

Tese apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Física Nuclear.

Rômulo Moreira Moita

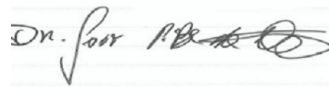
**ESTRUTURA DE MÉSONS
PSEUDO-ESCALARES LEVES E PESADOS NO
ESPAÇO DE MINKOWSKI**

Tese aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:



Prof. Dr. Tobias Frederico

Orientador



Prof. Dr. João Pacheco Bicudo Cabral de Melo

Coorientador

Prof^a. Dr^a. Emília Villani

Pró-Reitora de Pós-Graduação

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP - Brasil
2021

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Divisão de Informação e Documentação

Moreira Moita, Rômulo

ESTRUTURA DE MÉSONS PSEUDO-ESCALARES LEVES E PESADOS NO ESPAÇO DE MINKOWSKI / Rômulo Moreira Moita.

São José dos Campos, 2021.

171f.

Tese de Doutorado – Curso de Física. Área de Física Nuclear – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2021. Orientador: Prof. Dr. Tobias Frederico. Coorientador: Prof. Dr. João Pacheco Bicudo Cabral de Melo.

1. Sabores de Quarks . 2. Amplitude de Bethe-Salpeter. 3. Representação integral. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Título.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

MOREIRA MOITA, Rômulo. **ESTRUTURA DE MÉSONS PSEUDO-ESCALARES LEVES E PESADOS NO ESPAÇO DE MINKOWSKI** . 2021. 171f. Tese de Doutorado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Rômulo Moreira Moita

TÍTULO DO TRABALHO: **ESTRUTURA DE MÉSONS PSEUDO-ESCALARES LEVES E PESADOS NO ESPAÇO DE MINKOWSKI** .

TIPO DO TRABALHO/ANO: Tese / 2021

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta tese e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese pode ser reproduzida sem a autorização do autor.

Rômulo Moreira Moita
Av. Cidade Jardim, 679
12.233-066 – São José dos Campos–SP

ESTRUTURA DE MÉSONS PSEUDO-ESCALARES LEVES E PESADOS NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

Rômulo Moreira Moita

Composição da Banca Examinadora:

| | | | |
|--|------------------|---|-----------|
| Prof. Dr. Brett Vern Carlson | Presidente | - | ITA |
| Prof. Dr. Tobias Frederico | Orientador | - | ITA |
| Prof. Dr. João Pacheco Bicudo Cabral de Melo | Coorientador | - | UNICSUL |
| Prof. Dr. Odilon Lourenço | Interno-Titular | - | ITA |
| Prof. Dr. Wayne Leonardo Silva de Paula | Interno-Suplente | - | ITA |
| Prof. Dr. Lauro Tomio | Externo-Titular | - | IFT-Unesp |
| Prof. Dr. Bruno Werneck Mintz | Externo-Titular | - | UERJ |
| Prof. Dr. Bruno Omar El Bennich | Externo-Suplente | - | UNICSUL |

A minha esposa, Djanilde e meus filhos,
Moysés e Miguel .

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pelo dom da vida, a minha mãe, Maria Lúcia Moreira Moita e meu pai, Raimundo Nonato Cardoso Moita. Reconheço a ajuda e apoio, sobretudo por acreditarem que tudo isto seria possível, por parte de minha esposa Djanilde Salazar Vieira, meus filhos, Érick Moysés Vieira Moita e Ênio Miguel Vieira Moita. Lembrando das minhas irmãs, Alexsandra, Lúcelia, Rairana e Lylyane pelo apoio até aqui nesse momento. Importante citar meus quatro sobrinhos, que de uma forma ou outra participaram dessa caminhada, Lucas Gabriel, Geisielle, Maria Clara (Minha afilhada) e Maria Luiza.

Agradeço o Professor Dr. Manuel Malheiro por conduzir a coordenação do programa de pós-graduação em Física, durante quase toda minha estadia no Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Aos professores da divisão de Física Nuclear do ITA, que me orientaram nas disciplinas do doutorado, Prof. Dr. Manuel Malheiro (Quarks e Hádrons), Prof.Dr. Brett Vern Carlson (Métodos Matemáticos da Física e Física Nuclear I), Prof. Dr. Wayne Leonardo Silva de Paula (Teoria Quântica de Campos I e II ; Teorias de Calibre Não-Abeliana), Prof. Dr. Tobias Frederico (Mecânica Quântica II).

Também agradeço aos professores Wayne e Brett pelas contribuições no exame de qualificação do Doutorado, em agosto de 2021. Suas recomendações me ajudaram a melhor organizar o texto. Quero também aqui deixar registrado meus agradecimentos aos professores, que honrosamente são membros de minha banca de defesa, Prof.Dr Odilon Lourenço, Prof.Dr Lauro Tomio, Prof.Dr Bruno Werneck Mintz, Prof.Dr Bruno Omar El Bennich. Suas contribuições e observações referentes ao trabalho farão muita diferença para a conclusão final.

Aos amigos que dividiram a sala reservada aos estudantes da área de Física Nuclear, no prédio de Ciências Fundamentais do ITA. Abigail, que é uma moça muito esforçada e focada; Elisa, que se transformou durante o curso em uma física atenta e curiosa; Estevão Alves, que é fora do sério na computação científica e sempre me ajudou muito na parte numérica do meu projeto; Marcelo Lapola (o físico viajante), que tem o meu respeito e admiração, viajava semanalmente cerca de 480 km para ir até as aulas; Natan, que é um bom amigo e sempre esteve presente para tirar dúvidas e compartilhar conhecimento;

Odilon, que sempre tinha uma palavra amiga na hora certa nessa longa jornada; George, que muito me ajudou na minha chegada e adaptação ao ITA e a São José dos Campos; a Natalie, companheira de discursões nas listas em métodos Matemáticos e Física Nuclear I. Enfim, foram longas horas de debates sobre Física, Matemática, Computação, Inglês, Política, Sociedade, Projetos de Vida, etc... Sempre com bom humor e um bom café.

Aos amigos dos outros departamentos que conheci no DCTA (Departamento de Ciência e Tecnologia Aeroespacial), fica aqui meus agradecimentos também, os engenheiros de Telecomunicação: André (O Mineiro), Pablo(O Gaúcho) e o Sargento Juner; os engenheiros de Computação: Paulo e Moisés, este é um "mostro"na programação; e não poderia deixar faltar meu amigo, Engenheiro Elétrico Walber (O"Walbinho") que sempre tinha uma boa questão de matemática básica para ser analisada. Compartilhamos momentos ímpares de muita alegria, tanto dentro do ITA quanto fora. Não poderia me esquecer do amigo, Prof.Dr.Clayton Santos Mello, professor da UNIFAP (universidade federal do Amapá), que muito contribuiu durante na realização deste trabalho, pois continuei e aprimorei a sua pesquisa de doutorado.

Às funcionárias da secretaria de pós-graduação, Elenice, Sheila e Keila, fica aqui meu reconhecimento pelo trabalho rápido e dinâmico dessa equipe, sempre que precisei de documentos desse setor do ITA. Vale resaltar o importante papel do Comando da Força Aérea, durante esse curso de doutorado, no fornecimento das refeições diárias (café da manhã, almoço e jantar) no rancho (H-13). A todos os militares responsáveis pelo "rancho", meu muito obrigado!

Agradeço ao Prof. Dr. João Pacheco Bicudo Cabral de Melo por ter acompanhado desde o mestrado. Sob sua coorientação tive a oportunidade de compartilhar de sua experiência com a pesquisa científica, seu empenho e engajamento para a produção dos trabalhos publicados até aqui merece destaque nesses agradecimentos! E sempre me corrigido quando necessário sem nunca me desmotivar.

Principalmente, gostaria de agradecer ao meu professor orientador, Prof. Dr. Tobias Frederico, que dedicou muito do seu tempo a me orientar, e sempre teve muita paciência para comigo, mantendo sempre empenho e sentido prático na realização deste trabalho, mesmo a distância devido a pandemia de covid-19.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro durante o doutorado. A Seduc-Pi, pela minha liberação das minhas atividades em sala de aula de aula, fica meu reconhecimento e gratidão.

*"If I have seen farther than others,
it is because I stood on the shoulders of giants."*

— SIR ISAAC NEWTON

Resumo

Na primeira parte desse trabalho, as propriedades eletrofracas de mésons pseudoescalares D^+ e D_s^+ charmosos e leves são investigadas dentro de um modelo covariante de quark constituintes unificado. Os vértices quarks-antiquarks-mésons são assumidos como tendo uma forma simétrica pela troca dos momentos dos quarks. Esse tipo de modelo foi bem-sucedido na descrição das propriedades dos mésons pseudoescalares leves. A decomposição de sabor dos fatores de forma eletromagnéticos elásticos, raios de carga eletromagnéticos e as constantes de decaimento eletrofracas são calculadas. Com base nesses resultados é feita uma discussão sobre a quebra de simetria $SU(3)$ e $SU(4)$. Em particular, as propriedades do pión e kaon são comparadas para destacar a contribuição de Higgs para a estrutura desses mésons, representada pela diferença de massa dos quarks up(down) e estranho. Em uma segunda parte desse trabalho faz-se também um estudo da estrutura do pión no espaço de Minkowski, onde esse méson é descrito em termos de um modelo analítico da amplitude de Bethe-Salpeter combinada com resultados de QCD na rede. O modelo leva em consideração a massa do quark dependente no momento, que corresponde a componente escalar da auto-energia do quark e que é ajustada aos resultados de QCD na rede no calibre de Landau. O vértice pseudoescalar é diretamente associado à função de massa dependente de momento do quark, baseado na sua natureza de Bóson de Goldstone como justificado pela quebra dinâmica da simetria quiral. Nesse modelo o propagador do quark é descrito em termos de uma representação espectral, e com isso deduzimos a representação integral de Nakanishi da amplitude de Bethe-Salpeter para o pión. As funções pesos de Nakanishi foram derivadas das amplitudes escalares associadas a decomposição da amplitude de Bethe-Salpeter em diferentes bases de operadores no espaço spinorial de Dirac. Em particular, utilizamos uma base ortogonal que já foi adotada para resolver a equação Bethe-Salpeter no espaço de Minkowski. Finalmente, partindo da representação integral de Nakanishi calculamos vários observáveis para o pión, como a constante de decaimento, a probabilidade de valência e as distribuições de momento longitudinais e transversais associadas à componente de valência da função de onda na frente de luz.

Abstract

In the first part of this work, the electroweak properties of the pseudoscalar charm mesons, D^+ and D_s^+ , and the light ones, pion and kaon, are investigated within a unified covariant constituent quark model. The quark-antiquark-meson vertices are assumed to have a symmetrical shape by exchanging the quarks momenta. This type of model has been successful in describing the electroweak properties of light pseudoscalar mesons. Flavor decompositions of elastic electromagnetic form factors, charge radii, and electroweak decay constants are computed for this model and the results compared with lattice QCD calculations. Based on this study we discuss the SU(3) and SU(4) symmetry breaking. In particular, the pion and kaon properties are compared to highlight the contribution of the Higgs field to the structure of these mesons, represented by the difference in the constituent masses of the up(down) and strange quarks. In the second part of this work, the study of the structure of the pion in Minkowski space is performed, where this meson is described with an analytical model of the Bethe-Salpeter amplitude combined with QCD results from the Euclidean lattice. The model considers the dependence of the constituent quark mass with momentum, corresponding to the scalar component of the self-energy, which was fitted to the results of lattice QCD in the Landau gauge. The pion's pseudoscalar vertex is directly associated with the quark's mass function, based on its Goldstone boson nature, arising from the dynamic breaking of the chiral symmetry. In this model the quark propagator is described in terms of a spectral representation, and with this a Nakanishi integral representation of the pion's Bethe-Salpeter amplitude is deduced. The Nakanishi weight functions were derived from the scalar amplitudes associated with the decomposition of the Bethe-Salpeter amplitude in different operator bases in the Dirac spinor space. In particular, an orthogonal basis of Dirac operators was also used, which has already been adopted to solve the Bethe-Salpeter equation in Minkowski space. Finally, starting from the Nakanishi integral representation, several observables for the pion were calculated, such as the decay constant, the valence probability and the longitudinal and transverse momentum distributions associated with the valence component of the wave function on the light front.

Lista de Figuras

- FIGURA 2.1 – Representação diagramática da amplitude do decaimento eletrofraco do méson pseudoescalar. 31
- FIGURA 3.1 – Diagramas de Feynman, representando o elemento de matriz da corrente eletromagnética para um méson pseudoescalar, usados para calcular o fator de forma eletromagnético elástico a partir da componente J^+ , como detalhado no texto. 34
- FIGURA 5.1 – Fator de forma eletromagnético de pión em função de $q^2 < 0$. Painel superior: decomposição de sabor de $F_\pi(q^2)$ para o conjunto de parâmetros (A) (ver Tabela 4.1). Fator de forma do pión (linha sólida), contribuição u - $e_u F_{u\bar{d}u}$ (linha tracejada) e \bar{d} contribuição - $e_{\bar{d}} F_{\bar{d}u\bar{d}}$ (linha tracejada curta). Painel inferior: comparação entre os conjuntos de parâmetros (A) (linha sólida) e (B) (linha tracejada) com o modelo VMD (linha pontilhada) da Eq. (5.1). Dados experimentais de (BALDINI *et al.*, 2000; VOLMER *et al.*, 2001; HORN *et al.*, 2006; TADEVOSYAN *et al.*, 2007; HUBER *et al.*, 2008). 49
- FIGURA 5.2 – Fator de forma eletromagnético do káon em função de $q^2 < 0$. Painel superior: fator de forma do káon (linha sólida), contribuição u - $e_u F_{u\bar{s}u}$ (linha tracejada) e contribuição \bar{s} - $e_{\bar{s}} F_{u\bar{s}u}$ (linha tracejada curta), calculados com o conjunto de parâmetros (C) (veja tabela 4.1). Painel inferior: comparação entre os resultados de $|F_{K^+}|^2$ para os conjuntos de parâmetros (C) (linha completa), (D) (linha tracejada) e o modelo VMD da Eq. (5.2) (linha pontilhada). Dados experimentais das Refs. (AMENDOLIA *et al.*, 1986; DALLY *et al.*, 1980). 51

FIGURA 5.3 – As razões do fator de forma eletromagnético para o pión e káon usando os conjuntos de parâmetros (A) e (C), respectivamente. Razões entre as contribuições de sabor para os fatores de forma pión e káon: F_{K^+}/F_{π^+} (linha sólida); $e_u F_{u\bar{s}u}/(e_{\bar{d}} F_{\bar{d}u\bar{d}})$ (linha ponto-tracejada), $F_{u\bar{s}u}/F_{u\bar{d}u}$ (linha tracejada); $F_{\bar{s}u\bar{s}}/F_{\bar{d}u\bar{d}}$ (linha pontilhada); $e_{\bar{s}} F_{\bar{s}u\bar{s}}/(e_u F_{u\bar{s}u})$ (linha ponto-ponto-tracejada). Uma linha sólida fina é a referência para a simetria de sabor SU(3). 54

FIGURA 5.4 – Fatores de forma eletromagnéticos com as contribuições dos quarks correspondentes e comparação com cálculos de QCD na rede. Nossos resultados: fator de forma completo D^+ (linha sólida), contribuição do \bar{d} - $e_{\bar{d}} F_{\bar{d}c\bar{d}}$ (linha tracejada curta) e contribuição do c - $e_c F_{c\bar{d}c}$ (linha tracejada). VMD da Eq. (5.6) (linha pontilhada). Resultados de LQCD para fator de forma completo do D^+ (círculos), contribuição do \bar{d} (quadrados) e contribuição c (triângulos). Painel superior: comparação com resultados de LQCD (CAN *et al.*, 2013). Painel do meio: comparação com resultados de LQCD do conjunto (B1) (LI; WU, 2017). Painel inferior: comparação com os resultados de LQCD do conjunto (C1) (LI; WU, 2017). 56

FIGURA 5.5 – Fatores de forma eletromagnéticos para D_s^+ com as contribuições dos quarks correspondentes e comparação com cálculos de QCD na rede. Nossos resultados: fator de forma completo D_s^+ (linha sólida), contribuição do \bar{d} (linha tracejada curta) e contribuição do c (linha tracejada), VMD da Eq. (5.6) (linha pontilhada). Resultados para LQCD: fator de forma completo para D_s^+ (círculos), contribuição para \bar{s} (quadrados) e contribuição referente a c (triângulos). Painel superior: comparação com os resultados de LQCD do conjunto (B1) (LI; WU, 2017). Painel inferior: comparação com os resultados de LQCD do conjunto (C1) (LI; WU, 2017). 57

FIGURA 5.6 – As razões do fator de forma eletromagnético do pión (A) com D^+ e D_s^+ . Painel superior: F_{D^+}/F_{π^+} (linha sólida); $F_{\bar{d}c\bar{d}}/F_{\bar{d}u\bar{d}}$ (linha tracejada); $(e_{\bar{d}} F_{\bar{d}c\bar{d}})/(e_u F_{u\bar{d}u})$ (linha pontilhada-tracejada); $F_{c\bar{d}c}/F_{u\bar{d}u}$ (linha pontilhada); $(e_c F_{c\bar{d}c})/(e_{\bar{d}} F_{\bar{d}u\bar{d}})$ (linha ponto-ponto-tracejada). Painel inferior: $F_{D_s^+}/F_{\pi^+}$ (linha sólida); $F_{\bar{s}c\bar{s}}/F_{\bar{d}u\bar{d}}$ (linha tracejada); $e_{\bar{s}} F_{\bar{s}c\bar{s}}/(e_u F_{u\bar{d}u})$ (linha ponto-tracejada); $F_{c\bar{s}c}/F_{u\bar{d}u}$ (linha pontilhada); $e_c F_{c\bar{s}c}/(e_{\bar{d}} F_{\bar{d}u\bar{d}})$ (linha ponto-ponto-tracejada). A linha sólida fina é a referência para a simetria de sabor SU(4). 60

- FIGURA 5.7 – Raio de carga dos mésons D^+ e D_s^+ mésons como uma função da massa do quark charme, m_c , tendo todos os outros parâmetros fixados no conjunto (E) para D^+ (círculos) e no conjunto (F) para D_s^+ (quadrados). 61
- FIGURA 6.1 – Representação diagramática da amplitude de Bethe-Salpeter para o pión. 74
- FIGURA 6.2 – Funções peso $g_4(\gamma', z')$ para $\gamma' = 0.45 \text{ GeV}^2$ e z' de -1 a 1, provenientes do modelo covariante dado com funções peso na base não-ortogonal (linha preta tracejada), Eq. (6.42), com massas fixas e do modelo inspirado na QCD com auto energia escalar do quark dependente de momento (linha vermelha contínua). 77
- FIGURA 6.3 – Painel superior: $g_3(\gamma', z')$, calculada com modelo massa running, em função de z' para $\gamma' = 0.45 \text{ GeV}^2$. Painel inferior: $g_3(\gamma', z')$ para $z' = 0.50$ (linha vermelha contínua) e -0.50 (linha preta tracejada) em função de γ' . (γ' em unidades de GeV^2) 78
- FIGURA 6.4 – Função peso $g_1(\gamma', z')$ em função de z' para $\gamma' = 0.45 \text{ GeV}^2$ proveniente do modelo covariante com massa constante (linha preta tracejada) e com o modelo do pión inspirado na QCD (linha vermelha contínua). 82
- FIGURA 6.5 – Função peso $g_2(\gamma', z')$ em função de z' para $\gamma' = 0.45 \text{ GeV}^2$ proveniente do modelo covariante com massa constante (linha preta tracejada) e com o modelo do pión inspirado na QCD (linha vermelha contínua). 85
- FIGURA 6.6 – Painel superior: $\psi_1(\gamma, z)$ em função de z para γ igual a 1 GeV^2 (linha azul) e 1.5 GeV^2 (linha preta). Painel inferior: $\psi_1(\gamma, z)$ em função de γ [GeV^2] em função de γ para z igual a 0.75 e -0.75 (linhas tracejada azul e laranja) e 0.5 e -0.5 (linhas tracejada preta e verde). 87
- FIGURA 6.7 – Painel superior: $\psi_2(\gamma, z)$ em função de z para γ igual a 0.5 GeV^2 (linha preta), 0.75 GeV^2 (linha vermelha) e 1 GeV^2 (linha azul). Painel inferior: $\psi_2(\gamma, z)$ em função de γ [GeV^2] para z igual a 0.75 e -0.75 (linhas tracejada azul e laranja) e 0.5 e -0.5 (linhas tracejada preta e verde). 88
- FIGURA 6.8 – Painel superior: $\psi_3(\gamma, z)$ em função de z para γ igual a 0.5 GeV^2 (linha preta), 0.75 GeV^2 (linha vermelha) e 1 GeV^2 (linha azul). Painel inferior: $\psi_3(\gamma, z)$ em função de γ [GeV^2] em função de γ para z igual a 0.5 (linha contínua verde) e -0.5 (linha tracejada preta). . . 89

- FIGURA 6.9 – Painel superior: $\psi_4(\gamma, z)$ em função de z para γ igual a 1 GeV^2 (linha azul), 1.5 GeV^2 (linha preta). Painel inferior: $\psi_4(\gamma, z)$ em função de γ [GeV^2] em função de γ para z igual a 0.75 e -0.75 (linhas tracejada azul e laranja) e 0.5 e -0.5 (linhas tracejada preta e verde). 90
- FIGURA 6.10 – Comparação entre as amplitudes $\psi_1(\gamma, z)$ em função de z provenientes das amplitudes de BS do modelo covariante com massa do quark constante (linha vermelha) e o inspirado na QCD (linha azul), para $\gamma = 1 \text{ GeV}^2$ 91
- FIGURA 6.11 – Comparação entre as amplitudes $\psi_2(\gamma, z)$ em função de z provenientes das amplitudes de BS do modelo covariante com massa do quark constante (linha vermelha) e o inspirado na QCD (linha azul), para $\gamma = 1 \text{ GeV}^2$ 91
- FIGURA 6.12 – Comparação entre as amplitudes $\psi_4(\gamma, z)$ em função de z provenientes das amplitudes de BS do modelo covariante com massa do quark constante (linha vermelha) e o inspirado na QCD (linha azul), para $\gamma = 1 \text{ GeV}^2$ 92
- FIGURA 7.1 – Painel superior: Componente de spins antialinhados dos quarks da função de onda de valência, $\Psi_{\uparrow\downarrow}(\gamma, z)$, em função de z , para $\gamma = k_{\perp}^2$ igual a 0.5 GeV^2 (linha preta), 0.75 GeV^2 (linha azul) e 1 GeV^2 (linha vermelho). Painel inferior: $\Psi_{\uparrow\downarrow}(\gamma, z)$ em função de γ [GeV^2] para z igual a 0.5 e -0.5 (linhas verde contínua e tracejada preta) e 0.75 e -0.75 (linhas laranja contínua e tracejada azul). 99
- FIGURA 7.2 – Painel superior: Componente de spins alinhados dos quarks da função de onda de valência, $\Psi_{\uparrow\uparrow}(\gamma, z)/\sqrt{\gamma}$, em função de z , para $\gamma = k_{\perp}^2$ igual a 0.5 GeV^2 (linha preta), 0.75 GeV^2 (linha azul) e 1 GeV^2 (linha vermelha). Painel inferior: $\Psi_{\uparrow\uparrow}(\gamma, z)/\sqrt{\gamma}$ em função de γ [GeV^2] para z igual a 0.5 e -0.5 (linhas verde contínua e azul tracejada) e 0.75 e -0.75 (linhas laranja contínua e preta tracejada). 100

- FIGURA 7.3 – . Comparação das distribuições de momento longitudinais da valência obtidas com o modelo do pión inspirado na QCD (linhas contínuas) e de cálculos da equação de BS no espaço de Minkowski (PAULA *et al.*, 2021) (linhas traço-pontos). Painel superior: distribuições de momento longitudinal para os spins dos quarks antialinhados (normalizadas a 1). Painel do meio: distribuições de momento longitudinal da valência para os spins dos quarks alinhados (normalizadas a 1). Painel inferior: distribuições total de momento longitudinal (normalizadas a 1). 109
- FIGURA 7.4 – Comparação das distribuições de momento transversais da valência obtidas com o modelo do pión inspirado na QCD (linhas contínuas) e de cálculos da equação de BS no espaço de Minkowski (PAULA *et al.*, 2021) (linhas traço-pontos), $gamma \equiv k_{\perp}^2$ em GeV^2 . Painel superior: distribuições de momento transversal para os spins dos quarks antialinhados (normalizadas a 1). Painel do meio: distribuições de momento transversal da valência para os spins dos quarks alinhados(normalizadas a 1). Painel inferior: distribuições total de momento transversal (normalizadas a 1). 110
- FIGURA A.1 – Posição dos pólos em k^- no plano complexo para os intervalos (i) : $0 < k^+ < p^+$ (painel esquerdo) e (ii) : $p^+ < k^+ < p'^+$ (painel direito). . . 123

Lista de Tabelas

| | |
|--|----|
| TABELA 4.1 – Observáveis eletrofracos estáticos dos mésons pseudo-escalares. A notação para as parametrizações (A, B, C, D, E, F), correspondem aos diferentes valores dos parâmetros usados no modelo para $\pi^+, \pi^+, K^+, K^+, D^+, D_s^+$, respectivamente. Em particular, os resultados com os modelos (B) e (D), vem da Ref. (YABUSAKI <i>et al.</i> , 2015). Os dados experimentais encontram-se nas Refs. (ZYLA <i>et al.</i> , 2020; ABLIKIM <i>et al.</i> , 2019). As massas $m_q, m_{\bar{q}}, \mu_M$ e a constante de decaimento (f_M) são dadas em [MeV] na tabela. O raio de carga (r_M) é expresso em [fm]. | 40 |
| TABELA 4.2 – Constantes de decaimentos e raio de carga do π^+ (conjunto A) e K^+ (conjunto C) para o presente modelo, comparado com outros resultados da literatura, assim como os dados experimentais do PDG (ZYLA <i>et al.</i> , 2020). As constantes de decaimentos estão em [MeV], e os raios de cargas estão em [fm]. | 42 |
| TABELA 4.3 – Constantes de decaimento eletrofracas em [MeV] e os raios de carga em [fm] dos mésons D^+ e D_s^+ para o nosso modelo e comparados com vários resultados da literatura. Dados experimentais de (ZYLA <i>et al.</i> , 2020; ABLIKIM <i>et al.</i> , 2019). | 43 |
| TABELA 4.4 – Observáveis para os mésons pseudoescalar D^+ e D_s^+ , com as massas dos conjuntos oriundos de cálculos de LQCD, (B1) e (C1) (LI; WU, 2017). Os parâmetros do nosso modelo (E,F): $m_c = 1623$ MeV, $m_u = 384$ MeV, $m_s = 508$ MeV, $\mu_{D^+} = 1607$ MeV, $\mu_{D_s^+} = 1685$ MeV. As massas e constantes de decaimento estão em MeV. O raio são dados em fm. | 45 |

| | |
|--|-----|
| TABELA 4.5 – Decomposição de sabor do raio de carga dos mésons D^+ e D_s^+ . Comparação com resultados de LQCD do ajuste linear (L) e para o ajuste quadrático (Q) extrapolando para a massa física do pión da referência (CAN <i>et al.</i> , 2013), e dos conjuntos (B1) e (C1) usados na referência (LI; WU, 2017). | 46 |
| TABELA 5.1 – Razões parciais para os fatores de forma eletromagnéticos do pión (A) e káon (C) em 10 GeV^2 , em comparação com o modelo NJL da referência (HUTAURUK <i>et al.</i> , 2016). | 52 |
| TABELA 5.2 – Razão dos fatores de forma eletromagnéticos para pión (A) e káon (C), em comparação com cálculos de (HUTAURUK <i>et al.</i> , 2016; BA- KULEV <i>et al.</i> , 2001; SHI <i>et al.</i> , 2014) e dados experimentais na região tipo-tempo (PEDLAR <i>et al.</i> , 2005; SETH <i>et al.</i> , 2013). | 53 |
| TABELA 6.1 – Extremos do suporte da integral (6.25) em γ' definidos pela Eq. (6.26) considerando os intervalos $0 \leq \alpha \leq 1$ e $-1 \leq z' \leq 1$, | 69 |
| TABELA 7.1 – Propriedades estáticas do pión ($m_\pi = 140 \text{ MeV}$) para alguns con- juntos de parâmetros. As seguintes quantidades são apresentadas: a probabilidade de valência, P_{val} (terceira coluna), e sua decomposição nos estados de spins alinhados, $P_{\uparrow\uparrow}$ (quarta coluna), e antialinhados, $P_{\uparrow\downarrow}$ (quinta coluna), a constante de decaimento do pión carregado, f_π (sexta coluna), e a razão adimensional, f_π/m_i (sétima coluna). Note que usamos uma convenção da constante de decaimento do pión que difere de um fator de $\sqrt{2}$ em relação à adotada no estudo do modelo covariante. | 106 |

Sumário

| | | |
|-----|---|----|
| 1 | INTRODUÇÃO | 19 |
| 2 | MODELO COVARIANTE: MÉSONS PSEUDO-ESCALARES | 27 |
| 2.1 | Acoplamento quark-meson: Lagrangiano efetivo | 27 |
| 2.2 | Amplitude de Bethe-Salpeter | 28 |
| 2.3 | Constante de decaimento eletrofraca | 30 |
| 3 | MODELO COVARIANTE: CORRENTE ELETROMAGNÉTICA | 33 |
| 3.1 | Definições | 33 |
| 3.2 | Decomposição de sabor | 35 |
| 3.3 | Técnica da Frente de Luz | 36 |
| 4 | MODELO COVARIANTE: OBSERVÁVEIS ESTÁTICOS | 39 |
| 4.1 | Píon e Káon | 41 |
| 4.2 | D^+ e D_s^+ | 43 |
| 5 | MODELO COVARIANTE: FATOR DE FORMA ELETROMAGNÉTICO | 47 |
| 5.1 | Píon e Káon | 47 |
| 5.2 | D^+ e D_s^+ | 54 |
| 6 | O PÍON INSPIRADO NA QCD | 62 |
| 6.1 | Propagador do quark vestido | 63 |
| 6.2 | Amplitude de Bethe-Salpeter | 65 |
| 6.3 | Representação Integral: parametrização de Feynman | 67 |
| 6.4 | Representação Integral: base não-ortogonal | 70 |
| 6.5 | Representação Integral: base ortogonal | 74 |

| | | |
|------------|---|------------|
| 6.5.1 | Derivação da função peso $g_1(\gamma', z')$ | 79 |
| 6.5.2 | Derivação da função peso $g_2(\gamma', z')$ | 83 |
| 6.6 | Projeção na frente de luz | 84 |
| 7 | PÍON INSPIRADO NA QCD: VALÊNCIA | 93 |
| 7.1 | Função de onda de valência | 93 |
| 7.1.1 | Tratamento algébrico | 95 |
| 7.2 | Componentes de spin da valência | 97 |
| 7.3 | Probabilidade de valência e distribuições de momento | 100 |
| 7.4 | Normalização | 102 |
| 7.5 | Constante de decaimento | 104 |
| 7.6 | Resultados | 106 |
| 8 | CONCLUSÕES | 111 |
| | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 115 |
| | APÊNDICE A – DETALHAMENTO DA INTEGRAÇÃO EM k^- NA FÓRMULA DE MANDELSTAM | 122 |
| | APÊNDICE B – CÁLCULO DE $\gamma^+\Psi(k, p)\gamma^+$ | 125 |
| | APÊNDICE C – INTEGRAÇÃO EM k^- DA FUNÇÃO DE ONDA DE VALÊNCIA. | 127 |
| | APÊNDICE D – f_π VIA COMPONENTE DA FUNÇÃO DE ONDA COM SPIN ANTIALINHADA | 134 |
| | APÊNDICE E – CÁLCULO DO TRAÇO DA CONDIÇÃO DE NORMALIZAÇÃO | 137 |
| E.1 | Calculando a integral da função \mathcal{A}_1 | 143 |
| E.1.1 | Calculando a integral da função \mathcal{A}_2 | 144 |
| E.1.2 | Calculando a integral da função \mathcal{A}_3 | 145 |

1 Introdução

A exploração, através de métodos teóricos e experimentais, da estrutura e do espectro dos hádrons é fundamental para compreendermos os aspectos não perturbativos da cromodinâmica quântica (QCD) (RYDER, 1996), que é a teoria atualmente aceita para descrever fenômenos nessa escala de energia. Dentro dessa teoria de campos de calibre não-abeliana os graus de liberdade são quarks e glúons que interagem entre si e carregam carga de "cor". Os quarks formam uma representação fundamental, associada a um triplete do grupo de cor SU(3). Enquanto que os glúons formam um octeto do grupo de cor. Além disso os quarks têm sabores: os leves up (u), down (d), strange (s), e os pesados charm (c), bottom (b) e top (t), sendo nossa matéria comum formada pelos quarks up e down.

A massa dos quarks é oriunda do campo de Higgs (CLOSE, 1979), que porém não é suficiente para explicar a massa do núcleon que é composto pelos quarks leves up e down. Esses graus de liberdade estão confinados dentro dos hádrons que carregam cor nula, e a curtas distâncias quarks e glúons interagem fracamente, fenômeno conhecido como liberdade assintótica (COLLINS, 2013). Outra característica fascinante da QCD é a geração dinâmica de massa para os quarks leves up, down e strange, pela quebra espontânea da simetria quiral, que resulta na massa do núcleon e dos hádrons constituídos por quarks estranhos, como por exemplo a partícula Λ (GEORGI, 1984).

Os quarks leves, vestidos pela interação forte, são entendidos como graus de liberdade efetivos associados aos quarks constituintes, que são graus de liberdade utilizados amplamente na literatura para o modelamento tanto do espectro como da estrutura dos hádrons (CLOSE, 1979). O modelo de quarks constituintes, em particular, formulado na frente de luz, é um arcabouço teórico prático para resolver problemas não perturbativos da física hadrônica (BRODSKY *et al.*, 1998), permitindo assim uma melhor compreensão da interação forte, que em última instância governa a subestrutura atômica da matéria.

Em hádrons formados por quarks leves e pesados temos a presença simultânea da quebra dinâmica da simetria quiral e da quebra explícita, que são determinantes, por exemplo, para as propriedades de mésons pseudoescalar leves-pesados, tais como D e D_s . Nesses mésons os quarks leves, vestidos pela interação forte, interagem com um parceiro

pesado com sua massa oriunda do acoplamento com o bóson de Higgs, associado com a quebra explícita da simetria quiral.

A quebra espontânea da simetria quiral leva a geração de massa dinâmica dos quarks leves (u , d , s), e associado a este mecanismo, temos os bósons de Goldstone pseudoescalares, que nesse caso correspondem ao pión e ao káon (HORN; ROBERTS, 2016; AGUILAR *et al.*, 2019)). No setor pesado o quark c basicamente adquire sua massa do acoplamento ao campo de Higgs, quebrando explicitamente a simetria de sabor SU(4). Dessa forma, o pión e o káon apresentam uma enorme separação em relação as massas dos mésons pseudoescalares pesados formados por $c\bar{d}$ e $c\bar{s}$ (ver por exemplo (BRAMBILLA *et al.*, 2014; CHEN *et al.*, 2017)).

A evolução das propriedades estruturais dos mésons pseudoescalares dentro do multiplete SU(4) permite estudar a competição entre os dois mecanismos de geração de massa na medida em que a massa do quark constituinte muda de algumas centenas de MeV, da ordem de $\Lambda_{QCD} \sim 300$ MeV (ZYLA *et al.*, 2020), para a escala de GeV. Ressaltamos que cada méson é a expressão de toda a complexidade da QCD no espaço de Minkowski, por exemplo sua função de onda na frente de luz (FL), é constituída por um conjunto infinito de componentes Fock (BAKKER *et al.*, 2014). Além disso, o quark vestido, que traz toda a complexidade não-perturbativa da QCD em longas distâncias, é considerado o grau de liberdade efetivo para a descrição desses estados, como reconhecido desde a era primordial dos estudos com modelos à quark constituintes.

Destacamos em particular o papel preponderante da componente de valência da função de onda na frente de luz, ou seja, aquela que está associada ao menor número de constituintes possíveis para o hádron e que carrega seus números quânticos, no caso do exemplo do pión essa componente responde por 70% da normalização da função de onda (PAULA *et al.*, 2021; YDREFORS *et al.*, 2021).

Hoje em dia, os estudos de QCD para os mésons estão muito além desses modelos com vários grupos realizando cálculos na rede (LQCD) em todo o mundo. Além disto, a vestimenta dos quarks leves e glúons tem sido obtida por meio de cálculos de LQCD (ver, por exemplo, (OLIVEIRA *et al.*,)), e com isso consolida o conceito de graus de liberdade efetivos associados aos quarks e glúons constituintes, como sendo os “blocos de construção” em descrições fenomenológicas dos hádrons. Por outro lado, os quarks pesados são pouco vestidos por glúons, sendo o acoplamento com o Higgs o mecanismo dominante para adquirirem suas massas.

As escalas de massa bem distintas dos quarks leves e do charm, devem manifestar-se na estrutura interna dos mésons pesados-leves, como já foi reconhecido há muito tempo (ver, por exemplo, (NEUBERT, 1994)). O estudo combinado dos mésons leves e pesado-leve, onde a maior componente de suas funções de onda são as não-exóticas, ou seja, um

par quark-antiquark, permite acompanhar a transição na estrutura interna quando um quark leve é substituído por um pesado. Na situação extrema em que a massa do quark pesado tende a infinito, temos que este localiza-se no centro de massa do méson, enquanto o quark leve explora o confinamento da cor oriundo de efeitos não-perturbativos da QCD em longas distâncias.

Dentro do multiplete de $SU(4)$ os mésons pseudoescalares mudam de sua natureza de bóson de Goldstone, no caso do pión e do káon, para os mésons D e D_s , onde suas massas estão associadas a quebra explícita da simetria quiral. Essa transição deve manifestar-se na estrutura e, em particular, nas distribuições de carga dos quarks nesses mésons. No limite de quarks pesados, parte da carga deve ser distribuída próximo ao centro de massa do méson e outra parte em distâncias maiores, enquanto que no caso do pión e do káon, as contribuições do quark e do antiquark devem apresentar distribuições de carga semelhantes, desde que a carga individual dos quarks seja devidamente fatorada.

Esta modificação abrupta na estrutura dos mésons pseudoescalares leves para os pesado-leves, deve necessariamente refletir-se nos fatores de forma eletromagnéticos (EM) e, em particular, nas decomposições nos sabores, correspondentes às contribuições individuais de cada quark para o fator de forma. Informações experimentais sobre os fatores de forma EM do pión e káon estão disponíveis nas referências (BALDINI *et al.*, 2000; VOLMER *et al.*, 2001; HORN *et al.*, 2006; TADEVOSYAN *et al.*, 2007; HUBER *et al.*, 2008) e (DALLY *et al.*, 1980; AMENDOLIA *et al.*, 1986), respectivamente.

Além disso, o raio de carga do pión e do káon são bem determinados experimentalmente como sendo, respectivamente, $r_\pi = 0,672 \pm 0,08$ fm e $r_K = 0,560 \pm 0,03$ fm (veja(ZYLA *et al.*, 2020) e referências). No entanto, ainda faltam informações experimentais sobre os fatores de forma elástico dos estados hadrônicos carregados D e D_s , o que seria essencial para comprovar as modificações estruturais oriundas das diferenças de características entre um bóson de Goldstone e os mésons pseudoescalares pesado-leves.

Por outro lado, ainda não temos os valores experimentais dos raios de carga do D^+ e do D_s^+ , porém existem alguns resultados obtidos com cálculos de QCD na rede (CAN *et al.*, 2013) para massas dos píons entre 300 e 700 MeV. O raio de carga extraído desses cálculos foi em torno de 0,4 fm para o D^+ e um pouco menor para D_s^+ , indicando a diminuição espacial da distribuição de carga desses mésons em relação ao pión e ao káon carregados. Isto é uma das consequências do acoplamento mais intenso do campo de Higgs aos quarks pesados em oposição aos leves que adquirem suas massas dinamicamente com uma pequena contribuição do Higgs. A decomposição de sabor realizada para os raios de carga desses mésons pesados (CAN *et al.*, 2013) claramente corrobora com a imagem física delineada anteriormente.

Além disso, o fator de forma EM e a decomposição de sabor correspondente para D^+

até momentos transferidos quadráticos de 1.5 GeV^2 (CAN *et al.*, 2013) e para D^+ e D_s^+ abaixo 1.2 GeV^2 foram obtidas em cálculos de LQCD (LI; WU, 2017). É de se notar que a informação escassa sobre a estrutura EM dos mésons pseudoescalares pesado-leves contrasta com o conhecimento das suas constantes de decaimento eletrofraca, tanto experimentalmente como também através de cálculos de LQCD (veja por exemplo (ZYLA *et al.*, 2020)). Ressaltamos que as constantes de decaimento eletrofracas trazem informações sobre a função de onda de valência do méson em curtas distâncias que devem ser levadas em consideração no ajuste dos parâmetros de modelos fenomenológicos.

A discussão acima, motivou a primeira parte dessa tese, onde apresentamos o estudo da estrutura de mésons pseudoescalares leves e pesado-leves, representados pelas distribuições de carga dos mésons π^+ , K^+ , D^+ e D_s^+ dentro de um modelo covariante da amplitude de Bethe-Salpeter (ABS) com um número mínimo de parâmetros de escala, além das massas dos quarks constituintes. Lembramos que a amplitude de Bethe-Salpeter corresponde ao elemento da matriz de um operador de interpolação entre o vácuo e o estado do méson que é construído com um número mínimo de operadores de campo que permitem caracterizar os números quânticos do hádron formado (ITZYKSON; ZUBER, 2012).

O modelo adotado para a amplitude de Bethe-Salpeter é construído com um quark e um antiquark constituinte com massas fixas, e um vértice pseudoescalar determinado por um parâmetro de escala. Esse modelo é a generalização daquele proposto na Ref. (MELO *et al.*, 2002), e que foi aplicado com um certo sucesso na descrição das propriedades eletrofracas do pión. Posteriormente o modelo foi usado para estudar o fator de forma eletromagnético do káon e do D^+ (YABUSAKI *et al.*, 2015; EL-BENNICH *et al.*, 2008). De uma forma geral, podemos também obter a componente de valência da função de onda da frente de luz, que é a projeção da amplitude de Bethe-Salpeter na hiper-superfície do espaço de Minkowski associada ao plano-nulo ($x^+ = t + z = 0$) (DIRAC, 1949) (veja, por exemplo, as Refs. (SALES *et al.*, 2000; FREDERICO; SALMÈ, 2011; MEZRAG *et al.*, 2016)). Deste modo podemos também explorar as distribuições de momento dos quarks de valência (ver, por exemplo, (FANELLI *et al.*, 2016)).

Na primeira parte do presente trabalho, o modelo descrito para a ABS é utilizado nos cálculos dos fatores de forma EM dos mésons π^+ , K^+ , D^+ e D_s^+ , onde também são estudadas as decomposições em sabor, partindo-se da fórmula de Mandelstam (MANDELSTAM, 1955), que descreve o elemento de matriz da corrente eletromagnética, correspondente a absorção do fóton virtual pelo méson. Essa fórmula é representada pelo diagrama triangular de Feynman, que permite o cálculo de forma relativamente simples, como detalhado na tese.

Como dissemos acima, o modelo tem graus de liberdade de quarks constituintes u , d , s e c , com massas fixas e um parâmetro de escala que determina o vértice quark-méson para cada méson pseudoescalar. Esses parâmetros de escala são ajustados ao valor bem

conhecido da constante de decaimento do méson considerado. O modelo é covariante e conserva a corrente eletromagnética, desde que o vértice quark-fóton do modelo satisfaz a identidade de Ward-Takahashi (ITZYKSON; ZUBER, 2012). Os resultados dessa parte do trabalho estão apresentados na Ref. (MOITA *et al.*, 2021) .

Aprimorando o modelo que descrevemos acima, e motivados por entender mais profundamente a estrutura dos mésons leves no espaço de Minkowski, concomitantemente com a quebra espontânea da simetria quiral, estudamos na segunda parte da tese o pión em um modelo analítico que reúne essas duas características (MELLO *et al.*, 2017), e que foi apresentado na tese de doutorado de Clayton Santos Mello no ITA (MELLO, 2017).

O modelo proposto em (MELLO *et al.*, 2017) parametrizou de forma simples e analítica a função de massa do quark de acordo com resultados de QCD na rede e ao mesmo tempo, dada a natureza de bóson de Goldstone do pión, a própria componente pseudo-escalar do vértice quark-pión, como consequência das identidades de Ward-Takahashi-axiais no limite de massa de corrente nula dos quarks up e down (veja, por exemplo, (CLOËT; ROBERTS, 2014; HORN; ROBERTS, 2016)).

É relevante mencionar que ainda é um enigma como as componentes de Fock da função de onda do pión na frente de luz são construídas em termos de quarks e glúons vestidos pela interação forte via QCD para além da valência (ARRINGTON *et al.*, 2021). No nosso estudo ficaremos por enquanto restritos à componente de valência da função de onda do pión e as distribuições de momento associadas, de interesse na construção da sua imagem tridimensional, como detalhado na revisão “Science Requirements and Detector Concepts for the Electron-Ion Collider: EIC Yellow Report (KHALEK; AL., 2021). Um dos tópicos de grande relevância para a pesquisa experimental nesse futuro colisor de elétrons e íons é, fundamentalmente, detalhar o entendimento dos diversos aspectos da estrutura e espectro hadrônicos, e com isso ampliar o conhecimento do confinamento e da origem dinâmica da massa na QCD.

Acabamos de introduzir a segunda parte do trabalho de tese, onde é estendido o estudo realizado na primeira parte quando consideramos um modelo covariante mais simples do pión com grau de liberdade de quark constituinte com massa fixa e uma forma analítica do vértice quark-pión, sem procurar relacionar o modelo de forma estrita com a quebra espontânea da simetria quiral. O modelo proposto na Ref. (MELLO *et al.*, 2017) tem como base os cálculos da QCD da rede que preveem para os quarks leves uma auto-energia dependente do momento (PARAPPILLY *et al.*, 2006; OLIVEIRA *et al.*,). A massa dependente de momento em escalas do infravermelho obtida nos cálculos de QCD na rede resulta em um valor compatível com a massa do quark constituinte de cerca de 0.3 GeV.

Portanto, os modelos fenomenológicos definidos no espaço de Minkowski poderiam incorporar uma massa de quark dependente do momento, com a condição de que deveria ser

consistente com os cálculos de QCD da rede no espaço Euclidiano, i.e., para momentos tipo-espaço, o que de fato foi proposto na tese de doutorado de Clayton Santos Mello. Nesse trabalho procuramos estudar em mais detalhes a estrutura analítica da amplitude de BS desse modelo, utilizando representações integrais já aplicadas para resolver a equação de BS no espaço de Minkowski para estado ligado de dois férmions com spin total nulo (CARBONELL; KARMANOV, 2010; PAULA *et al.*, 2016; PAULA *et al.*, 2017).

Para aprofundar o estudo do pión, serão utilizadas nessa segunda parte as representações integrais das funções de dois e três pontos, ou seja, a representação espectral de Källén-Lehmann (KL) (ITZYKSON; ZUBER, 2012) e a representação integral de Nakanishi (NAKANISHI, 1963), respectivamente. Essas representações são úteis para ampliar a aplicabilidade de cálculos realizados no espaço Euclidiano, como os de QCD na rede ou como aqueles utilizando métodos contínuos para obter as soluções das equações de Schwinger-Dyson e Bethe-Salpeter, permitindo construir a amplitude de Bethe-Salpeter no espaço de Minkowski. Desta forma, é possível acessar distribuições partônicas como já realizado no caso do método contínuo (CHANG *et al.*, 2013), como também resolvermos as equações de Schwinger-Dyson para a auto-energia do quark no espaço de Minkowski (SAULI *et al.*, 2007; SOLIS *et al.*, 2019; MEZRAG; SALMÈ, 2021).

