor is shown in figure 9(a) for $\sigma = 0.199$, where the chaotic trajectories represent the temporal variation of the components of the magnetic field vector $\mathbf{B} = (B_x(x_0, y_0, z_0, t), B_y(x_0, y_0, z_0, t), B_z(x_0, y_0, z_0, t))$ computed at the origin of the spatial domain $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$. A hydromagnetic chaotic saddle is shown in figure 9(b) for $\sigma = 0.198$. It hints that both chaotic sets occupy approximately the same region in the phase space, but a small variation in the parameter σ is sufficient to considerably reduce the size of the chaotic set, following the rapid decay of the magnetic energy in the upper branch of the bifurcation diagram in figure 4.

As illustrated by figure 7, the average duration of the chaotic transients decreases with decreasing σ . This observation suggests that the destabilization of the hydromagnetic chaotic attractor at $\sigma = \sigma_{bc} \approx 0.198$ is due to a boundary crisis, where a chaotic attractor collides with the boundary of its own basin of attraction, leading to the destruction of both the attractor and its boundary. A chaotic saddle is then left in place of the chaotic attractor and, as shown by Grebogi *et al* [31], the average duration τ of the chaotic transients near a boundary crisis decays with the distance from the crisis parameter value σ_{bc} following the law

$$\tau \sim (\sigma - \sigma_{bc})^\gamma, \quad (8)$$

for a negative γ . We computed τ for a set of values of σ close to σ_{bc} and obtained the results shown in figure 10, where the fitted line has slope $\gamma = -0.04$. The following procedure was adopted to produce this figure. First, a set of 100 initial conditions are selected from the hydromagnetic chaotic attractor at $\sigma = 0.3 > \sigma_{bc}$; then, those

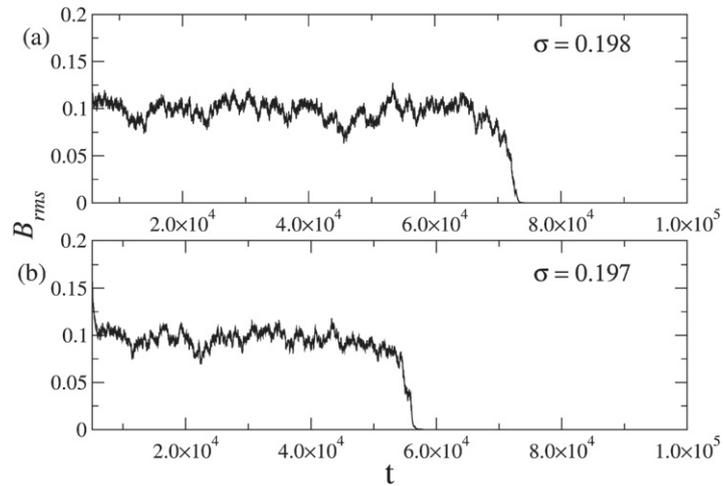


Figure 7. Time series of B_{rms} exhibiting hydromagnetic chaotic transients for (a) $\sigma = 0.198$ and (b) $\sigma = 0.197$.