Particularmente em relação à estados ligados, a representação integral de Nakanishi (RIN) foi pioneiramente aplicada para resolver a equação de Bethe-Salpeter no espaço de Minkowski em modelos escalares nas Refs. (KUSAKA *et al.*, 1997; KUSAKA; WILLIAMS, 1995). Após uma década a técnica foi aliada à projeção na frente de luz no caso do modelo bosônico (KARMANOV; CARBONELL, 2006; FREDERICO *et al.*, 2014) e em seguida aplicada para estados ligados de dois férmions com spin total nulo (CARBONELL; KARMANOV, 2010; PAULA *et al.*, 2016; PAULA *et al.*, 2017). Recentemente, essa técnica foi aplicada para resolver a equação de Bethe-Salpeter em um modelo do pión com quarks e glúons massivos (PAULA *et al.*, 2021).

Iremos realizar o estudo da estrutura do pión usando agora a representação integral de Nakanishi da amplitude de Bethe-Salpeter estendendo os resultados obtidos no espaço Euclidiano para o de Minkowski. Isso traz um ganho na compreensão da estrutura analítica dessa amplitude, indo além do trabalho (MELLO *et al.*, 2017), que é o ponto de partida do presente estudo. Além disso, obtemos a probabilidade de valência e as distribuições de momento longitudinal e transversal, mantendo de forma consistente o resultado para a constante de decaimento do pión em acordo com o valor experimental, como originalmente obtido no modelo. Apenas lembrando, na Ref. (MELLO *et al.*, 2017) foi também obtido o fator de forma EM do pión em acordo com os dados experimentais. A função de massa variável do quark tem uma forma com um único pólo adicionada a massa do quark de corrente (ver, por exemplo, (DUDAL *et al.*, 2016)). A partir disso, construímos a densidade espectral associada ao propagador do quark na representação espectral de

KL, e em seguida deduzimos as funções peso da representação integral de Nakanishi para as diversas componentes da amplitude de BS do pión. Essas funções peso da RIN são construídas considerando-se a representação de KL do propagador do quark e apenas a componente pseudoescalar do vértice pión-quark, que está diretamente associada com a função de massa.

Iremos comparar dois conjuntos de funções peso de Nakanishi, um para o modelo da ABS onde os quarks leves têm massas dependente de momento e outro para massas constantes, i.e., quando desconsideramos essa dependência, para caracterizarmos o efeito da vestimenta dinâmica da massa. Além disso temos diferentes bases de operadores no espaço de Dirac para expandirmos a ABS do pión, uma delas é a base ortogonal, que já foi usada para resolver a equação de BS na aproximação de escada (PAULA *et al.*, 2017; PAULA *et al.*, 2021), e uma outra base é não-ortogonal. Essa última permite uma derivação relativamente simples das funções peso de Nakanishi. Essas funções são associadas com as amplitudes escalares que multiplicam os operadores dessas bases no espaço de Dirac. As funções peso associadas as diferentes bases estão relacionadas por transformações lineares, cuja a origem encontra-se na decomposição das bases entre si.

Em seguida, usando a representação integral de Nakanishi das amplitudes escalares associadas à base ortogonal, projetamos cada uma delas na frente de luz, e com isso obtemos as duas componentes da função de onda de valência do pión, correspondentes ao par quark-antiquark com seus spins individuais anti-alinhados e alinhados. A primeira componente corresponde ao limite não-relativístico de uma função de onda de spin zero, com maior probabilidade, e a segunda componente é de origem puramente relativística com menor probabilidade, somando ambas as probabilidades teremos nesse modelo um total para a componente de valência próximo a 70%, como iremos mostrar. É conveniente ressaltar que essa imagem do pión obtida com o modelo de massa do quark dependente de momento, resultando em que 30% de seu estado está associado, presumivelmente, à componentes de Fock além da valência, concorda com a solução da equação de BS no modelo dinâmico com quarks e glúons constituintes, já mencionado anteriormente (PAULA *et al.*, 2021). Finalmente, analisamos as distribuições de momento longitudinal e transversal e suas decomposições nessas duas componentes de spin da função de onda de valência do pión.

Vamos descrever brevemente o conteúdo dos capítulos a seguir.

No capítulo 2, uma forma analítica para a amplitude de Bethe-Salpeter em termos de quarks constituintes para os mésons pseudo-escalares, π^+ , K^+ , D^+ e D_s^+ é proposta dentro de um modelo covariante unificado, e a constante de decaimento eletrofraca é derivada, usando a sua forma escrita em termos da componente de spin dos quarks anti-alinhados da função de onda de valência na frente de luz.

No capítulo 3, é construída a corrente eletromagnética dos mésons pseudo-escalares para o processo elástico, e realizada a decomposição de sabor dos fatores de forma elásticos. Apresentamos também o método para tratar numericamente as integrações de “loop” da fórmula de Mandelstam baseada nas variáveis de momento da frente de luz.

No capítulo 4, os resultados numéricos para os observáveis eletrofracos, constante de decaimento e raio de carga, são apresentados, e discutidos em comparação com cálculos de QCD rede e com outros modelos. Os fatores de forma eletromagnéticos, obtidos com o modelo de vértice simétrico, são discutidos no capítulo 5 e comparados aos resultados do modelo de dominância do meson vetorial, “vector meson dominance” (VMD), e com dados experimentais para o pión e káon, enquanto que para os mésons D^+ e D_s^+ comparamos seus fatores de forma com resultados de QCD na rede.

Nos capítulos 6 e 7 abordamos o modelo do pión com massa constituinte dependente de momento. No capítulo 6, derivamos a representação integral de Nakanishi da amplitude de Bethe-Salpeter para o pión, onde os quarks tem propagadores vestidos com massa dependente de momento, e também com massas constantes. Assim temos como já mencionado, dois conjuntos de funções peso, relacionadas por uma transformação linear originadas da mudança entre a base ortogonal e a base não-ortogonal utilizada. No capítulo 7, apresentamos os resultados numéricos para a constante de decaimento do pión, calculada via representação integral de Nakanishi, como também a probabilidade de valência e as distribuições de momento longitudinais e transversal. No capítulo 8 apresentamos as conclusões.

2 Modelo Covariante: Mésons Pseudo-Escalares

2.1 Acoplamento quark-meson: Lagrangiano efetivo

Adotamos aqui um esquema simples para descrever o acoplamento de spin do par quark-antiquark com o méson a partir de uma Lagrangiana efetiva. Observe que mais tarde será introduzido um modelo do vértice méson-quark descrito por escala de massa ajustada para reproduzir a constante de decaimento eletrofraca. Começamos acoplando o quark ao campo pseudo-escalar do méson dentro do esquema de simetria de sabor $SU(4)$, que é expresso pela seguinte Lagrangiana efetiva:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}} = -ig \bar{\Psi} M_{SU(4)} \gamma^5 \Psi \equiv -i \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{15} (\bar{\Psi} \lambda_i \gamma^5 \Psi) \varphi^i, \quad (2.1)$$

onde g é uma constante de acoplamento, associada a relação de Goldberg-Treiman no nível do quark, dada por \hat{m}/f_M , onde \hat{m} é a média aritmética das massas dos quarks constituintes do méson e f_M sua constante de decaimento eletrofraca. $\lambda_i (i = 1, \dots, 15)$ são as matrizes de Gell-Mann do grupo $SU(4)$ (CLOSE, 1979), φ^i são as componentes cartesianas do campo dos mésons pseudoescalares, $\Psi = (u, d, s, c)$ é o campo do quark decomposto em suas componentes de sabor, e

$$M_{SU(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_c}{\sqrt{12}} & \pi^+ & K^+ & \bar{D}^0 \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_c}{\sqrt{12}} & K^0 & D^- \\ K^- & \bar{K}^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\eta + \frac{\eta_c}{\sqrt{12}} & D_s^- \\ D^0 & D^+ & D_s^+ & -\frac{3\eta_c}{\sqrt{12}} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

é a matriz de campo dos mésons pseudoescalares para o referido grupo que estamos trabalhando (LIN *et al.*, 2000; BRACCO *et al.*, 2012; GEORGI, 1984). Em particular, os mésons pseudo-escalares carregados positivamente que focamos neste estudo são selecionados a

partir da matriz de mésons $SU(4)$, através dos traços listados abaixo,

$$\begin{aligned}\pi^+ &= Tr [M_{SU(4)} \lambda_{\pi^+}]; \\ K^+ &= Tr [M_{SU(4)} \lambda_{K^+}]; \\ D^+ &= Tr [M_{SU(4)} \lambda_{D^+}]; \\ D_s^+ &= Tr [M_{SU(4)} \lambda_{D_s^+}],\end{aligned}\tag{2.3}$$

onde as matrizes de sabor são dadas pelas seguintes combinações entre as matrizes de Gell-Mann representadas no $SU(4)$:

$$\begin{aligned}\lambda_{\pi^+} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_1 + i\lambda_2); \\ \lambda_{K^+} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_4 + i\lambda_5); \\ \lambda_{D^+} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_{11} - i\lambda_{12}); \\ \lambda_{D_s^+} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_{13} - i\lambda_{14}).\end{aligned}\tag{2.4}$$

Os mésons físicos correspondentes são indicados pelos subíndices na equação acima.

2.2 Amplitude de Bethe-Salpeter

A Lagrangiana efetiva da Eq.(2.1) está associada com vértices méson-quark sem estrutura, e que foram introduzidos apenas para nos guiar de uma forma prática para a construir o acoplamento entre os campos dos quarks e dos mésons pseudoescalares considerando a composição de sabor de cada um. A seguir, vamos permitir que os vértices dos mésons tenham uma extensão, representada por uma função escalar que mantém a covariância do modelo. Desta maneira, o modelo da amplitude de Bethe-Salpeter, para cada méson pseudoescalar considerado neste estudo é dada por,

$$\Psi_M(k, p) = S_q(k) \gamma^5 g \Lambda_M(k, p) \lambda_M S_{\bar{q}}(p - k)\tag{2.5}$$

Na Eq. (2.5) g é a constante de acoplamento, $S_q(k) = i[\not{k} - \widehat{m}_q + i\epsilon]^{-1}$ é o propagador do quark constituinte, onde a matriz de massa é diagonal, e dada por, $[\widehat{m}_q] = [m_u, m_d, m_s, m_c]$. A função de vértice para os mésons pseudo-escalares, $M = (\pi^+, K^+, D^+, D_s^+)$, adotada no presente trabalho é

$$g \Lambda_M(k, p) = \frac{C_M}{k^2 - \mu_M^2 + i\epsilon} + \frac{C_M}{(p - k)^2 - \mu_M^2 + i\epsilon},\tag{2.6}$$

introduzimos a função de vértice simétrica na formula de Mandelstam para a corrente eletromagnética, e com isso teremos a integral de loop associada a essa formula finita . Além disso, essa função de vértice produzirá uma função de onda simétrica pela troca de momento do quark e do antiquark, no caso do pión. Esse modelo generaliza para os mésons D e D_s as propostas das Refs. (MELO *et al.*, 2002) e (YABUSAKI *et al.*, 2015) usadas no estudo do pión e do káon, respectivamente.

O modelo assume que a dinâmica do infravermelho (IV) da QCD é traduzida em uma escala de massa, μ_M , para cada méson pseudoescalar no multiplete de sabor $SU(4)$. A informação física na região ultravioleta (UV) é refletida na forma analítica da função de vértice. A constante C_M também depende do méson, que estamos analisando, e é determinada pela normalização covariante da ABS,

$$2 \iota p^\mu = N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} g^2 \Lambda_M^2(k, p) \text{Tr} \left[\gamma^5 \lambda_M S_q(p-k) \hat{Q} \gamma^\mu S_q(p'-k) \gamma^5 \lambda_M^\dagger S_{\bar{q}}(k) \right. \\ \left. + \gamma^5 \lambda_M^\dagger S_{\bar{q}}(p-k) \gamma^\mu S_{\bar{q}}(p'-k) \hat{Q} \gamma^5 \lambda_M S_q(k) \right], \quad (2.7)$$

onde foi feita a suposição simplificada de que o kernel que teria dado origem a esta função de vértice particular não tem dependência do momento total, como é o caso da aproximação em escada da equação BS, veja por exemplo as referências (MARIS; TANDY, 2000; PAULA *et al.*, 2021). A quebra da simetria $SU(4)$ é refletida na variação da escala de massa μ_M e das massas dos quarks constituintes, como uma consequência da geração de massa pelo mecanismo de Higgs e da quebra da simetria quiral dinâmica, essa última relevante no caso dos quarks leves.

Em nossos cálculos, μ_M é obtido ajustando-se f_M , a constante de decaimento fraco do méson M , para um dado conjunto de massas dos quarks constituintes, que formam cada estado ligado. Observamos que as massas dos quarks constituintes estão associados a uma escala de energia característica de cada méson. Essa escala de energia define a condição inicial para a evolução da função de distribuição partônica para as diferentes escalas de energia.

Outro comentário é apropriado, a fim de manter a simplicidade do presente modelo covariante fenomenológico, adotamos a mesma forma da função de vértice para todos os mésons, que em grande momento se comporta como $1/k^2$. Claro, que poderíamos ter outros tipos de vértices, à custa da introdução de mais parâmetros, mas optamos por manter um número mínimo de parâmetros de escala neste trabalho, a saber, um por méson.

2.3 Constante de decaimento eletrofraca

Nesta seção, iremos construir as expressões para calcular as constantes de decaimento eletrofracas do estado fundamental dos mésons pseudo-escalares em função da componente de valência da função de onda na frente de luz. Uma das motivações para isso é o fato que as constantes de decaimento, f_M , estão relacionadas à meia vida dos mésons pseudo-escalares. Podemos motivar, também citando que a constante de decaimento do pión é uma medida da escala dinâmica de interação forte e, como tal, um requisito fundamental que o modelo satisfaça. A constante de decaimento eletrofraca vem como um equilíbrio físico da QCD de curto e longo alcance para a função de onda de valência do méson e, portanto, uma restrição necessária em modelos fenomenológicos. Na primeira parte do presente trabalho, o modelo escolhido atende a tais requisito, não apenas para o pión, mas também para todos os mésons pseudoescalar.

As constantes de decaimento eletrofracas codificam as informações físicas relevantes sobre a estrutura desses mésons pseudoescalares, permitindo, juntamente com os elementos da matriz Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) (ZYLA *et al.*, 2020; ABLIKIM *et al.*, 2019), obter através do processo de decaimento fraco leptônico, que representamos como $M \rightarrow l \nu_l$, as larguras dos decaimentos fracos (l representa os léptons carregados: e, μ, τ ; enquanto que ν são os respectivos neutrinos).

Usando a regra de ouro de Fermi, a relação entre a largura de decaimento ($\Gamma[M \rightarrow l \nu_l]$) com a constante de decaimento fraco do méson (f_M), é dada por (ZYLA *et al.*, 2020; ABLIKIM *et al.*, 2019)

$$\Gamma[M \rightarrow l \nu_l] = \frac{G_F^2}{8\pi} f_M^2 m_l^2 m_M \left(1 - \frac{m_l^2}{m_M^2}\right)^2 |V_{q_1 q_2}|^2, \quad (2.8)$$

onde G_F é a constante de acoplamento de Fermi, m_l é a massa do lépton, m_M a massa do méson pseudoscalar e $V_{q_1 q_2}$ é o correspondente elemento da matriz CKM.

A constante de decaimento do meson pseudoescalar, é definida através do elemento de matriz do operador da corrente axial (SALCEDO *et al.*, 2004; ITZYKSON; ZUBER, 2012),

$$\langle 0 | A_\mu^j | M^k \rangle = i p_\mu f_{M^k} \delta^{jk}, \quad (2.9)$$

onde $A_\mu^j = \bar{q}_a(0) \gamma_\mu \gamma^5 \frac{\lambda_j}{2} q_b(0)$, é o operador da corrente axial-vetor, onde a e b representam os diferentes sabores dos quarks, e os índices j e k , estão relacionados as componentes de sabor do operador de corrente e do méson pseudoscalar, respectivamente.

De acordo com o diagrama apresentado na Fig. 2.1, obtemos a seguinte expressão

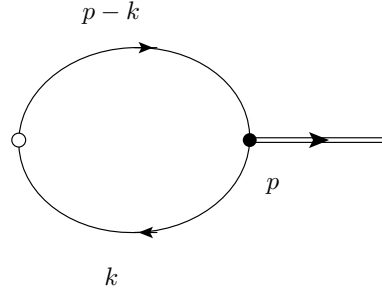


FIGURA 2.1 – Representação diagramática da amplitude do decaimento eletrofraco do méson pseudoescalar.

para a constante de decaimento eletrofraco considerando a função de vértice da Eq. (2.6)

$$i p^\mu f_M = N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \gamma^5 \lambda_M^\dagger \Psi_M(k, p) \right], \quad (2.10)$$

contraíndo com p_μ e usando a definição da amplitude BS dada pela Eq. (2.5), pode-se realizar o rastreamento e obtivermos

$$i p^2 f_M = N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\not{p} \gamma^5 \lambda_M^\dagger (S_q(k) \gamma^5 S_{\bar{q}}(k-p)) \right] g \Lambda_M(k, p), \quad (2.11)$$

onde o méson pseudoescalar é rotulado por M e o traço será realizado nos espaços dos spinores e de sabor. $N_c = 3$ é o número de cores dos quarks. A constante de decaimento (2.11), é calculada no referencial de repouso do méson pseudoescalar, $p^\mu = (m_M, \vec{0})$. Por outro lado podemos considerar a componente mais (+) da corrente axial-vetor, e isso corresponde a $\gamma^+ \gamma^5 = (\gamma^0 + \gamma^3) \gamma^5$. E a integração no loop de momento é realizada com as variáveis de momento momentos na frente de luz, i.e., $k^+ = k^0 + k^3$, $k^- = k^0 - k^3$ e $\vec{k}_\perp \equiv \{k_x, k_y\}$. Após a integração na energia na frente de luz, k^- , obtemos para a constante de decaimento do méson pseudoescalar a seguinte expressão:

$$f_M = \frac{N_c}{4\pi^3} \int d^2 k_\perp \int_0^1 dx \psi_M(x, \vec{k}_\perp; m_M, \vec{0}_\perp), \quad (2.12)$$

onde ψ_M é a parte de momento da componente da função de onda de valência correspondente ao spin dos quarks anti-alinhados, sendo dada por:

$$\begin{aligned} \psi_M(x, \vec{k}_\perp; p^+, \vec{p}_\perp) &= \left(\frac{m_{\bar{q}}}{1-x} + \frac{m_q}{x} \right) \frac{p^+}{m_M} \frac{g C_M}{m_M^2 - \mathcal{M}^2(m_q, m_{\bar{q}})} \\ &\times \left[\frac{1}{(1-x)(m_M^2 - \mathcal{M}^2(m_q, \mu_M))} + \frac{1}{x(m_M^2 - \mathcal{M}^2(\mu_M, m_{\bar{q}}))} \right], \\ &+ [m_q \leftrightarrow m_{\bar{q}}], \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde, $x = \frac{k^+}{p^+}$, $0 < x < 1$, e

$$\mathcal{M}^2(m_1, m_2) = \frac{|\vec{k}_\perp|^2 + m_1^2}{x} + \frac{|\vec{p}_\perp - \vec{k}_\perp|^2 + m_2^2}{1-x} - |\vec{p}_\perp|^2. \quad (2.14)$$

Observe que, a função de onda de valência é obtida da projeção da amplitude de Bethe-Salpeter (2.5) no plano-nulo $t + z = 0$, que corresponde a integração sobre k^- e a consequente eliminação do tempo relativo na frente de luz entre o quark e o antiquark, e após os termos instantâneos dos propagadores dos quarks serem descartados (veja a Ref. (FREDERICO; SALMÈ, 2011) para mais detalhes). De fato, os termos instantâneos dos propagadores dos quarks são eliminados com a escolha da componente positiva da corrente axial, $\gamma^+\gamma^5$ na Eq. (2.11), devido à propriedade $(\gamma^+)^2 = 0$. Finalmente, como já observado, a constante de decaimento fraca seleciona a componente da função de onda de valência com os spins dos quark e antiquark anti-alinhados (veja as Refs. (MEZRAG *et al.*, 2016; PAULA *et al.*, 2021)).

3 Modelo Covariante: Corrente Eletromagnética

3.1 Definições

Em teoria quântica de campos na frente de luz (TQCFL), o principal objetivo é resolver a equação de auto-valores abaixo,

$$H_{FL}|M\rangle = m_M^2|M\rangle, \quad (3.1)$$

onde H_{FL} é operador Hamiltoniano na frente de luz, seu auto-valor é o quadrado da massa invariante m_M^2 . Com a função de onda na frente de luz, é possível calcular os elementos de matriz da corrente eletromagnética dos estados hadrônicos, e nesse formalismo essa função de onda referente ao estado ligado, méson $|M\rangle$, é uma superposição de todos as componentes no espaço de Fock da frente de luz, sendo esta escrita como (MELO, 1998),

$$|M\rangle = \Psi_{q\bar{q}}|q\bar{q}\rangle + \Psi_{q\bar{q}g}|q\bar{q}g\rangle + \dots, \quad (3.2)$$

onde $|q\bar{q}\rangle$ é o componente de valência e $\Psi_{q\bar{q}}$ a amplitude de probabilidade associada a ela. Essa função de onda de valência, irá contribuir para a o elemento de matriz do operador da corrente eletromagnética, escrito na métrica da frente de luz, e ao fator de forma eletromagnético. No nosso modelo o fator de forma é calculado a partir do diagrama triangular de Feynman para o processo de interação elástico do méson com o fóton virtual, após ser feita a integração em k^- .

O operador de corrente eletromagnética do quark para o processo de foto-absorção em um regime de momentos transferidos tipo-espaço é definido por:

$$j^\mu = \frac{2}{3}\bar{u}\gamma^\mu u + \frac{2}{3}\bar{c}\gamma^\mu c - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma^\mu d - \frac{1}{3}\bar{s}\gamma^\mu s, \quad (3.3)$$

onde u , d , s e c são os campos dos quarks. O operador carga no espaço de sabores é

$$\text{diag} [\widehat{Q}] = [e_u, e_d, e_s, e_c] = [2/3, -1/3, -1/3, 2/3],$$

que fica definido por um matriz diagonal.

O elemento de matriz da corrente eletromagnética para cada méson, é obtido a partir da fórmula de Mandelstam representada pelos diagramas de Feynman representados na Fig. 3.1, como também sugerido na referência (HUTAURUK *et al.*, 2016).

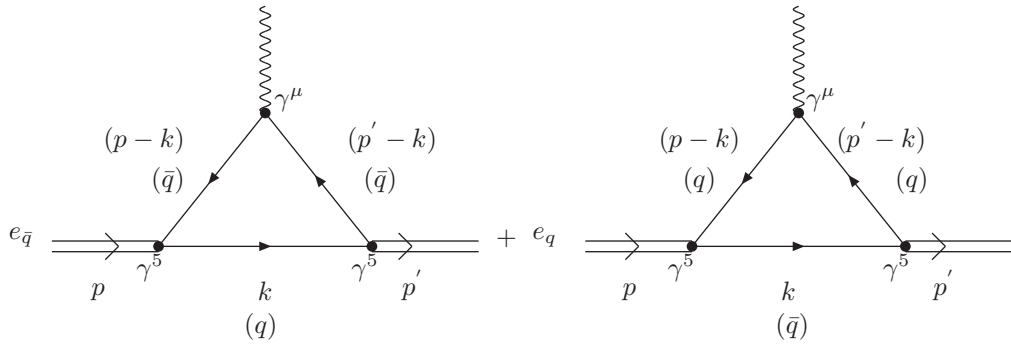


FIGURA 3.1 – Diagramas de Feynman, representando o elemento de matriz da corrente eletromagnética para um méson pseudoescalar, usados para calcular o fator de forma eletromagnético elástico a partir da componente J^+ , como detalhado no texto.

O elemento de matriz da corrente eletromagnética expressa pelos diagramas apresentados na Fig. 3.1 é escrito como:

$$\begin{aligned} \langle p'; M | j_1^\mu | p; M \rangle &= -iN_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} g\Lambda_M(k, p') g\Lambda_M(k, p) \text{Tr} \left[\gamma^5 \lambda_M S_{\bar{q}}(k-p) \widehat{Q} \gamma^\mu S_{\bar{q}}(k-p') \gamma^5 \lambda_M^\dagger S_q(k) \right], \\ \langle p'; M | j_2^\mu | p; M \rangle &= -iN_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} g\Lambda_M(k, p') g\Lambda_M(k, p) \text{Tr} \left[\gamma^5 \lambda_M^\dagger S_q(k-p') \widehat{Q} \gamma^\mu S_q(k-p) \gamma^5 \lambda_M S_{\bar{q}}(k) \right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

para $\widehat{Q} = e_q$, ou $e_{\bar{q}}$. O traço é feito sobre os índices de Dirac e de sabor dos quarks.

A corrente microscópica total é dada pela soma das contribuições do antiquark e do quark:

$$\langle p'; M | j^\mu | p; M \rangle = \langle p'; M | j_1^\mu | p; M \rangle + \langle p'; M | j_2^\mu | p; M \rangle. \quad (3.5)$$

Observe que a expressão acima, contém os dois diagramas representados na Fig.(3.1). Essas contribuições são escritas no espaço de sabor e representam o fóton sendo absorvido por cada quark do méson. O fator de forma eletromagnético elástico na região tipo-espaço é extraído equacionando a expressão microscópica e covariante da Eq. (3.4), com a fórmula

macroscópica da corrente:

$$\langle p'; M | j^\mu | p; M \rangle = (p'^\mu + p^\mu) F_M(q^2), \quad (3.6)$$

onde $q = p' - p$ é o momento transferido e $F_M(q^2)$ é o fator de forma eletromagnético elástico. Como já mencionado, a escala de massa, μ_M , é ajustada para reproduzir o constante de decaimento eletrofraca experimental do méson considerado. As massas constituintes do quark (m_q) e do antiquark ($m_{\bar{q}}$), foram selecionadas de acordo com estudos feitos nas referências (SUISSO *et al.*, 2002; MELO *et al.*, 2002; YABUSAKI *et al.*, 2015), que utilizaram modelos covariantes similares ao do nosso trabalho. Os resultados quantitativos do modelo para os observáveis estáticos e fatores de forma serão discutidos nos capítulos 4 e 5, respectivamente.

3.2 Decomposição de sabor

As contribuições individuais para o antiquark e quark estão separadas na Eq. (3.4) e dadas pelos elementos de matriz de j_1^μ e j_2^μ , respectivamente. A estas correntes parciais temos que obter os dois traços, um associado ao fóton sendo absorvido pelo quark com carga $+2/3$; e outro corresponde ao antiquark com carga $+1/3$. Portanto, temos para a soma dos dois traços, que tem em comum na integração de loop o produto da componente de momento do vértice inicial e final, que assumimos simétricos, dessa forma temos:

$$\text{Tr}[\] = 2 \left(\frac{2}{3} \Delta_{\bar{a}b}^\mu + \frac{1}{3} \Delta_{\bar{b}a}^\mu \right), \quad (3.7)$$

onde podemos reescrever, cada um dos termos dessa última equação, como:

$$\Delta_{\bar{a}b}^\mu = \text{Tr} [S_q^b(k) \gamma^5 S_q^a(k-p) \gamma^\mu S_q^a(k-p') \gamma^5], \quad (3.8)$$

desde que o propagator da partícula constituinte é diagonal no espaço de sabor, sendo que S_q^i para os sabores $i = a, b$. O fóton acopla-se em cada caso com o quark ou antiquark, rotulado como a no primeiro termo e \bar{b} no segundo termo da Eq. (3.7), correspondente aos quarks (u ou c) e aos antiquarks (\bar{d} ou \bar{s}), respectivamente.

Portanto, o elemento da matriz da corrente eletromagnética pode ser decomposto no conteúdo de sabor, do quark e antiquark, de acordo com:

$$\langle p'; M | j^\mu | p; M \rangle = -2iN_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} g\Lambda_M(k, p') g\Lambda_M(k, p) \left(\frac{2}{3} \Delta_{\bar{a}b}^\mu + \frac{1}{3} \Delta_{\bar{b}a}^\mu \right), \quad (3.9)$$

onde o fóton interage com o quark a no primeiro termo e com o antiquark \bar{b} no segundo.

A partir daí, podemos escrever a decomposição de sabor dos fatores de forma da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 F_{\pi^+}(q^2) &= \frac{2}{3}F_{u\bar{d}u}(q^2) + \frac{1}{3}F_{\bar{d}u\bar{d}}(q^2), \\
 F_{K^+}(q^2) &= \frac{2}{3}F_{u\bar{s}u}(q^2) + \frac{1}{3}F_{\bar{s}u\bar{s}}(q^2), \\
 F_{D^+}(q^2) &= \frac{2}{3}F_{c\bar{d}c}(q^2) + \frac{1}{3}F_{\bar{d}c\bar{d}}(q^2), \\
 F_{D_s^+}(q^2) &= \frac{2}{3}F_{c\bar{s}c}(q^2) + \frac{1}{3}F_{\bar{s}c\bar{s}}(q^2).
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

No limite da simetria de isospin $SU(2)$, temos que o quark u e o antiquark \bar{d} possuem massas iguais, com isso temos pela Eq. (3.9), que $F_{\pi^+}(q^2) = F_{u\bar{d}u}(q^2) = F_{\bar{d}u\bar{d}}(q^2)$. Enquanto que para os demais mésons aqui analisados (K^+ , D^+ e D_s^+), as simetrias $SU(2)$, $SU(3)$ e $SU(4)$ são quebradas. Da conservação de carga, é necessário que

$$\begin{aligned}
 F_{u\bar{s}u}(0) &= F_{\bar{s}u\bar{s}}(0) = 1, \\
 F_{c\bar{d}c}(0) &= F_{\bar{d}c\bar{d}}(0) = 1, \\
 F_{c\bar{s}c}(0) &= F_{\bar{s}c\bar{s}}(0) = 1,
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

para que a carga do méson seja a soma das cargas do quark e do antiquark. As contribuições parciais dos quarks para cada méson no fator de forma torna-se diferente a medida que o momento transferido aumenta, apesar da mesma normalização, como será mostrado pelos nossos resultados quantitativos.

3.3 Técnica da Frente de Luz

Os momentos inicial e final do méson, e o momento transferido pela a colisão elástica com o elétron, são denotados por p^μ , p'^μ e $q^\mu = p'^\mu - p^\mu$, respectivamente. Na representação dos momentos padrão, e no referencial de Breit, eles são escritos, por exemplo, como (MELO *et al.*, 2002):

$$p^\mu = \left(p^0, \frac{-q \cos \alpha}{2}, 0, \frac{-q \sin \alpha}{2} \right), \quad p'^\mu = \left(p^0, \frac{q \cos \alpha}{2}, 0, \frac{q \sin \alpha}{2} \right) \text{ e } q^\mu = (0, q \cos \alpha, 0, q \sin \alpha), \tag{3.12}$$

Utilizando os momentos na representação da frente de luz com as suas componentes escritas como $(+, -, \perp)$, temos que

$$\begin{aligned} p^\mu &= \left(p^0 - \frac{q \sin \alpha}{2}, p^0 + \frac{q \sin \alpha}{2}, -\frac{q \cos \alpha}{2}, 0 \right), \\ p'^\mu &= \left(p^0 + \frac{q \sin \alpha}{2}, p^0 - \frac{q \sin \alpha}{2}, \frac{q \cos \alpha}{2}, 0 \right), \\ q^\mu &= \left(q \sin \alpha, -q \sin \alpha, q \cos \alpha, 0 \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Com o referencial de Breit adotado, podemos continuar o cálculo da amplitude de transição elástica do processo de foto-absorção, onde por simplicidade tomamos $\alpha = 0$, e pela Eq.(3.12), os quadrimomentos do méson no estado inicial e final serão dados por $p^\mu = (p^0, -q_x/2, 0, 0)$ e $p'^\mu = (p^0, q_x/2, 0, 0)$, respectivamente, sendo $p^0 = \sqrt{m_M^2 + q_x^2/4}$. Além disso, as componentes dos momentos na representação da frente de luz, são escritas como $p^+ = p'^+ = p^- = p'^-$, $p'_\perp = (q_x/2, 0)$ e $p_\perp = (-q_x/2, 0)$, o que corresponde a $q^+ = 0$. Dessa forma temos a condição de Drell-Yan satisfeita, e nesse caso a componente + do operador corrente eletromagnética torna-se diagonal no espaço de Fock da frente de luz (BRODSKY *et al.*, 1998).

O fator de forma eletromagnético é obtido através da componente + da corrente eletromagnética, $j^+ = j^0 + j^3$, o que implica no uso da corrente + para os quarks, i.e., $\gamma^+ = \gamma^0 + \gamma^3$ na Eq. (3.9), e com isso temos:

$$F_M(q^2) = \frac{1}{2p^+} \langle p' | j_M^+ | p \rangle. \quad (3.14)$$

Vamos analisar a integração em k^- , que será feita de forma analítica. Para tanto partimos da formula de Mandelstam para j^+ como escrito na Eq. (3.9) e cuja a representação diagramática está apresentada na Fig 3.1, desta forma temos que:

$$\begin{aligned} \langle p' | j_M^+ | p \rangle &\equiv J_M^+(q^2) = -2i \frac{\hat{m}^2}{f_M^2} N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \\ &\times \left\{ \frac{2}{3} \text{Tr} \left[\frac{\not{k} - m_{\bar{q}}}{(k^2 - m_{\bar{q}}^2 + i\epsilon)} \gamma^5 \frac{\not{k} - \not{p}' + m_q}{((k-p)^2 - m_q^2 + i\epsilon)} \gamma^+ \frac{\not{k} - \not{p}' + m_q}{((k-p')^2 - m_q^2 + i\epsilon)} \gamma^5 \right] \right. \\ &\left. + \frac{1}{3} \text{Tr} \left[\frac{\not{k} + m_q}{(k^2 - m_q^2 + i\epsilon)} \gamma^5 \frac{\not{k} - \not{p}' + m_{\bar{q}}}{((k-p)^2 - m_{\bar{q}}^2 + i\epsilon)} \gamma^+ \frac{\not{k} - \not{p}' + m_{\bar{q}}}{((k-p')^2 - m_{\bar{q}}^2 + i\epsilon)} \gamma^5 \right] \right\} \\ &\times \left[\frac{C_M}{(k^2 - \mu_M^2 + i\epsilon)} + \frac{C_M}{((p-k)^2 - \mu_M^2 + i\epsilon)} \right] \left[\frac{C_M}{(k^2 - \mu_M^2 + i\epsilon)} + \frac{C_M}{((p'-k)^2 - \mu_M^2 + i\epsilon)} \right], \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde os traços correspondem a Eq. (3.8). A integração do loop é realizada analiticamente em k^- (ver Apêndice A), e as integrações sobre k^+ e k_\perp são realizadas numericamente

para obter os resultados apresentados nos capítulos que seguem.

Devemos enfatizar que a escolha da componente $+$ correspondente a γ^+ para as correntes individuais elimina os termos instantâneos dos propagadores dos quarks que absorvem o fóton virtual. É importante observar que a escolha do referencial de Drell-Yan e a componente $+$ da corrente é suficiente para eliminar também as singularidades de ponto final do cálculo dos fatores de forma para este modelo de mésons pseudoescalares (ver (MELO *et al.*, 1999; MELO *et al.*, 2002)). No entanto, para referenciais com $q^+ \neq 0$, a fim de preservar a covariância do modelo, é necessário levar em consideração uma contribuição de não-valência para o fator de forma (BAKKER *et al.*, 2001; MELO *et al.*, 2002).

Como observação técnica, a parametrização de Feynman poderia ser usada alternativamente para efetuar as integrais de um loop, mantendo-se explicitamente a covariância do modelo em todas as etapas dos cálculos do fator de forma. Para o nosso propósito, o uso das variáveis da frente de luz, como fizemos, ou a parametrização de Feynman é um detalhe técnico que não afeta os nossos resultados quantitativos.

4 Modelo Covariante: observáveis estáticos

O modelo adotado nessa parte da tese para as amplitudes de Bethe-Salpeter do π , K , D e D_s são definidas pela Eq. (2.5) e para cada méson temos três parâmetros: as massas dos quarks constituintes m_q e $m_{\bar{q}}$ com q, \bar{q} sendo $\{u, d, s, c\}$ e o parâmetro de escala de massa μ_M do vértice quark-méson como escrito na Eq. (2.6)). O parâmetro μ_M é ajustado para fornecer o valor da constante de decaimento eletrofraca experimental.

Trabalhamos aqui com seis conjuntos de parâmetros, a saber (A, B, C, D, E, F), que respectivamente correspondem aos mésons pseudoescalares ($\pi^+, \pi^-, K^+, K^-, D^+, D_s^+$), correspondendo a diferentes escolhas de massas dos quarks conforme indicado na Tabela 4.1. As escolhas das massas dos quark constituintes são: 384 MeV (SUISSO *et al.*, 2002) e 220 MeV (MELO *et al.*, 2002) para os quark leves; 508 MeV (SUISSO *et al.*, 2002) e 440 MeV (YABUSAKI *et al.*, 2015) para o quark estranho; e de 1623 MeV para o quark charmoso (SUISSO *et al.*, 2002).

Os valores para os observáveis estáticos eletrofracos, ou seja, o raio de carga e constante de decaimento, são apresentados na Table 4.1, onde os dados experimentais disponíveis para essas duas quantidades para o pión e káon encontram-se na Ref. (ZYLA *et al.*, 2020), e as constantes de decaimento fraco do D^+ e do D_s^+ vem da Ref. (ABLIKIM *et al.*, 2019). Além disso, a energia de ligação do modelo, para cada estado hadrônico, é dada por,

$$\epsilon_M = m_q + m_{\bar{q}} - m_M > 0. \quad (4.1)$$

Usando os valores adotados na Tabela 4.1 para as massas dos quarks constituintes e dos estados mésons, obtemos a energia de ligação de cada méson para cada conjunto escolhido

de parametros:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\pi^+}^A &= 628 \text{ MeV} \quad \text{e} \quad \epsilon_{\pi^+}^B = 300 \text{ MeV}, \\
\epsilon_{K^+} &= 398 \text{ MeV} \quad \text{e} \quad \epsilon_{K^+} = 166 \text{ MeV}, \\
\epsilon_{D_s^+} &= 163 \text{ MeV}, \\
\epsilon_{D^+} &= 138 \text{ MeV}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

O pión e o káon aparecem como sistemas fortemente ligados, com energias de ligação variando de cerca de 628 a 398 MeV, respectivamente. Mesmo com a constante de decaimento ajustada ainda o raio de carga apresenta uma variação, que é maior para o káon. Lembramos que ambos os mésons são os Bósons de Goldstone da simetria quiral quebrada dinamicamente, e suas massas no limite quiral desaparecem de acordo com a relação de Gellman-Oakes-Renner, o que de fato indica que esses estados devem formar sistemas quark-antiquark fortemente ligados, com graus de liberdade de quark constituinte.

TABELA 4.1 – Observáveis eletrofracos estáticos dos mésons pseudo-escalares. A notação para as parametrizações (A, B, C, D, E, F), correspondem aos diferentes valores dos parâmetros usados no modelo para π^+ , π^+ , K^+ , K^+ , D^+ , D_s^+ , respectivamente. Em particular, os resultados com os modelos (B) e (D), vem da Ref. (YABUSAKI *et al.*, 2015). Os dados experimentais encontram-se nas Refs. (ZYLA *et al.*, 2020; ABLIKIM *et al.*, 2019). As massas m_q , $m_{\bar{q}}$, μ_M e a constante de decaimento (f_M) são dadas em [MeV] na tabela. O raio de carga (r_M) é expresso em [fm].

| Modelo/méson | $I(J^P)$ | m_q | $m_{\bar{q}}$ | m_M | μ_M | r_M | f_M | $r_M^{\text{Expt.}}$ | $f_M^{\text{Expt.}}$ |
|------------------------|--------------------|-------|---------------|-------|---------|-------|-------|----------------------|----------------------|
| (A) $\pi^+ = u\bar{d}$ | $1(0^-)$ | 384 | 384 | 140 | 225 | 0.665 | 92.55 | 0.672(8) | 92.28(7) |
| (B) | | 220 | 220 | | 600 | 0.735 | 92.12 | | |
| (C) $K^+ = u\bar{s}$ | $\frac{1}{2}(0^-)$ | 384 | 508 | 494 | 420 | 0.551 | 110.8 | 0.560(3) | 110(1) |
| (D) | | 220 | 440 | | 600 | 0.754 | 110.8 | | |
| (E) $D^+ = c\bar{d}$ | $\frac{1}{2}(0^-)$ | 1623 | 384 | 1869 | 1607 | 0.505 | 144.5 | | 144(3) |
| (F) $D_s^+ = c\bar{s}$ | $0(0^-)$ | 1623 | 508 | 1968 | 1685 | 0.377 | 182.7 | | 182(3) |

As regras de Cutkosky (ITZYKSON; ZUBER, 2012) quando aplicadas na formula de Mandelstam para o presente modelo e representada pelo diagrama de Feynman da Fig. 3.1, mostram que os cortes relevantes em função de μ_M , têm pontos de ramificação em:

$$\mu_M + m_q - m_M > 0 \quad \text{and} \quad \mu_M + m_{\bar{q}} - m_M > 0. \tag{4.3}$$

Esses pontos de ramificação também são claros na forma analítica da Eq.(2.13), para a função de onda. O valor mínimo da posição do ponto de ramificação, é na verdade a escala dominante que determina o raio da carga. Podemos analisar os resultados das parametrizações para o raio de carga após ajustar as constantes de decaimento conforme fornecido na Tabela 4.1, olhando para os valores do ponto de ramificação mais próximo

do contínuo, a saber, aquele que corresponde ao valor mínimo entre ϵ_M e os pontos de ramificação na Eq. (4.3),

No caso do pión encontramos os pontos de ramificação mais próximos do contínuo para os conjuntos (A) e (B), com valores de 469 e 300 MeV, respectivamente. Isso mostra um sistema fortemente ligado de quarks constituintes e, não surpreendentemente, valores próximos para os dois conjuntos. Para o káon, os conjuntos (C) e (D), apresentam os pontos de ramificação em 310 e 166 MeV, respectivamente, que estão um pouco mais próximos do que considerando apenas a comparação entre as energias de ligação obtidas com esses dois conjuntos de parâmetros.

Para o méson D^+ , referente ao conjunto (E), percebe-se que de acordo com a condição imposta pela Eq. (4.3), o valor de $\mu_M \sim m_c$, e o ponto mínimo de ramificação está, na verdade, em 100 MeV, que está associado ao raio de carga de 0.505 fm, enquanto para o D_s^+ , encontramos 163 MeV e um raio de carga de 0.377 fm. O maior valor do ponto de ramificação do D_s^+ e a diminuição concomitante do raio em relação a D^+ , vem do maior valor de $f_{D_s^+}$ e m_s em comparação com f_{D^+} e m_d . Portanto, os quarks no D_s^+ estão em uma configuração mais compacta do que os correspondentes no D^+ , e espera-se em geral que $r_{D_s^+} < r_{D^+}$. A explicação qualitativa análoga pode ser válida para explicar que $r_{K^+} < r_{\pi^+}$, embora provavelmente, nesse caso é muito importante que $f_K > f_\pi$ e considerar que os valores dos pontos de ramificação em um caso são próximos, para conjuntos (A) e (C), e no outro temos cerca do dobro entre (B) e (D). Como discutiremos mais tarde, os resultados do LQCD obtidos usando conjuntos de dados consistentes mostram que $r_{D_s^+} < r_{D^+}$ (CAN *et al.*, 2013; LI; WU, 2017), apoiando nossa expectativa.

4.1 Pión e Káon

Na Tabela 4.2, apresentamos nossos resultados para o raio de carga do pión (A) e do káon (C), para fins de comparação com outros cálculos (BASHIR *et al.*, 2012; HUTAURUK *et al.*, 2016; MARIS; TANDY, 2000; IVANOV *et al.*, 2019; JIA; VARY, 2019; SILVA *et al.*, 2012; CHEN; CHANG, 2019). Nossa coleção de resultados da literatura não está completa, e a nossa intenção é apenas colocar nosso modelo em confronto com exemplos de modelos construídos no espaço Euclidiano, correspondendo a abordagens via equações de Schwinger-Dyson e Bethe-Salpeter para a QCD, e modelos fenomenológicos com e sem confinamento. Na tabela, mostramos também os resultados experimentais de (ZYLA *et al.*, 2020; ABLIKIM *et al.*, 2019).

Os resultados obtidos com a solução das equações de Schwinger-Dyson e Bethe-Salpeter no Euclidiano, com kernel fenomenológico que satisfazem as identidades de Ward axial-vector, tendo a quebra dinâmica de simetria quiral no setor SU(3) foram retirados da

TABELA 4.2 – Constantes de decaimentos e raio de carga do π^+ (conjunto A) e K^+ (conjunto C) para o presente modelo, comparado com outros resultados da literatura, assim como os dados experimentais do PDG (ZYLA *et al.*, 2020). As constantes de decaimentos estão em [MeV], e os raios de cargas estão em [fm].

| Referência | f_{π}^+ | f_K^+ | r_{π^+} | r_{K^+} | f_{K^+}/f_{π^+} |
|---------------------------------|-------------|---------|-------------|-----------|---------------------|
| Nosso modelo | 92.55 | 110.8 | 0.665 | 0.551 | 1.196 |
| (MARIS; TANDY, 2000) | 92.62 | 109.60 | 0.671 | 0.615 | 1.182 |
| (BASHIR <i>et al.</i> , 2012) | 101 | | | | |
| (CHEN; CHANG, 2019) | 93 | 111 | | | 1.192 |
| (HUTAURUK <i>et al.</i> , 2016) | 93 | 97 | 0.629 | 0.586 | 1.043 |
| (IVANOV <i>et al.</i> , 2019) | 92.14 | 111.0 | | | 1.20 |
| (SILVA <i>et al.</i> , 2012) | 101 | 129 | 0.672 | 0.710 | 1.276 |
| (JIA; VARY, 2019) | 142.8 | 166.7 | 0.68(5) | 0.54(3) | 1.166 |
| PDG (ZYLA <i>et al.</i> , 2020) | 92.28(7) | 110(1) | 0.672(8) | 0.560(3) | 1.192(14) |

Refs. (MARIS; TANDY, 2000) e (BASHIR *et al.*, 2012). Uma abordagem moderna nesta direção (CHEN; CHANG, 2019) tem a interação quark-antiquark composta por uma parte no infravermelho (longas distâncias) dependente de sabor e uma parte no ultravioleta (curtas distâncias) independente de sabor. Na Ref. (HUTAURUK *et al.*, 2016) os resultados são obtidos da solução da equação de Bethe-Salpeter para o modelo Nambu e Jona-Lasinio (NJL) com regularização no tempo-próprio. Os resultados para um modelo covariante de quark confinados tratado no espaço Euclidiano foram apresentados no artigo de revisão (IVANOV *et al.*, 2019).

Os cálculos realizados em abordagens na frente de luz (SILVA *et al.*, 2012; JIA; VARY, 2019), foram também apresentados na Tabela 4.2. Na referência (SILVA *et al.*, 2012) foi utilizado um modelo fenomenológico refinado na frente de luz para calcular os fatores de forma elásticos do pión e do káon. Em particular, esse modelo utilizou reguladores Pauli-Villars que resultam em uma forma não simétrica para o vértice méson-quark, e mesmo assim apresentou resultados próximos aos encontrados no nossos cálculos. Na referência (JIA; VARY, 2019), um modelo do tipo NJL com interação nos singletos de cores e interações confinantes foi estudado com base na quantização da frente de luz.

O pión e o káon são sistemas fortemente ligados de quarks constituintes, e nos modelos de vértice simétrico, em geral, são capazes de fornecer uma reprodução razoável de suas constantes de decaimento e raio de carga ao mesmo tempo. Esta é a principal característica que tiramos da Tabela 4.2, e uma vez que as constantes de decaimento são reproduzidas no sistema fortemente ligado, o raio de carga segue de forma imediata, uma vez que a princípio essas quantidades estão fortemente correlacionadas em modelos covariantes com quarks constituintes (TARRACH, 1979; GERASIMOV, 1979).

4.2 D^+ e D_s^+

A comparação de nossos resultados com modelos da literatura (CHOI, 2007; HWANG, 2010; BASHIR *et al.*, 2012; DAS *et al.*, 2016; DHIMAN; DAHIYA, 2018; IVANOV *et al.*, 2019) é apresentado na Tabela 4.3, junto com os resultados dos cálculos de LQCD (FOLLANA *et al.*, 2008; AUBIN *et al.*, 2005; CHEN *et al.*, 2014; CARRASCO *et al.*, 2015; CAN *et al.*, 2013; LI; WU, 2017). Na tabela, apresentamos o raio de carga e as constantes de decaimento eletrofracas para os mésons D^+ e D_s^+ , bem como os dados experimentais das Refs. (ZYLA *et al.*, 2020; ABLIKIM *et al.*, 2019), e em particular para a razão $f_{D_s^+}/f_{D^+} = 1.226(31)(2)(3)$ (ZYLA *et al.*, 2020).

TABELA 4.3 – Constantes de decaimento eletrofracas em [MeV] e os raios de carga em [fm] dos mésons D^+ e D_s^+ para o nosso modelo e comparados com vários resultados da literatura. Dados experimentais de (ZYLA *et al.*, 2020; ABLIKIM *et al.*, 2019).

| Referência | f_{D^+} | $f_{D_s^+}$ | r_{D^+} | $r_{D_s^+}$ | $f_{D_s^+}/f_{D^+}$ |
|---------------------------------|-----------------|-----------------|---------------------------|---------------------------|---------------------|
| Nosso modelo | 144.5 | 182.7 | 0.505 | 0.377 | 1.265 |
| (BASHIR <i>et al.</i> , 2012) | 155.4 | 205.1 | | | 1.32 |
| (IVANOV <i>et al.</i> , 2019) | 145.7 | 182.2 | | | 1.25 |
| (CHOI, 2007) | 149.2 | 179.6 | | | 1.20 |
| (HWANG, 2010) | 145.7(6.3) | 189(13) | $0.406_{+0.014}^{-0.012}$ | $0.300_{+0.023}^{-0.018}$ | 1.30(4) |
| (DAS <i>et al.</i> , 2016) | | | 0.510 | 0.465 | |
| (DHIMAN; DAHIYA, 2018) | 147.8 | 167.6 | | | 1.13 |
| (TANG <i>et al.</i> , 2020) | 295(63) | 313(67) | | | 1.06(32) |
| | | | | | |
| LQCD | | | | | |
| (AUBIN <i>et al.</i> , 2005) | 142(2)(12) | 176(2)(11) | | | 1.24(1)(7) |
| (FOLLANA <i>et al.</i> , 2008) | 147(3) | 170(2) | | | 1.16(3) |
| (CHEN <i>et al.</i> , 2014) | 143.1(1.6)(1.8) | 182.9(0.8)(2.0) | | | 1.28(3) |
| (CARRASCO <i>et al.</i> , 2015) | 146.6(2.6)(0.6) | 174.8(2.8)(1.0) | | | 1.19(3)(1) |
| (CAN <i>et al.</i> , 2013) | | | 0.371(17) | | |
| | | | 0.390(33) | | |
| (LI; WU, 2017) | | | 0.402(61) | 0.286(19) | |
| | | | 0.420(82) | 0.354(18) | |
| | | | | | |
| PDG (ZYLA <i>et al.</i> , 2020) | 144(3) | 182(3) | | | 1.26(5) |
| (ABLIKIM <i>et al.</i> , 2019) | | 178.8(2.6) | | | |

Na referência (BASHIR *et al.*, 2012) os resultados para os mésons pesado-leves foram obtidos resolvendo-se as equações de Schwinger-Dyson e Bethe-Salpeter no espaço Euclidiano considerando um kernel de interação quark-antiquark fenomenológico contendo confinamento no infravermelho e troca de um glúon no ultravioleta. Os cálculos dentro de modelos fenomenológicos na frente de luz com confinamento foram apresentados nas

Refs. (CHOI, 2007; HWANG, 2010; DHIMAN; DAHIYA, 2018). Um modelo de potencial confinante na forma instantânea aplicado para descrever os mésons pesados foi usado na Ref. (DAS *et al.*, 2016). Os resultados de LQCD para constantes de decaimento foram retirados das Refs. (AUBIN *et al.*, 2005; FOLLANA *et al.*, 2008), o raio de carga D^+ vem das Refs. (CAN *et al.*, 2013; LI; WU, 2017) e para o D_s^+ apresentamos os resultados da Ref. (LI; WU, 2017). Em geral, as constantes de decaimento são bastante próximas aos valores experimentais, enquanto para o raio de carga há uma dispersão nos resultados obtidos da teoria.

Nossos resultados para o raio de carga, $r_{D^+} = 0.505$ fm e $r_{D_s^+} = 0.377$ fm, são um pouco maiores do que os calculados com LQCD (CAN *et al.*, 2013; LI; WU, 2017) e com os modelos com confinamento (HWANG, 2010; DAS *et al.*, 2016). O presente modelo não tem confinamento explícito, já que os dois mésons considerados são formado como um estado ligado com um pouco mais de 100 MeV de energia de ligação, e mesmo considerando que as constantes de decaimento foram ajustadas, o raio de carga não é fortemente restringido.

Diferentemente do pión e do káon, a constante de decaimento parece não determinar univocamente o raio de carga. Podemos associar esse comportamento ao fator dominante (m_c/x) carregado pela função de onda de valência, Eq.(2.13), para a expressão da constante de decaimento, Eq. (2.12). Como a massa constituinte do charme é substancialmente maior que as massas dos quark leves (\bar{d}, \bar{s}), esse preferencialmente encontra-se próximo ao centro de massa, que corresponde à região em que a função de onda é determinada pela constante de decaimento, enquanto que o quark leve explora com maior probabilidade a região do confinamento. Portanto, intuitivamente é razoável imaginar que o quark leve na amplitude BS dos mésons D^+ e D_s^+ , é pouco restringido pelo ajuste da constante de decaimento, no entanto a sua contribuição para o raio de carga é muito mais importante que a do charme, como se pode verificar, por exemplo nos cálculos da LQCD (CAN *et al.*, 2013; LI; WU, 2017). O quark leve dentro do méson pesado pode explorar distâncias maiores onde a física da QCD no infravermelho é relevante e de onde o méson ganha parte de sua massa e, portanto, deve-se esperar uma correlação do raio de carga e o valor da massa dos mésons charmosos como calculado pela LQCD.

Na Tabela 4.4, comparamos o raio de carga do D^+ e D_s^+ com os resultados de LQCD da referência (LI; WU, 2017). Para o méson D_s^+ , o raio oriundo dos cálculos de LQCD aumenta com a massa e indica que nosso resultado seria compatível, dentro de suas incertezas. Para o D^+ , embora haja um ligeiro aumento do raio com a massa do estado ligado, esses resultados de LQCD apresentam grandes erros para retirarmos uma conclusão firme dessa comparação. Nesta mesma tabela, também mostramos nossos cálculos para o raio de carga alterando a massa desses mésons para aquelas obtidas nos cálculos de LQCD. Observamos de fato a tendência de aumentar o raio com o aumento das massas no nosso modelo, quando utilizamos as massas dos conjuntos B1 e C1 para os mésons D^+ e D_s^+ de acordo com os

cálculos de LQCD, reproduzindo qualitativamente o comportamento encontrado nesses resultados. Esta característica surge em nosso modelo devido à diminuição da energia de ligação, o que leva ao aumento do tamanho do méson. Isso sugere que o mecanismo de ligação usual encontrado na mecânica quântica está de alguma forma atuando nesses mésons leves e pesados, apesar da complexidade do mecanismo que produz o confinamento do quark. Ainda Tabela 4.4 observamos que perdemos os ajustes das constantes de decaimentos ao adotarmos as massas dos conjuntos (B1) e (C1) para os mésons D^+ e D_s^+ .

TABELA 4.4 – Observáveis para os mésons pseudoescalar D^+ e D_s^+ , com as massas dos conjuntos oriundos de cálculos de LQCD, (B1) e (C1) (LI; WU, 2017). Os parâmetros do nosso modelo (E,F): $m_c = 1623$ MeV, $m_u = 384$ MeV, $m_s = 508$ MeV, $\mu_{D^+} = 1607$ MeV, $\mu_{D_s^+} = 1685$ MeV. As massas e constantes de decaimento estão em MeV. O raio são dados em fm.

| Dados | (B1) | (C1) | (E,F) |
|----------------------------|-----------|-----------|-------|
| m_D^+ | 1737 | 1824 | 1869 |
| $m_{D_s^+}$ | 1801 | 1880 | 1968 |
| Observáveis | (B1) | (C1) | (E,F) |
| r_{D^+} (LI; WU, 2017) | 0.402(61) | 0.420(82) | |
| r_{D^+} | 0.347 | 0.422 | 0.505 |
| f_{D^+} | 205.5 | 170.3 | 144.5 |
| $r_{D_s^+}$ (LI; WU, 2017) | 0.286(19) | 0.354(18) | |
| $r_{D_s^+}$ | 0.281 | 0.312 | 0.377 |
| $f_{D_s^+}$ | 243.3 | 219.4 | 182.7 |

A decomposição de sabor do raio de carga dos mésons D^+ e D_s^+ são apresentados na Tabela 4.5, onde também comparamos nosso modelo com os resultados de LQCD com ajuste linear e ajuste quadrático, e extrapolados para a massa física do pión obtidos na referência (CAN *et al.*, 2013), e dos conjuntos (B1) e (C1) usados na referência (LI; WU, 2017). A contribuição de sabor para o raio de carga quadrático médio do D^+ e D_s^+ são definidas como:

$$r_{D^+(c)}^2 = 6 \frac{\partial}{\partial q^2} F_{cd\bar{c}}(q^2)|_{q^2=0}, \quad r_{D^+(\bar{d})}^2 = 6 \frac{\partial}{\partial q^2} F_{\bar{d}c\bar{d}}(q^2)|_{q^2=0}. \quad (4.4)$$

$$r_{D_s^+(c)}^2 = 6 \frac{\partial}{\partial q^2} F_{c\bar{s}c}(q^2)|_{q^2=0}, \quad r_{D_s^+(\bar{s})}^2 = 6 \frac{\partial}{\partial q^2} F_{\bar{s}c\bar{s}}(q^2)|_{q^2=0}, \quad (4.5)$$

e as relações com o raio quadrático médio de carga para cada méson serão dadas por:

$$r_{D^+}^2 = \frac{2}{3}r_{D^+(c)}^2 + \frac{1}{3}r_{D^+(\bar{d})}^2 \quad \text{e} \quad r_{D_s^+}^2 = \frac{2}{3}r_{D_s^+(c)}^2 + \frac{1}{3}r_{D_s^+(\bar{s})}^2. \quad (4.6)$$

Os raios totais são apresentados na Tabela 4.5, e como já discutimos são amplamente dominados pela contribuição do quark leve, e observamos que essa propriedade também

é observada nos resultados de LQCD. O quark pesado encontra-se predominantemente próximo ao centro de massa do méson pesado-leve, enquanto o leve está na região de cerca de 0.6 - 1 fm de distância do centro do méson. Surpreendentemente, mesmo estando na região de confinamento, a contribuição do raio de carga do quark leve é bastante consistente com os resultados da LQCD mais recentes da referência (LI; WU, 2017), embora observemos a tendência do nosso modelo superestimar esses resultados de QCD na rede.

TABELA 4.5 – Decomposição de sabor do raio de carga dos mésons D^+ e D_s^+ . Comparação com resultados de LQCD do ajuste linear (L) e para o ajuste quadrático (Q) extrapolando para a massa física do pión da referência (CAN *et al.*, 2013), e dos conjuntos (B1) e (C1) usados na referência (LI; WU, 2017).

| Raio (fm) | LQCD (CAN <i>et al.</i> , 2013) | LQCD (LI; WU, 2017) | Este trabalho |
|----------------------|---------------------------------|---------------------|---------------|
| r_{D^+} | 0.371(17) (L) | 0.402(61) (B1) | 0.505 |
| | 0.390(33) (Q) | 0.420(82) (C1) | |
| $r_{D^+(c)}$ | 0.226(24) (L) | 0.17(15) (B1) | 0.233 |
| | 0.272(29) (Q) | 0.20(19) (C1) | |
| $r_{D^+(\bar{d})}$ | 0.585(57) (L) | 0.692(61) (B1) | 0.810 |
| | 0.566(104) (Q) | 0.718(82) (C1) | |
| $r_{D_s^+}$ | | 0.286(19) (B1) | 0.377 |
| | | 0.354(18) (C1) | |
| $r_{D_s^+(c)}$ | | 0.119(50) (B1) | 0.218 |
| | | 0.222(33) (C1) | |
| $r_{D_s^+(\bar{s})}$ | | 0.461(12) (B1) | 0.576 |
| | | 0.545(15) (C1) | |

5 Modelo Covariante: Fator de Forma Eletromagnético

5.1 Píon e Káon

A extração do fator de forma da carga do píon da seção choque experimental para a eletro-produção exclusiva de píons no próton depende da dominância do processo de Sullivan, devido ao pólo do píon ser próximo à região cinemática permitida para pequenos valores de t 's (HORN; ROBERTS, 2016). Em princípio, é possível realizar eletro-produção exclusiva de K^+ em experimentos no próton, para extrair o fator de forma para valores de maiores momento transferidos (TROTTA *et al.*, 2017; HORN; ROBERTS, 2016). No entanto, no caso do K^+ , não há dados experimentais recentes para o fator de forma EM. Os dados experimentais obtidos no CERN em 1986, vem da medida mais precisa para o méson K^+ (AMENDOLIA *et al.*, 1986) que existe até os dias atuais, e que será usada para comparar com os resultados do nosso modelo com vértice simétrico.

Começamos a discussão do fator de forma EM dos pseudo-escalares leves com base na hipótese da dominância vetorial, "vector meson dominance", (VMD), formulada por Sakurai e outros (SAKURAI, 1960; SAKURAI, 1969; O'CONNELL *et al.*, 1997). Os fatores de forma de carga dos mésons π^+ e K^+ dentro da descrição VMD são parametrizados pelas massas dos mésons vetoriais m_ρ e m_ϕ , como segue abaixo:

$$F_{\pi^+}(q^2) = (e_u + e_{\bar{d}}) \frac{m_\rho^2}{m_\rho^2 - q^2}, \quad (5.1)$$

$$F_{K^+}(q^2) = e_u \frac{m_\rho^2}{m_\rho^2 - q^2} + e_s \frac{m_\phi^2}{m_\phi^2 - q^2}, \quad (5.2)$$

onde estamos considerando região de momentos transferidos tipo-espaco, onde $Q^2 \equiv -q^2 > 0$. Presumimos que dentro da simetria de sabor SU(3), as constantes de acoplamento do ρ e ϕ são independentes de sabor, ou seja, $g_{\rho,u} = g_{\rho,d} = g_{\phi,s}$, o que implica nas expressões escritas nas Eqs. (5.1) e (5.2). A razão entre as duas contribuições para o fator de forma em $Q^2 = 0$ são iguais à razão entre as cargas dos quarks, exatamente

como em nossa formulação do fator de forma para o méson K^+ expressa pela Eq. (3.11). Na verdade, isso também é verificado em nosso modelo, de vértice simétrico, quando as contribuições do charme e quark leve são separadas no fatores de forma eletromagnéticos dos mésons D^+ e D_s^+ . Além disso, pela VMD, a razão entre as contribuições dos quarks para $F_{K^+}(q^2)$ quando $Q^2 \gg m_\phi^2$ é dada por:

$$\frac{e_{\bar{s}} F_{\bar{s}u\bar{s}} m_\phi^2}{e_u F_{u\bar{s}u} m_\phi^2} \Bigg|_{(q^2 \gg m^2_\phi)} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{m_\phi^2}{m_\rho^2} = 0.86, \quad (5.3)$$

onde as massas experimentais dos mésons foram usadas utilizadas (ZYLA *et al.*, 2020). Para comparação, o presente modelo fornece $\simeq 0.56$ (a 10 GeV^2) com parâmetros do conjunto (C) (ver Tabelas 4.1 e 5.1).

Na Fig. 5.1, apresentamos os resultados para o fator de forma EM do pión, obtido com os conjuntos de parâmetros (A), (B) (ver Tabela 4.1) e o modelo VMD da Eq. (5.1). Em ambos os painéis da figura, os dados experimentais de (BALDINI *et al.*, 2000; VOLMER *et al.*, 2001; HORN *et al.*, 2006; TADEVOSYAN *et al.*, 2007; HUBER *et al.*, 2008) também são mostrados. No painel superior da figura, as contribuições individuais do quark são mostradas até 10 GeV^2 para o conjunto (A), e as contribuições dos quarks u e \bar{d} estão no proporção 2:1, como deve ser a partir da simetria de sabor do modelo SU(2).

A comparação entre os resultados dos conjuntos (A), (B), e o modelo VMD é apresentada no painel inferior da Fig. 5.1. Observe que o conjunto (A) reproduz bem os valores experimentais do raio de carga e constante de decaimento do pión, enquanto o conjunto (B) tem um desempenho melhor para grandes transferências de momento, mas o raio de carga é superestimado (ver Tabela 4.1). No entanto, ambos os conjuntos de parâmetros produzem fatores de forma com o mesmo comportamento analítico em grandes momentos, apenas suas normalizações diferem em aproximadamente 30%. Isso sugere uma limitação na forma escolhida da função de vértice para descrever a distribuição de carga do pión. Na verdade, modelos com massas “running” para o quark e incorporando as regras de contagem assintóticas da QCD, podem ter um desempenho melhor em relação aos dados experimentais (veja por exemplo (MARIS; TANDY, 2000; BASHIR *et al.*, 2012; MELLO *et al.*, 2017)).

Apresentamos os resultados para o fator de forma do K^+ na Fig. 5.2, obtidos com os dois conjuntos de parâmetros (C) e (D) (ver Tabela 4.1). Também comparamos os resultados com o modelo VMD e os dados experimentais das Refs. (AMENDOLIA *et al.*, 1986; DALLY *et al.*, 1980). Lembramos que o conjunto (C) apresenta um raio de carga e uma constante de decaimento eletrofraca de acordo com os valores experimentais. O conjunto de parâmetros (D) reproduz a constante de decaimento eletrofraca mas apresenta cerca de 20% de diferença com o valor experimental do raio de carga káon. No painel superior

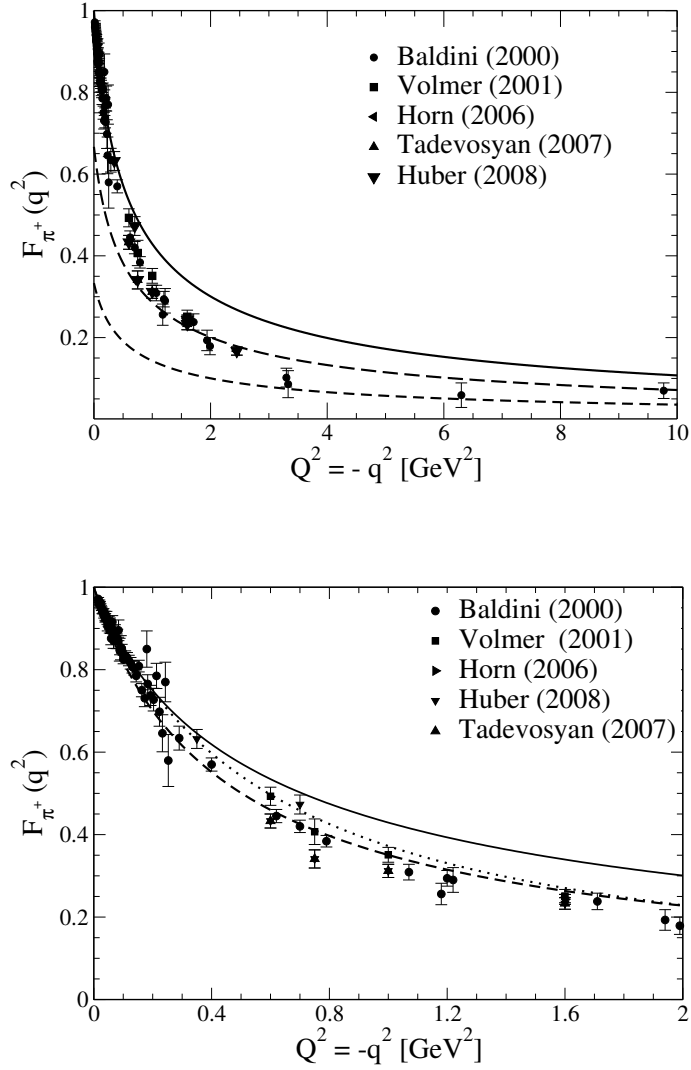


FIGURA 5.1 – Fator de forma eletromagnético de pión em função de $q^2 < 0$. Painel superior: decomposição de sabor de $F_{\pi}(q^2)$ para o conjunto de parâmetros (A) (ver Tabela 4.1). Fator de forma do pión (linha sólida), contribuição u - $e_u F_{u\bar{d}}$ (linha tracejada) e \bar{d} contribuição - $e_{\bar{d}} F_{\bar{d}u}$ (linha tracejada curta). Painel inferior: comparação entre os conjuntos de parâmetros (A) (linha sólida) e (B) (linha tracejada) com o modelo VMD (linha pontilhada) da Eq. (5.1). Dados experimentais de (BALDINI *et al.*, 2000; VOLMER *et al.*, 2001; HORN *et al.*, 2006; TADEVOSYAN *et al.*, 2007; HUBER *et al.*, 2008).

da Fig. 5.2, mostramos os resultados obtidos com o conjunto (C), para a contribuição total e as contribuições parciais dos quark u e \bar{s} para o fator de forma. Na figura é possível perceber que a simetria do sabor SU(3) é ligeiramente quebrada, como a proporção $(e_{\bar{s}}F_{\bar{s}u\bar{s}})/(e_uF_{u\bar{s}u}) > 1/2$ for $Q^2 \neq 0$. A mesma característica também é encontrada nos resultados do modelo Nambu-Jona-Lasinio da Ref. (HUTAURUK *et al.*, 2016).

No painel inferior da Fig. 5.2, comparamos o resultados para o fator de forma do káon na região de baixos momentos transferidos até 0.5 GeV^2 , obtidos com o conjunto (C), (D) e o modelo VMD juntamente com os dados experimentais (AMENDOLIA *et al.*, 1986; DALLY *et al.*, 1980). Pode-se ver que os conjuntos (C) e (D) de certa forma são consistentes com os dados experimentais. Apesar disso na Tabela 4.1, vemos que o conjunto (C) reproduz o raio de carga experimental do káon, e também é consistente com o fator de forma do VMD, como vemos na figura. Portanto, considerando essas informações podemos dizer que o conjunto (C) de parâmetros leva a uma maior consistência com os dados experimentais.

A quebra da simetria de sabor SU(3) é analisada usando-se os conjuntos de parâmetros (A) e (C) na Fig. 5.3, onde mostramos várias razões de fatores de forma para evidenciar tal efeito na região de momentos tipo-espaço. A razão dos fatores de forma do káon e do pión atinge valores acima da unidade nos baixos momentos refletindo a distribuição de carga mais compacta do káon em relação a do pión, enquanto nos momentos mais elevados, observamos que a razão fica abaixo da unidade. Isso pode explicar o fato de que o conjunto (A) produz um fator de forma pión acima dos dados experimentais em grandes momentos, bem como acima dos resultados de VMD (ver Fig. 5.1), enquanto o fator de forma káon para o conjunto (C) concorda com VMD (veja o painel inferior da Fig. 5.2).

O modelo VMD das Eqs. (5.1) e (5.2), fornece para grandes momentos a razão:

$$\frac{F_{K^+}(q^2)}{F_{\pi^+}(q^2)} \rightarrow e_u + e_s \frac{m_\phi^2}{m_\rho^2} = 1.24, \quad (5.4)$$

enquanto a QCD para $Q^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$, prevê a seguinte relação (LEPAGE; BRODSKY, 1979)

$$\frac{F_{K^+}(q^2)}{F_{\pi^+}(q^2)} \rightarrow \frac{f_K^2}{f_\pi^2} = 1.42 \pm 0.03, \quad (5.5)$$

onde usamos o valor experimental para a razão das constantes de decaimento desses mésons (ZYLA *et al.*, 2020). Se tivéssemos escolhido o conjunto (B) para o pión com o conjunto (C) para o káon e calculado $F_{K^+}(q^2)/F_{\pi^+}(q^2)$ teríamos um valor um pouco maior do que a unidade, no entanto, o nosso modelo não tem a dinâmica de QCD perturbativa embutida e não esperamos reproduzir a Eq. (5.5), na região assintótica para grandes momentos transferidos.

Além disso, na Fig. 5.3, também mostramos as razões das contribuições de sabor para

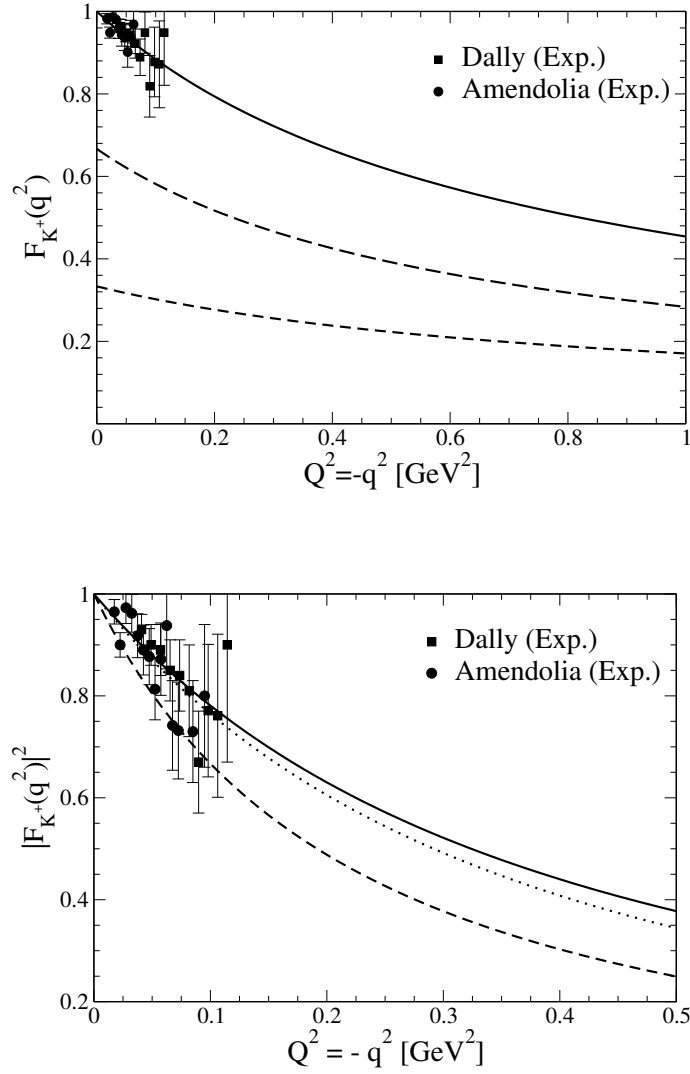


FIGURA 5.2 – Fator de forma eletromagnético do káon em função de $q^2 < 0$. Paineil superior: fator de forma do káon (linha sólida), contribuição $u - e_u F_{u\bar{s}u}$ (linha tracejada) e contribuição $\bar{s} - e_{\bar{s}} F_{\bar{s}u\bar{s}}$ (linha tracejada curta), calculados com o conjunto de parâmetros (C) (veja tabela 4.1). Paineil inferior: comparação entre os resultados de $|F_{K^+}|^2$ para os conjuntos de parâmetros (C) (linha completa), (D) (linha tracejada) e o modelo VMD da Eq. (5.2) (linha pontilhada). Dados experimentais das Refs. (AMENDOLIA *et al.*, 1986; DALLY *et al.*, 1980).

os fatores de forma do pión e do káon. A razão das contribuições dos fatores de forma do quark u para o káon e o pión, denotado por $F_{u\bar{s}u}/F_{u\bar{d}u}$ segue um padrão semelhante à razão do fator de forma completo, bem como $(e_u F_{u\bar{s}u})/(e_{\bar{d}} F_{\bar{d}u\bar{d}})$, apesar do fator 2 da relação de carga, como para o pión $F_{u\bar{d}u} = F_{\bar{d}u\bar{d}}$. Em pequenas transferências de momento, observamos que a configuração em que o fóton é absorvido pelo quark u no pión é um pouco maior do que no káon. A razão das contribuições do \bar{s} no káon para \bar{d} no pión dada por $F_{\bar{s}u\bar{s}}/F_{\bar{d}u\bar{d}}$, apresenta uma dependência com Q^2 semelhante ao que discutimos, ou seja, reflete a configuração mais compacta do káon em relação ao pión. Devemos dizer que, apesar do comportamento para grandes momentos do fator de forma do pión para o conjunto (A), superestimar os dados experimentais, sua previsão em momentos mais baixos deve ser razoável. Conforme mostrado na Fig. 5.3, a razão entre as contribuições \bar{s} e u para o fator de forma do káon, a saber $(e_{\bar{s}} F_{\bar{s}u\bar{s}})/(e_u F_{u\bar{s}u})$, claramente está acima do valor 1/2 para a simetria de sabor SU(3), como observamos para valores de Q^2 de até 10 GeV². Tal efeito é bastante visível na Fig. 5.2, ao observarmos a contribuição individual do sabor para o fator de forma de carga káon.

TABELA 5.1 – Razões parciais para os fatores de forma eletromagnéticos do pión (A) e káon (C) em 10 GeV², em comparação com o modelo NJL da referência (HUTAURUK *et al.*, 2016).

| Modelo | $\frac{F_{u\bar{s}u}}{F_{u\bar{d}u}}$ | $\frac{F_{\bar{s}u\bar{s}}}{F_{\bar{d}u\bar{d}}}$ | $\frac{e_{\bar{s}} F_{\bar{s}u\bar{s}}}{e_u F_{u\bar{s}u}}$ |
|-------------------------------------|---------------------------------------|---|---|
| Este trabalho | 0.80 | 1.10 | 0.69 |
| NJL (HUTAURUK <i>et al.</i> , 2016) | 0.36 | 2.74 | 0.56 |

Na Tabela 5.1, as razões das contribuições de sabor para os fatores de forma do pión e do káon para os conjuntos (A) e (C), respectivamente, e apresentadas na Fig. 5.3 são comparadas com os resultados do modelo NJL obtido na Ref. (HUTAURUK *et al.*, 2016) no valor particular de $Q^2 = 10$ GeV². Os resultados na tabela ilustram mais uma vez a quebra da simetria do sabor SU(3) através das razões dos fatores de forma dos diferentes sabores. Nossos resultados mostram o desvio de $F_{u\bar{s}u}/F_{u\bar{d}u}$ e $F_{\bar{s}u\bar{s}}/F_{\bar{d}u\bar{d}}$ da unidade, que são consideravelmente menores do que no modelo NJL, uma vez que o conjunto (A) superestima o fator de forma do pión em grandes momentos. Os resultados do modelo NJL da referência (HUTAURUK *et al.*, 2016) mostram uma quebra de simetria maior para estas razões.

A relação entre as contribuições de sabor \bar{s} e u para o fator de forma do káon (quarta coluna na Tabela 5.1), são consistentes, mesmo levando-se em consideração que a corrente de quark está vestida (HUTAURUK *et al.*, 2016), além disso, mostra que o nosso modelo de amplitude de Bethe-Salpeter, com vértice simétrico, tem uma quebra de simetria de sabor pequena, ou seja, cerca de 10 %, para os quarks up e estranhos dentro do káon. Uma diferença importante a ser apontada, é que o modelo NJL conforme estudado na

Ref. (HUTAURUK *et al.*, 2016), possui escalas infravermelho e ultravioleta, enquanto nosso modelo é menos flexível, tendo apenas uma escala de massa, o que torna o modelo atual mais robusto contra quebra de simetria de sabor entre os contribuições dos quark para o fator de forma eletromagnético no káon.

Na Tabela 5.2, apresentamos a razão F_{π^+}/F_{K^+} para alguns valores elevados de Q^2 , calculados com os conjuntos (A) e (C), em comparação com os resultados de outros modelos (BAKULEV *et al.*, 2001; HUTAURUK *et al.*, 2016; SHI *et al.*, 2014). No limite de simetria do sabor SU(3), todas as razões apresentadas na tabela devem ser unitárias, o que claramente não é o caso. Além disso, a QCD prevê que para $Q^2 \gg \Lambda_{QCD}$, a razão entre os fatores de forma se aproxima de $f_{\pi}^2/f_K^2 \simeq 0.70$ o que sugere, comparando esta razão com os dados experimentais da região tipo tempo, que $Q^2 \sim 17 \text{ GeV}^2$ ainda não está na região assintótica. Em particular, nossos resultados para essa razão usando o conjunto (A) e (C), para o pión e káon respectivamente, superestima a comparação citada acima, e se tivéssemos usado o conjunto (B) para o pión, teríamos encontrado um valor abaixo da unidade, como os outros modelos.

Ressaltamos que o conjunto de parâmetros (A) foi escolhido para analisar o pión, pois dá uma melhor representação do fator de forma eletromagnético em baixos momentos e, além disso, massas de quarks leves maiores deste conjunto evitam desligar os quarks (energia de ligação negativas) nos méson D^+ e D_s^+ , como já mostramos, ao discutir os observáveis estáticos desses mésons leves-pesados.

TABELA 5.2 – Razão dos fatores de forma eletromagnéticos para pión (A) e káon (C), em comparação com cálculos de (HUTAURUK *et al.*, 2016; BAKULEV *et al.*, 2001; SHI *et al.*, 2014) e dados experimentais na região tipo-tempo (PEDLAR *et al.*, 2005; SETH *et al.*, 2013).

| Referências | $Q^2 \text{ [}(\text{GeV}/c)^2\text{]}$ | F_{π^+}/F_{K^+} |
|---|---|---------------------|
| Este Trabalho | 10.0 | 1.10 |
| | 13.48 | 1.14 |
| | 14.2 | 1.13 |
| | 17.4 | 1.16 |
| Hutauruk et al. (HUTAURUK <i>et al.</i> , 2016) | 10.0 | 0.87 |
| Bakulev et al. (BAKULEV <i>et al.</i> , 2001) | 13.48 | 0.53 |
| Shi et al. (SHI <i>et al.</i> , 2014) | 17.4 | 0.81 |
| Pedlar et al. (PEDLAR <i>et al.</i> , 2005) | 13.48 | 1.19(17) |
| Seth et al. (SETH <i>et al.</i> , 2013) | 14.2 | 1.21(3) |
| Seth et al. (SETH <i>et al.</i> , 2013) | 17.4 | 1.09(4) |

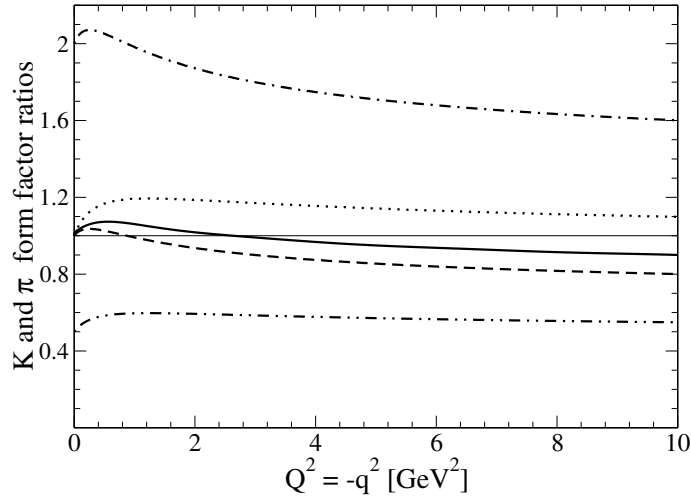


FIGURA 5.3 – As razões do fator de forma eletromagnético para o pión e káon usando os conjuntos de parâmetros (A) e (C), respectivamente. Razões entre as contribuições de sabor para os fatores de forma pión e káon: F_{K^+}/F_{π^+} (linha sólida); $e_u F_{u\bar{s}u}/(e_{\bar{d}} F_{\bar{d}u\bar{d}})$ (linha ponto-tracejada), $F_{u\bar{s}u}/F_{u\bar{d}u}$ (linha tracejada); $F_{\bar{s}u\bar{s}}/F_{\bar{d}u\bar{d}}$ (linha pontilhada); $e_{\bar{s}} F_{\bar{s}u\bar{s}}/(e_u F_{u\bar{s}u})$ (linha ponto-ponto-tracejada). Uma linha sólida fina é a referência para a simetria de sabor SU(3).

5.2 D^+ e D_s^+

Estudamos a seguir os fatores de forma EM dos mésons D^+ e D_s^+ , e sua decomposição de sabor. Em particular, ilustramos quantitativamente a manifestação da quebra de simetria de sabor SU(4) das contribuições de cada quark para o fator de forma. Usamos os conjuntos de parâmetros (E) e (F) dados na Tabela 4.1, que ajustam as constantes de decaimento eletrofracas do D^+ e do D_s^+ , respectivamente. As massas desses mésons são as experimentais conforme o "Particle Data Group" (PDG) (ZYLA *et al.*, 2020), e dadas na tabela. A comparação será feita com os resultados de LQCD, para os fatores de forma eletromagnéticos para D^+ (CAN *et al.*, 2013; LI; WU, 2017) e para D_s^+ (LI; WU, 2017), mesmo que as massas físicas desses mésons não tenham sido alcançadas nesses cálculos. Isso tem um impacto no raio de carga, como foi verificado em nossa discussão da Tabela 4.4. No entanto, levando em consideração os erros citados dos cálculos de rede, nossos resultados são bastante consistentes com o conjunto (C1) usado na Ref. (LI; WU, 2017). Essa tendência será confirmada comparando os fatores de forma eletromagnético e as contribuições dos quarks correspondentes com os resultados de LQCD.

Para termos um controle fenomenológico dos fatores de forma computados, exploramos

também a VMD aplicada para os mésons D^+ e D_s^+ ,

$$F_{D^+}(q^2) = \frac{2}{3} \frac{m_{J/\psi}^2}{m_{J/\psi}^2 - q^2} + \frac{1}{3} \frac{m_\rho^2}{m_\rho^2 - q^2}, \quad (5.6)$$

$$F_{D_s^+}(q^2) = \frac{2}{3} \frac{m_{J/\psi}^2}{m_{J/\psi}^2 - q^2} + \frac{1}{3} \frac{m_\phi^2}{m_\phi^2 - q^2}. \quad (5.7)$$

Essas expressões para os fatores de forma com base na VMD, onde as massas do J/Ψ , ρ e do ϕ determinam os pólos mais próximos da região de momento tipo-espaco na amplitude de absorção do fótons. Os valores das massas dos mésons vetoriais vêm do PDG (ZYLA *et al.*, 2020). O fator de forma do modelo VMD, resulta para D^+ um raio de carga de $r_{D^+} = 0.381$ fm e para D_s^+ o valor de $r_{D_s^+} = 0.302$ fm. Esses valores são próximos ao nosso modelo covariante de vértice simétrico, e também aos resultados da rede (veja a Tabela 4.3).

Os resultados para os fatores de forma EM dos mésons D^+ e para o D_s^+ são apresentados nas Figs. 5.4 e 5.5, respectivamente. Além disso, a decomposição de sabor e a comparação com os resultados de QCD na rede (CAN *et al.*, 2013) e (LI; WU, 2017) são também incluídos na figura. Os três painéis da Fig. 5.4 são dedicados ao fator de forma do D^+ , onde apresentamos nossos cálculos com o conjunto de parâmetros (E) dado na Tabela 4.1, e as contribuições de quark correspondentes, a saber $F_{\bar{d}c\bar{d}}$ e $F_{c\bar{d}c}$, que são comparadas aos resultados de LQCD e ao modelo VMD da Eq. (5.6). No painel superior, os fatores de forma de LQCD (CAN *et al.*, 2013) são mostrados junto com os modelos VMD e o conjunto (E). Conforme antecipado na análise dos raios de carga na Tabela 4.5, observamos consistentemente que os fatores de forma do nosso modelo estão abaixo dos resultados da Ref. (CAN *et al.*, 2013) até 2 GeV^2 . A contribuição do quark pesado para o fator de forma D^+ mostrado na Fig. 5.4 diminui lentamente desde que preferencialmente ele se encontra no centro de massa do méson, enquanto o quark leve forma uma distribuição de carga como um tipo "auréola"(halo) em torno do quark pesado, explorando a região de confinamento. Apesar disso, o comportamento de $F_{\bar{d}c\bar{d}}$ com Q^2 é suave tornando útil nosso modelo para representar a distribuição de carga desse méson pesado-leve.

Os cálculos de LQCD da referência (LI; WU, 2017) foram feitos com dois conjuntos de parâmetros de rede, a saber (B1) e (C1), com o último fornecendo o valor mais próximo da massa experimental do D^+ (ver Tabela 4.4). Esses resultados de LQCD são comparados ao nosso modelo, que são apresentados nos painéis do meio e inferior da Fig. 5.4. Dentro dos erros dos fatores de forma calculados em LQCD com o conjunto (C1), encontramos concordância com nosso modelo, o que não acontece com o fator de forma de VMD. O fator de forma de carga "halo" do quark leve do conjunto (C1) proveniente de LQCD também é reproduzido, bem como a contribuição do charme para o fator de forma do D^+ .

Na Fig. 5.5, mostramos os resultados para o fator de forma eletromagnético para o

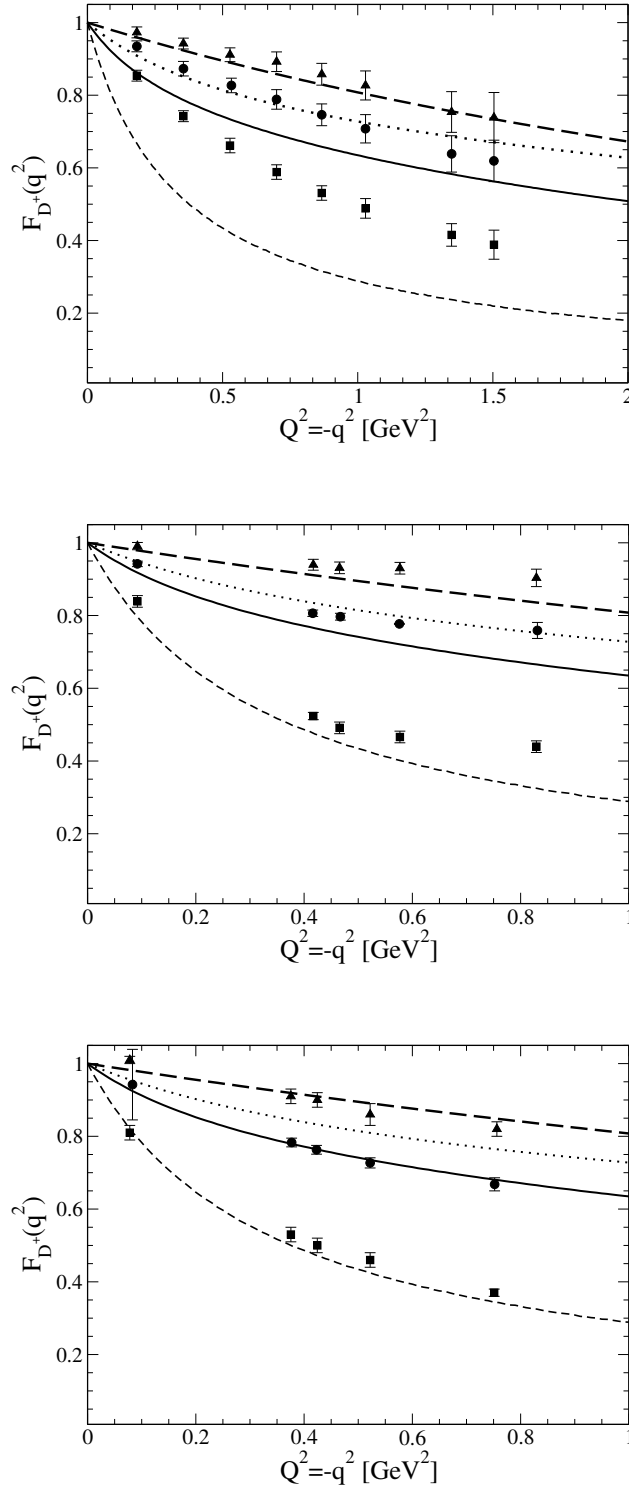


FIGURA 5.4 – Fatores de forma eletromagnéticos com as contribuições dos quarks correspondentes e comparação com cálculos de QCD na rede. Nossos resultados: fator de forma completo D^+ (linha sólida), contribuição do \bar{d} - $e_{\bar{d}}F_{\bar{d}c\bar{d}}$ (linha tracejada curta) e contribuição do c - $e_cF_{c\bar{d}c}$ (linha tracejada). VMD da Eq. (5.6) (linha pontilhada). Resultados de LQCD para fator de forma completo do D^+ (círculos), contribuição do \bar{d} (quadrados) e contribuição c (triângulos). Painel superior: comparação com resultados de LQCD (CAN *et al.*, 2013). Painel do meio: comparação com resultados de LQCD do conjunto (B1) (LI; WU, 2017). Painel inferior: comparação com os resultados de LQCD do conjunto (C1) (LI; WU, 2017).

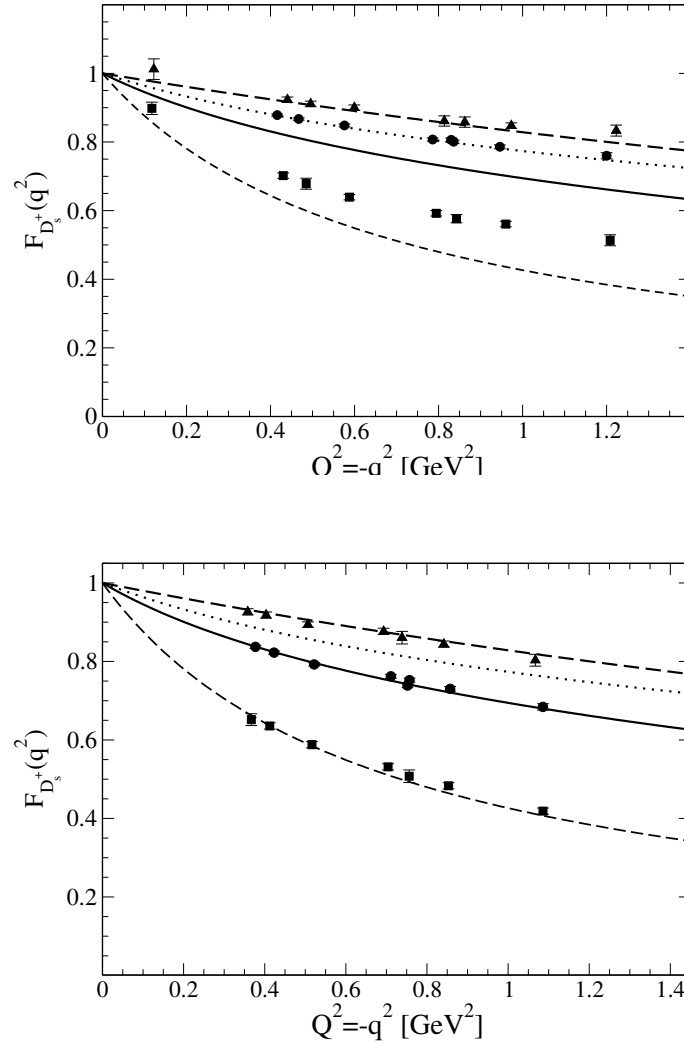


FIGURA 5.5 – Fatores de forma eletromagnéticos para D_s^+ com as contribuições dos quarks correspondentes e comparação com cálculos de QCD na rede. Nossos resultados: fator de forma completo D_s^+ (linha sólida), contribuição do \bar{d} (linha tracejada curta) e contribuição do c (linha tracejada), VMD da Eq. (5.6) (linha pontilhada). Resultados para LQCD: fator de forma completo para D_s^+ (círculos), contribuição para \bar{s} (quadrados) e contribuição referente a c (triângulos). Painel superior: comparação com os resultados de LQCD do conjunto (B1) (LI; WU, 2017). Painel inferior: comparação com os resultados de LQCD do conjunto (C1) (LI; WU, 2017).

méson D_s^+ e a decomposição de sabor correspondente para o nosso modelo obtido com o conjunto de parâmetros (F). A comparação com o modelo VMD e cálculos LQCD da referência (LI; WU, 2017) com os conjuntos B1 (painel superior) e C1 (painel inferior) também são apresentados na figura. Os fatores de forma $F_{D_s^+}$ e contribuições de sabor $F_{c\bar{s}c}$ e $F_{\bar{s}c\bar{s}}$ subestimam os resultados do conjunto (B1), proveniente de LQCD e do modelo de VMD, visto no painel superior da figura. Este resultado é esperado uma vez que os

raios computados são maiores do que os obtidos com o conjunto (B1) (veja a Tabela 4.5). O fator de forma eletromagnético do D_s^+ e seu conteúdo de sabor obtidos com o nosso modelo estão de acordo com os resultados do conjunto (C1), conforme mostrado no painel inferior da figura, e sendo consistente com o que foi observado para D^+ e apresentado no painel inferior da Fig. 5.4.