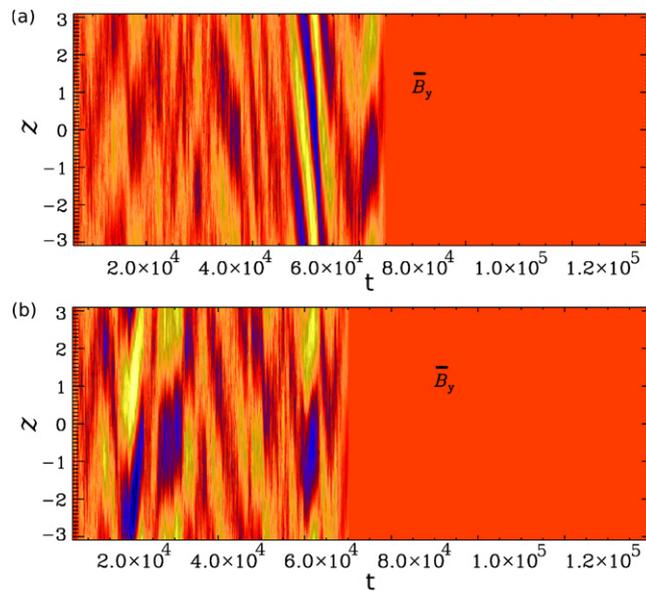
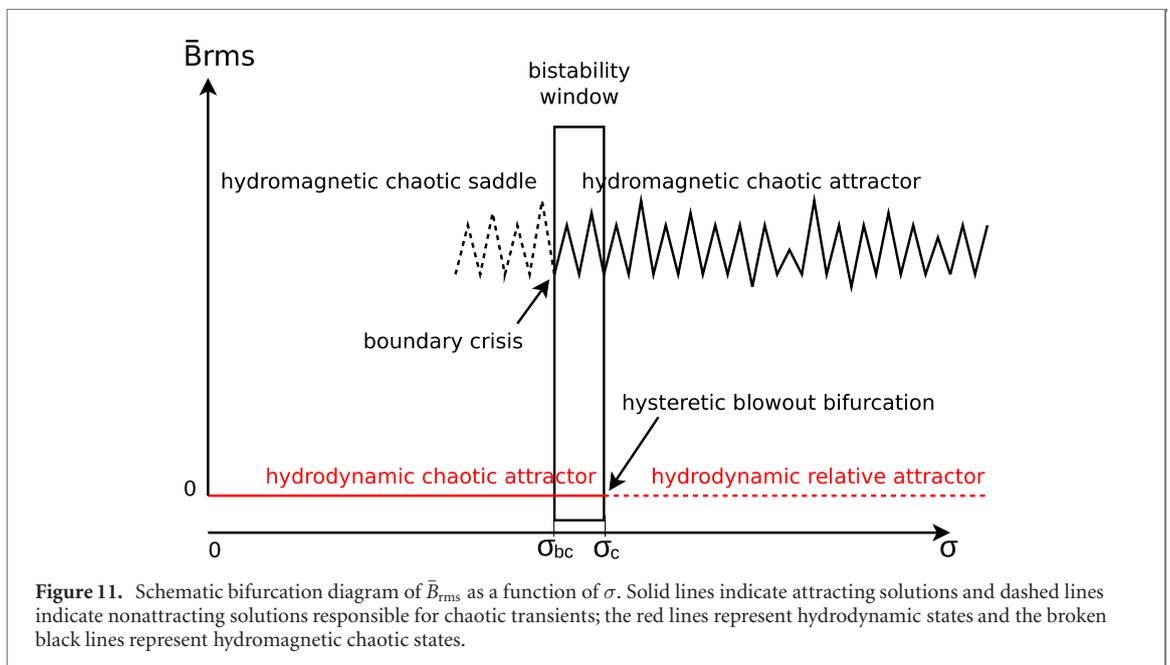
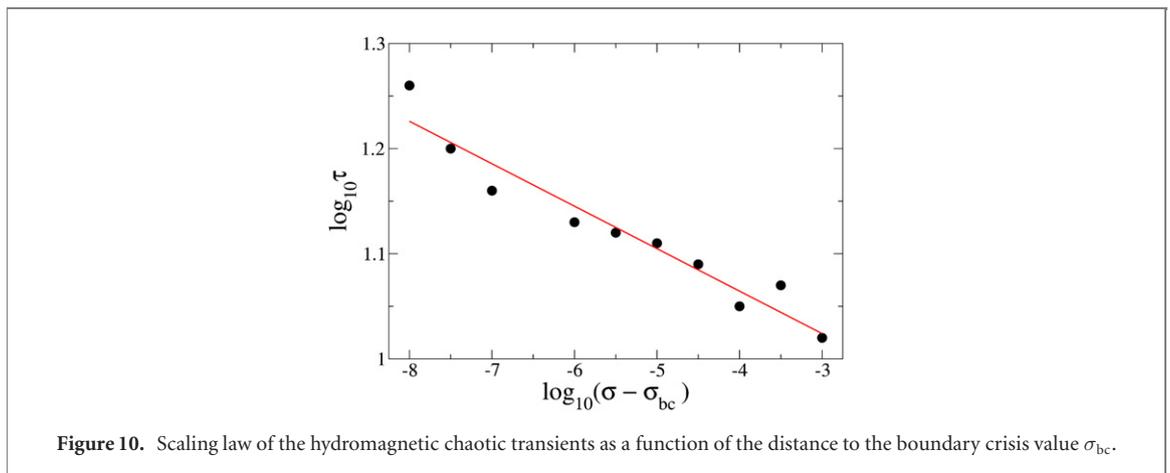
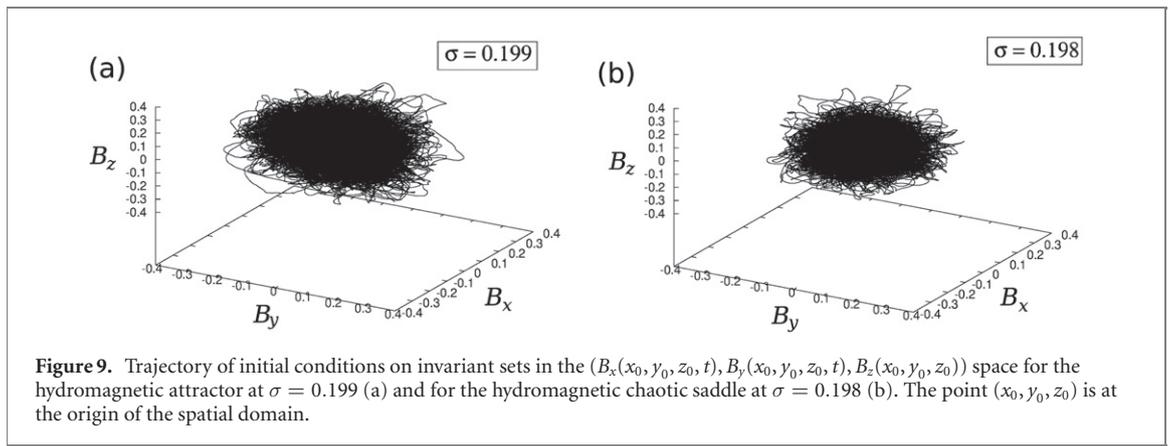


Figure 8. Spacetime evolution of the horizontal averages of B_y as a function of z and time for (a) $\sigma = 0.198$ and (b) $\sigma = 0.197$.

initial conditions are used to generate transient chaotic time series for a given $\sigma < \sigma_{bc}$; the transient time for each initial condition is recorded when B_{rms} is below a certain threshold ($B_{rms} < 0.01$) and the average transient time τ is computed from the 100 time series. This process is repeated for the 10 values of $\sigma < \sigma_{bc}$ shown in the figure. The fitted line was obtained by using linear regression.