A consistência encontrada para os fatores de forma D^+ e D_s^+ e no conteúdo de sabor com os resultados de LQCD do conjunto (C1), sugere que a física infravermelha da QCD contida no modelo, e nas massas constituintes, reflete de forma consistente os efeitos de longa distância da QCD nesses mésons pesados. É importante observar que nossa escolha dos parâmetros (A) para o pión e (C) para o káon, descrevem seus raios de carga e constantes de decaimento, e de fato as quantidades que carregam de forma determinante a física da QCD não perturbativa na região de longas distâncias.

A seguir, discutiremos a manifestação da quebra de simetria SU(4) nos fatores de forma D^+ e D_s^+ . Com esse objetivo, na Fig. 5.6, apresentamos várias razões dos fatores de forma eletromagnéticos dos mésons D e seus componentes de sabor com os correspondentes no pión do modelo (A). No painel superior da figura, apresentamos a razão F_{D^+}/F_{π^+} , que tende a um valor próximo a 2, para grandes momentos transferidos. Esta razão satura acima de $Q^2 = -q^2 \gtrsim 3 \text{ GeV}^2$, o que indica que os valores das massas constituintes do quark e das escalas de massa do vértice μ_M são um tanto irrelevantes para o dependência em q^2 , enquanto o valor da razão ~ 2 parece ser mais particular para o nosso modelo.

No entanto, devemos notar que a normalização dos fatores de forma é essencialmente determinada em escalas de baixo momento e que deve ser delimitada pelo ajuste da constante de decaimento e do raio de carga. Por outro lado, levando em consideração a razão das constantes de decaimento ao quadrado, o valor presente é cerca de metade do valor que deveria ser para $F_{D_s^+}/F_{\pi^+}$ (painel inferior), enquanto para $F_{D^+}/F_{\pi^+} \sim 2$ é consistente com essa razão.

As razões das contribuições do quark \bar{d} para D^+ e D_s^+ , em relação ao pión são também apresentadas na Fig. 5.6, a saber $F_{\bar{d}c\bar{d}}/F_{\bar{d}u\bar{d}}$ (painel superior) e $F_{\bar{s}c\bar{s}}/F_{\bar{d}u\bar{d}}$ (painel inferior), respectivamente. Esses resultados exemplificam dois aspectos da quebra de simetria do sabor SU(4), mais forte na distribuição da carga \bar{d} em D^+ , que é estendida em relação aquela no pión, enquanto o efeito é um pouco mais fraco no D_s^+ , onde \bar{s} é mais pesado do que \bar{d} e sua distribuição de carga no D_s^+ é mais semelhante a do pión. Esta última observação é confirmada pelos raios semelhantes, $r_{D_s^+(\bar{s})}$ e r_π (ver Tabelas 4.1 e 4.5). As razões $(e_{\bar{d}}F_{\bar{d}c\bar{d}})/(e_u F_{u\bar{d}u})$ (painel superior) e $(e_{\bar{s}}F_{\bar{s}c\bar{s}})/(e_u F_{u\bar{d}u})$ (painel inferior) reflete o que já foi discutido acima.

A contribuição do quark pesado para os fatores de forma D^+ e D_s^+ e a evidência associada a quebra de simetria do sabor SU(4) é claramente observada nas razões $F_{\bar{c}\bar{d}c}/F_{u\bar{d}u}$

(painel superior) e $F_{c\bar{s}c}/F_{u\bar{d}u}$ (painel inferior), que satura acima de $\sim 3 \text{ GeV}^2$, atingindo uma razão de cerca de 3, em estreita relação com a forte localização do quark pesado no centro de massa do méson. O valor grande dessa razão seria ainda maior se tivéssemos escolhido um modelo do pión que representa melhor o fator de forma em grandes momentos como o modelo (B). Essas características são visíveis nas razões $(e_c F_{c\bar{d}c})/(e_{\bar{d}} F_{\bar{d}u\bar{d}})$ (painel superior) e $(e_c F_{c\bar{s}c})/(e_{\bar{d}} F_{\bar{d}u\bar{d}})$ (painel inferior).

Finalmente, para encerrar a nossa discussão, mostramos na Fig. 5.7, o raio de carga obtido com a mudança da massa do charme, m_c , mantendo os outros parâmetros do conjunto (E) e (F) fixos. Quanto mais pesado é o quark charme, o raio de carga do D^+ e D_s^+ tendem a saturar em um comportamento decrescente sendo que a principal contribuição vem do quark leve, que no modelo, de vértice simétrico, é sensível ao valor mínimo do ponto de ramificação, a saber, $m_{\bar{d}(\bar{s})} + \mu_{D^+(D_s^+)} - m_{D^+(D_s^+)}$, que não é afetado pelo aumento da massa de charme e sua maior localização. Tal mecanismo é particular do presente modelo, e simula a realização do limite de quark pesado da QCD, onde o centro da força confinante é fixado na posição do quark pesado. Em nosso caso, essa física é simulada mantendo-se fixo o ponto de ramificação mais baixo. No entanto, é necessário distinguir que o modelo de vértice simétrico, embora aponte algumas propriedades que a QCD dita a estes mésons pesados-leves, não possui o confinamento absoluto dos quarks.

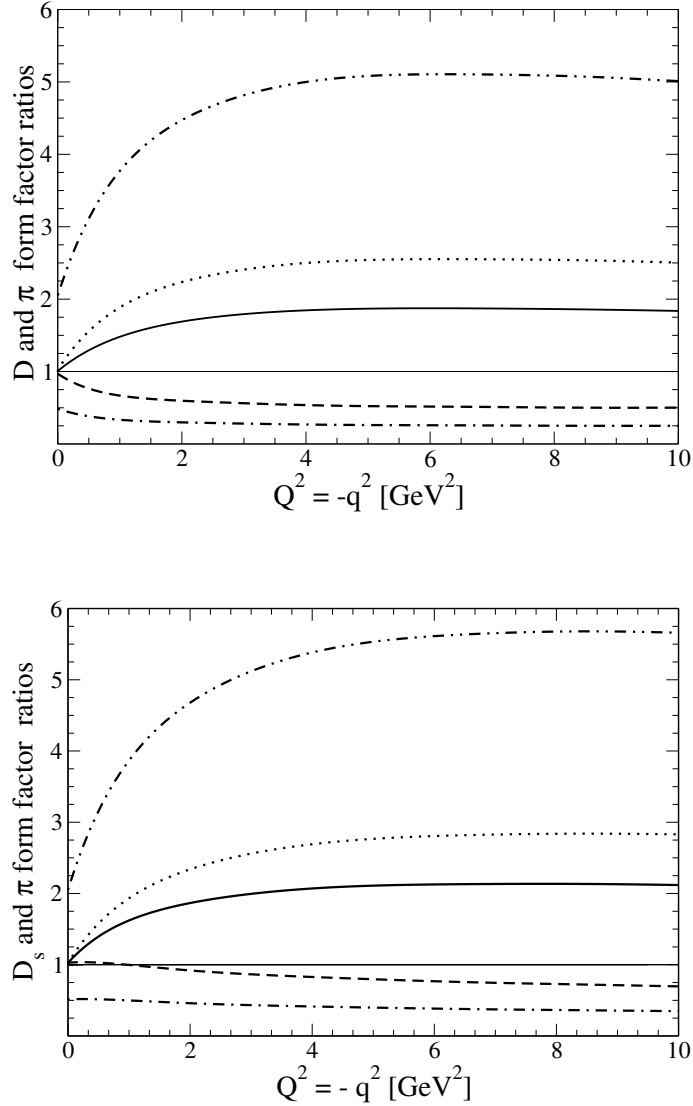


FIGURA 5.6 – As razões do fator de forma eletromagnético do pión (A) com D^+ e D_s^+ . Painel superior: F_{D^+}/F_{π^+} (linha sólida); $F_{\bar{d}c\bar{d}}/F_{\bar{d}u\bar{d}}$ (linha tracejada); $(e_{\bar{d}}F_{\bar{d}c\bar{d}})/(e_u F_{u\bar{d}u})$ (linha pontilhada-tracejada); $F_{c\bar{d}c}/F_{u\bar{d}u}$ (linha pontilhada); $(e_c F_{c\bar{d}c})/(e_{\bar{d}} F_{\bar{d}u\bar{d}})$ (linha ponto-ponto-tracejada). Painel inferior: $F_{D_s^+}/F_{\pi^+}$ (linha sólida); $F_{\bar{s}c\bar{s}}/F_{\bar{d}u\bar{d}}$ (linha tracejada); $e_{\bar{s}} F_{\bar{s}c\bar{s}}/(e_u F_{u\bar{d}u})$ (linha ponto-tracejada); $F_{c\bar{s}c}/F_{u\bar{d}u}$ (linha pontilhada); $e_c F_{c\bar{s}c}/(e_{\bar{d}} F_{\bar{d}u\bar{d}})$ (linha ponto-ponto-tracejada). A linha sólida fina é a referência para a simetria de sabor SU(4).

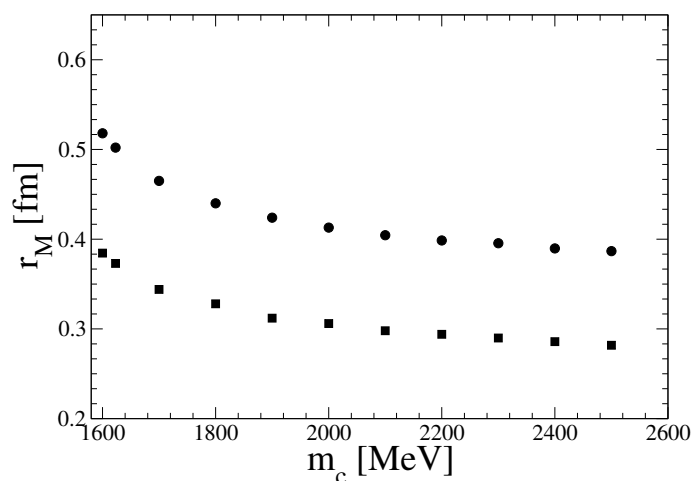


FIGURA 5.7 – Raio de carga dos mésons D^+ e D_s^+ mésons como uma função da massa do quark charme, m_c , tendo todos os outros parâmetros fixados no conjunto (E) para D^+ (círculos) e no conjunto (F) para D_s^+ (quadrados) .

6 O pión inspirado na QCD

A cromodinâmica quântica (QCD), com graus de liberdade de quarks e glúons é o arcabouço teórico aceito para explicar o espectro e a estrutura dos hádrons. Essas propriedades estão intimamente associadas ao aspecto não-perturbativo da teoria, mesmo que na região de curtas distâncias ou ultravioleta (UV) a liberdade assintótica domina as amplitudes, levando às conhecidas regras de contagem e leis de potência dos observáveis (LEPAGE; BRODSKY, 1979; LEPAGE; BRODSKY, 1980) e das amplitudes de probabilidades da função de onda da frente de luz no espaço de Fock (JI *et al.*, 2003). Dentro dos métodos não-perturbativos, podemos citar os tratamentos da QCD utilizando equações de Schwinger-Dyson e Bethe-Salpeter no Euclideano para descrever os hádrons (veja, por exemplo, (CLOËT; ROBERTS, 2014)), cálculos de QCD na rede também aplicados para descrever núcleos (veja, por exemplo, (MUELLER, 1999; BEANE *et al.*, 2011)).

Em particular, o impacto da QCD nas propriedades dos hádrons, principalmente naquelas dominadas pela física do infravermelho não-perturbativa, passa pela definição dos graus de liberdade efetivos necessários para descrever os hádrons. Os quarks leves, constituintes do pión, são fortemente vestidos pela interação, e sua auto-energia depende do momento, como é obtido de cálculos de QCD na rede (PARAPPILLY *et al.*, 2006; OLIVEIRA *et al.*,). Além disso, no limite quiral o vértice pseudo-escalar pión-quark é determinado pela componente escalar da auto-energia do quark, dada a natureza de bóson de Goldstone do pión, e como imposto pelas identidades de Ward-Takahashi axial-vetor (veja, por exemplo, (CLOËT; ROBERTS, 2014; HORN; ROBERTS, 2016)). Os glúons também tornam-se graus de liberdade efetivos no infravermelho, e são também vestidos intensamente para baixos momentos (OLIVEIRA; BICUDO, 2011). Devemos enfatizar que ainda é pouco entendido como construir as componentes de Fock da função de onda de um hádron na frente de luz em termos de quarks e glúons vestidos pela QCD para além da sua componente de valência (ARRINGTON *et al.*, 2021). Isso de fato, torna interessante aprimorar o modelo covariante de mésons pseudo-escalares introduzido no capítulo 2, onde quarks tem massa fixa, e a natureza de bóson de Goldstone do pión não é explorada.

Nessa segunda parte do trabalho de tese, estendemos nossa investigação do pión considerando sua natureza de bóson de Goldstone e aprofundando o estudo do modelo do pión no espaço de Minkowski inspirado na QCD, proposto na tese de doutorado de Clay-

ton Santos Mello (MELLO, 2017), e que reproduziu os dados experimentais do fator de forma eletromagnético (MELLO *et al.*, 2017). Nesse modelo a amplitude de Bethe-Salpeter do pión incorpora o propagador do quark vestido, embora, apenas seja considerada a massa dependente de momento, diferentemente do modelo adotado na primeira parte da tese onde as massas constituintes são independentes de momento. O vértice pión-quark pseudo-escalar no modelo inspirado na QCD é proporcional ao termo de massa do propagador do quark vestido como explicado acima. A forma analítica do termo de massa, contendo um polo na região de momento tipo-tempo, é ajustada aos resultados de QCD na rede no calibre de Landau para momentos tipo-espaço (PARAPPILLY *et al.*, 2006), e permite a extensão da amplitude de Bethe-Salpeter ao espaço de Minkowski. Isso nos motivou a um estudo mais detalhado desse modelo, explorando a representação integral de Nakanishi (NAKANISHI, 1971) da amplitude de BS do pión, que já foi aplicada com sucesso para resolver a equação de BS no espaço de Minkowski para o pión (PAULA *et al.*, 2021; YDREFORS *et al.*, 2021).

Nesse capítulo, tendo com base o propagador vestido do quark, deduzimos as funções peso da representação de Nakanishi das quatro amplitudes escalares referentes a decomposição da amplitude de BS do pión em duas bases de operadores no espaço spinorial de Dirac, uma não ortogonal e outra ortogonal, esta última utilizada na solução da equação de BS no espaço de Minkowski (CARBONELL; KARMANOV, 2010). Além disso, apresentamos os resultados numéricos para as funções peso de Nakanishi e para as amplitudes escalares projetadas na frente de luz (que no capítulo seguinte são necessárias para construir a função de onda de valência), correspondentes a decomposição da amplitude de Bethe-Salpeter na base ortogonal. Esses resultados numéricos são discutidos, enfatizando suas propriedades de simetria.

6.1 Propagador do quark vestido

Em geral, o propagador de um quark pode ser escrito como:

$$S_F(k) = \iota Z(k^2) [\not{k} - M(k^2) + \iota\epsilon]^{-1}, \quad (6.1)$$

onde deve-se observar que a função de massa dinâmica $M(k^2)$ é independente do ponto de renormalização, como foi feito em (FISCHER *et al.*, 2004). Usamos no presente trabalho $Z(k^2) = 1$. Este ansatz é sugerido, por exemplo na referência (PAGELS; STOKAR, 1979), assim como também foi adotado na referência, (MELLO *et al.*, 2017) que tomamos como ponto de partida para essa seção. Seguindo, usamos a seguinte parametrização da função

de massa, dada em (DUDAL *et al.*, 2016; MELLO *et al.*, 2017)

$$M(k^2) = m_0 - m^3 [k^2 - \lambda^2 + i\epsilon]^{-1}, \quad (6.2)$$

onde os parâmetros da função de massa “running” são dados por, (DUDAL *et al.*, 2016; MELLO *et al.*, 2017)

$$m_0 = 0.014 \text{ GeV}, \quad m = 0.574 \text{ GeV} \text{ and } \lambda = 0.846 \text{ GeV}. \quad (6.3)$$

Introduzindo a Eq.(6.2) no denominador da Eq.(6.1), temos que :

$$S_F(k^2) = i \frac{(k^2 - \lambda^2 + i\epsilon)^2 (\not{k} + M(k^2))}{k^2 (k^2 - \lambda^2 + i\epsilon)^2 - [m_0 (k^2 - \lambda^2 + i\epsilon)]^2 + i\epsilon}, \quad (6.4)$$

e observa-se a presença de pólos no propagador do quark, $k_i^2 \rightarrow m_i^2 = M^2(m_i^2)$ (i indica a posição do pólo), que são obtidos ao resolvermos a equação cúbica:

$$k^6 - (m_0^2 + 2\lambda^2)k^4 + (\lambda^4 + 2\lambda^2 m_0^2 + 2m_0 m^3)k^2 - (m^6 + 2m_0 m^3 \lambda^2) = 0. \quad (6.5)$$

Com os parâmetros dados acima para a função de massa (6.2), os pólos são reais e serão iguais a: $m_1 = 0.383 \text{ GeV}$, $m_2 = 0.644 \text{ GeV}$ e $m_3 = 0.954 \text{ GeV}$. Podemos separar a parte escalar da parte vetorial no numerador da Eq. (6.4) e como uma consequência do teorema fundamental da álgebra, o denominador do propagador do quark pode ser fatorado no produto de três polinômios, logo:

$$S_F(k) = i \left\{ \frac{(k^2 - \lambda^2)^2 \not{k}}{\prod_{i=1,3} (k^2 - m_i^2 + i\epsilon)} + \frac{(\lambda^2 - k^2) m^3}{\prod_{i=1,3} (k^2 - m_i^2 + i\epsilon)} + \frac{(k^2 - \lambda^2)^2 m_0}{\prod_{i=1,3} (k^2 - m_i^2 + i\epsilon)} \right\}.$$

Compactando a notação, reescreve-se o propagador como $S_F(k) = i \{ [A(k^2) \not{k}] + [B(k^2)] \}$. E usando a decomposição espectral (ITZYKSON; ZUBER, 2012), podemos fazer a seguinte relação para o coeficiente da parte vetorial

$$A(k^2) \equiv \frac{(k^2 - \lambda^2)^2}{\prod_{i=1,3} (k^2 - m_i^2 + i\epsilon)} = \int_0^\infty d\mu^2 \frac{\rho_A(\mu^2)}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}, \quad (6.6)$$

por sua vez o coeficiente da parte escalar, inserindo também a decomposição espectral, torna-se

$$B(k^2) \equiv \frac{(\lambda^2 - k^2) m^3}{\prod_{i=1,3} (k^2 - m_i^2 + i\epsilon)} + A(k^2) m_0 = \int_0^\infty d\mu^2 \frac{\rho_B(\mu^2)}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}. \quad (6.7)$$

Podemos calcular facilmente as densidades espectrais, $\rho_A(\mu^2)$ e $\rho_B(\mu^2)$, por decompo-

sição em frações parciais:

$$\frac{(k^2 - \lambda^2)^2}{\prod_{i=1,3}(k^2 - m_i^2)} = \frac{D_1}{(k^2 - m_1^2)} + \frac{D_2}{(k^2 - m_2^2)} + \frac{D_3}{(k^2 - m_3^2)}, \quad (6.8)$$

e também:

$$\frac{k^2 m^3 - \lambda^2 m^3}{\prod_{i=1,3}(k^2 - m_i^2)} = \frac{-E_1}{(k^2 - m_1^2)} + \frac{-E_2}{(k^2 - m_2^2)} + \frac{-E_3}{(k^2 - m_3^2)} + \frac{D_1 m_0}{(k^2 - m_1^2)} + \frac{D_2 m_0}{(k^2 - m_2^2)} + \frac{D_3 m_0}{(k^2 - m_3^2)}. \quad (6.9)$$

Por identidade de polinômios na variável k , podemos determinar os coeficientes das densidades espectrais, D_i e E_i , pois neles se concentram toda a informação física referente a massa da partícula. Manipulando essas últimas duas equações, teremos:

$$D_i = \frac{(\lambda^2 - m_i^2)^2}{(m_i^2 - m_j^2)(m_i^2 - m_k^2)}, \quad \text{e} \quad E_i = \frac{m^3(\lambda^2 - m_i^2)}{(m_i^2 - m_j^2)(m_i^2 - m_k^2)}, \quad (6.10)$$

o que leva facilmente à determinação das densidades espectrais, ao introduzir as expressões dadas em (6.10) na Eq.(6.6) e Eq.(6.7):

$$\begin{aligned} \rho_A(\mu^2) &= \sum_{i=1}^3 D_i \delta(\mu^2 - m_i^2), \\ \rho_B(\mu^2) &= \sum_{i=1}^3 E_i \delta(\mu^2 - m_i^2) + m_0 \rho_A(\mu^2). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Nota-se que esse modelo do propagador do quark é relativamente simples com densidades espectrais localizadas em determinadas escalas de massa, que discutiremos na próxima sessão. Chamamos a atenção, que recentemente na Ref. (LI *et al.*, 2020) foi proposta uma densidade espectral para a “função vestimenta” do glúon no calibre de Landau, que além da delta de Dirac contem derivadas superiores, baseadas em considerações de que o confinamento leva a densidades espectrais que são funcionais, como a delta de Dirac e suas derivadas (LI *et al.*, 2020), o que também sugere possíveis generalizações da Eq. (6.11) para as densidades espectrais do propagador do quark.

6.2 Amplitude de Bethe-Salpeter

Agora iremos apresentar a amplitude de Bethe-Salpeter do pión, e para isso devemos introduzir o vértice pion-quark, que denotaremos por $\Gamma(k, p)$. Esse vértice pión-quark é a amplitude de BS com as pernas externas dos quarks removidas. Como foi adotado em (MELLO *et al.*, 2017), tomaremos a massa do quark de corrente como sendo $m_0 = 0$ e anularemos também a massa do estado ligado, M_π , com esses procedimentos estamos no

limite quiral.

A forma da amplitude de BS para o pión é dada por:

$$\Psi_\pi(k; p) = S_F \left(k + \frac{p}{2} \right) \Gamma_\pi(k; p) S_F \left(k - \frac{p}{2} \right), \quad (6.12)$$

onde o vértice pión-quark dada a propriedade de méson pseudo-escalar, assume a seguinte forma geral:

$$\Gamma_\pi(k; p) = \gamma_5 [\imath E_\pi(k; p) + \not{p} F_\pi(k; p) + k^\mu p_\mu \not{k} G_\pi(k; p) + \sigma_{\mu\nu} k^\mu p^\nu H_\pi(k; p)]. \quad (6.13)$$

No limite quiral (massa nula do pión) o vértice do pión é escrito seguindo o trabalho de (CHANG *et al.*, 2013) e (MELLO *et al.*, 2017), como:

$$f_\pi E_\pi(k, P) = M(k^2) / \sqrt{Z(k^2)}. \quad (6.14)$$

Se levarmos em consideração que apenas essa contribuição pseudoescalar do vértice sobrevive no limite quiral, temos a simplificação do modelo e a Eq. (6.13) torna-se (MELLO *et al.*, 2017):

$$\Gamma_\pi(k; p) = \imath \mathcal{N} \gamma_5 M(k)|_{m_0=0} = -\imath \frac{\mathcal{N} \gamma_5 m^3}{k^2 - \lambda^2 - \imath\epsilon}, \quad (6.15)$$

onde permitimos a introdução de uma constante de normalização \mathcal{N} , a ser determinada pela normalização da amplitude de BS, como mostraremos na sessão final desse capítulo.

Após definirmos a estrutura do vértice dado pela Eq. (6.15), podemos escrever a amplitude de BS do pión, incorporando os efeitos do quark vestido, através do propagador vestido, e da quebra dinâmica da simetria quiral. Usando uma notação compacta para os propagadores, a qual separamos a parte escalar da vetorial, temos que:

$$\Psi_\pi(k; p) = - [A(k_q^2) \not{k}_q + B(k_q^2)] \frac{\mathcal{N} \gamma_5 m^3}{k^2 - \lambda^2 - \imath\epsilon} [A(k_{\bar{q}}^2) \not{k}_{\bar{q}} + B(k_{\bar{q}}^2)], \quad (6.16)$$

onde é usada a seguinte convenção $k_q = (k + p/2)$ para o quark e $k_{\bar{q}} = (k - p/2)$ para o antiquark.

Observando que o modelo do propagador do quark pode ser escrito por meio da representação espectral, ao fazermos uso das definições dadas nas Eq.(6.6) e Eq.(6.7), para $A(k^2)$ e $B(k^2)$, respectivamente, e manipulando a equação (6.16) para que seja escrita na forma da representação integral de Nakanishi, teremos,

$$\Psi_\pi(k; p) = \gamma_5 \chi_1(k, p) + \not{k}_q \gamma_5 \chi_2(k, p) + \gamma_5 \not{k}_{\bar{q}} \chi_3(k, p) + \not{k}_q \gamma_5 \not{k}_{\bar{q}} \chi_4(k, p), \quad (6.17)$$

com isso podemos identificar as funções escalares $\chi_i(k, p)$ com $i = 1, \dots, 4$:

$$\chi_i(k, p) = - \int_0^\infty d\mu'^2 \frac{\rho_{x_1}(\mu'^2)}{[(k + p/2)^2 - \mu'^2 + i\epsilon]} \frac{\mathcal{N} \gamma_5 m^3}{[k^2 - \lambda^2 + i\epsilon]} \int_0^\infty d\mu^2 \frac{\rho_{x_2}(\mu^2)}{[(k - p/2)^2 - \mu^2 + i\epsilon]}, \quad (6.18)$$

onde a convenção sobre os subíndices x_1 e x_2 fica inteiramente associada a cada função escalar $\chi_i(k, p)$. Assim para $i = 1$: $(x_1, x_2) \equiv (B, B)$; $i = 2$: $(x_1, x_2) \equiv (A, B)$; $i = 3$: $(x_1, x_2) \equiv (B, A)$; $i = 4$: $(x_1, x_2) \equiv (A, A)$.

6.3 Representação Integral: parametrização de Feynman

Deve-se observar que as quatro funções escalares descritas na Eq.(6.18) apresentam um denominador comum e o próximo passo é a introdução da parametrização de Feynman. No nosso caso, temos três denominadores, que são definidos como:

$$\begin{aligned} P_1 &= [(k + p/2)^2 - \mu'^2 + i\epsilon] \\ P_2 &= [k^2 - \lambda^2 + i\epsilon] \\ P_3 &= [(k - p/2)^2 - \mu^2 + i\epsilon]. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Utilizando a parametrização de Feynman, temos que:

$$\frac{1}{P_1 P_2 P_3} = 2 \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta \int_0^1 d\xi \frac{\delta(1 - \alpha - \beta - \xi)}{(P_1 \alpha + P_2 \beta + P_3 \xi)^3}, \quad (6.20)$$

onde a integração no parâmetro de Feynman, ξ , é realizada usando-se a delta de Dirac. As funções theta são responsáveis pelas condições: $1 - \alpha - \beta > 0$ e $1 - \alpha - \beta < 1$, introduzidas pela integração em ξ , com isso teremos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_1 P_2 P_3} &= \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta \\ &\times \frac{2 \theta(1 - \alpha - \beta) \theta(\alpha + \beta)}{\left[k^2 + (2\alpha + \beta - 1)k \cdot p + (\mu^2 - \mu'^2)\alpha + (\mu^2 - \lambda^2 - \frac{M_\pi^2}{4})\beta + \frac{M_\pi^2}{4} - \mu^2 + i\epsilon \right]^3}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Podemos introduzir uma nova variável, z' , com a ajuda da função delta de Dirac:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_1 P_2 P_3} &= \int_{-1}^1 dz' \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta \\ &\times \frac{2 \theta(1 - \alpha - \beta) \theta(\alpha + \beta) \delta[z' - (2\alpha + \beta - 1)]}{\left[k^2 + z' k \cdot p - [(-\mu^2 + \mu'^2)\alpha + (-\mu^2 + \frac{M_\pi^2}{4} + \lambda^2)\beta - \frac{M_\pi^2}{4} + \mu^2] + i\epsilon \right]^3}, \end{aligned} \quad (6.22)$$

fazendo-se a integração na delta na variável β resolvemos a integração mais interna. Pela delta de Dirac, temos que $0 \leq \beta_0 = z' - 2\alpha + 1 \leq 1$ sendo que as funções theta são responsáveis pelas condições $z' - 2\alpha + 1 > 0$ e $z' - 2\alpha + 1 < 1$, desta forma escrevemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_1 P_2 P_3} &= \int_{-1}^1 dz' \int_0^1 d\alpha \\ &\times \frac{2\theta(\alpha - z')\theta(z' - \alpha + 1)\theta(z' - 2\alpha + 1)\theta(2\alpha - z')}{\left[k^2 + z' k \cdot p - [(\mu'^2 - \mu^2)\alpha + (-\mu^2 + \frac{M_\pi^2}{4} + \lambda^2)(z' - 2\alpha + 1) - \frac{M_\pi^2}{4} + \mu^2] + i\epsilon \right]^3}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

O denominador de um diagrama de Feynman genérico que contribui para a amplitudes da transição fermiônicas tem a mesma expressão que no caso de bósons analisados por Nakanishi (NAKANISHI, 1963), resultado imediato da parametrização de Feynman de diagramas de n-loops. Isso mostra a motivação em escrevermos a Eq. (6.23) na forma particular proposta por Nakanishi (NAKANISHI, 1971):

$$\chi_i(k, p) = \int_{-1}^1 dz' \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma' \frac{g_i(\gamma', z'; \kappa^2)}{[k^2 + z' k \cdot p - \gamma' - \kappa^2 + i\epsilon]^3}. \quad (6.24)$$

Comparando os denominadores das equações (6.23) e (6.24), percebemos que é necessário introduzir uma nova variável, γ' , na Eq. (6.23), com o auxílio de uma delta de Dirac, de modo que essa integral tenha a forma proposta por Nakanishi. Considerando também o domínio as thetas, podemos escrever que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_1 P_2 P_3} &= \int_{-1}^1 dz' \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma' \int_0^1 d\alpha \frac{2 \theta(z' - 2\alpha + 1) \theta(\alpha - z')}{[k^2 + z' k \cdot p - \gamma' + i\epsilon]^3} \times \\ &\delta \left[\gamma' - \left(\left(\mu'^2 + \mu^2 - \frac{M_\pi^2}{2} - 2\lambda^2 \right) \alpha + \left(-\mu^2 + \frac{M_\pi^2}{4} + \lambda^2 \right) z' + \lambda^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (6.25)$$

Vamos restringir os limites de integração entre um valor mínimo e máximo, que serão definidos na seqüência. A título de nota, observamos que a forma que escrevemos a representação integral de Nakanishi, é equivalente à forma usada nos trabalhos (CARBONELL; KARMANOV, 2010; PAULA *et al.*, 2016; PAULA *et al.*, 2017) onde é resolvida a equação de

BS para o estado ligado e a quantidade $\kappa^2 = m^2 - M_\pi^2/4$ aparece no denominador (m é a massa do constituinte). Essa quantidade pode ser eliminada por uma redefinição da variável γ' nos referidos estudos.

O conjunto μ' e μ assumirá os valores dos pólos m_j e m_l com $j(l) = 1, 2, 3$, já definidos. Portanto, o suporte em γ' será delimitado por:

$$\gamma'(\alpha, z'; \mu', \mu) = \left(\mu'^2 + \mu^2 - \frac{M_\pi^2}{2} - 2\lambda^2 \right) \alpha + \left(-\mu^2 + \frac{M_\pi^2}{4} + \lambda^2 \right) z' + \lambda^2, \quad (6.26)$$

considerando os intervalos $0 \leq \alpha \leq 1$ e $-1 \leq z' \leq 1$, e os valores do conjunto de parâmetros (μ, μ', λ) e a massa do pión.

Até aqui a integral, sobre a variável γ' não tinha nenhum limite para evitar discutir o problema presente no suporte da representação de Nakanishi. No entanto, vemos que ela assumirá nove conjuntos de valores, cada um dos quais variará de um valor máximo, γ'_f , a um valor mínimo, γ'_i , isso é consequência da variação de α no intervalo de 0 a 1 e z de -1 a 1. As outras quantidades λ e M_π na Eq. (6.26) são constantes. Portanto, apresentamos na tabela 6.1, escrita abaixo, o suporte em γ' , escrevendo seus valores máximos e mínimos.

TABELA 6.1 – Extremos do suporte da integral (6.25) em γ' definidos pela Eq. (6.26) considerando os intervalos $0 \leq \alpha \leq 1$ e $-1 \leq z' \leq 1$,

| μ' | μ | $\gamma'_i(\alpha, z; \mu', \mu)$ GeV | $\gamma'_f(\alpha, z; \mu', \mu)$ GeV |
|--------|-------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| m_1 | m_1 | $\gamma'_{11_i} = -1.1253$ | $\gamma'_{11_f} = 1.3294$ |
| | m_2 | $\gamma'_{12_i} = -0.50973$ | $\gamma'_{12_f} = 1.0216$ |
| | m_3 | $\gamma'_{13_i} = 0.10202$ | $\gamma'_{13_f} = 0.90521$ |
| m_2 | m_1 | $\gamma'_{21_i} = -0.81753$ | $\gamma'_{21_f} = 1.3294$ |
| | m_2 | $\gamma'_{22_i} = -0.201924$ | $\gamma'_{22_f} = 1.0216$ |
| | m_3 | $\gamma'_{23_i} = 0.409836$ | $\gamma'_{23_f} = 0.90521$ |
| m_3 | m_1 | $\gamma'_{31_i} = -0.32215$ | $\gamma'_{31_f} = 1.32940$ |
| | m_2 | $\gamma'_{32_i} = 0.29345$ | $\gamma'_{32_f} = 1.0216$ |
| | m_3 | $\gamma'_{33_i} = 0.52621$ | $\gamma'_{33_f} = 1.28422$ |

O intervalo de variação de γ' tem um extremo no valor mínimo, $\gamma'_i = -1.1253$ e um valor máximo obtido na tabela abaixo, $\gamma'_f = 1.3294$. Reescrevendo a expressão dada pela Eq. (6.25), e simplificando a delta de Dirac, para isolar a variável α , e usando a propriedade da função delta de Dirac, $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$, teremos que:

$$\frac{1}{P_1 P_2 P_3} = \int_{-1}^1 dz' \int_{\gamma'_i}^{\gamma'_f} d\gamma' \frac{1}{[k^2 + z' k \cdot p - \gamma' + i\epsilon]^3} \int_0^1 d\alpha \, 2 \theta(z' - 2\alpha + 1) \theta(\alpha - z')$$

$$\times \frac{1}{|\mu'^2 + \mu^2 - \frac{M_\pi^2}{2} - 2\lambda^2|} \delta \left[-\alpha + \frac{\gamma' - z'(\lambda^2 - \mu^2 + \frac{M_\pi^2}{4}) - \lambda^2}{(\mu'^2 + \mu^2 - \frac{M_\pi^2}{2} - 2\lambda^2)} \right], \quad (6.27)$$

e integrando em α eliminamos a função delta de Dirac, obtemos:

$$\frac{1}{P_1 P_2 P_3} = \int_{-1}^1 dz' \int_{\gamma'_i}^{\gamma'_f} d\gamma' \frac{2 \theta(z' - 2\alpha + 1) \theta(\alpha - z') \theta(1 - \alpha) \theta(\alpha)}{[k^2 + z' k \cdot p - \gamma' + i\epsilon]^3 |\mu'^2 + \mu^2 - \frac{M_\pi^2}{2} - 2\lambda^2|}, \quad (6.28)$$

onde a variável α passa a ser determinada pela seguinte função:

$$\alpha(\gamma', z'; \mu', \mu) = \frac{\gamma' - z'(\lambda^2 - \mu^2 + \frac{M_\pi^2}{4}) - \lambda^2}{(\mu'^2 + \mu^2 - \frac{M_\pi^2}{2} - 2\lambda^2)}. \quad (6.29)$$

Finalmente, podemos reescrever a parametrização de Feynman na forma como:

$$\frac{1}{P_1 P_2 P_3} = \int_{-1}^1 dz' \int_{\gamma'_i}^{\gamma'_f} d\gamma' \frac{F(\gamma', z'; \mu', \mu)}{[k^2 + z' k \cdot p - \gamma' + i\epsilon]^3}, \quad (6.30)$$

onde identificamos,

$$F(\gamma', z'; \mu', \mu) = \frac{2 \theta(z' - 2\alpha + 1) \theta(\alpha - z') \theta(1 - \alpha) \theta(\alpha)}{|\mu'^2 + \mu^2 - \frac{M_\pi^2}{2} - 2\lambda^2|}. \quad (6.31)$$

A Eq. (6.30) é o resultado fundamental para a derivação das representações integrais das amplitudes escalares que compõem a amplitude de BS do pión inspirada na QCD (MELLO *et al.*, 2017). Dessa forma poderemos estudar de forma mais ampla as propriedades gerais desse modelo e das funções peso de Nakanishi que em última análise refletem a geração dinâmica de massa na QCD.

6.4 Representação Integral: base não-ortogonal

Vamos agora aplicar os resultados obtidos na seção anterior, e em particular a Eq. (6.30), para encontrar as quatro amplitudes escalares $\chi_i(k, p)$. Com isto a Eq.(6.18) será reescrita, após a introdução da Eq. (6.30), como segue abaixo:

$$\chi_i(k, p) = -\mathcal{N} m^3 \int_{\gamma'_i}^{\gamma'_f} d\gamma' \int_{-1}^1 dz' \int_0^\infty d\mu'^2 \int_0^\infty d\mu^2 \rho_{x_1}(\mu'^2) \rho_{x_2}(\mu^2) \frac{F(\gamma', z'; \mu', \mu)}{[k^2 + z' k \cdot p - \gamma' + i\epsilon]^3}. \quad (6.32)$$

As integrais em μ^2 e μ'^2 , podem ser feitas considerando as deltas de Dirac que estão presentes nas definições das densidades espectrais de $A(k^2)$ e $B(k^2)$, veja a Eq.(6.11). Usamos o fato que a integral da função delta de Dirac é igual a função heaviside theta,

$\theta(x) = 1$, $x > 0$, e como vimos $m_l > 0$; $m_j > 0$. Com isso podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\chi_1(k, p) &= -\mathcal{N}m^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 (E_j + m_0 D_j)(E_l + m_0 D_l) \int_{-1}^1 dz' \int_{\gamma'_i}^{\gamma'_f} d\gamma' \frac{F(\gamma', z'; m_j, m_l)}{[k^2 + z' k \cdot p - \gamma' + i\epsilon]^3}, \\
\chi_2(k, p) &= -\mathcal{N}m^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 D_j (E_l + m_0 D_l) \int_{-1}^1 dz' \int_{\gamma'_i}^{\gamma'_f} d\gamma' \frac{F(\gamma', z'; m_i, m_j)}{[k^2 + z' k \cdot p - \gamma' + i\epsilon]^3}, \\
\chi_3(k, p) &= -\mathcal{N}m^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 (E_j + m_0 D_j) D_l \int_{\gamma'_i}^{\gamma'_f} d\gamma' \int_{-1}^1 dz' \frac{F(\gamma', z'; m_j, m_l)}{[k^2 + z' k \cdot p - \gamma' + i\epsilon]^3}, \\
\chi_4(k, p) &= -\mathcal{N}m^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 D_j D_l \int_{-1}^1 dz' \int_{\gamma'_i}^{\gamma'_f} d\gamma' \frac{F(\gamma', z'; m_j, m_l)}{[k^2 + z' k \cdot p - \gamma' + i\epsilon]^3}.
\end{aligned} \tag{6.33}$$

As seguintes propriedades de simetria das funções escalares são trivialmente válidas:

$$\chi_1(k, p) = \chi_1(-k, p), \quad \chi_2(k, p) = \chi_3(-k, p), \quad \chi_4(k, p) = \chi_4(-k, p). \tag{6.34}$$

Essas propriedades de simetria estão refletidas nas funções peso da representação integral de Nakanishi (RIN) das funções escalares que constroem a amplitude de Bethe-Salpeter. Elas também serão importantes para determinar as propriedades de simetria das amplitudes associadas com a decomposição da amplitude de BS em uma base ortogonal, já usada para estudar o pión com um modelo dinâmico no espaço de Minkowski (PAULA *et al.*, 2021).

Nas Eqs. (6.33), o índice j representa o pólo originado pelo propagador do quark, enquanto l refere-se aos pólos originados pelo propagador do antiquark. Em cada um dos nove termos, podemos identificar as funções $F(\gamma', z'; m_j, m_l)$ fornecidas pela Eq.(6.38). Já definimos um único suporte para a variável γ' , determinado pela Eq.(6.26), evitando assim ter nove intervalos de integração para um γ' , e adotaremos para o valor mínimo $\gamma'_i = -1.1253$ e para o valor máximo, $\gamma'_f = 1.3294$, como pode ser obtido na tabela (6.1). Por outro lado, verificamos que as funções theta incluídas em $F(\gamma', z'; m_j, m_l)$, para os valores dos parâmetros escolhidos, acabam por limitar seu suporte de modo que $\gamma' > 0$, o que permite utilizar $\gamma'_i = 0$. De qualquer forma manteremos a notação de γ'_i no limite inferior da representação integral.

Podemos utilizar a representação integral de Nakanishi para cada uma das amplitude de Bethe-Salpeter, $\chi_i(k, p)$, obtendo as amplitudes escalares na forma:

$$\chi_i(k, p) = \int_{-1}^1 dz' \int_{\gamma'_i}^{\gamma'_f} d\gamma' \frac{G_i(\gamma', z')}{[k^2 + z' k \cdot p - \gamma' + i\epsilon]^3}. \tag{6.35}$$

Com isso, ao comparar a Eq. (6.35), com as equações definidas em (6.33), podemos

extrair as funções peso de Nakanishi, confiando na unicidade dessa representação (NAKANISHI, 1971):

$$\begin{aligned}
G_1(\gamma', z') &= -\mathcal{N}m^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 (E_j + m_0 D_j)(E_l + m_0 D_l) F(\gamma', z', m_j, m_l), \\
G_2(\gamma', z') &= -\mathcal{N}m^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 D_j (E_l + m_0 D_l) F(\gamma', z', m_j, m_l), \\
G_3(\gamma', z') &= -\mathcal{N}m^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 (E_j + m_0 D_j) D_l F(\gamma', z', m_j, m_l), \\
G_4(\gamma', z') &= -\mathcal{N}m^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 D_j D_l F(\gamma', z', m_j, m_l).
\end{aligned} \tag{6.36}$$

As quatro funções peso, podem ser transformadas para descrever as funções escalares associadas a decomposição da amplitude de BS em uma base de operadores ortogonais de Dirac, e isso será abordado na seção seguinte.

Neste ponto podemos relacionar com a primeira parte desse trabalho, uma vez que podemos aplicar o mesmo tratamento matemático exposto acima, para obter a representação integral da ABS que utilizamos no capítulo 2, veja Eq.(2.5). Todavia, por simplicidade manteremos o mesmo vértice que utilizamos nessa seção. A modificação principal para o modelo covariante exposto no capítulo 2, reside no fato de que as massas constituintes dos quarks serem independentes do momento, como utilizado, por exemplo em (EL-BENNICH *et al.*, 2008; MELO *et al.*, 2002; YABUSAKI *et al.*, 2015). Reescrevendo a ABS para o modelo covariante de massa fixa, temos que:

$$\Psi_\pi(k; p) = -\frac{\not{k}_q + m_q}{[(k + p/2)^2 - m_q^2 + i\epsilon]} \frac{\mathcal{N}' \gamma_5 m^3}{[k^2 - \lambda^2 + i\epsilon]} \frac{\not{k}_{\bar{q}} + m_{\bar{q}}}{[(k - p/2)^2 - m_{\bar{q}}^2 + i\epsilon]}, \tag{6.37}$$

percebe-se as mesmas estruturas de Dirac que estão presente na Eq.(6.17), contudo teremos amplitudes escalares, $\chi_i(k, p)$, diferentes em relação ao modelo com massa dependente do momento. Tomando como base a parametrização de Feynman utilizada anteriormente, no caso dos quarks vestidos, teremos que a função $F(\gamma', z'; \mu', \mu)$ é simplificada, uma vez que $\mu' = \mu = m_q$:

$$\mathcal{F}(\gamma', z') = \frac{2 \theta(z' - 2\alpha + 1) \theta(\alpha' - z') \theta(1 - \alpha') \theta(\alpha')}{|2m_q^2 - \frac{M_\pi^2}{2} - 2\lambda^2|}, \tag{6.38}$$

onde $m_{\bar{q}} = m_q$, e a função α' é definida de maneira idêntica a aquela exposta na Eq. (6.39),

com as devidas ressalvas já feitas:

$$\alpha'(\gamma', z') = \frac{\gamma' - z'(-m_q^2 + \lambda^2 + \frac{M_\pi^2}{4}) - \lambda^2}{(2m_q^2 - \frac{M_\pi^2}{2} - 2\lambda^2)}. \quad (6.39)$$

No tocante ao suporte na variável de Nakanish γ' , pode-se inferir da Eq.(6.26) que:

$$\gamma'(\alpha', z') = \left(2m_q^2 - \frac{M_\pi^2}{2} - 2\lambda^2\right) \alpha' + \left(m_q^2 + \frac{M_\pi^2}{4} + \lambda^2\right) z' + \lambda^2. \quad (6.40)$$

Os intervalos de variação para α' e z' bem como os valores constantes da massa do estado ligado e do parâmetro de escala do vértice, λ , são conhecidos, resta definir qual o valor devemos adotar para massa constituintes, m_q , constante. Como o pólo $m_1 = 0.327$ GeV é próximo a massa constituinte, que podemos estimar tendo um valor da ordem de $M(0) = m_0 + m^3/\lambda^2 = 0.278$ GeV, esse fato faz deste pólo nosso candidato ideal para comparação com o modelo covariante discutido na primeira parte desse trabalho. Considerando esse pólo o suporte de γ' é $[-1.12534, 1.3294]$, mas as theta acabam por restringir $\gamma' > 0$.

Podemos verificar o suporte com a massa constituinte fixa nos outros dois pólos, m_2 e m_3 , provenientes da função de massa variável modelada pelos resultados de QCD na rede. Com isso, pela Eq. (6.40) os novos suportes para γ' , serão, respectivamente $[-0.201924, 1.0216]$ e $[0.5026, 1.2842]$, com a ressalva de que $\gamma' > 0$ devido as thetas.

Inserindo o resultado da parametrização dos denominadores da ABS dada pela Eq.(6.37), teremos as novas amplitudes escalares listadas a seguir. Vale ressaltar que essas funções são dependentes exclusivamente de $\mathcal{F}(\gamma', z')$:

$$\chi'_i(k, p) = -C_i m^3 \mathcal{N}' \int_{-1}^1 dz' \int_{\gamma'_i}^{\gamma'_f} d\gamma' \frac{\mathcal{F}(\gamma', z')}{[k^2 + z' k \cdot p - \gamma' + i\epsilon]^3}, \quad (6.41)$$

onde as constantes C_i , $i \in [1, \dots, 4]$, terão os seguintes valores: $C_1 = m_q^2$; $C_2 = C_3 = m_q$ e por fim $C_4 = 1$. Pode-se aplicar RIN para cada função escalar e concluir que as novas funções peso serão dadas por,

$$G'_i(\gamma', z') = -C_i m^3 \mathcal{N}' \mathcal{F}(\gamma', z'), \quad (6.42)$$

e portanto todas são proporcionais entre si, e dependentes de uma única função que carrega as informações das três escalas relevantes: massa do quark, parâmetro do vértice e massa do pión.

6.5 Representação Integral: base ortogonal

Nesta sessão iremos expandir a ABS, dada pela Eq.(6.16), usando uma base ortogonal completa para a decomposição, no espaço spinorial de Dirac, da amplitude de BS para o estado 0^+ que representa o pión. Com isso $\Psi_\pi(k, p)$ pode ser decomposta da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Psi_\pi(k, p) &= \sum_{i=1}^4 S_i(k, p) \phi_i(k, p) \\ &= S_1(k, p) \phi_1 + S_2(k, p) \phi_2 + S_3(k, p) \phi_3 + S_4(k, p) \phi_4,\end{aligned}\quad (6.43)$$

onde $\phi_i(k, p)$ são funções apropriadas de $(k^2, p^2, k \cdot p)$, e as estruturas de Dirac permitidas são representadas pelos produtos de matrizes de Dirac, $S_i(k, p)$, dadas por:

$$S_1(k, p) = \gamma^5, \quad S_2(k, p) = \frac{\not{p}}{M} \gamma^5, \quad S_3(k, p) = \frac{k \cdot p}{M^3} \not{p} \gamma^5 - \frac{1}{M} \not{k} \gamma^5, \quad S_4(k, p) = \frac{i}{M} \sigma^{\mu\nu} p_\mu k_\nu \gamma^5,\quad (6.44)$$

com $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)$. A amplitude de BS para o pión é representada pelo diagrama de Feynman abaixo, onde as pernas externas representam os propagadores vestidos.

As matrizes definidas em (6.44) satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade:

$$Tr[S_j(k, p) S_i(k, p)] = \mathcal{N}_i(k, p) \delta_{ji}, \quad (6.45)$$

com as normalizações, $\mathcal{N}_i(k, p)$, dadas por:

$$\mathcal{N}_1(k, p) = 4, \quad \mathcal{N}_2(k, p) = -4, \quad \mathcal{N}_3(k, p) = \frac{4(k \cdot p)}{M_\pi^4} - \frac{4k^2}{M_\pi^2}, \quad \mathcal{N}_4(k, p) = \frac{4(k \cdot p)}{M_\pi^4} - \frac{4k^2}{M_\pi^2}. \quad (6.46)$$

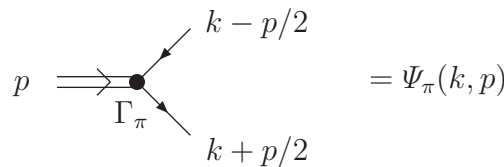


FIGURA 6.1 – Representação diagramática da amplitude de Bethe-Salpeter para o pión.

Vamos igualar a Eq. (6.43) a ABS do modelo inspirado na QCD dada pela Eq.(6.17), e com isso temos que:

$$\sum_{i=1}^4 S_i(k, p) \phi_i(k, p) = \sum_{i'=1}^4 s_{i'}(k, p) \chi_{i'}(k, p), \quad (6.47)$$

onde $s_1(k, p) = \gamma^5$, $s_2(k, p) = \not{k}_q \gamma^5$, $s_3(k, p) = \gamma^5 \not{k}_{\bar{q}}$ e $s_4(k, p) = \not{k}_q \gamma^5 \not{k}_{\bar{q}}$. Como já conhecemos as funções $\chi_i(k, p)$, temos todos os elementos para encontrar as novas amplitudes $\phi_i(k, p)$ como combinações lineares das primeiras, usando as propriedades de ortogonalidade da nova base. Multiplicando ambos os lados da última equação por $S_i(k, p)$ e fazendo-se os traços, teremos quatro equações escritas como:

$$\phi_i(k, p) = \frac{1}{\text{Tr}[S_i(k, p)^2]} \sum_{i'=1}^4 c_{ii'} \chi_{i'}(k, p), \quad (6.48)$$

onde os coeficientes $c_{ii'}$, com $i, i' = 1, 2, 3, 4$, são definidos pelos traços

$$c_{ii'} = \text{Tr}[S_i(k, p) s_{i'}(k, p)], \quad (6.49)$$

o que resulta em:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 4, \\ c_{14} &= 4k^2 - M_\pi^2, \\ c_{22} &= \frac{-4p \cdot k}{M_\pi} - 2M_\pi, \\ c_{23} &= \frac{4p \cdot k}{M_\pi} - 2M_\pi, \\ c_{32} &= \frac{-4(p \cdot k)^2}{M_\pi^3} + \frac{4k^2}{M_\pi}, \\ c_{33} &= \frac{4(p \cdot k)^2}{M_\pi^3} - \frac{4k^2}{M_\pi}, \\ c_{44} &= \frac{4(p \cdot k)^2}{M_\pi^2} - 4k^2. \end{aligned} \quad (6.50)$$

As amplitudes ϕ são finalmente escritas como combinações lineares de χ , que vem ao introduzirmos os coeficientes dados pela Eq. (6.50) na Eq. (6.48), e o resultado listamos abaixo:

$$\phi_1(k, p) = \chi_1(k, p) - \left(k^2 - \frac{M_\pi^2}{4}\right) \chi_4(k, p), \quad (6.51)$$

$$\phi_2(k, p) = \left(\frac{p \cdot k}{M_\pi} + \frac{M_\pi}{2}\right) \chi_2(k, p) + \left(-\frac{p \cdot k}{M_\pi} + \frac{M_\pi}{2}\right) \chi_3(k, p), \quad (6.52)$$

$$\phi_3(k, p) = M_\pi \left(\chi_2(k, p) + \chi_3(k, p)\right), \quad (6.53)$$

$$\phi_4(k, p) = M_\pi^2 \chi_4(k, p). \quad (6.54)$$

Partindo das expressões acima podemos deduzir as funções peso de Nakanishi da re-

apresentação integral que descrevem as amplitudes $\phi_i(k, p)$, seguindo o que foi elaborado para as amplitudes, $\chi_i(k, p)$. Assim vamos escrever a representação integral para cada função escalar da Eq. (6.43):

$$\phi_i(k, p) = \int_{-1}^1 dz' \int_{\gamma'_i}^{\gamma'_f} d\gamma' \frac{g_i(\gamma', z')}{[k^2 + z' k \cdot p - \gamma' + i\epsilon]^3}, \quad (6.55)$$

com $g_i(\gamma', z')$ a função peso para cada amplitude escalar associada a base ortogonal.

Logo, pelas Eq.(6.53), Eq.(6.54) e utilizando-se a hipótese da unicidade da representação integral (NAKANISHI, 1971) e as definições para $\chi_i(k, p)$; $i = 2, 3, 4$, teremos imediatamente as funções peso escritas abaixo:

$$g_3(\gamma', z') = M_\pi [-G_2(\gamma', z') + G_3(\gamma', z')], \quad (6.56)$$

e também,

$$g_4(\gamma', z') = M_\pi^2 G_4(\gamma', z'). \quad (6.57)$$

Na Fig. 6.2 podemos observar o comportamento da nova função peso g_4 em termos daquelas que encontramos na seção anterior, provenientes das ABS's com os quarks vestidos, G_i das Eqs. (6.36), e com massa constituinte fixa, G'_i da Eq. (6.42).

Na Fig. 6.3 apresentamos o comportamento da função peso com $i = 3$ em relação a z' , para reforçar a ideia que ela é uma função ímpar, i.e., $g_3(\gamma', z') = -g_3(\gamma', -z')$, consistentemente com a natureza fermiônica dos quarks (CARBONELL; KARMANOV, 2010). Note que g_3 se anula para o modelo covariante de massa fixa desde que $G'_2 = G'_3$, como mostra a Eq. (6.42).

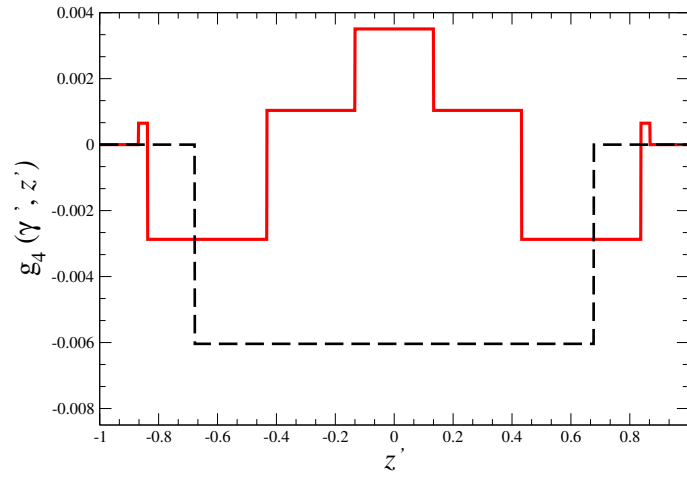


FIGURA 6.2 – Funções peso $g_4(\gamma', z')$ para $\gamma' = 0.45 \text{ GeV}^2$ e z' de -1 a 1, provenientes do modelo covariante dado com funções peso na base não-ortogonal (linha preta tracejada), Eq. (6.42), com massas fixas e do modelo inspirado na QCD com auto energia escalar do quark dependente de momento (linha vermelha contínua).

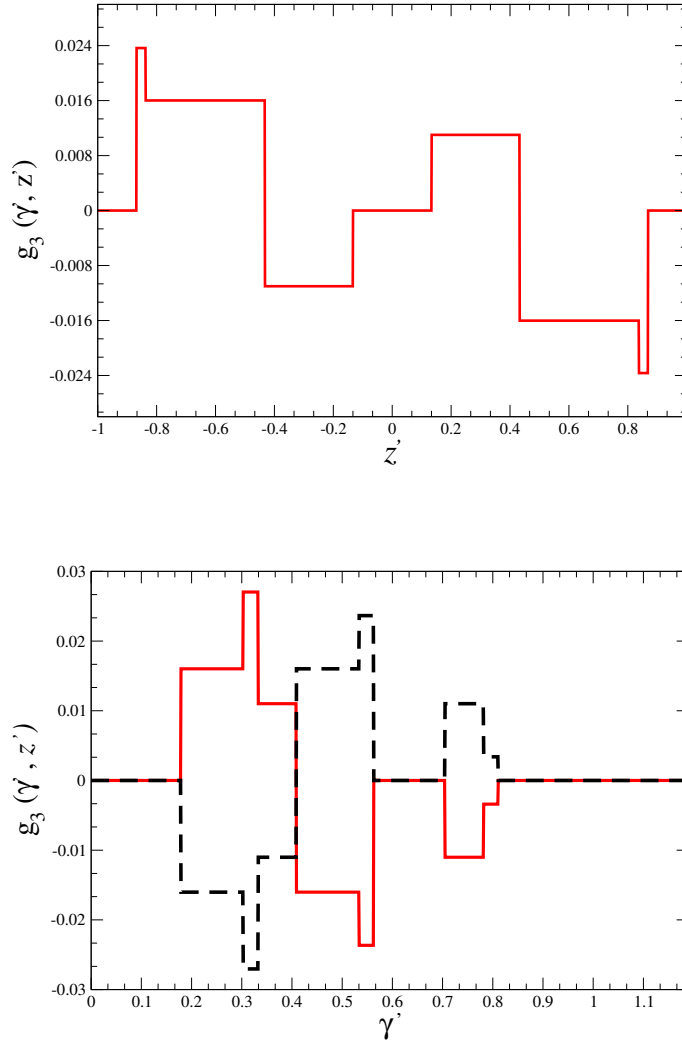


FIGURA 6.3 – Painel superior: $g_3(\gamma', z')$, calculada com modelo massa running, em função de z' para $\gamma' = 0.45 \text{ GeV}^2$. Painel inferior: $g_3(\gamma', z')$ para $z' = 0.50$ (linha vermelha contínua) e -0.50 (linha preta tracejada) em função de γ' . (γ' em unidades de GeV^2)

A seguir, determinamos as outras duas funções peso, $g_1(\gamma', z')$ e $g_2(\gamma', z')$, que devem ser trabalhadas de forma a eliminar os produtos escalares, k^2 e $k \cdot p$, presentes nas Eqs.(6.51) e (6.52), em favor da representação de Nakanishi, observada a hipótese da unicidade das funções peso. Separamos essas manipulações nas duas próximas subseções, e seguiremos as etapas que foram utilizadas na Ref. (PIMENTEL, 2016).

Como observação geral, lembramos que uma vez que a representação integral é dada pela Eq. (6.55), sua projeção na frente de luz, i.e, oriunda da integração em $k^- = k^0 + k^3$, a torna uma transformada de Stieltjes, que tem inversa sob certas condições de analiticidade, como demonstrado válida diretamente no caso da equação integral homogênea de BS para um estado ligado bosônico (CARBONELL *et al.*, 2017).

6.5.1 Derivação da função peso $g_1(\gamma', z')$

Vamos iniciar estudando a possibilidade de aplicarmos a unicidade da RIN, na Eq.(6.51), e identificamos o problema causado pelo produto de k^2 que aparece junto com a amplitude escalar $\chi_4(k, p)$, como apresentado na expressão abaixo:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 dz' \int_{\gamma'_i}^{\gamma'_f} d\gamma' \frac{g_1(\gamma', z')}{[k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon]^3} = \\ & = \int_{-1}^1 dz' \int_{\gamma'_i}^{\gamma'_f} d\gamma' \frac{G_1(\gamma', z') + (M_\pi^2/4) G_4(\gamma', z') - k^2 G_4(\gamma', z')}{[k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon]^3}, \end{aligned} \quad (6.58)$$

observa-se que a dependência do invariante de Lorentz k^2 impossibilita a imediata aplicação do princípio da unicidade para obter a função peso da representação integral de Nakanishi. Agora devemos eliminar a dependência de k^2 na equação acima em favor de um denominador comum. Iremos rotular esse termo de $\mathcal{T}(k^2)$, que devemos primeiro reescrever usando que $k^2 = (k^2 + z'k \cdot p - \gamma') - z'k \cdot p + \gamma'$, e para simplificar os limite de γ'_f será extrapolado para o infinito, sem perda de rigor, uma vez que as funções G_i carregam as theta's necessárias para tornar o suporte dentro dos limites já discutidos. Assim, escrevemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(k^2, k \cdot p, p^2) &= \int_{-1}^1 dz' \int_{\gamma'_i}^{\infty} d\gamma' \left[\frac{1}{[k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon]^2} + \frac{\gamma' - z'k \cdot p}{[k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon]^3} \right] G_4(\gamma', z') \\ &= \int_{-1}^1 dz' \int_{\gamma'_i}^{\infty} d\gamma' \frac{G_4(\gamma', z')}{[k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon]^2} + \int_{-1}^1 dz' \int_{\gamma'_i}^{\infty} d\gamma' \frac{\gamma' G_4(\gamma', z')}{[k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon]^3} \\ &\quad - (k \cdot p) \int_{-1}^1 dz' \int_{\gamma'_i}^{\infty} d\gamma' \frac{z' G_4(\gamma', z')}{[k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon]^3} \\ &\equiv \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Vamos manipular a expressão denotada por \mathcal{T}_1 . Começamos pela integração por partes em γ' , isto irá mudar a ordem da potência no denominador. Desta forma, escolhemos os seguintes termos para efetuar a integração por partes:

$$\begin{aligned} u &= (k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^{-2}; \quad du = \frac{2 d\gamma'}{(k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^3}, \\ dv &= d\gamma' G_4(\gamma', z'); \quad v = \int_{\gamma'_0}^{\gamma'} d\Gamma G_4(\Gamma, z), \end{aligned} \quad (6.60)$$

com isso temos o seguinte resultado:

$$\mathcal{T}_1 = \int_{-1}^1 dz' \left[\frac{\int_{\gamma'_0}^{\gamma'} d\Gamma G_4(\Gamma, z)}{(k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^2} \Bigg|_{\gamma'_i}^{\infty} - \int_{\gamma'_i}^{\infty} \frac{2 \int_{\gamma'_i}^{\gamma'} d\Gamma G_4(\Gamma, z)}{(k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^3} d\gamma' \right]. \quad (6.61)$$

O limite inferior γ'_0 é um parâmetro livre usado para definir a primitiva de $G_4(\gamma', z')$ e usamos isto para eliminar o termo de superfície na integração por partes. Para atingir este objetivo, fazemos a seguinte escolha $\gamma'_0 = \gamma'_i$. Abaixo verificamos a eliminação desse termo:

$$\begin{aligned} & \left[\int_{-1}^1 \frac{dz'}{(k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^2} \int_{\gamma'_i}^{\gamma'} d\Gamma G_4(\Gamma, z) \right] \Big|_{\gamma'_i}^{\infty} \\ &= \int_{-1}^1 \frac{dz'}{(k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^2} \int_{\gamma'_i}^{\gamma'} d\Gamma G_4(\Gamma, z) \Big|_{\gamma'=\infty} - 0 = 0, \end{aligned} \quad (6.62)$$

a título de esclarecimento poderíamos ter utilizado o valor máximo de γ'_f , uma vez que as theta's nos G'_i garantem o suporte correto.

Portanto, a expressão final para o termo \mathcal{T}_1 será:

$$\mathcal{T}_1 = -2 \int_{-1}^1 dz' \int_{\gamma'_i}^{\infty} d\gamma' \frac{\int_{\gamma'_i}^{\gamma'} d\Gamma G_4(\Gamma, z')}{(k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^3}. \quad (6.63)$$

Para a expressão denotada por \mathcal{T}_3 , iremos fazer a integração por partes em z' , uma vez que temos $(k \cdot p)$ multiplicando o fator z' . Portanto, o método será distinto do adotado no caso de \mathcal{T}_1 , desta forma eliminamos a o fator $(k \cdot p)$ em favor da representação integral. Explicitamente usamos que:

$$\begin{aligned} u &= z' G_4(\gamma', z'); \quad du = \left(G_4(\gamma', z') + z' \partial_{z'} [G_4(\gamma', z')] \right) dz'. \\ dv &= \frac{dz'}{(k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^3}; \quad v = \frac{-1}{2(k \cdot p)(k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^2}, \end{aligned} \quad (6.64)$$

com isso a integração por partes torna-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_3 &= -(k \cdot p) \int_{\gamma'_i}^{\infty} d\gamma' \left[\frac{z' G_4(\gamma', z')}{2(k \cdot p)(k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^2} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{-(G_4(\gamma', z') + z' \partial_{z'} [G_4(\gamma', z')]) dz'}{2(k \cdot p)(k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^2} \right] \\ &= \int_{\gamma'_i}^{\infty} d\gamma' \int_{-1}^1 dz' \left[\frac{-z' G_4(\gamma', z') [\delta(z' - 1) - \delta(z' + 1)] - G_4(\gamma', z') - z' \partial_{z'} [G_4(\gamma', z')]}{2(k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.65)$$

Como $G_4(\gamma', -1) = G_4(\gamma', 1) = 0$, o termo de superfície desaparece, como percebemos pelo anulação do primeiro termo na segunda linha da expressão escrita acima e que traz

as duas δ de Dirac, portanto temos que:

$$\mathcal{T}_3 = -\frac{1}{2} \int_{\gamma'_i}^{\infty} d\gamma' \int_{-1}^1 dz' \frac{G_4(\gamma', z') + z' \partial_{z'}[G_4(\gamma', z')]}{(k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^2}, \quad (6.66)$$

Agora entendemos o que ganhamos estudando a integração por partes em z' , aprendemos como lidar com uma multiplicação por $(k \cdot p)$ fora da integral em γ' e z' . Porém, deve-se notar que existe um problema no expoente do denominador da equação acima para \mathcal{T}_3 , e para aumentá-lo em uma unidade devemos integrar, em relação à variável γ' . Novamente extrapolamos o limite superior para o infinito, isso faz com que o termo de contato, na integração por parte, desapareça:

$$u = (k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^{-2}; \quad du = \frac{2d\gamma'}{(k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^3}.$$

$$dv = G_4(\gamma', z') + z' \partial_{z'}[G_4(\gamma', z')]; \quad v = \int dv = \int_{\gamma'_i}^{\gamma'} d\Gamma \left(G_4(\Gamma, z') + z' \partial_{z'}[G_4(\Gamma, z')] \right), \quad (6.67)$$

com isso podemos escrever:

$$\mathcal{T}_3 = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz' \times \left(\frac{\int_{\gamma'_i}^{\gamma'} d\Gamma \left(G_4(\Gamma, z') + z' \partial_{z'}[G_4(\Gamma, z')] \right)}{(k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^2} \right) \Bigg|_{\gamma'_i}^{\infty} - \int_{\gamma'_i}^{\infty} d\gamma' \frac{2 \int_{\gamma'_i}^{\gamma'} d\Gamma \left(G_4(\Gamma, z') + z' \partial_{z'}[G_4(\Gamma, z')] \right)}{(k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^3} \Bigg|_{\gamma'_i}^{\infty}. \quad (6.68)$$

Feito isso, basta tomar $\gamma'_0 = \gamma'_i$, e teremos que o termo de superfície da integração por partes será anulado na equação acima, e a reescrevemos como:

$$\mathcal{T}_3 = \int_{-1}^1 dz' \int_0^{\infty} d\gamma' \frac{\int_{\gamma'_i}^{\gamma'} d\Gamma \partial_{z'}[z' G_4(\Gamma, z')]}{(k^2 + z'k \cdot p + \gamma' + i\epsilon)^3} \quad (6.69)$$

Com isso, ao substituirmos \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_3 em \mathcal{T} , expresso pela Eq. (6.59), e finalmente obtemos:

$$\mathcal{T}(k^2, k \cdot p, p^2) = \int_{-1}^1 dz' \int_{\gamma'_i}^{\infty} d\gamma' \frac{\gamma' G_4(\gamma', z') - \int_0^{\gamma'} d\Gamma \left(G_4(\Gamma, z') - z' \partial_{z'}[G_4(\Gamma, z')] \right)}{(k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^3}, \quad (6.70)$$

portanto, a representação integral expressa pela Eq. (6.70) é agora escrita da mesma forma que representação integral no lado esquerdo da Eq.(6.58), ou seja, não temos mais a presença do invariante de Lorentz multiplicando o numerador da amplitude de Bethe-

Salpeter:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^1 dz' \frac{g_1(\gamma', z')}{(k^2 + zk \cdot p - \gamma + i\epsilon)^3} \\ &= \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^1 dz' \frac{G_1(\gamma', z') + (M_\pi^2/4 - \gamma')G_4(\gamma', z') + \int_0^{\gamma'} d\Gamma \left(G_4(\Gamma, z') - z' \partial_{z'}[G_4(\Gamma, z')] \right)}{(k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^3}. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Tomando o suporte superior de γ' como γ'_f , e aplicando a unicidade concluímos que,

$$g_1(\gamma', z') = G_1(\gamma', z') + (M_\pi^2/4 - \gamma')G_4(\gamma', z') + \int_{\gamma'_i}^{\gamma'_f} d\Gamma \left(G_4(\Gamma, z') - z' \partial_{z'}[G_4(\Gamma, z')] \right), \quad (6.72)$$

Se quisermos escrever as funções peso provenientes do modelo da amplitude de BS com massa constituinte independente de momento, devemos trocar G_i por G'_i na equação acima. Abaixo apresentamos na Fig. 6.4, os dois modelos para $g_1(\gamma', z')$. O que o percebemos é uma estrutura distinta do modelo covariante com a massa constante que mostra apenas um "patamar", enquanto que o modelo da BS do pión inspirado na QCD, apresenta em geral mais patamares, é claro que isso é associado a presença de mais pólos no propagador do quark, além do pólo na função de vértice.

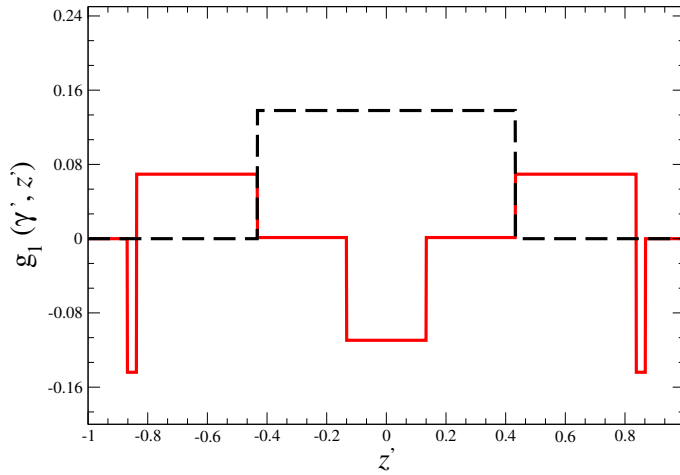


FIGURA 6.4 – Função peso $g_1(\gamma', z')$ em função de z' para $\gamma' = 0.45 \text{ GeV}^2$ proveniente do modelo covariante com massa constante (linha preta tracejada) e com o modelo do pión inspirado na QCD (linha vermelha contínua).

6.5.2 Derivação da função peso $g_2(\gamma', z')$

Assim como no caso anterior, temos termos que impossibilitam a aplicação direta da unicidade da representação de Nakanishi através da comparação com a expressão (6.55), desde que no caso de $\phi_2(k, p)$ temos os escalares $(k \cdot p)$, como descrito na Eq.(6.52), multiplicando as representações integrais para as amplitudes escalares χ_2 e χ_3

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^1 dz' \frac{g_2(\gamma', z')}{(k^2 + z'k \cdot p + \gamma' + i\epsilon)^3} &= \frac{M_\pi}{2} \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^1 dz' \frac{[G_2(\gamma', z') + G_3(\gamma', z')]}{(k^2 + z'k \cdot p + \gamma' + i\epsilon)^3} \\ &+ (k \cdot p) \frac{1}{M_\pi} \int_{\gamma'_i}^\infty d\gamma' \int_{-1}^1 dz' \frac{[G_2(\gamma', z') - G_3(\gamma', z')]}{(k^2 + z'k \cdot p + \gamma' + i\epsilon)^3}. \end{aligned} \quad (6.73)$$

Felizmente já sabemos como remover o fator dependente de momento que multiplica a representação integral em favor do denominador de Nakanishi, iremos denotar a Eq. (6.73) de \mathcal{T} . O procedimento segue as etapas feitas na subseção anterior, usando integração por partes na variável z' :

$$\begin{aligned} u = G_2(\gamma', z') - G_3(\gamma', z') &\rightarrow du = \partial_{z'}(G_2(\gamma', z') - G_3(\gamma', z')) dz'. \\ dv = \frac{dz'}{(k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^3} &\rightarrow w \equiv k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon; \quad dz' = \frac{dw}{k \cdot p} \\ \int dv = \int \frac{dw}{(k \cdot p) w^3} &\rightarrow v = \frac{-1}{2(k \cdot p)} \frac{1}{(k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^2}, \end{aligned} \quad (6.74)$$

considerando os resultados acima, podemos escrever

$$\mathcal{T}(k \cdot p) = \frac{(k \cdot p)}{M_\pi} \int_{\gamma'_i}^\infty d\gamma' \left[\frac{-(G_2(\gamma', z') - G_3(\gamma', z'))}{2(k \cdot p)(k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^2} \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{\partial_{z'}(G_2(\gamma', z') - G_3(\gamma', z')) dz'}{2(k \cdot p)(k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^2} \right]. \quad (6.75)$$

O termo de superfície será nulo, uma vez que $G_i(\gamma', -1) = G_i(\gamma', 1) = 0$, para $i = 2, 3$. No entanto temos que adicionar uma unidade ao denominador do termo restante, e já vimos que para isso, devemos fazer uma integração por partes na variável γ' :

$$\begin{aligned} u = (k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^{-2} &\rightarrow du = \frac{-2 d\gamma'}{(k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^3}; \\ dv = \partial_{z'}(G_2(\gamma', z') - G_3(\gamma', z')) &\rightarrow v = \int_{\gamma'_0}^{\gamma'} d\Gamma \partial_{z'}(G_2(\Gamma, z') - G_3(\Gamma, z')); \end{aligned} \quad (6.76)$$

lembrando que usamos $\gamma'_0 = \gamma'_i$, a fim de determinarmos as primitivas do integrando acima. Com isso, já excluindo o termo de superfície, escrevemos:

$$\mathcal{T} = \frac{2}{M_\pi} \int_{-1}^1 dz' \int_{\gamma'_i}^{\infty} d\gamma' \frac{\int_0^{\gamma'} d\Gamma \partial_{z'} (G_2(\Gamma, z') - G_3(\Gamma, z'))}{(k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^3} \quad (6.77)$$

Ao inserir este último resultado na Eq.(6.73), lembrando que devemos colocar o suporte que limita a variável γ' :

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma'_i}^{\gamma'_f} d\gamma' \int_{-1}^1 dz' \frac{g_2(\gamma', z')}{(k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^3} \\ &= \frac{M_\pi}{2} \int_{\gamma'_i}^{\gamma'_f} d\gamma' \int_{-1}^1 dz' \frac{[G_2(\gamma', z') + G_3(\gamma', z')]}{(k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^3} \\ &+ \frac{2}{M_\pi} \int_{\gamma'_i}^{\gamma'_f} d\gamma' \int_{-1}^1 dz' \frac{\int_0^{\gamma'} d\Gamma \partial_{z'} [(G_2(\Gamma, z') - G_3(\Gamma, z'))]}{(k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon)^3}, \end{aligned} \quad (6.78)$$

com isso chegamos a seguinte expressão:

$$g_2(\gamma', z') = \frac{M_\pi}{2} [G_2(\gamma', z') + G_3(\gamma', z')] + \frac{2}{M_\pi} \int_{\gamma'_i}^{\gamma'} d\Gamma \partial_{z'} [G_2(\Gamma, z') - G_3(\Gamma, z')]. \quad (6.79)$$

O que conclui as derivações para as funções peso de Nakanishi na base ortogonal.

Como fizemos anteriormente, podemos analisar também a função peso proveniente da amplitude de BS com massa constante para o quark, e como $G'_2(\gamma', z') = G'_3(\gamma', z')$, a expressão para g_2 , Eq. (6.79), tem o segundo termo do lado direito anulado. Na Fig. 6.5 apresentamos a comparação entre as funções peso g_2 entre o modelo covariante de massa fixa e o inspirado na QCD. Aqui novamente, observamos a estrutura mais rica de g_2 no modelo inspirado na QCD em relação ao modelo covariante de massa constante. Enfatizando, vemos que a massa “running” do quark deve criar uma estrutura mais complexa da função peso, como de fato já observamos para as outras funções g_1 , g_3 e g_4 .

6.6 Projeção na frente de luz

Uma vez conhecidas as quatro funções peso da representação integral de Nakanishi, $g_i(\gamma', z')$, podemos obter as amplitudes escalares utilizando a Eq. (6.55), e projetá-las na frente de luz ao realizarmos a integração analítica na variável que caracteriza a energia $k^- = k^0 - k^3$ (SALES *et al.*, 2000). Isso de fato corresponde a eliminar o tempo relativo na frente de luz ($x^+ = t + z = 0$) entre o quark e antiquark, e obter amplitudes, que veremos no próximo capítulo, constroem a componente de valência da função de onda do

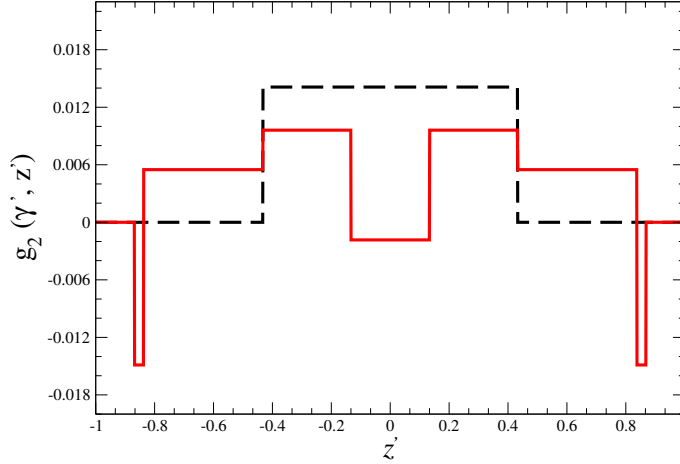


FIGURA 6.5 – Função peso $g_2(\gamma', z')$ em função de z' para $\gamma' = 0.45 \text{ GeV}^2$ proveniente do modelo covariante com massa constante (linha preta tracejada) e com o modelo do pión inspirado na QCD (linha vermelha contínua).

pión. A projeção na frente de luz corresponde a seguinte integração:

$$\psi_i(\gamma, \xi) = \int \frac{dk^-}{2\pi} \phi_i(k, p), \quad (6.80)$$

onde a métrica da frente de luz será usada, para os produtos escalares, e usaremos a notação $|\vec{k}_\perp|^2 \equiv \gamma$. Integrando em k^- a Eq. (6.55), temos que:

$$\begin{aligned} \psi_i(\gamma, \xi) &= \int_{-1}^1 dz' \int_{\gamma'_i}^{\gamma'_f} d\gamma' g_i(\gamma', z') \\ &\times \int \frac{dk^-}{2\pi} \frac{1}{\left[\left(k^+ + \frac{M_\pi z'}{2} \right) k^- - \left(-\frac{z' M_\pi k^+}{2} + \gamma + \gamma' \right) + i\epsilon \right]^3}. \end{aligned} \quad (6.81)$$

O referencial que escolhemos foi o do centro de massa, que se caracteriza por $\vec{p}_\perp = 0$, e com isso $p^+ = p^- = M_\pi$. Verifica-se na equação acima que temos três integrações a serem realizadas, e para computar a integral em k^- , vamos adotar a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{cases} \zeta &= k^- \\ \beta &= \left(k^+ + \frac{M_\pi z'}{2} \right) \\ y &= \left(-\frac{z' M_\pi k^+}{2} + \gamma + \gamma' \right) \end{cases}, \quad (6.82)$$

e com isto, podemos fazer uso da seguinte integral bem conhecida em teoria quântica de campos (CHANG; YAN, 1973; YAN, 1973), veja também por exemplo (ITZYKSON; ZUBER, 2012):

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \frac{1}{[\beta\zeta - y + i\epsilon]^3} = -(\pi i) \frac{\delta(\beta)}{[-y + i\epsilon]^2}. \quad (6.83)$$

Portanto, fazendo uso da expressão acima vemos que é simples efetuar a integração em k^- , e as amplitudes projetadas na frente de luz tornam-se:

$$\psi_i(\gamma, \xi) = \frac{i}{2} \int_0^{\gamma'_f} d\gamma' \int_{-1}^1 dz' g_1(\gamma', z') \frac{\delta\left(k^+ + \frac{M_\pi z'}{2}\right)}{\left(z' \frac{M_\pi}{2} k^+ - \gamma - \gamma' + i\epsilon\right)^2}. \quad (6.84)$$

Manipulando-se a função delta no numerador, escrevemos as integrais como:

$$\psi_i(\gamma, z) = \frac{i}{M_\pi} \int_0^{\gamma'_f} d\gamma' \int_{-1}^1 dz' \delta(z' - z) \frac{g_1(\gamma', z')}{\left(\frac{z' M_\pi}{2} k^+ - \gamma - \gamma' + i\epsilon\right)^2}, \quad (6.85)$$

onde definimos,

$$z \equiv -2 \frac{k^+}{p^+}. \quad (6.86)$$

Em termos de fração de momento interno, ξ , vale a seguinte relação $z = 1 - 2\xi$, com $\xi \in [0, 1]$ e a variável adimensional $z \in [-1, 1]$. Na Eq. (6.85), a integração em z' pode ser feita usando a função delta de Dirac, e obtém-se :

$$\psi_i(\gamma, z) = -\frac{i}{M_\pi} \int_{\gamma'_i}^{\gamma'_f} d\gamma' \frac{g_i(\gamma', z)}{\left(\frac{z^2 M_\pi^2}{4} + \gamma + \gamma' - i\epsilon\right)^2}. \quad (6.87)$$

A integração em γ' na Eq. (6.87) será feita numericamente, via quadratura de Gauss-Legendre ao ser introduzida a respectiva função peso $g_i(\gamma', z')$ na referida expressão. Os resultados para ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 , e ψ_4 são apresentados nas figuras 6.6, 6.7, 6.8 e 6.9, respectivamente. Apresentamos a dependência em z (painéis esquerdos) e em γ (painéis direitos).

A normalização global é arbitrária, enquanto que a normalização relativa entre as diferentes componentes vem da relação entre as g_i 's. As amplitudes $\psi_{(1,2,4)}$ são pares em z e a ψ_3 é impar. Todas e apresentam um comportamento decrescente similar com γ , correspondente a uma lei de potência, como é de se esperar dada a forma tanto do vértice como dos propagadores dos quarks. O comportamento de ponto final em z em todas as ψ_i é tal que se anulam nos extremos. A descontinuidade da derivada das $\psi_{(1,2,4)}$ em $z = 0$ tem sua origem nas funções thetas presentes na nas funções peso de Nakanishi, e que como

veremos também aparece no modelo covariante com massa do quark constante.

Outro aspecto interessante trazido pelo ajuste da função de massa do quark aos resultados da QCD na rede, é a escala de variação das ψ_i em função de γ , que é da ordem de $\Lambda_{QCD} \sim 0.3 \text{ GeV}^2$. Essa escala infravermelha não-perturbativa da QCD domina e transparece nessas amplitudes na frente de luz. Note que embora o vértice traz uma escala $\lambda = 0.846 \text{ GeV}$, as amplitudes que regem a distribuição de momentos dos quarks vestidos refletem a escala infravermelha do confinamento na QCD. Todas essas observações são um reflexo, da imposição da natureza de bóson de Goldstone do pión na QCD, concomitantemente refletida na auto-energia do quark através da quebra dinâmica da simetria quiral.

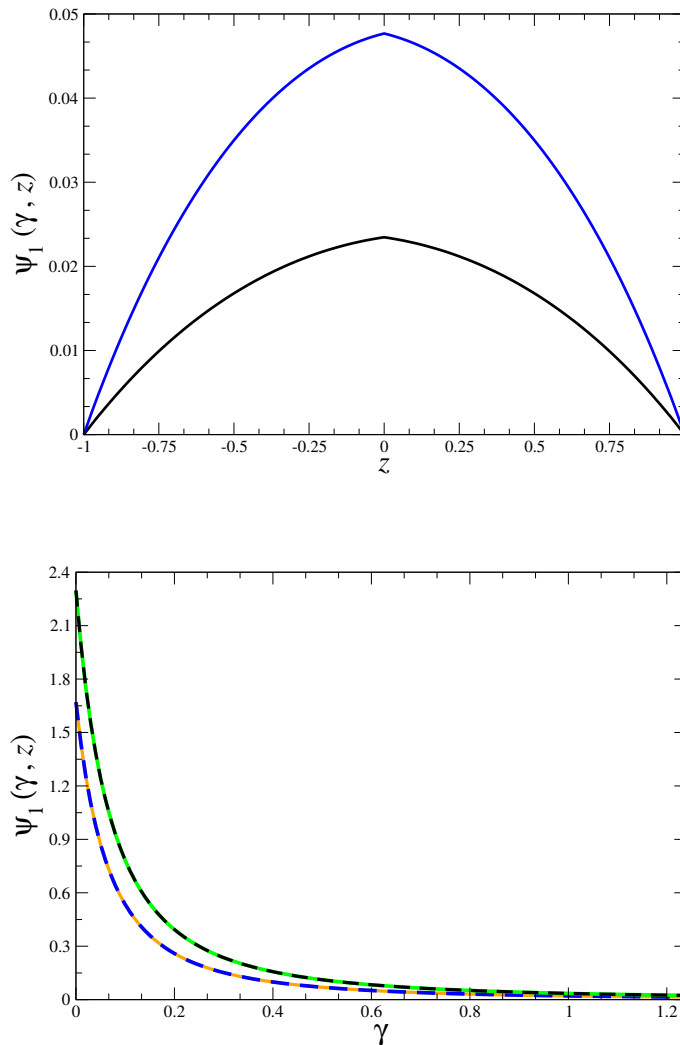


FIGURA 6.6 – Painel superior: $\psi_1(\gamma, z)$ em função de z para γ igual a 1 GeV^2 (linha azul) e 1.5 GeV^2 (linha preta). Painel inferior: $\psi_1(\gamma, z)$ em função de γ para z igual a 0.75 e -0.75 (linhas tracejada azul e laranja) e 0.5 e -0.5 (linhas tracejada preta e verde).

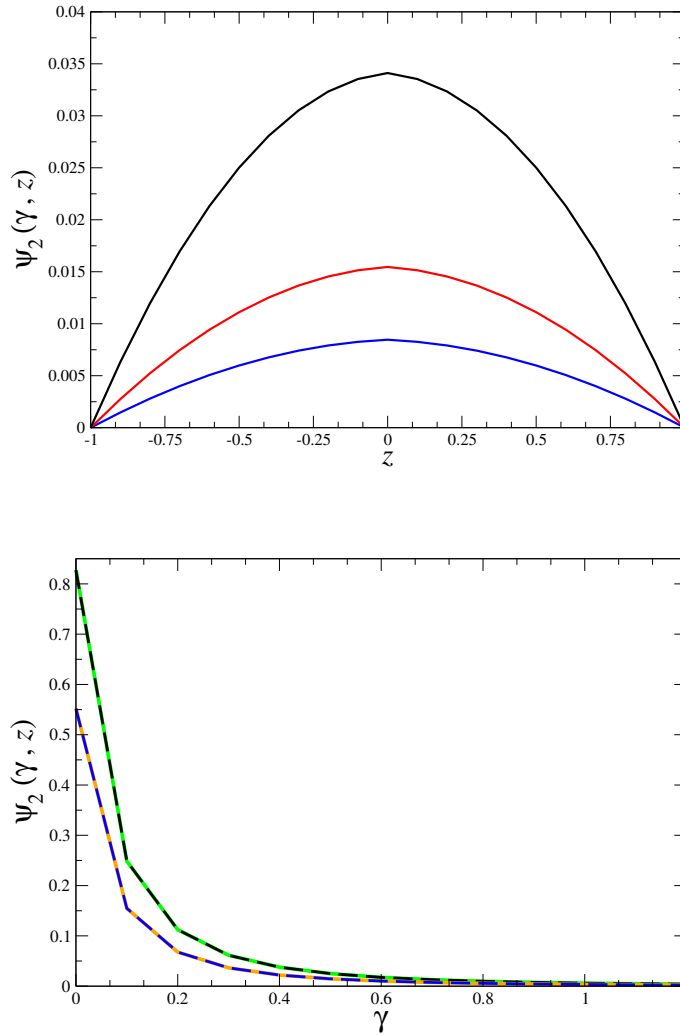


FIGURA 6.7 – Painel superior: $\psi_2(\gamma, z)$ em função de z para γ igual a 0.5 GeV^2 (linha preta), 0.75 GeV^2 (linha vermelha) e 1 GeV^2 (linha azul). Painel inferior: $\psi_2(\gamma, z)$ em função de γ [GeV^2] para z igual a 0.75 e -0.75 (linhas tracejada azul e laranja) e 0.5 e -0.5 (linhas tracejada preta e verde).

Para concluir esse capítulo, comparamos o comportamento das amplitudes de BS projetadas na frente de luz, $\psi_i(\gamma, z)$ para o modelo covariante de massa constante e o inspirado na QCD, onde o quark constituinte é vestido e tem massa “running”. Apresentamos nas Figs. 6.10, 6.11 e 6.12 a comparação entre as dependências em z de ψ_1 , ψ_2 e ψ_4 , respectivamente. Um aspecto particular desses modelos com pólos nos propagadores dos quarks e a forma com um pólo na função de vértice pión-quark, é a presença da descontinuidade da derivada de ψ_i em $z = 0$, como comentamos anteriormente. Essa característica deve-se as funções espectrais que carregam as deltas de Dirac, que se refletem nas funções thetas dos pesos de Nakanishi.

Outro aspecto, que notamos é que a ψ_2 do modelo de massa constante é relativamente

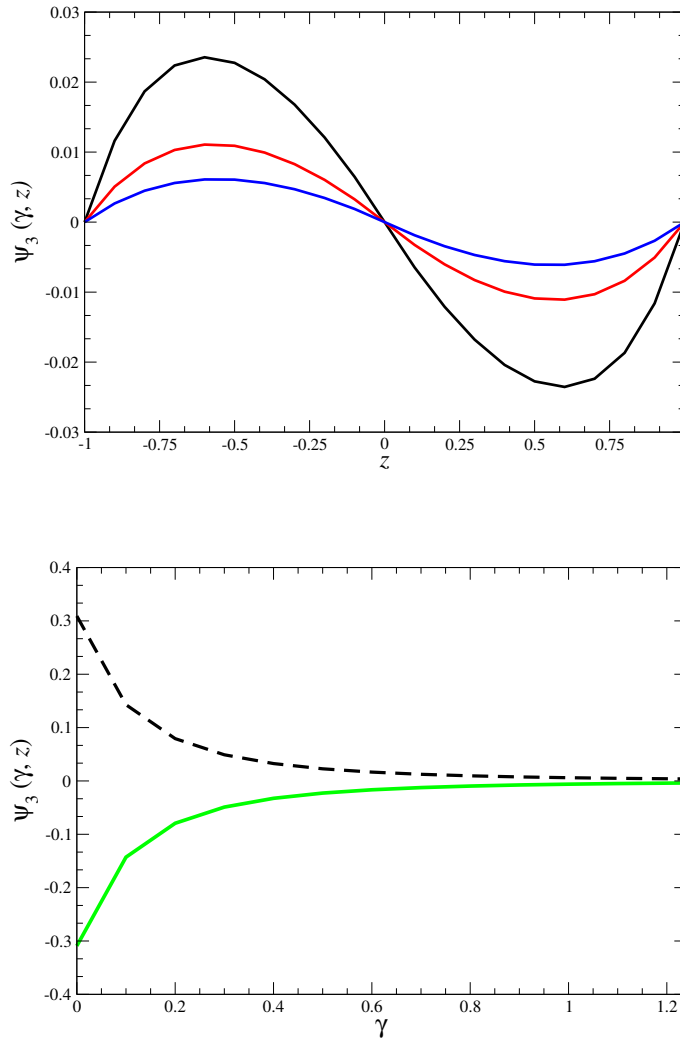


FIGURA 6.8 – Painel superior: $\psi_3(\gamma, z)$ em função de z para γ igual a 0.5 GeV^2 (linha preta), 0.75 GeV^2 (linha vermelha) e 1 GeV^2 (linha azul). Painel inferior: $\psi_3(\gamma, z)$ em função de γ [GeV²] em função de γ para z igual a 0.5 (linha contínua verde) e -0.5 (linha tracejada preta).

mais importante, do que no caso do modelo inspirado na QCD. Isso é consequência da alternância de sinais em g_2 como observamos na Fig. 6.5 para o modelo inspirado em QCD, o que não temos no modelo de massa do quark constante. Porém o mesmo argumento se aplica às outras ψ_1 e ψ_4 , porém esse efeito é menos dramático. Isso sugere, que essa diminuição que observamos é mais uma característica particular do modo como parametrizamos a massa “running” do quark.