Having established the existence of hysteresis in the current α^2 dynamo model, we go back to the previously raised question of why strong intermittent bursts are not observed in the transition to dynamo near $\sigma = 0.21$. As mentioned before, the transition in the ABC dynamo is due to a nonhysteretic blowout bifurcation, where intermittency is present [29]. Differently, the hysteresis in our model mean that there is a bistability region in the parameter space for $0.199 \leq \sigma \leq 0.213$ where two chaotic attractors coexist, the hydrodynamic and the hydromagnetic attractors. Our results reveal that a hysteretic blowout bifurcation is responsible for the dynamo transition. According to Ott and Sommerer [20], in this type of bifurcation there is an attracting chaotic set in the (hydrodynamic) invariant manifold and this chaotic set loses stability as the system parameter σ increases through a critical value σ_c (as in figure 4). For $\sigma < \sigma_c$ orbits not in the basin of the attractor on the invariant manifold go to some other (hydromagnetic) attractor off the manifold (as in figure 6). As σ increases through σ_c the attractor loses stability. For σ slightly greater than σ_c , points started near the manifold can experience a chaotic transient in which their orbits initially closely resemble those on the $\sigma < \sigma_c$ manifold attractor, but almost all points started near the manifold eventually move off to the other attractor off the manifold (as in figure 5(c)). Thus, on-off intermittency is not present in a hysteretic blowout bifurcation.



Our findings are summarized in figure 11. The horizontal line at $\bar{B}_{rms} = 0$ represents the hydrodynamic manifold, which is attracting for $\sigma < \sigma_c$ (solid red line) and contains a chaotic attractor. For $\sigma > \sigma_c$, the hydrodynamic chaotic attractor loses stability in a hysteretic blowout bifurcation and becomes a hydrodynamic ‘relative attractor’ (dashed red line), where hydrodynamic chaotic transients are observed for initial perturbations near the hydrodynamic manifold. In the upper branch, the solid black line represents the hydromagnetic chaotic attractor, which loses stability in a boundary crisis at σ_{bc} , giving rise to a hydromagnetic chaotic saddle

(dashed black line), responsible for chaotic transients involving the magnetic field. There is a bistability window between σ_{bc} and σ_c where the hydromagnetic chaotic attractor coexists with the hydrodynamic chaotic attractor.

4. Conclusion

We have found a transition to dynamo in a hysteretic blowout bifurcation in direct numerical simulations of an MHD α^2 dynamo model. Our transition differs from [29] in that theirs is due to a nonhysteretic blowout bifurcation and it differs from [19] in that they adopted an $\alpha - \omega$ dynamo model. To our knowledge, this is the first time that a hysteretic blowout bifurcation is observed in an α^2 dynamo model. Previously, nonhysteretic blowout bifurcations had been observed in low-dimensional models of truncated mean field dynamos [32, 33], a disk dynamo model [34], magnetoconvection [35], as well as in a 2D partial differential equation spherical dynamo model [36].

The hydromagnetic chaotic attractor in the upper hysteresis branch is destroyed in a boundary crisis. Although we have not formally characterized the blowout bifurcation and the boundary crisis, the behavior of the chaotic transients generated by our transitions strongly suggests that this is, indeed, the case. Thus, our work illustrates the importance of chaotic transients in revealing the complex dynamical transitions present in turbulent flows.

A final remark should be made on the importance of chaotic saddles in this transition. In the interval between σ_{bc} and σ_c in figure 11, there is the coexistence of two attractors, each with its own basin of attraction. Usually, the basin boundary is the stable manifold of an invariant set, which could be a saddle point or a chaotic saddle. In the case of a chaotic saddle, the boundary is fractal and chaotic transients are observed before convergence to one of the attractors. We have not checked the basin boundary, but since figure 5(c) shows apparently chaotic transient oscillations prior to the jump to the upper B_{rms} branch, this could be a signature of a chaotic saddle on the basin boundary. As noted by Ott and Sommerer [20], riddled basins are expected in hysteretic blowout bifurcations. A deeper knowledge of the basin boundary in the present system should be pursued in a future work.

Data availability statement

The data that support the findings of this study are available upon reasonable request from the authors.