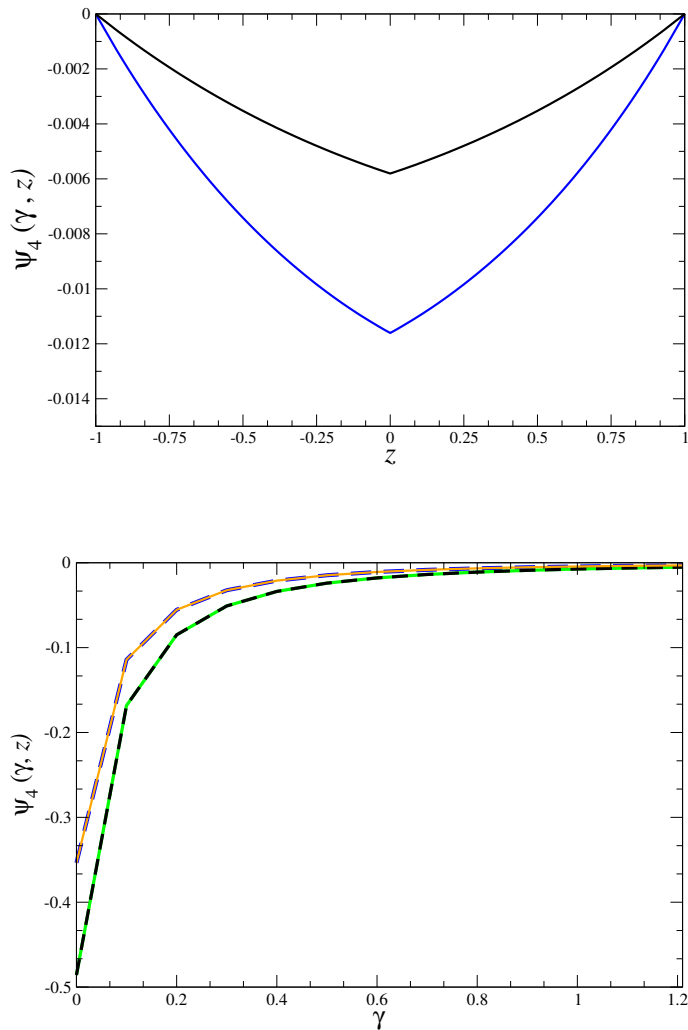


FIGURA 6.9 – Painel superior: $\psi_4(\gamma, z)$ em função de z para γ igual a 1 GeV^2 (linha azul), 1.5 GeV^2 (linha preta). Painel inferior: $\psi_4(\gamma, z)$ em função de γ [GeV²] em função de γ para z igual a 0.75 e -0.75 (linhas tracejada azul e laranja) e 0.5 e -0.5 (linhas tracejada preta e verde).

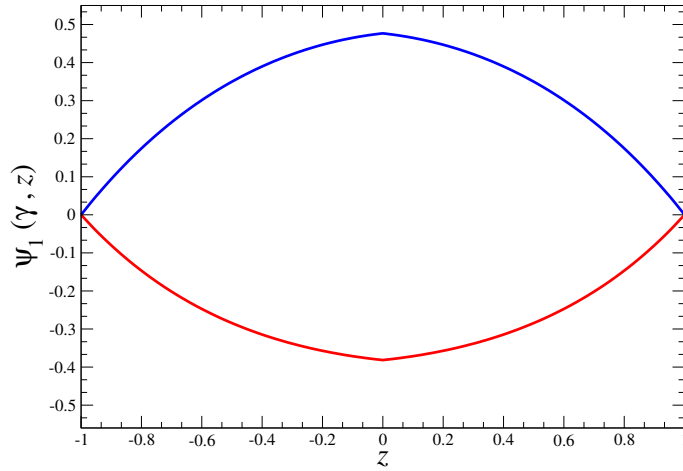


FIGURA 6.10 – Comparação entre as amplitudes $\psi_1(\gamma, z)$ em função de z provenientes das amplitudes de BS do modelo covariante com massa do quark constante (linha vermelha) e o inspirado na QCD (linha azul), para $\gamma = 1 \text{ GeV}^2$.

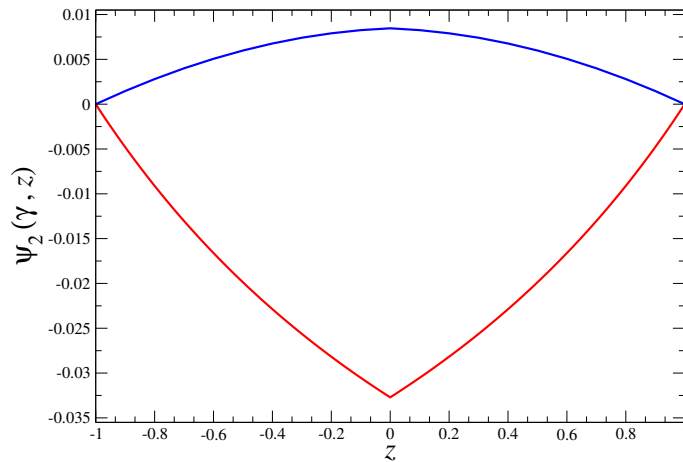


FIGURA 6.11 – Comparação entre as amplitudes $\psi_2(\gamma, z)$ em função de z provenientes das amplitudes de BS do modelo covariante com massa do quark constante (linha vermelha) e o inspirado na QCD (linha azul), para $\gamma = 1 \text{ GeV}^2$.

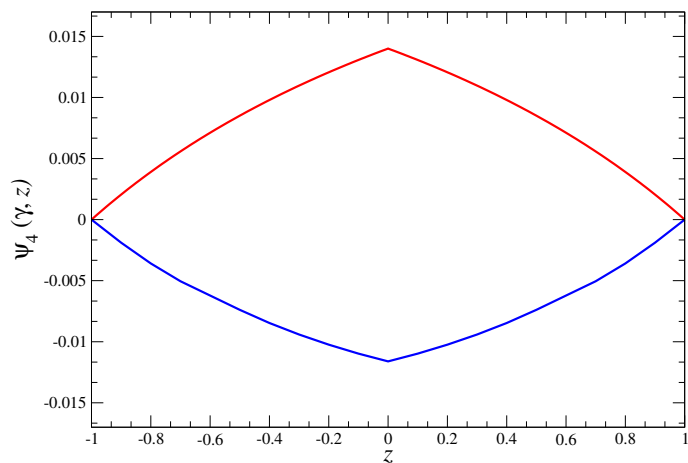


FIGURA 6.12 – Comparação entre as amplitudes $\psi_4(\gamma, z)$ em função de z provenientes das amplitudes de BS do modelo covariante com massa do quark constante (linha vermelha) e o inspirado na QCD (linha azul), para $\gamma = 1 \text{ GeV}^2$.

7 Píon inspirado na QCD: valência

7.1 Função de onda de valência

A função de onda de valência é a componente no espaço de Fock com o menor número de constituintes que carrega os números quânticos do hádron. A base no espaço de Fock pode ser formulada recorrendo-se aos métodos da teoria quântica de campos na Frente de Luz, onde se definem os operadores de criação e aniquilação para partículas e antipartículas no plano nulo com spin arbitrário, para construir o estado com um número genérico de constituintes (BRODSKY *et al.*, 1998). Com a função de onda na frente de luz definida no espaço de Fock e normalizada podemos obter a probabilidade de cada componente de Fock e em particular a probabilidade de valência além das distribuições de momento associadas a essa componente.

Por outro lado, reconhece-se que a função de onda de valência vem da eliminação do tempo relativo na frente de luz entre os operadores de quark que entram no elemento de matriz entre o estado de vácuo e do hádron, e que define a amplitude de BS (SALES *et al.*, 2000; FREDERICO; SALMÈ, 2011). Alternativamente, a função de onda de valência pode ser obtida usando o método de expansão de quase potencial adaptado para realizar a projeção na frente de luz da equação e amplitude de BS (SALES *et al.*, 2000; FREDERICO; SALMÈ, 2011).

A probabilidade de encontrarmos o componente de valência no píon é dada por (PAULA *et al.*, 2021)

$$P_{val} = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \int_0^1 \frac{d\xi}{2\xi(1-\xi)} \int d^2k_{\perp} |\varphi_{n=2}(\xi, \vec{k}_{\perp}, \sigma_1, \sigma_2; M, J^{\pi}, J_z)|^2, \quad (7.1)$$

onde $\varphi_{n=2}(\xi, \vec{k}_{\perp}, \sigma_1, \sigma_2; M, J^{\pi}, J_z)$ é a função de onda de valência, J^{π} é o spin do píon e J_z sua projeção, σ_1 e σ_2 são os estados de helicidade na frente de luz dos quarks que definiremos mais adiante, \vec{k}_{\perp} o momento transversal do quark no centro de massa do e ξ a sua fração de momento longitudinal.

A integração no momento transversal pode ser escrita em coordenadas polares, de modo

que $d^2k_\perp = d\gamma d\theta/2$ com $\gamma = |\vec{k}_\perp|^2$. Observe que podemos mudar a dependência de z para ξ por meio da relação $z = 1 - 2\xi$. Com isso escrevemos que:

$$P_{val} = \frac{1}{2(2\pi)^3} \sum_{\sigma_1\sigma_2} \int_{-1}^1 \frac{dz}{(1-z)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int d\gamma |\varphi_2(\xi, \vec{k}_\perp, \sigma_i; M, J^\pi, J_z)|^2, \quad (7.2)$$

com a fração de momento de quark Bjorken $0 < \xi < 1$. Em termos dos operadores de criação e aniquilação de quarks a amplitude de valência ou função de onde de valência é escrita da seguinte forma (PAULA *et al.*, 2021):

$$\varphi_2(\xi, \vec{k}_\perp, \sigma_i, J^\pi, J_z) = (2\pi)^3 \sqrt{N_c} 2p^+ \sqrt{\xi(1-\xi)} \langle 0 | b(\tilde{q}_2, \sigma_2) d(\tilde{q}_1, \sigma_1) | \tilde{p}, M_\pi, J^\pi, J_z \rangle \quad (7.3)$$

onde N_c é o número de cores, $b(\tilde{q}_2, \sigma_2)$ e $d(\tilde{q}_1, \sigma_1)$ são os operadores de aniquilação do quark e do antiquark, respectivamente, os conjuntos relacionados aos momentos são: $\tilde{q}_1 \equiv \left\{ q_1^+ = M_\pi(1-\xi), -\vec{k}_\perp \right\}$ e $\tilde{q}_2 \equiv \left\{ q_2^+ = M_\pi\xi, \vec{k}_\perp \right\}$, e ainda, $\xi = \frac{1}{2} + \frac{k^+}{p^+}$. A amplitude de valência está relacionada à amplitude de BS por meio da projeção na frente de luz, dada na relação abaixo como detalhado em (PAULA *et al.*, 2021):

$$\varphi_2(\xi, \vec{k}_\perp, \sigma_i, J^\pi, J_z) = \frac{\sqrt{N_c}}{4p^+} \bar{u}_\alpha(\tilde{q}_2, \sigma_2) \int \frac{dk^-}{2\pi} [\gamma^+ \Psi_\pi(k, p) \gamma^+]_{\alpha\beta} v_\beta(\tilde{q}_1, \sigma_1). \quad (7.4)$$

Os spinores u e v , são escritos em termos dos momentos da frente de luz podem ser encontrados em (BRODSKY *et al.*, 1998), e são dados por:

$$u(\tilde{q}, \sigma) = \frac{q^+ + \gamma^0 m + \gamma^0 \tilde{q}_\perp \cdot \gamma_\perp}{\sqrt{2q^+}} \begin{pmatrix} \chi^\sigma \\ \sigma \chi^\sigma \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v(\tilde{q}, -\sigma) = \frac{q^+ - \gamma^0 m + \gamma^0 \tilde{q}_\perp \cdot \gamma_\perp}{\sqrt{2q^+}} \begin{pmatrix} \chi^{-\sigma} \\ -\sigma \chi^{-\sigma} \end{pmatrix}, \quad (7.5)$$

A função de onda de valência do pión pode ser decomposta em duas contribuições de spin, dadas pelas configurações de spins do quark e antiquark anti-alinhado e alinhado. Podemos escrever essas componentes de spin em termos da amplitude de BS do pión, $\Psi_\pi(k, p)$, que é expressa na base ortogonal dada na Eq.(6.43). Veja o Apêndice B para o cálculo do termo $\gamma^+ \Psi_\pi(k, p) \gamma^+$, e usando esse resultado, reescrevemos a expressão (7.4) como:

$$\varphi_2(\xi, \vec{k}_\perp, \sigma_i, J^\pi, J_z) = -\frac{\sqrt{N_c}}{M_\pi} \int \frac{dk^-}{2\pi} \left\{ \left[\phi_2 + \left(\frac{k^-}{2M_\pi} + \frac{z}{4} \right) \phi_3 \right] \mathcal{S}_1^{\sigma_1\sigma_2}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) - \frac{1}{M_\pi} \mathcal{S}_2^{\sigma_1\sigma_2}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) \phi_4 \right\}, \quad (7.6)$$

usando $\Lambda^+ = \frac{1}{4} \gamma^- \gamma^+$, definimos as seguintes quantidades que carregam a informação da algebra de Dirac, presentes na equação anterior,

$$\mathcal{S}_1^{\sigma_i}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) = \text{Tr} \left[v(\tilde{q}_1, \sigma_1) u^\dagger(\tilde{q}_2, \sigma_2) \gamma_5 \Lambda^+ \right] \quad \text{e} \quad \mathcal{S}_2^{\sigma_i}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) = \text{Tr} \left[v(\tilde{q}_1, \sigma_1) u^\dagger(\tilde{q}_2, \sigma_2) \vec{k}_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp \gamma_5 \Lambda^+ \right], \quad (7.7)$$

para σ_i , temos $i = (1, 2)$.

7.1.1 Tratamento algébrico

Ao introduzir os spinores, acima descritos, na Eq.(7.7), temos os seguintes produtos:

$$\begin{pmatrix} \chi^\sigma \\ \sigma\chi^\sigma \end{pmatrix} (\chi^{\sigma\dagger} \quad \sigma^\dagger\chi^{\sigma\dagger}) = (1 + \sigma\gamma_5)\Lambda^+, \quad (7.8)$$

$$\begin{pmatrix} \chi^{-\sigma} \\ -\sigma\chi^{-\sigma} \end{pmatrix} (\chi^{\sigma\dagger} \quad \sigma^\dagger\chi^{\sigma\dagger}) = (1 - \sigma\gamma_5)\frac{\gamma_{L(R)}}{\sqrt{2}}, \quad (7.9)$$

com $\sigma = \pm 1$, e onde $\gamma_{L(R)}$ são dados por:

$$\gamma_{L(R)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^1 \pm i\gamma^2). \quad (7.10)$$

O próximo passo é calcular os traços, para encontrar as expressões das quantidades que definimos por \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 . Primeiro, para $\mathcal{S}_1^{\sigma_i}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$, temos que:

$$\mathcal{S}_1^{-\sigma\sigma}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) = \text{Tr} \left[\frac{q_1^+ - \gamma^0 m - \gamma^0 \vec{k}_\perp \cdot \gamma_\perp}{\sqrt{2q_1^+}} (1 + \sigma\gamma_5)\Lambda^+ \frac{q_2^+ + \gamma^0 m + \gamma^0 \vec{k}_\perp \cdot \gamma_\perp}{\sqrt{2q_2^+}} \gamma_5\Lambda^+ \right], \quad (7.11)$$

onde podemos utilizar o projetor Λ^+ , que se encontra dentro do traço, para simplificar a expressão acima,

$$\Lambda^+ [q_1^+ - \gamma^0 m - \gamma^0 \vec{k}_\perp \cdot \gamma_\perp] \Lambda^+ = \Lambda^+ q_1^+ \quad \text{e} \quad \Lambda^+ [q_2^+ + \gamma^0 m + \gamma^0 \vec{k}_\perp \cdot \gamma_\perp] \Lambda^+ = \Lambda^+ q_2^+, \quad (7.12)$$

e lembrando que o traço de um número ímpar de matrizes γ é nulo, temos que:

$$\mathcal{S}_1^{-\sigma\sigma}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) = \frac{\sqrt{q_1^+ q_2^+}}{2} \text{Tr} [(1 + \sigma\gamma_5)\Lambda^+ \gamma_5\Lambda^+] = \sigma M_\pi \sqrt{\xi(1-\xi)} = \sigma \frac{M_\pi}{2} \sqrt{1-z^2}. \quad (7.13)$$

Usando as relações dadas na Eq.(7.12), pode-se mostrar que o matriz $\mathcal{S}_2^{-\sigma\sigma}$ desaparece, vejamos esse fato

$$\mathcal{S}_2^{-\sigma\sigma}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) = \text{Tr} \left[\frac{q_1^+ - \gamma^0 m - \gamma^0 \vec{k}_\perp \cdot \gamma_\perp}{\sqrt{2q_1^+}} (1 + \sigma\gamma_5)\Lambda^+ \frac{q_2^+ + \gamma^0 m + \gamma^0 \vec{k}_\perp \cdot \gamma_\perp}{\sqrt{2q_2^+}} \vec{q}_\perp \cdot \gamma_\perp \gamma_5\Lambda^+ \right] = 0. \quad (7.14)$$

Portanto, levando em consideração as helicidades antialinhadas, somente o traço \mathcal{S}_1 tem contribuição. Voltemos nossa atenção para os elementos de matrizes com helicidades alinhadas, de início observamos que:

$$\begin{aligned}
\gamma_5 \left[q_2^+ + \gamma^0 m + \gamma^0 \vec{k}_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp \right] \Lambda^+ \left[q_1^+ + \gamma^0 m + \gamma^0 \vec{k}_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp \right] &= \gamma_5 q_2^+ + \left[q_1^+ + \gamma^0 m + \gamma^0 \vec{k}_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp \right] \\
&- \gamma_5 \frac{m}{2} \left[q_1^+ + \gamma^0 m + \gamma^0 \vec{k}_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp \right] \\
&+ \gamma_5 \frac{1}{2} \vec{k}_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp \left[q_1^+ + \gamma^0 m + \gamma^0 \vec{k}_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp \right]
\end{aligned} \tag{7.15}$$

uma vez que a seguinte relação acima é aplicada no cálculo da componente $\mathcal{S}_1^{\sigma\sigma}$, teremos valor nulo, observe:

$$\mathcal{S}_1^{\sigma\sigma}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) = \text{Tr} \left[\frac{q_1^+ - \gamma^0 m - \gamma^0 \vec{k}_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp}{\sqrt{2q_1^+}} (1 + \sigma\gamma_5) \frac{\gamma_{L(R)} q_2^+ + \gamma^0 m + \gamma^0 \vec{k}_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp}{\sqrt{2q_1^+}} \gamma_5 \Lambda^+ \right] = 0, \tag{7.16}$$

o último elemento de matriz será denotado por $\mathcal{S}_2^{\sigma\sigma}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_2^{\sigma i}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) &= \text{Tr} \left[\frac{q_1^+ - \gamma^0 m - \gamma^0 \vec{k}_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp}{\sqrt{2q_1^+}} (1 + \sigma\gamma_5) \Lambda^+ \frac{\gamma_{L(R)} (q_2^+ + \gamma^0 m) \vec{k}_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp + \gamma_0 |\vec{k}_\perp|^2}{\sqrt{2q_1^+}} \right] \\
&= -\frac{\sqrt{q_1^+ q_2^+}}{2\sqrt{2}} \text{Tr} \left[(1 + \sigma\gamma_5) \gamma_{L(R)} (k_R \gamma_L + k_L \gamma_R) \gamma_5 \Lambda^+ \right] = \sigma k_{L(R)} M_\pi \sqrt{\frac{1-z^2}{2}},
\end{aligned} \tag{7.17}$$

onde $k_{R(L)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (k_x \pm ik_y) = \pm \sqrt{\frac{\gamma}{2}} e^{\mp i\theta}$, com $\gamma = |\vec{k}_\perp|^2$.

Finalmente, inserindo os resultados obtidos para acima na Eq.(7.6) e fazendo as simplificações necessárias, obtemos que:

$$\begin{aligned}
\varphi_2(\xi, \vec{k}_\perp, \sigma_i, J^\pi, J_z) &= -\frac{\sigma}{2} \sqrt{N_c} \sqrt{1-z^2} \\
&\times \int \frac{dk^-}{2\pi} \left\{ \delta_{\sigma_2, -\sigma_1} \left(\phi_2(k, p) + \left(\frac{k^-}{2M_\pi} + \frac{z}{4} \right) \phi_3(k, p) \right) - \frac{k_{L(R)} \sqrt{2}}{M_\pi} \delta_{\sigma_2, \sigma_1} \phi_4(k, p) \right\},
\end{aligned} \tag{7.18}$$

onde $\sigma_2 = \sigma_1 = \pm 1$

Uma questão que aparece é o fato do quark no modelo inspirado em QCD ter uma massa dependente de momento, e a derivação realizada até aqui usou uma massa constante. Entretanto, notavelmente a dependência na massa constante do quark desaparece da expressão para as componentes de valência da função de onda do pión, como vemos na Eq. (7.18), e na sua expressão temos apenas as funções escalares da amplitude de Bethe-Salpeter. Isso não é uma prova, mas uma indicação da validade geral da expressão

deduzida para a função de onda de valência no caso de os quarks serem vestidos. Dessa forma usaremos a Eq. (7.18) na próxima seção, onde exploraremos a decomposição em spin da função de onda de valência e as distribuições de momento correspondentes para o modelo do pión inspirado na QCD.

7.2 Componentes de spin da valência

A função de onda de valência do pión tem duas componentes de spin dos quarks, antialinhados e alinhados como de fato explicitado na Eq. (7.18). Resta a integração em k^- nesta última equação que define a função de onda de valência, que pode ser realizada prontamente usando a RIN para as funções escalares $\phi_i(k, p)$, Eq.(6.55). O detalhamento dessa integração é feito no Apêndice C.

É importante ressaltar, que segundo (PAULA *et al.*, 2021), a configuração de spins antialinhados do quark e antiquark, é a que mais contribui para o estado ligado do pión, e é acoplada ao auto-estado do operador L_z com autovalor $\ell_z = 0$. Diferentemente, a configuração alinhada necessariamente acopla-se ao auto-estado de L_z com $\ell_z = \pm 1$, dada a natureza pseudo-escalar do pión. Não podemos descartar a componente de spins alinhados, mesmo com sua baixa probabilidade, mas ela representa a influência no regime dinâmico relativístico dos quarks dentro do pión. Um estudo quantitativo dessa componente tem um papel fundamental na compreensão das características dos mésons leves (e as possíveis correções relativísticas para os mais pesados).

Podemos escrever a Eq. (7.18), com base nos cálculos realizados no Apêndice C, como:

$$\varphi_2(\xi, \vec{k}_\perp, \sigma_i; M_\pi, J^\pi, J_z) = -\frac{\sigma}{2} \sqrt{N_c} \sqrt{1-z^2} \left\{ \delta_{\sigma_2, -\sigma_1} \Psi_{\uparrow\downarrow}(\gamma, z) \mp \delta_{\sigma_2, \sigma_1} e^{\mp i\theta} \Psi_{\uparrow\uparrow}(\gamma, z) \right\} \quad (7.19)$$

onde podemos identificar as componentes de spin da valência como sendo:

$$\Psi_{\uparrow\downarrow}(\gamma, z) = \psi_2(\gamma, z) + \frac{z}{2} \psi_3(\gamma, z) + \frac{i}{M_\pi^3} \int_{\gamma'_i}^{\gamma'_f} d\gamma' \frac{\frac{\partial}{\partial z} [g_3(\gamma', z)]}{\left(\gamma + \gamma' + \frac{z^2 M_\pi^2}{4} - i\epsilon \right)}, \quad (7.20)$$

para os spins do quark e antiquark antialinhados, e

$$\Psi_{\uparrow\uparrow}(\gamma, z) = \frac{\sqrt{\gamma}}{M_\pi} \psi_4(\gamma, z) \quad (7.21)$$

para os spins dos quarks alinhados.

Nas Figs. 7.1 e 7.2 apresentamos os resultados das componentes de spin da função de onda de valência com as configurações de spin dos quarks antialinhados e alinhados, respectivamente, e normalizadas arbitrariamente. Note, que a amplitude ψ_1 não contribui

diretamente para essas componentes, porém como veremos é necessária para a normalização da amplitude de BS. Observa-se nos painéis da esquerda de ambas as figuras, que o comportamento em relação a z próximo ao ponto final, é diferente, sendo que a componente de spins antialinhados tem um decréscimo mais rápido em relação a componente de spins alinhados, associado a isso, percebemos que uma distribuição mais estreita da primeira em relação a segunda.

Essa característica já foi observada no estudo dinâmico do pión, utilizando a solução da equação de BS na aproximação de escada no espaço de Minkowski (PAULA *et al.*, 2021). A razão física para a diferença entre esses comportamentos de ponto final é a origem relativística da componente de spins alinhados, e portanto os quarks nessa configuração exploram mais a região de curtas distâncias ou UV em relação a componente de spins antialinhados. Outro aspecto que já observamos anteriormente, na análise das amplitudes ψ_i no capítulo anterior, é a escala de momento que elas trazem na sua dependência em γ , refletindo em uma escala em k_{\perp} , que domina o comportamento decrescente, da ordem de $\Lambda_{QCD} \sim 0.3 \text{ GeV}$. Essa é a escala dominante da QCD no infravermelho, correspondendo a distâncias de confinamento da ordem de 1 fm.

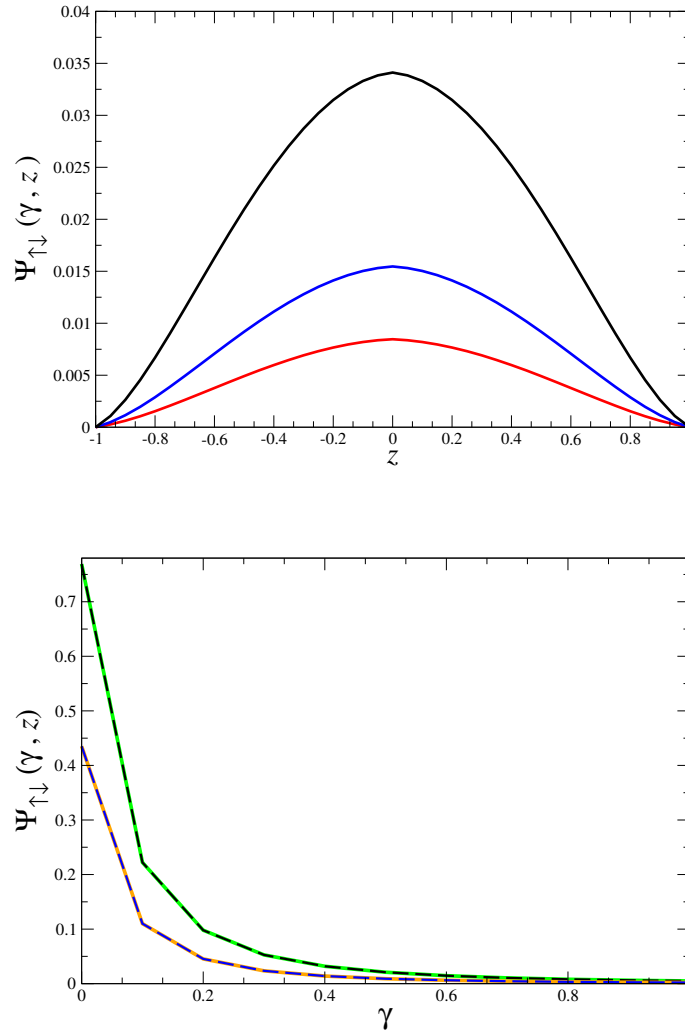


FIGURA 7.1 – Painel superior: Componente de spins antialinhados dos quarks da função de onda de valência, $\Psi_{\uparrow\downarrow}(\gamma, z)$, em função de z , para $\gamma = k_{\perp}^2$ igual a 0.5 GeV^2 (linha preta), 0.75 GeV^2 (linha azul) e 1 GeV^2 (linha vermelho). Painel inferior: $\Psi_{\uparrow\downarrow}(\gamma, z)$ em função de γ [GeV^2] para z igual a 0.5 e -0.5 (linhas verde contínua e tracejada preta) e 0.75 e -0.75 (linhas laranja contínua e tracejada azul).

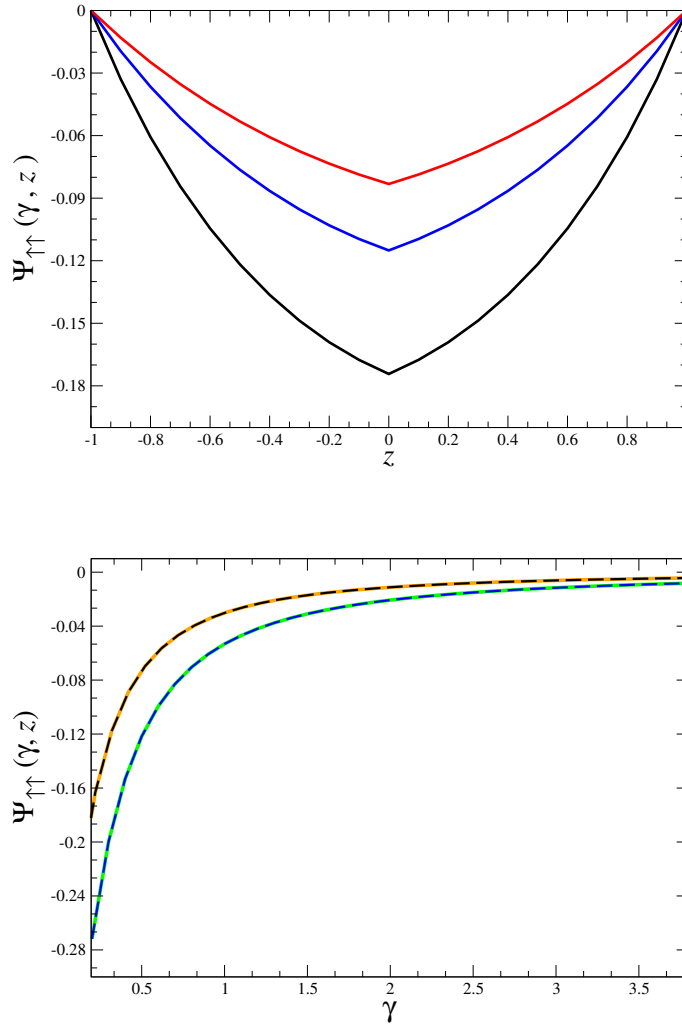


FIGURA 7.2 – Pannel superior: Componente de spins alinhados dos quarks da função de onda de valência, $\Psi_{\uparrow\uparrow}(\gamma, z)/\sqrt{\gamma}$, em função de z , para $\gamma = k_{\perp}^2$ igual a 0.5 GeV² (linha preta), 0.75 GeV² (linha azul) e 1 GeV² (linha vermelha). Pannel inferior: $\Psi_{\uparrow\uparrow}(\gamma, z)/\sqrt{\gamma}$ em função de γ [GeV²] para z igual a 0.5 e -0.5 (linhas verde contínua e azul tracejada) e 0.75 e -0.75 (linhas laranja contínua e preta tracejada).

7.3 Probabilidade de valência e distribuições de momento

As componentes da função de onda de valência com spins dos quarks antialinhados (7.20) e alinhados (7.21) são amplitudes de probabilidade, desde que a função de onda completa no espaço de Fock esteja normalizada, isso também corresponde a amplitude de BS (associada a componente de valência) normalizada. Desta forma, além das densidades de probabilidade que definiremos a seguir também temos probabilidade de valência dada

pela Eq.(7.2), que escrevemos como:

$$P_{\text{val}} = \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty d\gamma \rho_{\text{val}}(\gamma, z), \quad (7.22)$$

onde tem lugar as densidades associados as duas componentes de spin:

$$\rho_{\text{val}}(\gamma, z) = \rho_{\uparrow\downarrow}(\gamma, z) + \rho_{\uparrow\uparrow}(\gamma, z) \quad (7.23)$$

e definidas como

$$\rho_{\uparrow\downarrow}(\gamma, z) = \frac{N_c}{16\pi^2} |\psi_{\uparrow\downarrow}(\gamma, z)|^2 \quad \text{e} \quad \rho_{\uparrow\uparrow}(\gamma, z) = \frac{N_c}{16\pi^2} \frac{\gamma}{M_\pi^2} |\psi_4(\gamma, z)|^2, \quad (7.24)$$

sendo as densidades de probabilidade de momento para as componentes de spins antialinhados e alinhados, respectivamente.

As distribuições de momento longitudinais e transversais da componente de valência na frente de luz são encontradas através da integração adequada da densidade de probabilidade, $\rho_{\text{val}}(\gamma, z)$. Assim, a distribuição do momento longitudinal, decompostas em suas contribuições nas componentes de spin, é dada por

$$\phi(\xi) = \phi_{\uparrow\downarrow}(\xi) + \phi_{\uparrow\uparrow}(\xi). \quad (7.25)$$

A integração é feita no momento transversal, lembrando que usamos $\gamma = |\vec{k}_\perp|^2$, com isso temos para cada componente,

$$\phi_{\uparrow\downarrow}(\xi) = \int_0^\infty d\gamma \rho_{\uparrow\downarrow}(\gamma, z) \quad \text{e} \quad \phi_{\uparrow\uparrow}(\xi) = \int_0^\infty d\gamma \rho_{\uparrow\uparrow}(\gamma, z), \quad (7.26)$$

com, $z = 2\xi - 1$. Para a distribuição do momento transversal, em termos das duas componentes de spin, temos que,

$$p(\gamma) = p_{\uparrow\downarrow}(\gamma) + p_{\uparrow\uparrow}(\gamma), \quad (7.27)$$

onde a integração é feita no momento longitudinal, que é realizada em termos da variável z . Suas componentes são:

$$p_{\uparrow\downarrow}(\gamma) = \int_{-1}^1 dz \rho_{\uparrow\downarrow}(\gamma, z) \quad \text{e} \quad p_{\uparrow\uparrow}(\gamma) = \int_{-1}^1 dz \rho_{\uparrow\uparrow}(\gamma, z). \quad (7.28)$$

Na seção 7.4, a seguir, introduzimos a normalização da amplitude de BS, necessária para obtermos a constante de decaimento que será apresentada na seção 7.5, e os resultados quantitativos do modelo do pión inspirado na QCD que serão apresentados na seção 7.6. Nesta última seção, apresentamos os valores das probabilidades das componentes de spin

da função de onda de valência, a constante de decaimento e as distribuições de momento devidamente normalizadas à probabilidade de valência.

7.4 Normalização

Com o intuito de calcular os observáveis do pión, que no nosso caso são a probabilidade de valência, distribuições de momento e a constante de decaimento, a amplitude de BS deve ser normalizada adequadamente. Iremos assumir que a amplitude de BS do modelo do pión inspirado na QCD é hipoteticamente solução de uma equação de BS cujo o kernel de interação depende apenas do momento transferido, e os propagadores dos quarks são vestidos, com isso a expressão da normalização se reduz a (vide (LURIE *et al.*, 1965)):

$$Tr \left[\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial p'^\mu} \{ S^{-1}(k - p'/2) \bar{\Psi}_\pi(k, p) S^{-1}(k + p'/2) \Psi_\pi(k, p) \} \Big|_{p=p'} \right] = -i 2p_\mu. \quad (7.29)$$

É importante notar que dentro da aproximação escada da equação de BS, a referência (YDREFORS *et al.*, 2021) obteve a correta normalização da carga utilizando a fórmula acima.

As expressões mais gerais para a amplitude de BS, Eq. (6.43), e sua conjugada, permitidas pela paridade e os dois momentos independentes são dadas abaixo:

$$\Psi_\pi(k, p) = S_1 \phi_1 + S_2 \phi_2 + S_3 \phi_3 + S_4 \phi_4; \quad (7.30)$$

$$\bar{\Psi}_\pi(k, p) = -S_1 \phi_1 + S_2 \phi_2 + S_3 \phi_3 + S_4 \phi_4, \quad (7.31)$$

onde já definimos as funções escalares, ϕ_i , que dependem de $\{k^2, p^2, k \cdot p\}$ elas também contém o comportamento analítico imposto pela prescrição de Feynman, ou seja, $+i\epsilon$. Estas têm que obedecer propriedades bem definidas sob a troca $k \rightarrow -k$, de acordo com a regra de anticomutação para os campos fermiônicos envolvidos. Usando a Eq. (7.31) e realizando a álgebra de Dirac (Apêndice E), temos que a condição de normalização é dada por:

$$iN_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \phi_1 \phi_1 + \phi_2 \phi_2 + [\phi_3 \phi_3 + \phi_4 \phi_4 - 4\phi_1 \phi_4] \mathcal{B}(k^2) - \frac{2}{M_\pi} [M(k_q^2) + M(k_{\bar{q}}^2)] \phi_2 \phi_1 \right\} = 1, \quad (7.32)$$

com N_c sendo o número de cores da QCD. As funções dinâmicas de massa do quark dependem do momento, e $\mathcal{B}(k^2) = \frac{1}{M_\pi^4} [(k \cdot p)^2 - k^2 M_\pi^2]$. Ao introduzir as amplitudes ϕ_i dadas em termos da representação integral de Nakanishi, Eq. (6.55), pode-se diretamente fazer a integração analítica no loop de momento como descrito no Apêndice E, onde é feito uso da parametrização de Feynman na Eq. (7.32). Fazemos uma aproximação, onde desconsideramos as derivadas dos termos de massa em relação ao momento como vemos

na Eq. (E.1) para a normalização da amplitude de BS, com massas dos quarks dependendo do momento. Com isso, finalmente, obtemos:

$$\begin{aligned}
1 &= \mathcal{N}^2 \left(-\frac{3N_c}{32\pi^2} \right) \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^{\gamma'_f} d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz \int_0^{\gamma_f} d\gamma \int_0^1 dv v^2(1-v)^2 \\
&\times \left\{ \frac{\mathcal{G}_{11} + \mathcal{G}_{22}}{\left[\frac{M_\pi^2}{4} \lambda'^2 + \gamma'v + \gamma(1-v) \right]^4} + \frac{\mathcal{G}_{33} + \mathcal{G}_{44} - 4\mathcal{G}_{14}}{2M_\pi^2 \left[\frac{M_\pi^2}{4} \lambda'^2 + \gamma'v + \gamma(1-v) \right]^3} \right\} \\
&- \mathcal{N}^2 \left(-\frac{3N_c}{4M_\pi\pi^2} \right) \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^{\gamma'_f} d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz \int_0^{\gamma_f} d\gamma \int_0^1 dv \mathcal{G}_{21} \\
&\times \left\{ \frac{2m_0 v^2(1-v)^2}{4 \left[\lambda'^2 \frac{M_\pi^2}{4} + \gamma'v + \gamma(1-v) \right]^4} + \int_0^1 du \frac{2m^3 (1-v-u)^2 u^2 \theta(1-v-u)}{\left[\lambda''^2 \frac{M_\pi^2}{4} - \frac{M_\pi^2}{4} + \lambda^2 + (1-u-v)\gamma + u\gamma' \right]^5} \right\}, \tag{7.33}
\end{aligned}$$

Se tivéssemos considerado a amplitude de BS com massas de quarks constantes m , adotando procedimentos análogos aos do Apêndice E, usando agora $M(k^2) = m$, chegaremos ao resultado dado no trabalho (PAULA *et al.*, 2021), que também fez uso da Eq.(E.1) para a normalização da equação de BS,

$$\begin{aligned}
1 &= \mathcal{N}'^2 \left(-\frac{3N_c}{32\pi^2} \right) \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^{\gamma'_f} d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz \int_0^{\gamma_f} d\gamma \int_0^1 dv \frac{v^2(1-v)^2}{\left[\frac{M_\pi^2}{4} \lambda'^2 + \gamma'v + \gamma(1-v) \right]^3} \\
&\times \left\{ \frac{\mathcal{G}_{11} + \mathcal{G}_{22} - 4\frac{m}{M_\pi}\mathcal{G}_{21}}{\left[\frac{M_\pi^2}{4} \lambda'^2 + \gamma'v + \gamma(1-v) \right]} + \frac{1}{2M_\pi^2} (\mathcal{G}_{33} + \mathcal{G}_{44} - 4\mathcal{G}_{14}) \right\}, \tag{7.34}
\end{aligned}$$

onde, para as duas últimas equações, $\mathcal{G}_{ij} = g_i(\gamma', z')g_j(\gamma, z)$. Lembramos ao leitor que para cada função peso g_i temos um fator de normalização \mathcal{N} na Eq.(7.33) ou \mathcal{N}' para a Eq.(7.34), que as multiplicam. Temos que a dependência de z e z' fica contida em λ' e λ'' , que definimos como:

$$\lambda' = (vz' + (1-v)z) \quad \text{e} \quad \lambda'' = ((1-v-u)z + uz' + v) \tag{7.35}$$

Finalmente, deve-se ressaltar que a normalização, dada na Eq. (7.32), contém as contribuições além da valência da expansão no espaço de Fock da frente de luz para o pión, ou seja, ela leva em conta a soma infinita de estados com o par quark-antiquark vestido e número qualquer de glúons vestidos, que permitem compor os números quânticos do pión. Toda essa complexidade aparece quando a equação de Bethe-Salpeter é projetada na frente de luz, e as componentes de Fock além da valência aparecem contribuindo ao kernel do operador massa quadrado efetivo que atua na componente de valência (SALES *et al.*, 2000).

A própria amplitude de BS definida no espaço de Minkowski, tendo o quark e antiquark em tempos na frente de luz diferentes, envolvem do ponto de vista da Hamiltoniana na frente de luz a propagação no tempo relativo entre o quark e o anti-quark, e portanto durante a propagação virtual entre esse dois tempos temos que sistema quântico flutua em todas as componentes de Fock permitidas pelos números quânticos do pión. Assim, apesar da amplitude de BS quark-antiquark-pión ser definida em termos do elemento de matriz de apenas dois operadores de quarks, entre o estado de vácuo e o pión, a quantização dos campos dos quarks e glúons e a forma não diagonal no espaço de Fock do operador evolução na frente de luz, acabam por permitir a propagação virtual do sistema em todos os estados de Fock possíveis. Fica ainda a questão de como os graus de liberdade vestidos podem definir esse operador de evolução na frente de luz, essa questão mais complexa não será tratada nessa tese.

7.5 Constante de decaimento

Um observável básico que deve ser reproduzido para avaliar e validar uma dada abordagem de um modelo fenomenológico é certamente a constante de decaimento eletrofraca do pión, f_π . Na primeira parte desse trabalho calculamos esse observável, não só para o pión, como também o K^+ , D^+ e D_s^+ , fazendo uso de um modelo com vértice simétrico, cujo os propagadores têm massas constituintes dos quarks independente de momento. A constante de decaimento é definida em termos da amplitude de BS, como segue abaixo,

$$i p^\mu f_\pi = N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^5 \Psi(k, p)], \quad (7.36)$$

onde $N_c = 3$ é o número de cores. Realizando-se a contração com p_μ , pela direita em cada membro e usando a decomposição da amplitude de BS, dada na Eq.(6.43), teremos que,

$$i M_\pi^2 f_\pi = N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\not{p} \gamma^5 \sum_{i=1}^4 S_i(k, p) \phi_i(k, p)]. \quad (7.37)$$

Calculando-se os traços ao usar os elementos da base, verifica-se que apenas um termo não irá ser nulo, ao usar a álgebra de Dirac, assumindo valor de $-4 M_\pi \phi_2$. Com isso o resultado é dado por:

$$i M_\pi^2 f_\pi = -4 M_\pi N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \phi_2(k, p). \quad (7.38)$$

Temos duas opções para chegarmos a expressão final, a partir desse ponto. A primeira é via o uso das variáveis da frente de luz, lembrando que ao integrar ϕ_2 na variável que

corresponde a energia, k^- , teremos a componente ψ_2 , como fizemos no capítulo anterior, com isso temos que:

$$i M_\pi f_\pi = -4 N_c \frac{1}{2} \int \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} \int \frac{dk^+}{(2\pi)} \psi_2(\gamma, z). \quad (7.39)$$

Devemos analisar as integrais nos momentos longitudinais, k^+ , escrevendo, pela Eq.(6.86), que $dk^+ = \frac{M_\pi}{2} dz$, no tocante ao momento transversal, k_\perp , e à parte angular temos que $d^2 k_\perp = d\gamma \frac{d\theta}{2}$, onde usamos que $\gamma = |\vec{k}_\perp|^2$, com θ no intervalo $[0, 2\pi]$, e usando-se a definição de $\psi_2(\gamma, z)$, que foi apresentada na Eq.(6.87):

$$f_\pi = \frac{N_c}{8\pi^2 M_\pi} \int_0^\infty d\gamma \int_{-1}^1 dz \int_{\gamma_i}^{\gamma_f} d\gamma' \frac{g_2(\gamma', z)}{\left[\gamma + \gamma' + \frac{z^2 M_\pi^2}{4} - i\epsilon \right]^2}, \quad (7.40)$$

e por fim, basta integrar em γ e aplicar os limites, teremos que,

$$f_\pi = \frac{N_c}{8\pi^2 M_\pi} \int_{-1}^1 dz \int_{\gamma_i}^{\gamma_f} d\gamma' \frac{g_2(\gamma', z)}{\left[\gamma' + \frac{z^2 M_\pi^2}{4} - i\epsilon \right]}. \quad (7.41)$$

Deve-se lembrar que $g_2(\gamma', z')$ contém uma constante de normalização \mathcal{N} , que é obtida das condições dadas na Eq.(7.33), e essa deve ser introduzida ao computarmos o valor f_π para compararmos com valor experimental. O valor desse observável será calculado com os parâmetros escolhido no modelo, após a referida normalização ser considerada. Como temos dois modelos do pión com massa dependente e independente de momento para a função peso $g_2(\gamma', z')$, em termos de G e G' , respectivamente, iremos realizar o estudo quantitativo de f_π para esses dois casos.

O segundo modo de chegarmos a expressão de f_π , é realizar a integração em 4D usando a representação integral de Nakanishi para a amplitude escalar $\phi_2(k, p)$, que é introduzida na Eq.(7.38):

$$f_\pi = -\frac{4i}{M_\pi} N_c \int_{-1}^1 dz \int_{\gamma_i}^{\gamma_f} d\gamma' g_2(\gamma', z') \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon]^3}, \quad (7.42)$$

onde, depois de fazer a mudança de variável: $q = k + z'p/2$, teremos uma integração Euclidiana 4D, resultando em:

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[q^2 - z^2 M_\pi^2/4 - \gamma' + i\epsilon]^3} = \frac{i\pi^2}{2(2\pi)^4} \frac{1}{[-\gamma' - z'^2 M_\pi^2/4 + i\epsilon]}, \quad (7.43)$$

e ao substituir essa integral na Eq.(7.42), novamente teremos o resultado obtido com o uso das variáveis da frente de luz, como dado na Eq.(7.41).

Devemos também destacar, que é possível expressar f_π em termos da componente de spins antialinhados da função de onda de valência, dada pela Eq. (7.20), como apresentado

no Apêndice D e discutido na Ref. (PAULA *et al.*, 2021). A demonstração dessa equivalência foi feita usando a componente “+” da corrente axial, e obtemos a expressão abaixo,

$$f_\pi = i \frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^\infty d\gamma \int_{-1}^1 dz \Psi_{\uparrow\downarrow}(\gamma, z), \quad (7.44)$$

que é equivalente a forma final que encontra-se na Eq.(7.41). Note que nesse estudo usamos uma convenção da constante de decaimento do pión que difere de um fator de $\sqrt{2}$ em relação à adotada no estudo do modelo covariante.

7.6 Resultados

Os observáveis de estrutura para o modelo do pión inspirado na QCD serão comparados com os resultados da solução da equação de Bethe-Salpeter no Minkowski na aproximação de escada (PAULA *et al.*, 2021), bem como exploraremos o modelo com massa independente de momento. Para o conjunto de parâmetros que utilizamos (MELLO *et al.*, 2017), calculamos as seguintes quantidades principais: (i) a probabilidade de valência e sua decomposição de spin, e (ii) a constante de decaimento eletrofraca do pión; conforme apresentado em detalhes na Tabela 7.1.

TABELA 7.1 – Propriedades estáticas do pión ($m_\pi = 140 \text{ MeV}$) para alguns conjuntos de parâmetros. As seguintes quantidades são apresentadas: a probabilidade de valência, P_{val} (terceira coluna), e sua decomposição nos estados de spins alinhados, $P_{\uparrow\uparrow}$ (quarta coluna), e antialinhados, $P_{\uparrow\downarrow}$ (quinta coluna), a constante de decaimento do pión carregado, f_π (sexta coluna), e a razão adimensional, f_π/m_i (sétima coluna). Note que usamos uma convenção da constante de decaimento do pión que difere de um fator de $\sqrt{2}$ em relação à adotada no estudo do modelo covariante.

| Conjunto | tipo de ABS | P_{val} | $P_{\uparrow\downarrow}$ | $P_{\uparrow\uparrow}$ | $f_\pi(\text{MeV})$ | f_π/m_i |
|----------|--|-----------|--------------------------|------------------------|---------------------|-------------|
| (I) | ABS, com $M(k^2)$ (MELLO <i>et al.</i> , 2017) | 0.70 | 0.58 | 0.12 | 130.1 | |
| (II) | ABS, com pólo $m_1 = 383 \text{ MeV}$ | 0.52 | 0.41 | 0.11 | 88 | 0.229 |
| (III) | ABS, com pólo $m_2 = 644 \text{ MeV}$ | 0.65 | 0.52 | 0.13 | 159 | 0.246 |
| (IV) | ABS, com pólo $m_3 = 954 \text{ MeV}$ | 0.86 | 0.69 | 0.17 | 247 | 0.258 |

Na Tabela 7.1, vemos que conjunto I (pión inspirado na QCD) é o que reproduz o valor experimental da constante de decaimento do pión, ou seja, $f_{\pi^\pm}^{exp.} = 130.50(1)(3)(13) \text{ MeV}$ (ZYLA *et al.*, 2020), bem como o valor médio de LQCD, que é de $f_{\pi^\pm}^{LCQD} = 130.2(1)(0.8) \text{ MeV}$, como dado na referência (AOKI *et al.*, 2020). Lembrando, que na Ref. (MELLO *et al.*, 2017) origem do modelo inspirado em QCD, o valor experimental de f_π foi também reproduzido, o que mostra a consistência do nosso tratamento da amplitude de BS em termos da representação integral e sua normalização. Aqui calculamos pela primeira vez,

as probabilidades de valência e sua decomposição em termos das componentes de spin, com valores de 0.7, 0.58 e 0.12, respectivamente.

Calculamos também essas quantidades para o modelo com massa independente de momento, para os três valores correspondentes ao pólos do propagador do quark no modelo inspirado na QCD, i.e., massa do quark de 383 MeV, 644 MeV e 954 MeV, obtivemos a probabilidade de valência P_{val} e f_π no intervalo $[0.52 - 0.86]$ e $[88 - 247]$ MeV, respectivamente. Essa variação poderia ser menor caso o ajuste de f_π fosse feita, com a concomitante mudança do parâmetro de escala do vértice.

É interessante comparar com o resultado obtido da solução da equação de BS na Ref. (PAULA *et al.*, 2021), que mostra a mesma probabilidade de valência do modelo inspirado na QCD, e compatibilidade com as probabilidades parciais, quando esse cálculo reproduz o valor de f_π experimental. As probabilidades de valência, para as configurações de spin antialinhado e alinhado também que são mostradas na Tabela 7.1, assim como na referência (PAULA *et al.*, 2021), sugerem a prevalência esperada da componente spins antialinhados, variando a probabilidade, naquela referência de 0.41 a 0.69, bem como o papel secundário para a a configuração de spins alinhados, cujo intervalo de variação da probabilidade foi de 0.11 a 0.17. Em qualquer caso, é importante notar que a contribuição de spins alinhados, é de origem exclusivamente relativística, embora não seja de forma alguma desprezível, já que sua fração relativa na valência é de até 24%. Do ponto de vista da expansão da função de onda na frente de luz do pión no espaço de Fock, temos que por volta de 30% da normalização vem das componentes de Fock superiores, e portanto são bastante relevantes na descrição do pión.

Acrescentamos que a probabilidade restante, $1 - P_{val}$, é provavelmente distribuída entre as primeiras componentes do espaço de Fock além da valência. Para a amplitude de BS com massas dos quarks independentes de momento, i.e., os conjuntos (II), (III) e (IV), calculamos a razão adimensional f_π/m_i , onde m_i é a massa que representa o respectivo pólo do propagador do quark. É importante destacar que no vértice da amplitude de BS com massas fixas dos quarks, ver Eq.(6.37), o parâmetro λ desempenha uma papel análogo ao parâmetro μ_M , não físico, da função de vértice simétrica, dada na Eq. (2.6), que foi ajustada para reproduzir as constantes de decaimento dos hádrons analisados na primeira parte desse trabalho.

Por outro lado, para as amplitudes de BS com massas constantes, m_q , temos que a massa do quark determina a energia de ligação (B), e maiores valores de $B = 2m_q - M_\pi$ estão relacionados com tamanho menor do pión, ou seja, configurações mais compactas ocorrem. Portanto, os valores de f_π mostram uma dependência nessa massa constituinte do quark que adotamos como sendo as posições dos pólos, m_1 , m_2 e m_3 , do propagador do quark.

Reforçamos que a Tabela 7.1 fornece dois ingredientes interessantes : (i) a constante de decaimento é influenciada pelas configurações compactas e pelo tamanho do pión; assim, as propriedades de UV e IR são refletidas em seu valor real e com a massa constituinte do quark, e (ii) também a probabilidade de valência codifica assinaturas dos regimes de UV e IR.

Lembrando que, ao usarmos as massas fixas nos pólos m_2 e m_3 o suporte na representação integral para a ABS na variável γ' , muda para cada caso e é diferente daquele apresentado anteriormente, quando usamos o pólo m_1 . O valor de λ , no vértice, usado para chegarmos aos resultados da tabela acima foi sempre o mesmo, e apresentado na Eq. (6.3).

Os resultados para as distribuições de momento longitudinais são apresentados na Fig. 7.3, para o caso o modelo inspirado em QCD e que ajusta a constante de decaimento do pión, como visto na Tabela 7.1. Para efeito de comparação normalizamos essas distribuições a 1, ou seja, cada distribuição é dividida pela respectiva probabilidade. A comparação dos nossos resultados com aqueles obtidos pela solução da equação de BS no espaço de Minkowski na aproximação de escada (PAULA *et al.*, 2021), também se encontra na referida figura. É de se notar que as distribuições do modelo inspirado em QCD, são mais estreitas que as obtidas com a solução da BS da Ref. (PAULA *et al.*, 2021), o que curiosamente indica a relevância da dinâmica da equação de BS no espaço de Minkowski para esse observável.

Para a distribuição longitudinal da valência na Fig. 7.3 era esperado que dada a sua natureza genuinamente relativística, a distribuição alinhada tem um maior valor máximo em relação a antialinhada, mas o impacto geral na distribuição total é diminuído pela menor probabilidade associada à essa configuração de spin dos quarks.

A próxima quantidade que analisamos na Fig. 7.4 é a distribuição do momento transversal $p(\gamma)$ dada na Eq. (7.27), e a sua decomposição nas configurações de spin dos quarks. Os resultados são apresentados com normalização igual a 1. Para efeito de comparação com o modelo inspirado em QCD apresentamos na figura os resultados obtidos pela solução da equação de BS no espaço de Minkowski na aproximação de escada (PAULA *et al.*, 2021). Em geral observamos que o comportamento com momento transversal é semelhante, com uma escala para a variação das distribuições em ambos os casos da ordem de λ_{QCD} , porém a diferença é mais notável para o caso de spin alinhados, o que reflete a sensibilidade à região UV, ou de curtas distâncias, o que reflete a diferença do modelo dinâmico (PAULA *et al.*, 2021), cuja a massa do quark independe de momento, além de apresentar liberdade assintótica.

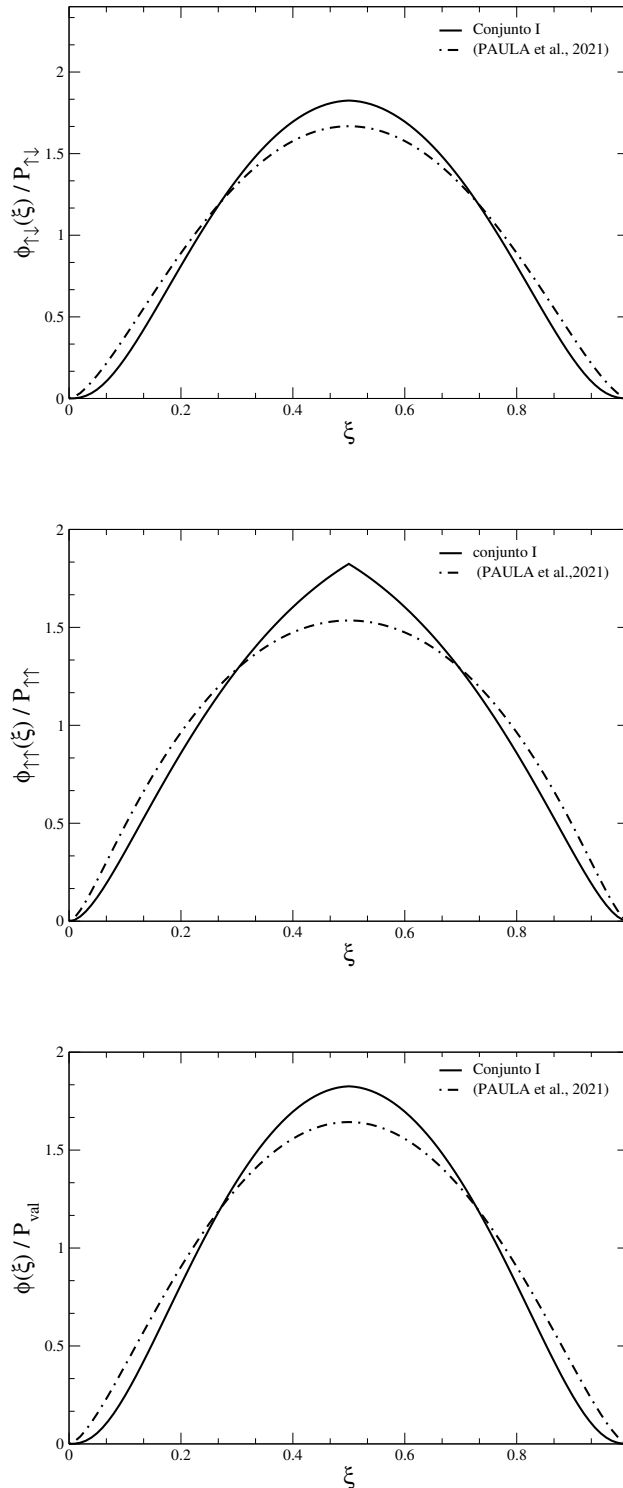


FIGURA 7.3 – . Comparação das distribuições de momento longitudinais da valência obtidas com o modelo do pión inspirado na QCD (linhas contínuas) e de cálculos da equação de BS no espaço de Minkowski (PAULA *et al.*, 2021) (linhas traço-pontos). Painel superior: distribuições de momento longitudinal para os spins dos quarks antialinhados (normalizadas a 1). Painel do meio: distribuições de momento longitudinal da valência para os spins dos quarks alinhados (normalizadas a 1). Painel inferior: distribuições total de momento longitudinal (normalizadas a 1).

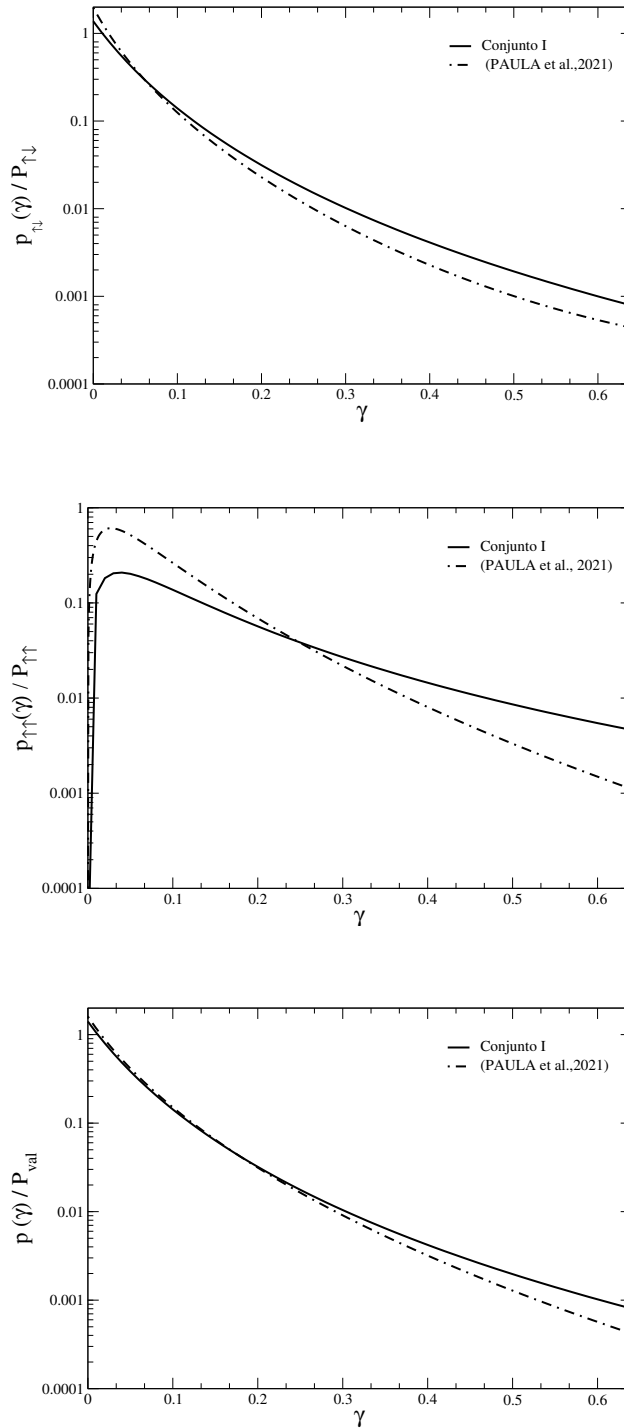


FIGURA 7.4 – Comparação das distribuições de momento transversais da valência obtidas com o modelo do pión inspirado na QCD (linhas contínuas) e de cálculos da equação de BS no espaço de Minkowski (PAULA *et al.*, 2021) (linhas traço-pontos), $\gamma \equiv k_{\perp}^2$ em GeV^2 . Painel superior: distribuições de momento transversal para os spins dos quarks antialinhados (normalizadas a 1). Painel do meio: distribuições de momento transversal da valência para os spins dos quarks alinhados (normalizadas a 1). Painel inferior: distribuições total de momento transversal (normalizadas a 1).

8 Conclusões

Este trabalho foi dividido em duas partes, na primeira analisamos o conteúdo de sabor de mésons pseudo-escalares leves (π^+ e K^+) e pesados (D^+ e D_s^+), com quarks constituintes usando um modelo de vértice simétrico, e na segunda parte trabalhamos a representação integral para a amplitude de Bethe-Salpeter do pión (π^+). Analisaremos a seguir os principais resultados e conexões existentes entre essas duas partes.

Na primeira parte do presente trabalho, as propriedades eletrofracas dos mésons pseudo-escalares leves π^+ e K^+ e charmosos D^+ e D_s^+ foram investigados, dentro de um modelo de quark constituinte covariante, onde os vértices quark-méson são assumidos como tendo uma forma simétrica pela troca de momentos dos quarks. Esse modelo foi bem sucedido em descrever as propriedades dos méson pseudoescalar leves, como demonstrado em trabalhos anteriores (MELO *et al.*, 2002; YABUSAKI *et al.*, 2015).

O modelo de vértice simétrico, traz consigo quarks constituintes up, down, estranho e charme, que incorpora a dinâmica quebra de simetria quiral através dos valores de massa dos quarks leves e a contribuição do acoplamento com o campo de Higgs principalmente para a massa do estranho e do charme. Além disso, para cada méson o modelo tem um parâmetro regulador ajustado para reproduzir a constante de decaimento fraca. Consistentemente com a relevância da física infravermelha para a quebra dinâmica da simetria quiral, escolhemos uma massa constituinte de quark leve que reproduz também o raio de carga do pión, mesmo perdendo o ajuste em grandes momentos dos dados experimentais do fator de forma experimental. A razão para tal escolha, foi estudar os fatores de forma eletromagnéticos em baixos momentos na região tipo espaço para o káon, D^+ e D_s^+ , até cerca de 1 GeV^2 , onde existem dados experimentais para o káon (AMENDOLIA *et al.*, 1986; DALLY *et al.*, 1980), e resultados de cálculos de QCD na rede para o D^+ (CAN *et al.*, 2013; LI; WU, 2017) e D_s^+ (LI; WU, 2017).

Em particular, chamamos a atenção à quebra da simetria do sabor SU(3) e SU(4) como consequência da contribuição do campo de Higgs para as massas dos quarks constituintes, isto está de certa forma refletido nos resultados de QCD na rede, que também fornecem a decomposição de sabor dos fatores de forma dos mésons pesados-leves. Além disso, comparamos nossos resultados de raio de carga com alguns modelos da literatura, que são

úteis para contextualizar o esforço realizado nesse estudo dentro do que já foi feito.

Podemos fazer algumas observações sobre as distribuições de carga dos mésons pseudo-escalares que estudamos. A distribuição de carga do quark \bar{s} é um pouco mais compacta do que a correspondente ao quark u no káon, esse tipo de comportamento é fortemente enfatizado para os mésons pseudo-escalares charmosos quando analisamos a decomposição em sabores das distribuições de carga. Cada um dos fatores de forma foi decomposto em seu conteúdo de sabores, $F_{u\bar{d}u}(q^2)$ e $F_{\bar{d}u\bar{d}}(q^2)$ para o pión, $F_{u\bar{s}u}(q^2)$ e $F_{\bar{s}u\bar{s}}(q^2)$ para o káon, $F_{c\bar{d}c}(q^2)$ e $F_{\bar{d}c\bar{d}}(q^2)$ para D^+ , $F_{c\bar{s}c}(q^2)$ e $F_{\bar{s}c\bar{s}}(q^2)$ para D_s^+ . Cada um desses fatores de forma tem propriedades particulares com respeito à simetria do sabor.

O modelo tem simetria de sabor SU(2) e trivialmente temos $F_{u\bar{d}u}(q^2) = F_{\bar{d}u\bar{d}}(q^2) = F_{\pi^+}(q^2)$. A simetria do sabor SU(3) é ligeiramente quebrada dentro do káon expresso por $F_{\bar{s}u\bar{s}}(q^2) \gtrsim F_{u\bar{s}u}(q^2)$ com uma diferença de cerca de 10 % acima de 3 GeV², como evidência da contribuição do campo de Higgs para o quark estranho, que o torna cerca de 30 % mais pesado do que o quark up em nosso modelo. O estudo da contribuição de sabor para o D^+ e D_s^+ nos fatores de forma dentro do modelo de vértice simétrico, mostraram que o quark charme está localizado próximo ao centro do méson, enquanto o quark leve forma um "halo" explorando distâncias maiores onde o confinamento é relevante em uma região onde domina a física do infravermelho.

Essa forte assimetria nas distribuições de carga entre os mésons leves e pesado-leves, é uma consequência direta do acoplamento com o campo de Higgs, que gera uma grande massa ao quark charme c em comparação com os quarks leves. Observamos que a decomposição de sabor dos raios de carga fornecidos pelo modelo de vértice simétrico é consistente com os cálculos de QCD rede (LI; WU, 2017), onde em particular o conjunto C1 foi usado, e as massas D^+ e D_s^+ foram encontradas próximas aos valores experimentais.

No modelo observamos que quanto mais pesado é o c , os raios de carga do D^+ e D_s^+ diminuem e saturam, pois a contribuição dominante para o raio de carga vem do quark leve. A contribuição do quark leve para os fatores de forma dos mésons pesado-leves é essencialmente dependente do valor mínimo do ponto de ramificação do corte que o modelo apresenta em $m_{\bar{d}(\bar{s})} + \mu_{D^+(D_s^+)} - m_{D^+(D_s^+)}$, que é pouco sensível ao aumento da massa do charme. Tal característica, citada acima, é particular do modelo de vértice simétrico, e é capaz de incorporar aspectos do limite de quark pesados da QCD, onde o centro da força confinante fica no centro de massa do méson e, portanto, a distribuição de carga torna-se independente da massa do quark pesado. No entanto, esse modelo não possui o confinamento absoluto dos quarks, e eles são representados como estados ligados dos quarks constituintes.

A simetria de sabor SU(4) é fortemente quebrada, conforme foi manifestado através das contribuições de sabor para os fatores de forma, onde encontramos no caso do D^+ que

$F_{c\bar{d}c}(q^2) > F_{\bar{d}c\bar{d}}(q^2)$ e saturando a razão acima de 3 GeV^2 , atingindo um valor ~ 5 . Para o D_s^+ , observamos o mesmo comportamento que para o D^+ sendo que $F_{c\bar{s}c}(q^2) > F_{\bar{s}c\bar{s}}(q^2)$ e a razão saturando em um valor em torno de 5 acima de 3 GeV^2 . Esta de fato é uma forte manifestação da quebra da simetria de sabor SU(4) na estrutura desses pseudo-escalares pesados-leves. Também observamos que a decomposição de sabor dos fatores de forma D^+ e D_s^+ estão de acordo com o cálculo de QCD na rede (LI; WU, 2017), onde o conjunto C1 foi usado, com resultados na região do tipo espaço até 1.2 GeV^2 .

A estrutura dos mésons D^+ e D_s^+ pode ainda ser estudada em muito mais detalhes dentro deste modelo de vértice simétrico, enfocando nas distribuições de parton generalizadas, distribuições de momento transversal generalizado e finalmente funções de fragmentação dos quarks pesados, que deixamos para futuras investigações, bem como a aplicação do referido modelo para estudar mésons B , que quebra fortemente a simetria SU(5) de sabor.

Na segunda parte do presente trabalho, o entendimento do modelo da Ref. (MELLO *et al.*, 2017) para o pión é aprimorado, nesse modelo a amplitude de Bethe-Salpeter incorpora a auto-energia do quark, onde a função de massa depende do momento, e esta por sua vez determina o vértice pseudoescalar quark-pión no limite quiral (massa de corrente do quark nula), considerando a validade teórica das identidades de Ward-Takahashi quirais. Nesse modelo a parte vetorial da auto-energia do quark foi desconsiderada por simplicidade. Para a função de massa do quark temos apenas três parâmetros, obtidos de ajustes dos resultados de QCD na rede no espaço Euclidiano para a região do momento tipo-espaço (PARAPPILLY *et al.*, 2006). Esses parâmetros são, um pólo na região tipo-tempo em 0.846 GeV , a massa do quark de corrente de 0.014 GeV e o terceiro parâmetro é aquele que produz o valor da massa do quark em momento zero, cujo valor é de 0.278 GeV . Com isto, o propagador do quark apresenta três pólos simples, sendo que um fica próximo ao valor da massa constituinte do quark, enquanto que os outros dois pólos são cerca de duas e três vezes a massa dos quarks constituintes.

A nossa contribuição foi construir a representação integral de Nakanishi da amplitude de Bethe-Salpeter do modelo que incorpora a física da quebra espontânea da simetria quiral (MELLO *et al.*, 2017), e utilizando essa representação obter quantidades e observáveis ainda não calculadas, como a probabilidade de valência e distribuições de momento. Tecnicamente, levamos em conta a decomposição espectral de Källen-Lehmann do propagador do quark, e em seguida construímos a representação integral de Nakanishi (NAKANISHI, 1963), derivando as funções peso correspondentes às amplitudes escalares associadas a decomposição da amplitude de Bethe-Salpeter em bases de operadores no espaço de Dirac. Além disso, como na primeira parte do trabalho, consideramos também propagadores do quarks com massas constantes e com o mesmo vértice pseudoescalar do modelo descrito, e obtivemos as funções peso de Nakanishi para efeito de comparação com o modelo completo. Ao todo temos para o pión quatro amplitudes escalares que descrevem a amplitude

de Bethe-Salpeter quando escrita em uma base de operadores no espaço spinorial de Dirac. No caso utilizamos uma base ortogonal e outra não-ortogonal, e as funções peso de Nakanishi associadas a essas decomposições são relacionadas por uma transformação linear. A representação integral de Nakanishi permitiu obter de forma direta as projeções na frente de luz dessas amplitudes, expandindo o estudo comparativo. Como verificação do formalismo desenvolvido reproduzimos a constante de decaimento do pión obtida no modelo original (MELLO *et al.*, 2017), após a normalização da amplitude de Bethe-Salpeter.

Obtivemos a componente de valência da função de onda do pión na frente de luz, nesse modelo para a amplitude de Bethe-Salpeter, decomposta em termos das helicidades dos quarks. Determinamos as componentes da função de onda de valência nas configurações de spin alinhadas (helicidades iguais) e antialinhadas (helicidades opostas), e com isso fomos capazes de obter a probabilidade de cada componente de spin, $\sim 60\%$ com spins antialinhados e $\sim 10\%$ spins alinhados, resultando na probabilidade total de valência próximo de 70% , o que curiosamente concorda com o resultado oriundo da solução da equação de Bethe-Salpeter para o pión na aproximação de escada (PAULA *et al.*, 2021), onde os quarks tem massa constante. Apresentamos finalmente as distribuições de momento longitudinal e transversal do pión.

Futuramente, temos a intenção de unificar o modelo com propagador dos quarks leves vestidos para o káon e os mésons D's, o que torna mais interessante a contraposição com o mecanismo de Higgs de geração de massa, nos observáveis que apresentamos na primeira parte desse trabalho, além de explorar outros observáveis que refletem a estrutura do pión e dos outros mésons pseudoescalares.

Referências Bibliográficas

- ABLIKIM, M. *et al.* Determination of the pseudoscalar decay constant $f_{D_s^+}$ via $D_s^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$. **Phys. Rev. Lett.**, v. 122, n. 7, p. 071802, 2019.
- AGUILAR, A. C. *et al.* Pion and Kaon Structure at the Electron-Ion Collider. **Eur. Phys. J. A**, v. 55, n. 10, p. 190, 2019.
- AMENDOLIA, S. R. *et al.* A Measurement of the Kaon Charge Radius. **Phys. Lett. B**, v. 178, p. 435–440, 1986.
- AOKI, S. *et al.* FLAG Review 2019: Flavour Lattice Averaging Group (FLAG). **Eur. Phys. J. C**, v. 80, n. 2, p. 113, 2020.
- ARRINGTON, J.; GAYOSO, C. A.; BARRY, P. C.; BERDNIKOV, V.; BINOSI, D.; CHANG, L.; DIEFENTHALER, M.; DING, M.; ENT, R.; FREDERICO, T.; AL. *et al.* Revealing the structure of light pseudoscalar mesons at the electron-ion collider. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, v. 48, n. 7, p. 075106, May 2021.
- AUBIN, C. *et al.* Charmed meson decay constants in three-flavor lattice QCD. **Phys. Rev. Lett.**, v. 95, p. 122002, 2005.
- BAKKER, B. L. G.; CHOI, H.-M.; JI, C.-R. Regularizing the fermion loop divergencies in the light front meson currents. **Phys. Rev. D**, v. 63, p. 074014, 2001.
- BAKKER, B. L. G. *et al.* Light-Front Quantum Chromodynamics: A framework for the analysis of hadron physics. **Nucl. Phys. B Proc. Suppl.**, v. 251-252, p. 165–174, 2014.
- BAKKER HO-MEOYNG CHOI, C.-R. J. B. B. Pion form-factor and quark mass evolution in a light front bethe-salpeter model. **Physical Review**, D 63, p. 074014, 2001.
- BAKULEV, A. P.; MIKHAILOV, S. V.; STEFANIS, N. G. QCD based pion distribution amplitudes confronting experimental data. **Phys. Lett. B**, v. 508, p. 279–289, 2001. [Erratum: Phys.Lett.B 590, 309–310 (2004)].
- BALDINI, R.; DUBNIČKA, S.; GAUZZI, P.; PACETTI, S.; PASQUALUCCI, E.; SRIVASTAVA, Y. Determination of nucleon and pion form factors via dispersion relations. **Nuclear Physics A**, v. 666, p. 38–43, 2000.

- BASHIR, A.; CHANG, L.; CLOËT, I. C.; EL-BENNICH, B.; LIU, Y.-X.; ROBERTS, C. D.; TANDY, P. C. Collective perspective on advances in Dyson-Schwinger Equation QCD. **Commun. Theor. Phys.**, v. 58, p. 79–134, 2012.
- BEANE, S. R.; DETMOLD, W.; ORGINOS, K.; SAVAGE, M. J. Nuclear Physics from Lattice QCD. **Prog. Part. Nucl. Phys.**, v. 66, p. 1–40, 2011.
- BRACCO, M. E.; CHIAPPARINI, M.; NAVARRA, F. S.; NIELSEN, M. Charm couplings and form factors in QCD sum rules. **Prog. Part. Nucl. Phys.**, v. 67, p. 1019–1052, 2012.
- BRAMBILLA, N.; EIDELMAN, S.; FOKA, P.; GARDNER, S.; KRONFELD, A. S.; ALFORD, M. G.; ALKOFER, R.; BUTENSCHOEN, M.; COHEN, T. D.; ERDMENGER, J.; AL. et. Qcd and strongly coupled gauge theories: challenges and perspectives. **Eur.Phys. J. C**, v. 74, n. 10, 2014.
- BRODSKY, S. J.; PAULI, H.-C.; PINSKY, S. S. Quantum chromodynamics and other field theories on the light cone. **Phys. Rept.**, v. 301, p. 299–486, 1998.
- CAN, K. U.; ERKOL, G.; OKA, M.; OZPINECI, A.; TAKAHASHI, T. T. Vector and axial-vector couplings of D and D* mesons in 2+1 flavor Lattice QCD. **Phys. Lett. B**, v. 719, p. 103–109, 2013.
- CARBONELL, J.; FREDERICO, T.; KARMANOV, V. A. Bound state equation for the Nakanishi weight function. **Phys. Lett. B**, v. 769, p. 418–423, 2017.
- CARBONELL, J.; KARMANOV, V. A. Solving Bethe-Salpeter equation for two fermions in Minkowski space. **Eur. Phys. J. A**, v. 46, p. 387–397, 2010.
- CARRASCO, N. *et al.* Leptonic decay constants f_K, f_D , and f_{D_s} with $N_f = 2 + 1 + 1$ twisted-mass lattice QCD. **Phys. Rev. D**, v. 91, n. 5, p. 054507, 2015.
- CHANG, L.; CLOËT, I.; COBOS-MARTINEZ, J.; ROBERTS, C.; SCHMIDT, S.; TANDY, P. Imaging dynamical chiral symmetry breaking: pion wave function on the light front. **Phys. Rev. Lett.**, v. 110, n. 13, p. 132001, 2013.
- CHANG, S.-J.; YAN, T.-M. Quantum field theories in the infinite momentum frame. II. Scattering matrices of scalar and Dirac fields. **Phys. Rev. D**, v. 7, p. 1147–1161, 1973.
- CHEN, H.-X.; CHEN, W.; LIU, X.; LIU, Y.-R.; ZHU, S.-L. A review of the open charm and open bottom systems. **Reports on Progress in Physics**, v. 80, n. 7, p. 076201, 2017.
- CHEN, M.; CHANG, L. A pattern for the flavor dependent quark-antiquark interaction. **Chin. Phys. C**, v. 43, n. 11, p. 114103, 2019.
- CHEN, W.-P.; CHEN, Y.-C.; CHIU, T.-W.; CHOU, H.-Y.; GUU, T.-S.; HSIEH, T.-H. Decay Constants of Pseudoscalar D-mesons in Lattice QCD with Domain-Wall Fermion. **Phys. Lett. B**, v. 736, p. 231–236, 2014.
- CHOI, H.-M. Decay constants and radiative decays of heavy mesons in light-front quark model. **Phys. Rev. D**, v. 75, p. 073016, 2007.

- CLOËT, I. C.; ROBERTS, C. D. Explanation and Prediction of Observables using Continuum Strong QCD. **Prog. Part. Nucl. Phys.**, v. 77, p. 1–69, 2014.
- CLOSE, F. E. **An Introduction to Quarks and Partons**. [S.l.: s.n.], 1979.
- COLLINS, J. **Foundations of perturbative QCD**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013.
- DALLY, E. B. *et al.* Direct Measurement of the Negative Kaon Form-Factor. **Phys. Rev. Lett.**, v. 45, p. 232–235, 1980.
- DAS, T.; CHOUDHURY, D. K.; PATHAK, K. K. RMS and charge radii in a potential model. **Indian J. Phys.**, v. 90, n. 11, p. 1307–1312, 2016.
- DHIMAN, N.; DAHIYA, H. Decay constants of pseudoscalar and vector B and D mesons in the light-cone quark model. **Eur. Phys. J. Plus**, v. 133, n. 4, p. 134, 2018.
- DIRAC, P. A. M. Forms of relativistic dynamics. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 21, p. 392–399, 1949.
- DUDAL, D.; AES, M. G.; PALHARES, L.; SORELLA, S. Confinement and dynamical chiral symmetry breaking in a non-perturbative renormalizable quark model. **Annals of Physics**, v. 365, p. 155–179, 2016.
- EL-BENNICH, B.; MELO, J. P. B. C. de; LOISEAU, B.; DEDONDER, J. P.; FREDERICO, T. Modeling electromagnetic form-factors of light and heavy pseudoscalar mesons. **Braz. J. Phys.**, v. 38, p. 465–471, 2008.
- FANELLI, C.; PACE, E.; ROMANELLI, G.; SALMÈ, G.; SALMISTRARO, M. Pion generalized parton distributions within a fully covariant constituent quark model. **Eur. Phys. J.**, C-76, n. 5, p. 253, 2016.
- FISCHER, C. S.; ALKOFER, R.; DAHM, T.; MARIS, P. Dynamical chiral symmetry breaking in unquenched. **Phys. Rev. D**, v. 70, p. 073007, 2004.
- FOLLANA, E.; DAVIES, C. T. H.; LEPAGE, G. P.; SHIGEMITSU, J. High Precision determination of the π , K , D and $D(s)$ decay constants from lattice QCD. **Phys. Rev. Lett.**, v. 100, p. 062002, 2008.
- FREDERICO, T.; SALMÈ, G. Projecting the Bethe-Salpeter Equation onto the Light-Front and back: A Short Review. **Few Body Syst.**, v. 49, p. 163–175, 2011.
- FREDERICO, T.; SALMÈ, G.; VIVIANI, M. Quantitative studies of the homogeneous Bethe-Salpeter equation in Minkowski space. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 89, p. 016010, 2014.
- GEORGI, H. **Weak Interactions and Modern Particle Theory**. [S.l.]: Addison-Wesley Longman, Incorporated, 1984.
- GERASIMOV, S. B. Meson Structure Constants in a Model of the Quark Diagrams. **Yad. Fiz.**, v. 29, p. 513–522, 1979. [Erratum: Sov.J.Nucl.Phys. 32, 156 (1980), Erratum: Yad.Fiz. 32, 304 (1980)].

- HE, J.; DONG, Y.-b. Zero modes in electromagnetic form-factors of the nucleon in a light-cone diquark model. **J. Phys.**, G32, p. 189–202, 2006.
- HORN, T. *et al.* Determination of the Charged Pion Form Factor at $Q^2 = 1.60$ and $2.45 - (GeV/c)^2$. **Phys. Rev. Lett.**, v. 97, p. 192001, 2006.
- HORN, T.; ROBERTS, C. D. The pion: an enigma within the Standard Model. **J. Phys. G**, v. 43, n. 7, p. 073001, 2016.
- HUBER, G. M. *et al.* Charged pion form-factor between $Q^2 = 0.60 - GeV^2$ and $2.45 - GeV^2$. II. Determination of, and results for, the pion form-factor. **Phys. Rev.**, C78, p. 045203, 2008.
- HUTAURUK, P. T. P.; CLOET, I. C.; THOMAS, A. W. Flavor dependence of the pion and kaon form factors and parton distribution functions. **Phys. Rev. C**, v. 94, n. 3, p. 035201, 2016.
- HWANG, C.-W. SU(3) symmetry breaking in decay constants and electromagnetic properties of pseudoscalar heavy mesons. **Phys. Rev. D**, v. 81, p. 054022, 2010.
- ITZYKSON, C.; ZUBER, J.-B. **Quantum field theory**. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.
- IVANOV, M. A.; KÖRNER, J. G.; PANDYA, J. N.; SANTORELLI, P.; SONI, N. R.; TRAN, C.-T. Exclusive semileptonic decays of D and D_s mesons in the covariant confining quark model. **Front. Phys. (Beijing)**, v. 14, n. 6, p. 64401, 2019.
- JI, X.-d.; MA, J.-P.; YUAN, F. Generalized counting rule for hard exclusive processes. **Phys. Rev. Lett.**, v. 90, p. 241601, 2003.
- JIA, S.; VARY, J. P. Basis light front quantization for the charged light mesons with color singlet Nambu–Jona-Lasinio interactions. **Phys. Rev. C**, v. 99, n. 3, p. 035206, 2019.
- KARMANOV, V. A.; CARBONELL, J. Solving Bethe-Salpeter equation in Minkowski space. **Eur. Phys. J. A**, v. 27, p. 1–9, 2006.
- KHALEK, R. A.; AL. *et.* Science Requirements and Detector Concepts for the Electron-Ion Collider: **EIC Yellow Report**. 2021.
- KUSAKA, K.; SIMPSON, K.; WILLIAMS, A. G. Solving the Bethe-Salpeter equation for bound states of scalar theories in Minkowski space. **Phys. Rev. D**, v. 56, p. 5071–5085, 1997.
- KUSAKA, K.; WILLIAMS, A. G. Solving the Bethe-Salpeter equation for scalar theories in Minkowski space. **Phys. Rev. D**, v. 51, p. 7026–7039, 1995.
- LEPAGE, G.; BRODSKY, S. J. Exclusive Processes in Quantum Chromodynamics: Evolution Equations for Hadronic Wave Functions and the Form-Factors of Mesons. **Phys. Lett. B**, v. 87, p. 359–365, 1979.
- LEPAGE, G.; BRODSKY, S. J. Exclusive Processes in Perturbative Quantum Chromodynamics. **Phys. Rev. D**, v. 22, p. 2157, 1980.

- LI, N.; WU, Y.-J. Lattice study of D and D_s meson form factors with twisted boundary conditions. **Eur. Phys. J. A**, v. 53, n. 3, p. 56, 2017.
- LI, S. W.; LOWDON, P.; OLIVEIRA, O.; SILVA, P. J. The generalised infrared structure of the gluon propagator. **Phys. Lett. B**, v. 803, p. 135329, 2020.
- LIN, Z.-w.; KO, C. M.; ZHANG, B. Hadronic scattering of charm mesons. **Phys. Rev. C**, v. 61, p. 024904, 2000.
- LURIÉ, D.; MACFARLANE, A. J.; TAKAHASHI, Y. Normalization of Bethe-Salpeter Wave Functions. **Phys. Rev.**, v. 140, p. B1091–B1099, 1965.
- MANDELSTAM, S. Dynamical variables in the Bethe-Salpeter formalism. **Proc. Roy. Soc. Lond. A**, v. 233, p. 248, 1955.
- MARIS, P.; TANDY, P. C. The π , K^+ , and K^0 electromagnetic form-factors. **Phys. Rev. C**, v. 62, p. 055204, 2000.
- MELLO, C. S. **A estrutura eletromagnética do pión com autoenergia dos quarks**. Tese (Doutorado) — ITA, 2017.
- MELLO, C. S.; MELO, J. P. B. C. de; FREDERICO, T. Minkowski space pion model inspired by lattice QCD running quark mass. **Phys. Lett. B**, v. 766, p. 86–93, 2017.
- MELO, J. P. B. C. de. **Covariância na Frente de Luz**. Tese (Doutorado) — IFUSP, 1998.
- MELO, J. P. B. C. de; FREDERICO, T.; PACE, E.; SALME, G. Pair term in the electromagnetic current within the front form dynamics: Spin-0 case. **Nucl. Phys. A**, v. 707, p. 399–424, 2002.
- MELO, J. P. C. B. de; NAUS, H. W. L.; FREDERICO, T. Pion electromagnetic current in the light cone formalism. **Phys. Rev. C**, v. 59, p. 2278–2281, 1999.
- MEZRAG, C.; MOUTARDE, H.; RODRIGUEZ-QUINTERO, J. From Bethe–Salpeter Wave functions to Generalised Parton Distributions. **Few Body Syst.**, v. 57, n. 9, p. 729–772, 2016.
- MEZRAG, C.; SALMÈ, G. Fermion and photon gap-equations in minkowski space within the nakanishi integral representation method. **Eur. Phys. J. C**, v. 81, n. 1, 2021.
- MOITA, R. M.; MELO, J. P. B. C. de; TSUSHIMA, K.; FREDERICO, T. **Exploring the flavor content of light and heavy-light pseudoscalars**. 2021.
- MUELLER, A. H. QCD and nuclear physics. **Nucl. Phys.**, A654, n. 1-2, p. C37–C54, 1999.
- NAKANISHI, N. Partial-Wave Bethe-Salpeter Equation. **Phys. Rev.**, APS, v. 130, n. 3, p. 1230–1235, 1963.
- NAKANISHI, N. **Graph Theory and Feynman Integrals**. New York: Gordon and Breach, 1971.

- NEUBERT, M. Heavy-quark symmetry. **Physics Reports**, v. 245, n. 5, p. 259–395, 1994.
- O’CONNELL, H. B.; PEARCE, B. C.; THOMAS, A. W.; WILLIAMS, A. G. $\rho - \omega$ mixing, vector meson dominance and the pion form-factor. **Prog. Part. Nucl. Phys.**, v. 39, p. 201–252, 1997.
- OLIVEIRA, O.; BICUDO, P. Running Gluon Mass from Landau Gauge Lattice QCD Propagator. **J. Phys. G**, v. 38, p. 045003, 2011.
- OLIVEIRA, O.; SILVA, P. J.; SKULLERUD, J.-I.; STERNBECK, A. Quark propagator with two flavors. **Phys. Rev. D**, p. 094506.
- PAGELS, H.; STOKAR, S. Pion decay constant, electromagnetic form factor, and quark electromagnetic self-energy in quantum chromodynamics. **Phys. Rev. D**, v. 20, p. 2947–2952, 1979.
- PARAPPILLY, M. B.; BOWMAN, P. O.; HELLER, U. M.; LEINWEBER, D. B.; WILLIAMS, A. G.; ZHANG, J. B. Scaling behavior of quark propagator in full QCD. **Phys. Rev. D**, v. 73, p. 054504, 2006.
- PAULA, W. de; FREDERICO, T.; SALMÈ, G.; VIVIANI, M. Advances in solving the two-fermion homogeneous Bethe-Salpeter equation in Minkowski space. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 94, p. 071901, 2016.
- PAULA, W. de; FREDERICO, T.; SALMÈ, G.; VIVIANI, M.; PIMENTEL, R. Fermionic bound states in Minkowski-space: Light-cone singularities and structure. **Eur. Phys. J. C**, v. 77, n. 11, p. 764, 2017.
- PAULA, W. de; YDREFORS, E.; NOGUEIRA, J. H. A.; FREDERICO, T.; SALME, G. Observing the minkowskian dynamics of the pion on the null-plane. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 103, p. 014002, Jan 2021.
- PEDLAR, T. K. *et al.* Precision measurements of the timelike electromagnetic form-factors of pion, kaon, and proton. **Phys. Rev. Lett.**, v. 95, p. 261803, 2005.
- PIMENTEL, R. E. **Two Body Fermion Bound State in Minkowski Space and the Wick-Cutkosky Model**. Dissertação (Mestrado) — ITA, 2016.
- RYDER, L. **Quantum Field Theory**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996.
- SAKURAI, J. J. Theory of strong interactions. **Annals Phys.**, v. 11, p. 1–48, 1960.
- SAKURAI, J. J. **Currents and Mesons**. [S.l.]: University of Chicago Press, 1969.
- SALCEDO, L. A. M.; MELO, J. P. B. C. de; HADJMICHEF, D.; FREDERICO, T. Weak decay constant of pseudoscalar meson in a QCD inspired model. **Brazilian Journal of Physics**, v. 34, p. 297–299, 2004.
- SALES, J. H. O.; FREDERICO, T.; CARLSON, B. V.; SAUER, P. U. Light front Bethe-Salpeter equation. **Phys. Rev. C**, v. 61, p. 044003, 2000.
- SAULI, V.; ADAM JR., J.; BICUDO, P. Dynamical chiral symmetry breaking with integral Minkowski representations. **Phys. Rev. D**, v. 75, p. 087701, 2007.

- SETH, K. K.; DOBBS, S.; METREVELI, Z.; TOMARADZE, A.; XIAO, T.; BONVICINI, G. Electromagnetic Structure of the Proton, Pion, and Kaon by High-Precision Form Factor Measurements at Large Timelike Momentum Transfers. **Phys. Rev. Lett.**, v. 110, n. 2, p. 022002, 2013.
- SHI, C.; CHANG, L.; ROBERTS, C. D.; SCHMIDT, S. M.; TANDY, P. C.; ZONG, H.-S. Flavour symmetry breaking in the kaon parton distribution amplitude. **Phys. Lett. B**, v. 738, p. 512–518, 2014.
- SILVA, E. O. da; MELO, J. P. B. C. de; EL-BENNICH, B.; FILHO, V. S. Pion and kaon elastic form factors in a refined light-front model. **Phys. Rev. C**, v. 86, p. 038202, 2012.
- SOLIS, E. L.; COSTA, C. S. R.; LUIZ, V. V.; KREIN, G. Quark propagator in minkowski space. **Few-Body Systems**, v. 60, n. 3, 2019.
- SUISSO, E. F.; MELO, J. P. B. C. de; FREDERICO, T. Relativistic dynamics of Qqq systems. **Phys. Rev. D**, v. 65, p. 094009, 2002.
- TADEVOSYAN, V. *et al.* Determination of the pion charge form-factor for $Q^2 = 0.60 \text{ GeV}^2 - 1.60 \text{ GeV}^2$. **Phys. Rev. C**, v. 75, p. 055205, 2007.
- TANG, S.; LI, Y.; MARIS, P.; VARY, J. P. Heavy-light mesons on the light front. **Eur. Phys. J. C**, v. 80, n. 6, p. 522, 2020.
- TARRACH, R. Meson charge radii and quarks. **Zeitschrift für Physik C Particles and Fields**, Springer, v. 2, n. 3, p. 221–223, 1979.
- TROTTA, R.; HORN, T.; VARGAS, A. Studies of L-T Separated Kaon Electroproduction. In: **APS Division of Nuclear Physics Meeting Abstracts**. [S.l.: s.n.], 2017. (APS Meeting Abstracts, v. 2017), p. CF.004.
- VOLMER, J. *et al.* Measurement of the Charged Pion Electromagnetic Form-Factor. **Phys. Rev. Lett.**, v. 86, p. 1713–1716, 2001.
- YABUSAKI, G. H.; AHMED, I.; PARACHA, M. A.; MELO, J. de; EL-BENNICH, B. Pseudoscalar mesons with symmetric bound state vertex functions on the light front. **Phys. Rev. D**, v. 92, n. 3, 2015.
- YAN, T.-M. Quantum Field Theories in the Infinite-Momentum Frame. IV. Scattering Matrix of Vector and Dirac Fields and Perturbation Theory. **Phys. Rev. D**, v. 7, p. 1780–1800, 1973.
- YDREFORS, E.; PAULA, W. de; NOGUEIRA, J. H. A.; FREDERICO, T.; SALMÈ, G. Pion electromagnetic form factor with Minkowskian dynamics. **Phys. Lett. B**, v. 820, p. 136494, 2021.
- ZYLA, P. A. *et al.* Review of Particle Physics. **PTEP**, v. 2020, n. 8, p. 083C01, 2020.