Acknowledgments

DNO acknowledges financial support from Brazilian agency CAPES (88882.446973/2019-01). ELR acknowledges financial support from Brazilian agencies CAPES (88881.309066/2018-01) and CNPq (304449/2017-2), and from the Royal Society (UK). B B K acknowledges Department of Science and Technology (SERB/DST) for the financial support through the Ramanujan Fellowship (Project No. SB/S2/RJN-017/2018). R C acknowledges support from the Fundação para a Ciência e a Tecnologia (R&D Unit SYSTEC: POCI-01-0145-FEDER-006933/SYSTEC funded by ERDF—COMPETE2020—FCT/MEC—PT2020 extension to 2018, UID/EEA/00147/2020 and NORTE-01-0145-FEDER-000033 supported by ERDF—NORTE 2020) as well as the Russian Science Foundation (Project No. 19-11-00258 carried out in the Federal Research Center ‘Computer Science and Control’ of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation).

ORCID iDs

Erico L Rempel  <https://orcid.org/0000-0002-4971-5854>

Roman Chertovskih  <https://orcid.org/0000-0002-5179-4344>

References

- [1] Hof B, de Lozar A, Kuik D J and Westerweel J 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 214501
- [2] Kantz H and Grassberger P 1985 *Physica D* **17** 75
- [3] Hsu G-H, Ott E and Grebogi C 1988 *Phys. Lett. A* **127** 199
- [4] Nusse H E and Yorke J A 1989 *Physica D* **36** 137
- [5] Rempel E L and Chian A C-L 2003 *Phys. Lett. A* **319** 104
- [6] Rempel E L, Chian A C-L and Miranda R A 2007 *Phys. Rev. E* **76** 056217
- [7] Chian A C-L, Santana W M, Rempel E L, Borotto F A, Hada T and Kamide Y 2007 *Nonlinear Process Geophys.* **14** 17
- [8] Rempel E L, Proctor M R E and Chian A C-L 2009 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **400** 509

- [9] Rempel E L, Lesur G and Proctor M R E 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 044501
- [10] Brandenburg A and Subramanian K 2005 *Phys. Rep.* **417** 1
- [11] Krause F and Rädler K H 1980 *Mean-field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory* (Oxford: Pergamon)
- [12] Chabrier G and Küker M 2006 *Astrophys. J.* **446** 1027
- [13] Skumanich A 1972 *Astrophys. J.* **171** 565
- [14] Hartmann L W and Noyes R W 1987 *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **25** 271
- [15] Rengarajan T N 1984 *Astrophys. J. Lett.* **283** L63
- [16] Metcalfe T S, Egeland R and van Saders J 2016 *Astrophys. J. Lett.* **826** L2
- [17] Kitchatinov L and Nepomnyashchikh A 2017 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **470** 3124
- [18] Kitchatinov L L and Olemosky S V 2010 *Astron. Lett.* **36** 292
- [19] Karak B B, Kitchatinov L L and Brandenburg A 2015 *Astrophys. J.* **803** 95
- [20] Ott E and Sommerer J C 1994 *Phys. Lett. A* **188** 39
- [21] Brandenburg A 2001 *Astrophys. J.* **550** 824
- [22] Rempel E L, Chian A C-L, Brandenburg A, Muñoz P R and Shadden S C 2013 *J. Fluid Mech.* **729** 309
- [23] Brandenburg A, Candelaresi S and Gent F A 2020 *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **114** 1
- [24] Brandenburg A, Dobler W and Subramanian K 2002 *Astron. Nachr.* **323** 99
- [25] Haugen N E L and Brandenburg A 2004 *Phys. Rev. E* **70** 026405
- [26] Gilbert A D, Frisch U and Pouquet A 1988 *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **42** 151
- [27] Rasskazov A, Chertovskih R and Zheligovsky V 2018 *Phys. Rev. E* **97** 043201
- [28] Andrievsky A, Chertovskih R and Zheligovsky V 2019 *Phys. Rev. E* **99** 033204
- [29] Sweet D, Ott E, Finn J M, Antonsen T M and Lathrop D P 2001 *Phys. Rev. E* **63** 066211
- [30] Skufca J D, Yorke J A and Eckhardt B 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 174101
- [31] Grebogi C, Ott E, Romeiras F and Yorke J A 1987 *Phys. Rev. A* **36** 5365
- [32] Covas E, Ashwin P and Tavakol R 1997 *Phys. Rev. E* **56** 6451
- [33] Ashwin P, Rucklidge A M and Sturman R 2004 *Physica D* **194** 30
- [34] Krawiecki A and Matyjaśkiewicz S 2001 *Phys. Rev. E* **64** 036216
- [35] Ashwin P and Rucklidge A M 1998 *Physica D* **122** 134
- [36] Covas E, Tavakol R, Ashwin P, Tworowski A and Brooke J M 2001 *Chaos* **11** 404

Apêndice B - Métodos Numéricos para o Modelo CRB

Nos métodos espectrais a aproximação $u_N(x)$ para a solução $u(x)$ é representada na forma:

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k \varphi_k(x), \quad (\text{B.1})$$

onde, \hat{u}_k é o coeficiente para as chamadas funções de base $\varphi_k(x)$. Nos métodos espectrais as funções de base escolhidas são ortogonais, ou seja, são funções trigonométricas considerando problemas periódicos. Polinômios de Legendre ou Chebyshev são para problemas não periódicos. Geralmente, as funções de base são ortogonais em relação a algum peso $w(x)$, tal que:

$$(\varphi_k, \varphi_l)_w = c_k \delta_{k,l}, \quad (\text{B.2})$$

onde $c_k = \text{constante}$ e $\delta_{k,l}$ é o delta de Kronecher (PEYRET, 2002).

B.1 Expansões de Fourier

As expansões de Fourier são utilizadas para construir métodos espectrais para problemas de condições de contorno periódicas onde as funções de base são funções trigonométricas.

Seja u uma função definida em $[0, L]$ e tomando os valores em \mathbb{C} , a série de Fourier (formal) de u é definida como:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k e^{\alpha i k x}, \quad (\text{B.3})$$

onde $k \in \mathbb{Z}$ representa o número de onda, $\alpha = \frac{2\pi}{L}$ e os coeficientes de Fourier, $\hat{u}_k \in \mathbb{C}$ são dados por:

$$\hat{u}_k = \frac{1}{L} \int_0^L u(x) e^{-i\alpha k x} dx. \quad (\text{B.4})$$

Se a função u for real, pode-se escrever a forma real equivalente da série de Fourier

em uma série de senos e cossenos (ARFKEN; WEBER, 2007), tal como:

$$\hat{a}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{a}_k \cos(\alpha k x) + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{b}_k \sin(\alpha k x).$$

Assim como a forma equivalente da série de Fourier descrita acima, pode-se relacionar os coeficientes \hat{a}_k, \hat{b}_k à função real u por integrais definidas, tais como:

$$\begin{aligned} \hat{a}_0 &= \frac{1}{L} \int_0^L u(x) dx, \\ \hat{a}_k &= \frac{2}{L} \int_0^L u(x) \cos(\alpha k x) dx, \quad k > 0, \\ \hat{b}_k &= \frac{2}{L} \int_0^L u(x) \sin(\alpha k x) dx, \quad k > 0. \end{aligned}$$

Os coeficientes de Fourier \hat{u}_k podem ser representados em termos de \hat{a}_k e \hat{b}_k como:

$$\hat{u}_0 = \hat{a}_0, \quad \hat{u}_k = \frac{\hat{a}_k}{2} - \frac{\hat{b}_k}{2}i, \quad \hat{u}_{-k} = \frac{\hat{a}_k}{2} + \frac{\hat{b}_k}{2}i, \quad k > 0.$$

Se u é valor real, então

$$\hat{u}_k = (\hat{u}_{-k})^* \quad \forall k, \tag{B.5}$$

onde o asterisco (*) denota o complexo conjugado. Então, escrevemos:

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k e^{\alpha i k x}. \tag{B.6}$$

A derivada e a integral de uma dada função representada pela série de Fourier são calculadas da seguinte forma:

$$\frac{du}{dx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha i k) \hat{u}_k e^{\alpha i k x}, \quad \int_0^L u(x) dx = L \hat{u}_0.$$

Considerando a série de Fourier truncada de u , pode-se escrever:

$$u_N(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{u}_k e^{\alpha i k x}, \tag{B.7}$$

onde N é assumido como par. Pode-se determinar o erro de truncamento por:

$$\int_0^L (u - u^N)^2 dx = L \sum_{|k| > N/2} |\hat{u}_k|^2. \tag{B.8}$$

Aplicando a regra dos trapézios na integral (Eq. B.4), considerando uma grade equidistante $x_j = \frac{L}{N}, j = 0, 1, \dots, N$, e aplicando a regra da quadratura tem-se:

$$\frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j). \quad (\text{B.9})$$

(exata para os polinômios trigonométricos $\varphi_l(x) = e^{\alpha i l x}$, $|l| < N, l \in \mathbb{Z}$), os coeficientes de Fourier (Eq. B.4), tornam-se

$$\hat{u}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) e^{-\alpha i k x_j} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u_j e^{-2\pi i k j / N}, \quad u_j = u(x_j). \quad (\text{B.10})$$

A fórmula da quadratura (Eq. B.9) é inexata para $e^{\pm \alpha i N x}$:

$$\frac{1}{L} \int_0^L e^{\pm \alpha i N x} dx = 0 \neq \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{\pm \alpha i N x_j} = 1,$$

portanto, em nossas simulações $\hat{u}_{\pm \frac{N}{2}}$ é definido como zero, porque para um número de onda $k = \pm N/2$ os coeficientes de Fourier não podem ser calculados por (Eq. B.10) para $u(x) = e^{\pm \alpha i \frac{N}{2} x}$. As transformadas de Fourier (diretas e inversas) são definidas por

$$\hat{u}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u_j e^{-2\pi i k j / N}, \quad u_j = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} \hat{u}_k e^{2\pi i k j / N}. \quad (\text{B.11})$$

Utilizando o algoritmo transformada rápida de Fourier (do inglês, *Fast Fourier Transformation - FFT*) pode-se reduzir o custo computacional de transformada discretas de Fourier (Eq. B.11) de operações $O(N^2)$ para $O(N \log_2 N)$ (PRESS *et al.*, 1992).

B.2 Erro de *Aliasing*

O erro de *aliasing* aparece devido ao cálculo inexato da integral (B.4) pela (B.10). Utilizando a Eq. B.10, obtém-se

$$\hat{u}_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{u}_{k+Nl} = \hat{u}_k + \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \hat{u}_{k+Nl}, \quad (\text{B.12})$$

onde a última soma da Eq. B.12 é o chamado erro de *aliasing*.

A fonte do *aliasing* é o fato de que algumas funções de base tornam-se indistinguíveis

na grade de simulação x_j ,

$$e^{\alpha i(k+N) x_j} = e^{\alpha i k x_j}, \quad \forall k, l \in \mathbb{Z}.$$

Considerando as representações $u(x)$ e $v(x)$ como séries de Fourier discretas nos pontos da grade x_j :

$$u_j = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} \hat{u}_k e^{\alpha i k x_j}, \quad v_j = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} \hat{v}_k e^{\alpha i k x_j}, \quad j = 0, \dots, N-1.$$

Os coeficientes de Fourier do produto $s(x) = u(x)v(x)$ são

$$\check{s} = \sum_{\substack{m+n=k \\ |m|, |n| \leq N/2-1}} \hat{u}_m \hat{v}_k, \quad |k| \leq N-2,$$

requerendo $O(N^2)$ operações no espaço de Fourier. Aplicando o algoritmo *FFT* de $O(\log_2 N)$ operações, os seguintes coeficientes podem ser calculados:

$$\hat{s}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u_j v_j e^{-\alpha i k x_j}, \quad |k| \leq \frac{N}{2} - 1, \quad (\text{B.13})$$

afetado pelo erro de *aliasing*, ou seja,

$$\hat{s}_k = \check{s}_k + \sum_{m+n=\pm N} \hat{u}_m \hat{v}_n. \quad (\text{B.14})$$

Em nossas simulações utilizamos um procedimento para remover o erro de *aliasing* conhecido como regra dos 2/3 (ORSZAG, 1971). Reescrevendo o último termo da Eq. (B.14):

$$\sum_{m+n=k \pm N} \hat{u}_m \hat{v}_n = \sum_{p=-N/2+1}^{N/2-1} (\hat{u}_p \hat{v}_{k+N-p} + \hat{u}_p \hat{v}_{k-N-p}).$$

Portanto, para garantir a ausência de erros de *aliasing* nos modos de Fourier com o número de onda $|k| \leq [N/3]$, implementa-se o seguinte procedimento: zerar os harmônicos de Fourier \hat{u}_k, \hat{v}_k com os números de onda $|k| > [N/3]$, calcular u_j e v_j utilizando a transformada de Fourier inversa, calcular o produto $u_j v_j$, e por fim, utilizando a transformada de Fourier direta (Eq. B.13) calcular utilizando os coeficientes da transformada de Fourier direta \hat{s}_k .

Quando o método pseudoespectral é aplicado a equações diferenciais não-lineares não estacionárias, os erros de *aliasing* podem causar oscilações e instabilidades temporais da

solução numérica. Entretanto, os erros de *aliasing* são da mesma ordem que os erros de truncamento (Eq. B.8), portanto, se a solução for bem resolvida, o *aliasing* geralmente é insignificante (BOYD, 2001).

B.3 Transformações da Série de Fourier Seno e Cosseno

Considerando as transformações de Fourier que obedecem às condições de contorno de Dirichlet e Neumann. Para tais condições de contorno, podem ser consideradas expansões de Fourier de seno (condições de contorno de Dirichlet) e cosseno (condições de contorno de Neumann).

Seja $u(x)$ uma função $u : |0, 1| \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a condição de contorno de Dirichlet $u(0) = u(1) = 0$. Então, a função $u(x)$ pode ser representada por uma série de Fourier de seno, tal como:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k \text{sen}(\pi kx), \quad (\text{B.15})$$

onde \hat{u}_k são dados por:

$$\hat{u}_k = 2 \int_0^1 u(x) \text{sen}(\pi kx) dx. \quad (\text{B.16})$$

A função $u(x)$ pode ser definida em $N + 1$ pontos da grade

$$x_j = \frac{j}{N}, \quad u_j = u(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, N - 1.$$

A transformada discreta de Fourier senoidal pode ser deduzida aplicando a regra da quadratura Eq. (B.9), tem-se:

$$\hat{u}_k = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} u_j \text{sen} \left(\frac{\pi k j}{N} \right), \quad k = 1, \dots, N - 1, \quad (\text{B.17})$$

e a transformação de Fourier inversa é dada por

$$u_j = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{u}_k \text{sen} \left(\frac{\pi k j}{N} \right), \quad j = 1, \dots, N - 1. \quad (\text{B.18})$$

Considerando a condição de contorno de Neumann,

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=1} = 0,$$

então, pode-se expandir a função u em uma série de Fourier de cosseno, tal como:

$$\frac{\hat{u}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \cos(\pi kx), \quad (\text{B.19})$$

onde

$$\hat{u}_k = 2 \int_0^1 u(x) \cos(\pi kx) dx. \quad (\text{B.20})$$

As transformadas discretas de Fourier de cosseno e sua inversa são representadas como:

$$\hat{u}_k = \frac{2}{N} \left(\frac{u_0}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} u_j \cos\left(\frac{\pi k j}{N}\right) + \frac{u_N}{2} (-1)^k \right), \quad k = 0, \dots, N, \quad (\text{B.21})$$

e

$$u_j = \frac{\hat{u}_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} \hat{u}_k \cos\left(\frac{\pi k j}{N}\right) + \frac{\hat{u}_N}{2} (-1)^j, \quad j = 0, \dots, N. \quad (\text{B.22})$$

Neste capítulo utilizou-se a biblioteca *FFTW* em *FORTTRAN90* para calcular as transformadas discretas de Fourier (FRIGO; JOHNSON, 2005).

B.4 Discretização Espacial

Nesta seção é apresentada a discretização espacial para as soluções $(\mathbf{v}, \mathbf{b}, \theta)$ considerando o problema hidromagnético convectivo, tais soluções são representadas na forma de séries de Fourier tridimensional truncada.

A temperatura $\theta = \theta(\mathbf{x}, t)$ nos limites superior e inferior são mantidas constantes, ou seja, se anula nos limites horizontais. Então, θ pode ser expandido na direção x_3 , como:

$$\theta = \sum_{k_3=0}^{N/2} \hat{\theta}_{k_3}(x_1, x_2, t) \text{sen}(\pi k_3 x_3),$$

que é a série de Fourier senoidal representada na Eq.(B.15) em x_3 truncada em $k_3 = N/2$, onde os coeficientes de Fourier $\hat{\theta}_{k_3}(x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}$. Ao longo do eixo x_1 e x_2 a temperatura é considerada periódica, então $\hat{\theta}_{k_3}(x_1, x_2, t)$ também é periódica, representada como:

$$\theta = \sum_{k_1=-N/2+1}^{N/2-1} \sum_{k_2=-N/2+1}^{N/2-1} \sum_{k_3=0}^{N/2} \hat{\theta}_{k_1, k_2, k_3}(t) \text{sen}(\pi k_3 x_3) e^{\alpha i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}. \quad (\text{B.23})$$

O campo de velocidade $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (v_1(\mathbf{x}, t), v_2(\mathbf{x}, t), v_3(\mathbf{x}, t))$ do fluido, satisfazendo as condições de contorno livre de tensão nos planos horizontais (Eq. 5.5) e periódico nas

direções horizontais (Eq. 5.7) é representado como

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \sum_{k_1=-N/2+1}^{N/2-1} \sum_{k_2=-N/2+1}^{N/2-1} \sum_{k_3=0}^{N/2} \begin{pmatrix} \hat{v}_{k_1,k_2,k_3}^1(t) \cos(\pi k_3 x_3) \\ \hat{v}_{k_1,k_2,k_3}^2(t) \cos(\pi k_3 x_3) \\ \hat{v}_{k_1,k_2,k_3}^3(t) \sin(\pi k_3 x_3) \end{pmatrix} e^{\alpha i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}. \quad (\text{B.24})$$

Utilizando a notação vetorial para descrever os coeficientes de Fourier e os vetores de onda, escreve-se

$$\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}} = (\hat{v}_{\mathbf{k}}^1(t), \hat{v}_{\mathbf{k}}^2(t), \hat{v}_{\mathbf{k}}^3(t)), \quad \mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3), \quad \hat{\mathbf{k}} = (i\alpha k_1, i\alpha k_2, \pi k_3),$$

Agora, substituindo as séries de Fourier (B.23) e (B.24) em (5.3) e (5.4) e igualando os coeficientes de Fourier, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}}{dt} = \mathcal{P} \left(-P|\tilde{\mathbf{k}}|^2 \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}} + PR \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{\theta}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} + P\sqrt{Ta} \begin{pmatrix} \hat{v}_{\mathbf{k}}^2 \\ -\hat{v}_{\mathbf{k}}^1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ + \mathcal{P} \left((\mathbf{v} \times (\widehat{\nabla} \times \mathbf{v}))_{\mathbf{k}} - (\mathbf{b} \times (\widehat{\nabla} \times \mathbf{b}))_{\mathbf{k}} \right), \quad (\text{B.25}) \end{aligned}$$

onde \mathcal{P} denota a projeção no espaço de campos de divergências nulas. Os termos com chapéu largo denotam seus coeficientes de Fourier.

A equação de temperatura (5.4) pode ser escrita como:

$$\frac{d\hat{\theta}_{\mathbf{k}}}{dt} = -|\tilde{\mathbf{k}}|^2 \hat{\theta}_{\mathbf{k}} - \left((\widehat{\mathbf{v} \cdot \nabla}) \theta \right)_{\mathbf{k}} + \hat{v}_{\mathbf{k}}^3. \quad (\text{B.26})$$

B.5 Discretização Temporal - Diferenciação Temporal Exponencial

No método de diferenciação temporal exponencial (do inglês, *Exponential Time Differencing* (ETD)) multiplica-se ambos os lados de uma equação diferencial por algum fator integrante, então faz-se uma mudança de variável a qual permite resolver exatamente a parte linear, e por fim, utiliza-se um método numérico, em nosso caso, o Runge-Kutta de terceira ordem, para resolver a parte não linear (COX; MATTHEWS, 2002).

As equações (B.25) e (B.26) são resolvidas aplicando o método ETD utilizando como integrador numérico de passo de tempo o Runge-Kutta de terceira ordem.

Para cada coeficiente de Fourier, o sistema de equações (B.25) e (B.26) assume a

seguinte forma:

$$\frac{d\hat{w}}{dt} = c\hat{w} + F(\hat{w}, t), \quad (\text{B.27})$$

onde c é uma constante e $F(\hat{w}, t)$ representa os termos não lineares. Para derivar *ETD*, multiplica-se a equação (B.27) pelo fator de integração e^{-ct} , e integrando a equação (B.27) em um único passo de tempo de $t = t_n$ a $t = t_{n+1} = t_n + h$, tem-se:

$$\hat{w}(t_{n+1}) = \hat{w}(t_n)e^{ch} + e^{ch} \int_0^h e^{-c\tau} F(\hat{w}(t_n + \tau), t_n + \tau) d\tau, \quad (\text{B.28})$$

então, a integral no lado direito da equação (B.28) é calculada pelo método de Runge-Kutta de terceira ordem, utilizando o esquema *ETD3RK* (COX; MATTHEWS, 2002):

$$\hat{a}_n = \hat{w}_n e^{ch/2} + (e^{ch/2} - 1)F(\hat{w}_n, t_n)/c, \quad (\text{B.29})$$

$$\hat{b}_n = \hat{w}_n e^{ch} + (e^{ch/2} - 1)(2F(\hat{a}_n, t_n + h/2) - F(\hat{w}_n, t_n))/c, \quad (\text{B.30})$$

$$\hat{w}_{n+1} = \hat{w}_n e^{ch} + \{F(\hat{w}_n, t_n)[-4 - hc + e^{ch}(4 - 3hc + h^2c^2)] \quad (\text{B.31})$$

$$+ 4F(\hat{a}_n, t_n + h/2)[2 + hc + e^{ch}(-2 + hc)]$$

$$+ F(\hat{b}_n, t_n + h)[-4 - 3hc - h^2c^2 + e^{ch}(4 - hc)]\}/h^2c^3.$$

Os termos \hat{a}_n e \hat{b}_n aproximam os valores de \hat{w} em $t_n + h/2$ e $t_n + h$, respectivamente.

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO TD	2. DATA 25 de agosto de 2022	3. REGISTRO N° DCTA/ITA/TD-027/2022	4. N° DE PÁGINAS 195
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: Transições para caos em modelos de convecção e dínamo magnetohidrodinâmico.			
6. AUTOR(ES): Dalton Nunes Oliveira			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: Dínamo, Magnetohidrodinâmica, Bifurcação, Convecção Rayleigh-Bénard, Caos, Histerese, Sistemas Dinâmicos			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Magnetohidrodinâmica; Dinamômetros; Campos magnéticos; Bifurcação (matemática); Modelos de Rayleigh-Banernd; Caos; Histereses; Sistemas dinâmicos; Física.			
10. APRESENTAÇÃO: X Nacional Internacional ITA, São José dos Campos. Curso de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Dinâmica Não-Linear e Sistemas Complexos. Orientador: Prof. Dr. Erico Luiz Rempel coorientador: Prof. Dr. Roman Chertovskikh. Defesa em 02/08/2022. Publicada em 2022.			
11. RESUMO: A geração de campo magnético de grande escala é observada comumente em corpos astrofísicos, sendo que no caso do Sol esses campos se revelam por meio da distribuição de manchas solares. Apesar dos avanços computacionais dos últimos anos, a geração de tais campos permanece um tópico em aberto na física solar. Neste trabalho, o problema da geração de campos magnéticos de grande escala em astrofísica é explorado por meio de simulações numéricas de fluidos condutores e da teoria de sistemas dinâmicos. Primeiro, investiga-se a presença de transientes caóticos em um dínamo não-linear através de simulações numéricas das equações de magnetohidrodinâmica 3D com um forçante externo. Utilizando a helicidade cinética do fluxo como um parâmetro de controle, uma <i>bifurcação blowout histerética</i> é conjecturada como sendo a responsável pela transição para o dínamo de grande escala, levando a um aumento repentino na energia magnética do atrator. Este atrator hidromagnético é repentinamente destruído em uma crise de fronteira quando a helicidade cinética é reduzida. Tanto a <i>bifurcação blowout histerética</i> quanto a crise de fronteira geram longos transientes caóticos que são devidos, respectivamente, a uma sela caótica e a um atrator caótico relativo. Em seguida, faz-se uma exploração do modelo de convecção Rayleigh-Bénard com rotação. São construídos três diagramas de bifurcação para diferentes números de Taylor e de Rayleigh, visando investigar o papel da velocidade de rotação e da diferença de temperatura no sistema. Três cenários de histerese apresentando coexistência de atratores são apresentados. Depois, foi investigada a dinâmica do sistema ao se inserir um campo magnético semente e verificar seu crescimento ou decaimento em função de certos parâmetros de controle associados ao campo magnético e ao campo de velocidades. Este estudo indica que os atratores periódicos são os mais apropriados para a geração de campo magnético na convecção com rotação. Relatamos que uma <i>bifurcação blowout não histerética</i> é conjecturada como a responsável pela <i>intermitência “on-off”</i> encontrada em nosso estudo.			
12. GRAU DE SIGILO: (X) OSTENSIVO () RESERVADO () SECRETO			