Apêndice A - Detalhamento da integração em k^- na fórmula de Mandelstam

A soma dos dois traços na Eq.(3.15), escrita na representação dos momentos da frente de luz adotando o referencial de Breit e com a condição de Drell-Yan ($q^+ = q^- = 0$ e $\vec{q}_\perp = (q_x, q_y = 0)$), é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Tr} = & e_q \left(-4k^-k^{+2} + 4k^+k_x^2 + 4k^+k_y^2 + 4k^-k^+p^+ - 4k_x^2p^+ - 4k_y^2p^+ + 4k^-k^+p'^+ - 4k_x^2p'^+ - \right. \\ & \left. 4k_y^2p'^+ - 4k^-p^+p'^+ - 2k_xp^+q_x + 2k_xp'^+q_x + k^+q_x^2 + 8k^+m_{\bar{q}}m_q - 4p^+m_{\bar{q}}m_q - 4p'^+m_{\bar{q}}m_q \right. \\ & \left. - 4k^+m_{\bar{q}}^2 \right) + [q \longleftrightarrow \bar{q}]. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Podemos reescrever a Eq. (3.15) de forma compacta como:

$$\begin{aligned} J_M^+(q^2) = & -2i \frac{\hat{m}^2}{f_M^2} N_c \int \frac{d^2k_\perp dk^+ dk^-}{2(2\pi)^4} \left(\frac{2}{3} \frac{\Delta_{q\bar{q}q}^+}{[1_{\bar{q}}][2_q][3_q]} + \frac{1}{3} \frac{\Delta_{\bar{q}q\bar{q}}^+}{[1_q][2_{\bar{q}}][3_{\bar{q}}]} \right) \\ & \times \left(\frac{C_M}{[4]} + \frac{C_M}{[5]} \right) \left(\frac{C_M}{[6]} + \frac{C_M}{[7]} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Separamos nos colchetes os denominadores dos propagadores, e observe que usamos a

métrica da frente de luz para todos os invariantes de Lorentz, assim temos:

$$\begin{aligned}
 [1_{\bar{q};q}] &= k^+ [k^- - ((h_1)_{\bar{q}(q)} - i\epsilon)(k^+)^{-1}] , \quad \text{com } (h_1)_{\bar{q}(q)} = k_{\perp}^2 + m_{\bar{q}(q)}^2 ; \\
 [2_{q(\bar{q})}] &= (p^+ - k^+) [p^- - k^- - ((h_2)_{q(\bar{q})} - i\epsilon)(p^+ - k^+)^{-1}] , \quad \text{com } (h_2)_{q(\bar{q})} = k_{\perp}^2 + m_{q(\bar{q})}^2 ; \\
 [3_{q(\bar{q})}] &= (p'^+ - k^+) [p'^- - k^- - ((h_3)_{q(\bar{q})} - i\epsilon)(p'^+ - k^+)^{-1}] , \quad \text{com } (h_3)_{q(\bar{q})} = (p' - k)_{\perp}^2 + m_{q(\bar{q})}^2 ; \\
 [4] &= k^+ [k^- - (h_4 - i\epsilon)(k^+)^{-1}] , \quad \text{com } h_4 = k_{\perp}^2 + \mu_M^2 ; \\
 [5] &= (p^+ - k^+) [p^- - k^- - (h_5 - i\epsilon)(p^+ - k^+)^{-1}] , \quad \text{com } h_5 = (p^- - k^-)_{\perp}^2 + \mu_M^2 ; \\
 [6] &= k^+ [k^- - (h_6 - i\epsilon)(k^+)^{-1}] , \quad \text{com } h_6 = k_{\perp}^2 + \mu_M^2 ; \\
 [7] &= (p'^+ - k^+) [p'^- - k^- - (h_7 - i\epsilon)(p'^+ - k^+)^{-1}] \quad \text{com } h_7 = (p'^- - k^-)_{\perp}^2 + \mu_M^2 .
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Como iremos realizar a integração em k^- via teorema de resíduos de Cauchy, identificamos na Eq. (A.2) 10 pólos ou os zeros dos denominadores escritos acima, com isso temos que:

$$\begin{aligned}
 k_{1q}^- &= \frac{h_{1q} - i\epsilon}{k^+}; & k_{1\bar{q}}^- &= \frac{h_{1\bar{q}} - i\epsilon}{k^+}; & k_{2q}^- &= p^- - \frac{h_{2q} - i\epsilon}{p^+ - k^+}; \\
 k_{2\bar{q}}^- &= p^- - \frac{h_{2\bar{q}} - i\epsilon}{p^+ - k^+}; & k_{3q}^- &= p'^- - \frac{f_{3q} - i\epsilon}{p'^+ - k^+}; & k_{3\bar{q}}^- &= p'^- - \frac{h_{3\bar{q}} - i\epsilon}{p'^+ - k^+}; \\
 k_4^- &= \frac{h_4 - i\epsilon}{k^+}; & k_5^- &= p^- - \frac{h_5 - i\epsilon}{p^+ - k^+}; & k_6^- &= \frac{h_6 - i\epsilon}{k^+}; & k_7^- &= p'^- - \frac{h_7 - i\epsilon}{p'^+ - k^+}
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Temos dois intervalos de valores do momento longitudinal k^+ para analisar a posição dos polos em k^- , uma vez que as demais regiões de k^+ correspondem a pólos no mesmo semi-plano de k^- complexo e portanto a integração via teorema dos resíduos conduzem o resultado a zero. Os dois intervalos relevantes para o cálculo de resíduos são dados por (i) : $0 < k^+ < p^+$ e (ii) : $p^+ < k^+ < p'^+$ como representado na Fig. A.1.

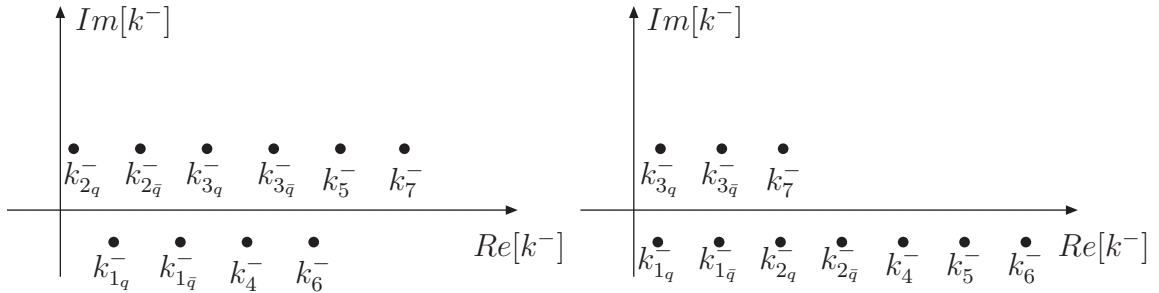


FIGURA A.1 – Posição dos pólos em k^- no plano complexo para os intervalos (i) : $0 < k^+ < p^+$ (painel esquerdo) e (ii) : $p^+ < k^+ < p'^+$ (painel direito).

No intervalo (ii), teríamos a contribuição do termo de par (MELO *et al.*, 2002; MELO *et al.*, 1999; MELO, 1998; HE; DONG, 2006; BAKKER HO-MEOYNG CHOI, 2001). Porém a integral em k^- ao longo de um contorno R fechado do plano complexo contendo o eixo real

e os pólos k_{3q}^- , $k_{3\bar{q}}^-$, k_7^- , dados na Eq. (A.4), resultará proporcional a q^+ . Considerando a condição de Drell-Yan, $q^+ = 0$, teremos que a contribuição da região (ii) será nula.

Na integração em k^- devemos considerar apenas o intervalo (i) para k^+ , com isso contribuem para o cálculo dos resíduos os pólos dos propagadores do quark espectador q , do antiquark espectador \bar{q} e do termo [4] originado pela função de vértice pion-quark (ver Eq.(A.3). Tomamos um contorno fechado R no no plano complexo de k^- que contém o eixo real, temos que a Fig.(A.1) mostra uma menor quantidade de pólos no semi-plano inferior, onde encontramos: $k_{1\bar{q}}^-$; k_{1q}^- ; k_4^- e k_6^- . Para a integração em k^- deve-se observar que $k_4^- = k_6^-$.

Desta forma, considerando a região (ii), e tomando o contorno fechado R , como um semi-círculo no semi-plano inferior com raio tendendo ao infinito, podemos desprezar a contribuição à integral em k^- no contorno do semi-círculo, desde que temos potências suficientes de k^- nos denominadores. Assim resulta, que a integral em k^- da corrente eletromagnética da Eq. (A.2) é obtida trivialmente da soma dos resíduos nos pólos simples $k_{1\bar{q}}^-$ ou k_{1q}^- e no pólo duplo $k_4^- = k_6^-$. As duas integrações remanescentes em k^+ e \vec{k}_\perp são realizadas numericamente usando quadraturas de Gauss-Legendre.

Apêndice B - Cálculo de $\gamma^+ \Psi(k, p) \gamma^+$

$$\gamma^+ \Phi(k, p) \gamma^+ = \gamma^+ \left[\gamma_5 \phi_1 + \frac{\not{p}}{M_\pi} \gamma_5 \phi_2 + \left(\frac{k \cdot p}{M_\pi^3} \not{p} - \frac{\not{k}}{M_\pi} \right) \gamma_5 \phi_3 + \frac{i}{M_\pi^2} \sigma^{\mu\nu} p_\mu k_\nu \gamma_5 \phi_4 \right] \gamma^+, \quad (\text{B.1})$$

calculando termo a termo, a partir da equação acima. Para o primeiro período, temos:

$$\gamma^+ \gamma_5 \phi_1(k, p) \gamma^+ = -(\gamma^+)^2 \gamma_5 \phi_1(k, p) = 0. \quad (\text{B.2})$$

Para o segundo mandato, teremos:

$$\begin{aligned} \gamma^+ \frac{\not{p}}{M_\pi} \gamma_5 \phi_2(k, p) \gamma^+ &= \gamma^+ \not{p} \gamma_5 \gamma^+ \frac{\phi_2(k, p)}{M_\pi} \\ &= (2p^+ - \not{p} \gamma^+) \gamma_5 \gamma^+ \frac{\phi_2(k, p)}{M_\pi} \\ &= (2p^+ - \not{p} \gamma^+) (-\gamma^+ \gamma_5) \frac{\phi_2(k, p)}{M_\pi} \\ &= (-2p^+ \gamma^+ \gamma_5 + \overbrace{\not{p} \gamma^+ \gamma^+ \gamma_5}^0) \frac{\phi_2(k, p)}{M_\pi} \\ &= \frac{2p^+}{M_\pi} \gamma_5 \gamma^+ \phi_2(k, p). \end{aligned}$$

No entanto, como estamos trabalhando no C.M, $p^+ = M_\pi$, assim escrevemos

$$\gamma^+ \frac{\not{p}}{M_\pi} \gamma_5 \phi_2(k, p) \gamma^+ = 2\gamma_5 \gamma^+ \phi_2(k, p). \quad (\text{B.3})$$

Trabalhando com o terceiro termo:

$$\begin{aligned}
 & \gamma^+ \left(\frac{k \cdot p}{M_\pi^3} \not{p} - \frac{\not{k}}{M_\pi} \right) \gamma_5 \phi_3(k, p) \gamma^+ = \\
 &= \gamma^+ \left(\frac{k \cdot p}{M_\pi^3} \right) \not{p} \gamma_5 \gamma^+ \phi_3(k, p) - \gamma^+ \frac{\not{k}}{M_\pi} \gamma_5 \gamma^+ \phi_3(k, p) \\
 &= \gamma^+ \not{p} \gamma_5 \gamma^+ \left(\frac{k \cdot p}{M_\pi^3} \right) \phi_3(k, p) - \gamma^+ \not{k} \gamma_5 \gamma^+ \frac{\phi_3(k, p)}{M_\pi} \\
 &= (2p^+ - \not{p} \gamma^+) \gamma_5 \gamma^+ \left(\frac{k \cdot p}{M_\pi} \right) \phi_3(k, p) - (2k^+ - \not{k} \gamma^+) \gamma_5 \gamma^+ \frac{\phi_3(k, p)}{M_\pi} \\
 &= (2p^+ \gamma_5 \gamma^+ + \overbrace{\not{p} \gamma^+ \gamma^+ \gamma^5}^0) \left(\frac{k \cdot p}{M_\pi} \right) \phi_3(k, p) - (2k^+ \gamma_5 \gamma^+ + \overbrace{\not{k} \gamma^+ \gamma^+ \gamma^5}^0) \frac{\phi_3(k, p)}{M_\pi} \\
 &= 2\gamma_5 \gamma^+ \left[\left(\frac{k \cdot p}{M_\pi^3} \right) \overbrace{p^+}^{(M_\pi)} - \frac{k^+}{M_\pi} \right] \phi_3(k, p) \\
 &= 2\gamma_5 \gamma^+ \left[\left(\frac{k \cdot p}{M_\pi^2} \right) - \frac{k^+}{M_\pi} \right] \phi_3(k, p) \\
 &= 2\gamma_5 \gamma^+ \left[\left(\frac{k^+ M_\pi + k^- M_\pi}{2M_\pi^2} \right) - \frac{k^+}{M_\pi} \right] \phi_3(k, p) = 2\gamma_5 \gamma^+ \left(\frac{k^-}{2M_\pi} + \frac{z}{4} \right) \phi_3(k, p),
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

usando a métrica da frente de luz, o produto interno dos quadri-vetores é convertido. Lembrando que, em nosso sistema de referência, temos: $p^+ = p^- = M_\pi$; $\vec{p}_\perp = 0$. Finalmente, para o quarto termo, da Eq. (B.1), teremos:

$$\begin{aligned}
 \gamma^+ \frac{i}{M_\pi^2} \sigma^{\mu\nu} p_\mu k_\nu \gamma_5 \phi_4(k, p) \gamma^+ &= -\frac{\gamma_5}{M_\pi^2} \gamma^+ i \sigma^{\mu\nu} p_\mu k_\nu \gamma^+ \phi_4(k, p) \\
 &= -\frac{\gamma_5}{M_\pi^2} (-2M_\pi \gamma^+ \vec{k}_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp) \phi_4(k, p) \\
 &= \frac{2}{M_\pi} \gamma_5 \gamma^+ \vec{k}_\perp \cdot \vec{\gamma}_\perp \phi_4(k, p).
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

coletar esses resultados e substituí-los na Eq. (7.4)

Apêndice C - Integração em k^- da função de onda de Valência.

Devemos integrar em k^- contido na Eq.(7.18) Vamos começar com a integral mais interna, e pode-se escrever para $\phi_4(k, p)$:

$$\phi_4(k, p) = \int_{-1}^1 dz' \int_0^{\gamma_f} d\gamma' \frac{g_4(\gamma', z')}{[k^2 + z'k \cdot p - \gamma' + i\epsilon]^3}, \quad (\text{C.1})$$

usando a métrica da frente de luz para os produtos escalares de Lorentz, k^2 and $p \cdot k$, e adotando $p^+ = p^- = M_\pi$; $|\vec{k}_\perp|^2 = \gamma$ e $p_\perp = 0$, teremos:

$$\phi_4(k, p) = \int_{-1}^1 dz' \int_0^{\gamma_f} d\gamma' \frac{g_4(\gamma', z')}{[k^- (k^+ + \frac{z'M_\pi}{2}) - (-\frac{z'M_\pi}{2}k^+ + \gamma + \gamma') + i\epsilon]^3}, \quad (\text{C.2})$$

logo, realizando a projeção na frente de luz, obtemos

$$\begin{aligned} \psi_4(\gamma, z) &= \int \frac{dk^-}{2\pi} \phi_4(k, p) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^-}{2\pi} \int_{-1}^1 dz' \int_0^{\gamma_f} d\gamma' \frac{g_4(\gamma', z')}{[k^- (k^+ + \frac{z'M_\pi}{2}) - (-\frac{z'M_\pi}{2}k^+ + \gamma + \gamma') + i\epsilon]^3} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

inicialmente faremos a integração em k^- ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^-}{[k^- (k^+ + \frac{z'M_\pi}{2}) - (-\frac{z'M_\pi}{2}k^+ + \gamma + \gamma') + i\epsilon]^3}, \quad (\text{C.4})$$

esta integral é a mesma mostrada abaixo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{[\beta x - y \mp i\epsilon]^3} = \pm \pi i \frac{\delta(\beta)}{(-y \mp i\epsilon)^2} \quad (\text{C.5})$$

comparando e computando, teremos:

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{-i\pi \delta(k^+ + \frac{z'M_\pi}{2})}{(\frac{z'M_\pi}{2}k^+ - \gamma - \gamma' + i\epsilon)^2}. \quad (\text{C.6})$$

Agora, a integral em z' , contida em $\psi(\gamma, z)$ será:

$$= \frac{-i}{2} \int_{-1}^1 dz' g_4(\gamma', z') \frac{\delta(k^+ + \frac{z'M_\pi}{2})}{(\frac{z'M_\pi}{2}k^+ - \gamma - \gamma' + i\epsilon)^2}, \quad (\text{C.7})$$

mas para a função delta, temos

$$\delta\left(k^+ + \frac{z'M_\pi}{2}\right) = \delta\left[\frac{M_\pi}{2}\left(\frac{2k^+}{M_\pi} + z'\right)\right] = \frac{2}{M_\pi} \delta\left(\frac{2k^+}{M_\pi} + z'\right); \quad (\text{C.8})$$

portanto

$$= \frac{-i}{M_\pi} \int_{-1}^1 dz' g_4(\gamma', z') \frac{\delta(z' - z)}{(\frac{z'M_\pi}{2}k^+ - \gamma - \gamma' + i\epsilon)^2} \quad (\text{C.9})$$

onde introduzimos a seguinte mudança de variável: $z \equiv -2k^+/M_\pi$. Executando a função delta de Dirac: $z' \rightarrow z$:

$$= \frac{-i}{M_\pi} \frac{g_4(\gamma', z)}{\left(-\frac{z^2 M_\pi^2}{4} - \gamma - \gamma' + i\epsilon\right)^2} \quad (\text{C.10})$$

como já realizamos as integrações em k^- e z' , iremos substituir este último resultado na Eq. (C.3), fatorando o quadrado do sinal negativo presente no denominador

$$\psi_4(\gamma, z) = -\frac{i}{M_\pi} \int_0^{\gamma_f} d\gamma' \frac{g_4(\gamma', z)}{\left(\gamma + \gamma' + \frac{z^2 M_\pi^2}{4} - i\epsilon\right)^2}, \quad (\text{C.11})$$

faremos a integração em k^- dos outros dois termos contidos no integrando da Eq. (7.18), isso trará o outro componente da função de onda de valência, com spins antiparalelos.

$$\begin{aligned} & \int \frac{dk^-}{2\pi} \left(\phi_2(k, p) + \left(\frac{k^- - k^+}{2M_\pi} \right) \phi_3(k, p) \right) \\ = & \int \frac{dk^-}{2\pi} \phi_2(k, p) + \frac{1}{2M} \int \frac{dk^-}{2\pi} \phi_3(k, p) k^- - \frac{k^+}{2M_\pi} \int \frac{dk^-}{2\pi} \phi_3(k, p) \\ = & \psi_2(\gamma, z) - \frac{k^+}{2M_\pi} \psi_3(\gamma, z) + \frac{1}{2M_\pi} \int \frac{dk^-}{2\pi} k^- \phi_3(k, p) \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

o termo complicado é $k^- \phi_3(k, p)$, identificaremos o mesmo usando a notação \mathcal{I} , ele possui uma singularidade e introduzindo a RIN para $\phi_3(k, p)$ já com a métrica da frente de luz, que pode ser manipulada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{k^-} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^-}{2\pi} \phi_3(k, p) k^- \\ &= \int_{-1}^1 dz' \int_0^{\gamma_f} d\gamma' g_3(\gamma', z') \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^-}{2\pi} \frac{k^-}{\left[k^- (-z + z') \frac{M_\pi}{2} - \left(\gamma + z' z \frac{M_\pi^2}{4} + \gamma' \right) + i\epsilon \right]^3}}^{\mathfrak{S}_{k^-}} \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

observar o seguinte truque

$$k^- (z' - z) \frac{M_\pi}{2} \equiv k^- (z' - z) \frac{M_\pi}{2} + z' z \frac{M_\pi^2}{4} + \gamma' + \gamma - i\epsilon + \left(-z' z \frac{M_\pi^2}{4} - \gamma' - \gamma + i\epsilon \right) \quad (\text{C.14})$$

multiplicando e dividindo a integral em k^- , que denotamos \mathfrak{S}_{k^-} , por $(z' - z) \frac{M_\pi}{2}$:

$$\mathfrak{S}_{k^-} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^-}{2\pi} \frac{k^-(z' - z) \frac{M_\pi}{2}}{(z' - z) \frac{M_\pi}{2} \left[k^-(-z + z') \frac{M_\pi}{2} - \left(\gamma + z'z \frac{M_\pi^2}{4} + \gamma \right) + i\epsilon \right]^3} \quad (\text{C.15})$$

usando a Eq.(C.14), na anterior

$$\mathfrak{S}_{k^-} = \frac{2}{(z' - z)M_\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^-}{2\pi} \frac{k^-(z' - z) \frac{M_\pi}{2} + z'z \frac{M_\pi^2}{4} + \gamma' + \gamma - i\epsilon + \left(-z'z \frac{M_\pi^2}{4} - \gamma' - \gamma + i\epsilon \right)}{\left[k^-(-z + z') \frac{M_\pi}{2} - \left(\gamma + z'z \frac{M_\pi^2}{4} + \gamma \right) + i\epsilon \right]^3} \quad (\text{C.16})$$

montagem duas integrais das frações parciais abaixo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{k^-} = & \frac{2}{(z' - z)M_\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^-}{2\pi} \frac{1}{\left[k^-(-z + z') \frac{M_\pi}{2} - \left(\gamma + z'z \frac{M_\pi^2}{4} + \gamma \right) + i\epsilon \right]^2} + \\ & \frac{2}{(z' - z)M_\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^-}{2\pi} \frac{z'z \frac{M_\pi^2}{4} + \gamma' + \gamma}{\left[k^-(-z + z') \frac{M_\pi}{2} - \left(\gamma + z'z \frac{M_\pi^2}{4} + \gamma \right) + i\epsilon \right]^3} \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

usando as seguintes relações para o cálculo da primeira e da segunda integral, respectivamente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{[\beta x - y \mp i\epsilon]^2} = \pm 2\pi i \frac{\delta(\beta)}{(-y \mp i\epsilon)} ; \quad (\text{C.18})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{[\beta x - y \mp i\epsilon]^3} = \pm \pi i \frac{\delta(\beta)}{(-y \mp i\epsilon)^2}, \quad (\text{C.19})$$

aplicando essas duas relações, teremos:

$$\mathfrak{S}_{k^-} = \frac{2}{(z' - z)M_\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \frac{(-2\pi)i\delta\left((z' - z)\frac{M_\pi}{2}\right)}{\left(-z'z\frac{M_\pi^2}{4} - \gamma - \gamma' + i\epsilon\right)} + \frac{1}{2\pi} \frac{(-\pi)i\delta\left((z' - z)\frac{M_\pi}{2}\right) \left(z'z\frac{M_\pi^2}{4} + \gamma + \gamma'\right)}{\left(-z'z\frac{M_\pi^2}{4} - \gamma - \gamma' + i\epsilon\right)^2} \right], \quad (\text{C.20})$$

simplificando e usando a propriedade das funções delta de Dirac: $y \delta'(y) = -\delta(y)$, para o nosso caso, temos $y \equiv (z' - z)$:

$$\mathfrak{S}_{k^-} = \delta'(z' - z) \frac{2i}{M_\pi^2} \frac{1}{\left(-z'z\frac{M_\pi^2}{4} - \gamma - \gamma' + i\epsilon\right)}. \quad (\text{C.21})$$

Retornando a integração em z' e γ' , teremos

$$\mathcal{I} = \int_{-1}^1 dz' \int_0^{\gamma_f} d\gamma' g_3(\gamma', z') \delta'(z' - z) \frac{2i}{M_\pi^2} \frac{1}{\left(-z'z\frac{M_\pi^2}{4} - \gamma - \gamma' + i\epsilon\right)}, \quad (\text{C.22})$$

devemos realizar a integral na variável z' , que denotaremos por $\mathfrak{S}_{z'}$, usando o método de integração por partes, organizando a última expressão, temos:

$$\mathcal{I}_{z'} = \int_{-1}^1 dz' \frac{g_3(\gamma', z')}{\left(-z'z\frac{M_\pi^2}{4} - \gamma - \gamma' + i\epsilon\right)} \delta'(z' - z) \quad (\text{C.23})$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{g_3(\gamma', z')}{\left(-z'z\frac{M_\pi^2}{4} - \gamma - \gamma' + i\epsilon\right)}; \\ \frac{du}{dz'} &= g_3(\gamma', z') \frac{d}{dz'} \left[\left(-z'z\frac{M_\pi^2}{4} - \gamma - \gamma' + i\epsilon\right)^{-1} \right] + \frac{\partial}{\partial z'} [g_3(\gamma', z')] \frac{1}{\left(-z'z\frac{M_\pi^2}{4} - \gamma - \gamma' + i\epsilon\right)}; \\ du &= \left[\frac{-g_3(\gamma', z') \left(-\frac{zM_\pi^2}{4}\right)}{\left(-z'z\frac{M_\pi^2}{4} - \gamma - \gamma' + i\epsilon\right)^2} + \frac{\frac{\partial}{\partial z'} [g_3(\gamma', z')]}{\left(-z'z\frac{M_\pi^2}{4} - \gamma - \gamma' + i\epsilon\right)} \right] dz'; \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

$$\begin{aligned}
 dv &= \delta'(z' - z) dz' \\
 \int dv &= \int \delta'(z' - z) dz' \\
 v &= \delta(z' - z),
 \end{aligned} \tag{C.25}$$

com esses resultados podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_{z'} &= \left[\frac{g_3(\gamma', z') \delta(z' - z)}{\left(-z'z \frac{M_\pi^2}{4} - \gamma - \gamma' + i\epsilon\right)} \right]_{-1}^1 - \\
 &\left[\int_{-1}^1 \delta(z' - z) \left(\frac{g_3(\gamma', z') \left(-z \frac{M_\pi^2}{4}\right)}{\left(-z'z \frac{M_\pi^2}{4} - \gamma - \gamma' + i\epsilon\right)^2} + \frac{\frac{\partial}{\partial z'} [g_3(\gamma', z')]}{\left(-z'z \frac{M_\pi^2}{4} - \gamma - \gamma' + i\epsilon\right)} \right) dz' \right],
 \end{aligned} \tag{C.26}$$

o termo de superfície desaparece, uma vez que $g_3(\gamma', \pm 1) = 0$, após calcular a integral em relação à variável z' , evoluindo o delta de Dirac. A partir da expressão acima, obtém-se o resultado final:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I} &= \frac{2i}{M_\pi^2} \int_0^{\gamma_f'} d\gamma' \left[\frac{z M_\pi^2}{4} \frac{g_3(\gamma', z)}{\left(-\gamma - \gamma' - \frac{z^2 M_\pi^2}{4} + i\epsilon\right)^2} - \frac{\frac{\partial}{\partial z} [g_3(\gamma, z)]}{\left(-\gamma - \gamma' - \frac{z^2 M_\pi^2}{4} + i\epsilon\right)} \right] \\
 &= \frac{z}{2} (M_\pi \psi_3(\gamma, z)) + \frac{2i}{M_\pi^2} \int_0^{\gamma_f'} d\gamma' \frac{\frac{\partial}{\partial z} [g_3(\gamma', z)]}{\left(\gamma + \gamma' + \frac{z^2 M_\pi^2}{4} - i\epsilon\right)}
 \end{aligned} \tag{C.27}$$

retornando à Eq. (C.12), e usando a definição de $k^+ = -zM_\pi/2$:

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{dk^-}{2\pi} \left(\phi_2(k, p) + \left(\frac{k^- - k^+}{2M_\pi} \right) \phi_3(k, p) \right) \\
 &= \psi_2(\gamma, z) - \frac{1}{2M_\pi} \left(\frac{-zM_\pi}{2} \right) \psi_3(\gamma, z) + \frac{1}{2M_\pi} \left[\frac{z}{2} (M_\pi \psi_3(\gamma, z)) + \frac{2i}{M_\pi^2} \int_0^{\gamma_f'} d\gamma' \frac{\frac{\partial}{\partial z} [g_3(\gamma', z)]}{\left(\gamma + \gamma' + \frac{z^2 M_\pi^2}{4} - i\epsilon\right)} \right] \\
 &= \psi_2(\gamma, z) + \frac{z}{2} \psi_3(\gamma, z) + \frac{i}{M_\pi^3} \int_0^{\gamma_f'} d\gamma' \frac{\frac{\partial}{\partial z} [g_3(\gamma', z)]}{\left(\gamma + \gamma' + \frac{z^2 M_\pi^2}{4} - i\epsilon\right)}
 \end{aligned} \tag{C.28}$$

Apêndice D - f_π via componente da função de onda com spin antialinhada

Podemos obter a expressão da constante de decaimento da componente mais a corrente axial, a outra maneira de calcular a constante de decaimento é da componente da função de onda com spin anti-simétrico, e usar o componente positivo da corrente, na Eq. (7.36) Como:

$$i p^+ f_\pi = \frac{N_c}{2} \int \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} \frac{dk^+}{2\pi} \frac{dk^-}{2\pi} \text{Tr}[\gamma^+ \gamma^5 \phi(p, k)], \quad (\text{D.1})$$

trabalhando com a integral em k^- e analisando o traço:

$$\int \frac{dk^-}{2\pi} \text{Tr}[\gamma^+ \gamma^5 (S_1(k, p)\phi_1(k, p) + S_2(k, p)\phi_2(k, p) + S_3(k, p)\phi_3(k, p) + S_4(k, p)\phi_4(k, p))]. \quad (\text{D.2})$$

$$\begin{aligned}
 i) & Tr[\gamma^+ \gamma^5 \gamma^5] \phi_1(k, p) = Tr[\gamma^+] \phi_1(k, p) = 0; \\
 ii) & Tr\left[\gamma^+ \gamma^5 \frac{\not{p}}{M_\pi} \gamma^5\right] \phi_2(k, p) = -Tr[\gamma^+ \gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu] \frac{p_\mu}{M_\pi} \phi_2(k, p) = -4g^{+\mu} \frac{p_\mu}{M_\pi} \phi_2(k, p) \\
 & = -4 \frac{p^+}{M_\pi} \phi_2(k, p) = -4 \phi_2(k, p); \\
 iii) & Tr\left[\gamma^+ \gamma^5 \left(\frac{k \cdot p}{M_\pi^3} \not{p} \gamma^5 - \frac{1}{M_\pi} \not{k} \gamma^5\right)\right] \phi_3(k, p) \\
 & = Tr[\gamma^+ \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^5] \frac{p_\mu (k \cdot p)}{M_\pi^3} \phi_3(k, p) - Tr[\gamma^+ \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^5] \frac{k_\mu}{M_\pi} \phi_3(k, p) \\
 & = -Tr[\gamma^+ \gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu] \frac{p_\mu (k \cdot p)}{M_\pi^3} \phi_3(k, p) + Tr[\gamma^+ \gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu] \frac{k_\mu}{M_\pi} \phi_3(k, p) \\
 & = -4g^{+\mu} \frac{p_\mu (k \cdot p)}{M_\pi^3} \phi_3(k, p) + 4g^{+\mu} \frac{k_\mu}{M_\pi} \phi_3(k, p) \\
 & = -4 \frac{p^+ (k \cdot p)}{M_\pi^3} \phi_3(k, p) + 4 \frac{k^+}{M_\pi} \phi_3(k, p) \\
 & = -4 \frac{(k \cdot p)}{M_\pi^2} \phi_3(k, p) + 4 \frac{k^+}{M_\pi} \phi_3(k, p) \\
 & = -4 \left[\left(\frac{k^+ M_\pi + k^- M_\pi}{2} \right) \frac{1}{M_\pi^2} - \frac{k^+}{M_\pi} \right] \phi_3(k, p) \\
 & = -4 \left[\frac{k^- - k^+}{M_\pi} \right] \phi_3(k, p); \\
 iv) & Tr\left[\gamma^+ \gamma^5 \frac{i^2}{2M_\pi} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \gamma^5\right] p_\mu k_\nu \phi_4(k, p) \\
 & = -Tr\left[\gamma^+ \gamma^5 (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \gamma^5\right] \frac{p_\mu k_\nu}{2M_\pi} \phi_4(k, p) \\
 & = -\underbrace{Tr\left[\gamma^+ (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)\right]}_0 \frac{p_\mu k_\nu}{2M_\pi} \phi_4(k, p) = 0;
 \end{aligned} \tag{D.3}$$

introduzindo esses resultados na integração em k^- , teremos

$$-4 \int \frac{dk^-}{2\pi} \left(\phi_2(k, p) + \left(\frac{k^- - k^+}{M_\pi} \right) \phi_3(k, p) \right), \tag{D.4}$$

essa integral já foi resolvida, quando estávamos procurando por um dos componentes da função de onda, e vimos que seu resultado era justamente o componente com spin antiparalelo, $\psi_{\uparrow\downarrow}(\gamma, z)$. Com isso, podemos voltar para Eq.(D.1)

$$\begin{aligned}
 i \underbrace{p^+}_{M_\pi} f_\pi &= \frac{N_c}{2} \int \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} \frac{dk^+}{2\pi} (-4 \psi_{\uparrow\downarrow}(\gamma, z)) \\
 f_\pi &= -i \frac{2N_c}{M_\pi} \int \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} \frac{dk^+}{2\pi} \psi_{\uparrow\downarrow}(\gamma, z),
 \end{aligned} \tag{D.5}$$

agora devemos introduzir o componente da função de onda e fazer as seguintes substituições: $\gamma = |\vec{k}_\perp|^2$; e $k^+ = \frac{p^+}{2} z \rightarrow dk^+ = \frac{M_\pi}{2} dz$ e ainda temos $d^2 k_\perp = |\vec{k}_\perp|^2 dk_\perp d\theta$, logo:

$$\begin{aligned}
 f_\pi &= -i \frac{N_c}{2(2\pi)^2 M_\pi} \int_{-1}^1 dz \frac{M_\pi}{2} \int_0^\infty d\gamma \\
 &\times \int_0^{\gamma_f} d\gamma' \left(\frac{-i}{M_\pi} \right) \left[\frac{g_2(\gamma', z) + \frac{z}{2} g_3(\gamma', z)}{(\gamma + \gamma' + \frac{z^2 M_\pi^2}{4} - i\epsilon)^2} - \frac{1}{M_\pi^2} \frac{\partial_z [g_3(\gamma', z)]}{(\gamma + \gamma' + \frac{z^2 M_\pi^2}{4} - i\epsilon)^2} \right],
 \end{aligned} \tag{D.6}$$

trabalhando a integral na variável γ , teremos,

$$\begin{aligned}
 f_\pi &= -\frac{N_c}{8\pi^2 M_\pi} \int_0^\infty d\gamma \int_{-1}^1 dz \left[\int_0^{\gamma_f} d\gamma' \frac{g_2(\gamma', z) + \frac{z}{2} g_3(\gamma', z)}{(\gamma + \gamma' + \frac{z^2 M_\pi^2}{4} - i\epsilon)^2} \right. \\
 &\left. - \frac{1}{M_\pi^2} \int_0^{\gamma_f} d\gamma' \frac{g_3(\gamma', z)}{(\gamma + \gamma' + \frac{z^2 M_\pi^2}{4} - i\epsilon)} \right]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_0^{\gamma_f} d\gamma' \frac{z g_3(\gamma', z)}{(\gamma + \gamma' + \frac{z^2 M_\pi^2}{4} - i\epsilon)^2},
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

usando o fato que $g_3(\gamma', \pm 1) = 0$, o segundo termo será nulo, simplificando a expressão restante, os termos com $g_3(\gamma', z)$ exatamente cancelar, teremos:

$$f_\pi = -\frac{N_c}{8\pi^2 M_\pi} \int_0^\infty d\gamma \int_{-1}^1 dz \int_0^{\gamma_f} d\gamma' \frac{g_2(\gamma', z)}{(\gamma + \gamma' + \frac{z^2 M_\pi^2}{4} - i\epsilon)^2}, \tag{D.8}$$

finalmente, a constante de decaimento concorda, a menos que um sinal de menos, com a Eq. (7.41) após a integração final na variável γ acima

Apêndice E - Cálculo do Traço da Condição de Normalização

A fim de calcular observáveis hadrônicos, a saber no nosso caso, a probabilidade de valência e o momento distribuições, a amplitude BS tem que ser adequada normalizado, ele lê

$$Tr \left[\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial p'^\mu} \{ S^{-1}(k - p'/2) \bar{\Psi}(k, p) S^{-1}(k + p'/2) \Psi(k, p) \} \Big|_{p=p'} \right] = -i 2p^\mu. \quad (\text{E.1})$$

Onde, pela Eq. (6.1), o inverso deste propagador, teremos:

$$S^{-1}(k) = -i(\not{k} - M(k^2)) \equiv \not{k} - m_0 - \frac{m^3}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon}. \quad (\text{E.2})$$

Se derivarmos o produto dos propagadores entre colchetes, nós teremos:

$$\begin{aligned} & Tr \left[\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \{ S^{-1}(k - p/2) \bar{\Psi}(k, p) (-i \gamma^\mu / 2) \Psi(k, p) \} \right] + \\ & Tr \left[\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \{ S^{-1}(k + p/2) \Psi(k, p) (i \gamma^\mu / 2) \bar{\Psi}(k, p) \} \right] = -i 2p^\mu, \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

multiplicando ambos os membros da equação anterior por p_μ :

$$\begin{aligned} & Tr \left[\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \{ S^{-1}(k - p/2) \bar{\Psi}(k, p) (-i \not{p} / 2) \Psi(k, p) \} \right] + \\ & Tr \left[\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \{ S^{-1}(k + p/2) \Psi(k, p) (i \not{p} / 2) \bar{\Psi}(k, p) \} \right] = -i 2M_\pi^2, \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

podemos escrever a amplitude BS e seu conjugado como:

$$\Psi(k, p) = S_1 \phi_1 + S_2 \phi_2 + S_3 \phi_3 + S_4 \phi_4; \quad (\text{E.5})$$

$$\bar{\Psi}(k, p) = -S_1 \phi_1 + S_2 \phi_2 + S_3 \phi_3 + S_4 \phi_4, \quad (\text{E.6})$$

e os elementos da base S_i já foram definidos na Eq. (6.44). Escrevemos cada componente BS em uma representação Nakanish, como fazemos na seção anterior

$$\phi_i(k, p) = \int_{-1}^1 dz' \int_0^{\gamma'_f} d\gamma \frac{g_i(\gamma', z')}{[k^2 + z' k \cdot p - \gamma' + i\epsilon]^3}. \quad (\text{E.7})$$

Notamos que na normalização ele tem dois traços, o primeiro, $T_{(1)}$, pode ser calculado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T_{(1)} &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[-i(\not{k} - \not{p}/2 - M(k_{\bar{q}}^2)) (-1)(S_1\phi_1 - S_2\phi_2 - S_3\phi_3 - S_4\phi_4)(-i\not{p}/2) \times \right. \\ &\quad \left. (S_1\phi_1 + S_2\phi_2 + S_3\phi_3 + S_4\phi_4) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[(\not{k} - \not{p}/2 - M(k_{\bar{q}}^2))(S_1\phi_1 - S_2\phi_2 - S_3\phi_3 - S_4\phi_4) \not{p} \times \right. \\ &\quad \left. (\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3 + S'_4\phi_4)\gamma^5 \right] \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[(-\not{k} + \not{p}/2 - M(k_{\bar{q}}^2))\gamma_5(S_1\phi_1 - S_2\phi_2 - S_3\phi_3 - S_4\phi_4) \not{p} \times \right. \\ &\quad \left. (\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3 + S'_4\phi_4) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[(-1)(\not{k} - \not{p}/2 + M(k_{\bar{q}}^2))(\gamma_5)^2(\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3 - S'_4\phi_4) \not{p} \times \right. \\ &\quad \left. (\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3 + S'_4\phi_4) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[(\not{k} - \not{p}/2 + M(k_{\bar{q}}^2))(\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3 - S'_4\phi_4)\not{p}(\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3 + S'_4\phi_4) \right], \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

onde redefinimos os elementos da base, após manipulação com γ_5 que era comum a todos, conseqüentemente:

$$S'_2(k, p) = \frac{\not{p}}{M_\pi}, \quad S'_3(k, p) = \frac{k \cdot p}{M_\pi^3} \not{p} - \frac{1}{M_\pi} \not{k} \quad \text{and} \quad S'_4(k, p) = \frac{i}{M_\pi^2} \sigma^{\mu\nu} p_\mu k_\nu; \quad (\text{E.9})$$

para o traço $T_{(2)}$, de maneira semelhante, temos:

$$\begin{aligned}
 T_{(2)} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left[-i(\not{k} + \not{p}/2 - M(k_q^2))(S_1\phi_1 + S_2\phi_2 + S_3\phi_3 + S_4\phi_4) i \not{p} \times \right. \\
 &\qquad \qquad \qquad \left. (-1)(S_1\phi_1 - S_2\phi_2 - S_3\phi_3 - S_4\phi_4) \right] \\
 &= \frac{-1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left[(\not{k} + \not{p}/2 - M(k_q^2))(\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3 + S'_4\phi_4) \gamma^5 \not{p} \gamma_5 \times \right. \\
 &\qquad \qquad \qquad \left. (\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3 - S'_4\phi_4) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left[(\not{k} + \not{p}/2 - M(k_q^2))(\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3 + S'_4\phi_4) \not{p} (\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3 - S'_4\phi_4) \right].
 \end{aligned} \tag{E.10}$$

A soma deles rende

$$\begin{aligned}
 T_{(1)} + T_{(2)} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \times \\
 &Tr \left[-(\not{k} - \not{p}/2 + M(k_q^2))(\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3 - S'_4\phi_4) \not{p} (\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3 + S'_4\phi_4) \right] + \\
 &Tr \left[(\not{k} + \not{p}/2 - M(k_q^2))(\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3 + S'_4\phi_4) \not{p} (\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3 - S'_4\phi_4) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \times \\
 &Tr \left[(-\not{k} + \not{p}/2 - M(k_q^2))(\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3 - S'_4\phi_4) \not{p} (\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3 + S'_4\phi_4) + \right. \\
 &\quad \left. (\not{k} + \not{p}/2 - M(k_q^2))(\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3 + S'_4\phi_4) \not{p} (\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3 - S'_4\phi_4) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \times \\
 &Tr \left[-\not{k}(\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3) \not{p} S'_4\phi_4 + \not{k} S'_4\phi_4 \not{p} (\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3) \right. \\
 &\quad + \not{p}/2(\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3) \not{p} (\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3) - \not{p}/2 S'_4\phi_4 \not{p} S'_4\phi_4 \\
 &\quad - M(k_q^2)(\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3) \not{p} (\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3) + M(k_q^2) S'_4\phi_4 \not{p} S'_4\phi_4 \\
 &\quad - \not{k}(\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3) \not{p} S'_4\phi_4 + \not{k} S'_4\phi_4 \not{p} (\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3) \\
 &\quad + \not{p}/2(\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3) \not{p} (\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3) - \not{p}/2 S'_4\phi_4 \not{p} S'_4\phi_4 \\
 &\quad \left. - M(k_q^2)(\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3) \not{p} (\phi_1 + S'_2\phi_2 + S'_3\phi_3) + M(k_q^2) S'_4\phi_4 \not{p} S'_4\phi_4 \right],
 \end{aligned} \tag{E.11}$$

adicionando termos semelhantes, reduzimos a expressão a:

$$\begin{aligned}
 T_{(1)} + T_{(2)} &= - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \{ \not{k} [(\phi_1 + S'_2 \phi_2 + S'_3 \phi_3) \not{S}'_4 \phi_4 - S'_4 \phi_4 \not{S}'_3 (\phi_1 + S'_2 \phi_2 + S'_3 \phi_3)] \} \\
 &+ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \{ \not{S}'_4 \phi_4 \not{S}'_3 (\phi_1 + S'_2 \phi_2 + S'_3 \phi_3) - S'_4 \phi_4 \not{S}'_3 (\phi_1 + S'_2 \phi_2 + S'_3 \phi_3) \} \\
 &- \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{M(k_q^2) + M(k^2)}{2} Tr \{ (\phi_1 + S'_2 \phi_2 + S'_3 \phi_3) \not{S}'_4 \phi_4 \} \\
 &+ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{M(k_q^2) + M(k^2)}{2} Tr \{ S'_4 \phi_4 \not{S}'_3 \phi_4 \},
 \end{aligned} \tag{E.12}$$

fazer os produtos e usando a propriedade que garante que o traço de qualquer produto de um número ímpar de γ^μ é zero, a expressão resultante será:

$$\begin{aligned}
 T_{(1)} + T_{(2)} &= - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \{ [\not{k} \not{S}'_4] \phi_1 \phi_4 - [\not{S}'_4 \not{k}] \phi_1 \phi_4 \} + \\
 &\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \times \left\{ Tr \left[\frac{\not{S}'_4}{2} \not{S}'_3 \right] \phi_1 \phi_1 + Tr \left[\frac{\not{S}'_4}{2} S'_2 \not{S}'_3 \right] \phi_2 \phi_2 + Tr \left[\frac{\not{S}'_4}{2} S'_2 \not{S}'_3 \right] \phi_2 \phi_3 + \right. \\
 &\quad \left. Tr \left[\frac{\not{S}'_4}{2} S'_3 \not{S}'_2 \right] \phi_3 \phi_2 + Tr \left[\frac{\not{S}'_4}{2} S'_3 \not{S}'_2 \right] \phi_3 \phi_3 - Tr \left[\frac{\not{S}'_4}{2} S'_4 \not{S}'_3 \right] \phi_4 \phi_4 \right\} - \\
 &\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{M(k_q^2) + M(k^2)}{2} \left\{ 2 Tr [\not{S}'_4 \phi_1 \phi_2] + 2 Tr [\not{S}'_4 \phi_1 \phi_3] \right\},
 \end{aligned} \tag{E.13}$$

para o traço da primeira integral, acima, devemos considerar as seguintes relações entre as matrizes de Dirac,

$$Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\zeta] = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\zeta} - g^{\mu\rho} g^{\nu\zeta} + g^{\mu\zeta} g^{\nu\rho}) \quad \text{and} \quad \sigma^{\rho\zeta} = i(\gamma^\rho \gamma^\zeta - g^{\rho\zeta}); \tag{E.14}$$

e ainda,

$$Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \sigma^{\rho\zeta}] = 4i(g^{\mu\zeta} g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\zeta}); \tag{E.15}$$

, no cálculo, aparecerá:

$$Tr[(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \sigma^{\rho\zeta}] = 2 Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \sigma^{\rho\zeta}] - 2g^{\mu\nu} Tr[\sigma^{\rho\zeta}] = 8i(g^{\mu\zeta} g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\zeta}). \tag{E.16}$$

Então nós temos:

$$\begin{aligned}
 Tr \left\{ \left[\not{k} \not{p} - \not{p} \not{k} \right] S'_4 \right\} &= -\frac{8}{M_\pi^2} k_\mu p_\nu p_\alpha k_\beta (g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) \\
 &= -\frac{8}{M_\pi^2} (M_\pi^2 k^2 - (k \cdot p)^2) \\
 &= 8M_\pi^2 \mathcal{B},
 \end{aligned} \tag{E.17}$$

com,

$$\mathcal{B}(k^2) = \frac{1}{M_\pi^4} ((k \cdot p)^2 - k^2 M_\pi^2). \tag{E.18}$$

Para calcular o traço da segunda integral, usaremos as seguintes etapas:

$$i) Tr \left[\frac{\not{p}}{2} \not{p} \right] = 2M_\pi^2;$$

$$ii) Tr \left[\frac{\not{p}}{2} S'_2 \not{p} S'_2 \right] = 2M_\pi^2;$$

$$iii) Tr \left[\frac{\not{p}}{2} S'_2 \not{p} S'_3 \right] = -Tr \left[\frac{\not{p}}{2} S'_3 \not{p} S'_2 \right];$$

$$\begin{aligned}
 iv) \text{ como } \not{p} S'_3 = -S'_3 \not{p}, \text{ logo } Tr \left[\frac{\not{p}}{2} S'_3 \not{p} S'_3 \right] &= -Tr \left[\frac{\not{p}}{2} \not{p} S'_3 S'_3 \right] = -\frac{M_\pi^2}{2} Tr[S'_3 S'_3] = \\
 &= -\frac{M_\pi^2}{2} \frac{4}{M_\pi^2} \left(k^2 - \frac{(k \cdot p)^2}{M_\pi^2} \right) = -\frac{2}{M_\pi^2} (k^2 M_\pi^2 - (k \cdot p)^2) = 2 M_\pi^2 \mathcal{B};
 \end{aligned}$$

v) provaremos que : $\not{p} S'_4 = M_\pi S'_3$. de fato :

$$\begin{aligned}
 \not{p} S'_4 &= \not{p} \frac{i}{M_\pi^2} \left(\frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \right) p_\mu k_\nu = -\frac{1}{2M_\pi^2} \not{p} (\not{p} \not{k} - \not{k} \not{p}) = \\
 &= -\frac{1}{2M_\pi^2} (M_\pi^2 \not{k} + M_\pi^2 \not{k} - 2(k \cdot p) \not{p}) = \left(\frac{(k \cdot p)}{M_\pi^2} \not{p} - \not{k} \right) = M_\pi S'_3.
 \end{aligned}$$

Então, usando a identidade comprovada acima, teremos :

$$\begin{aligned}
 Tr \left[\frac{\not{p}}{2} S'_4 \not{p} S'_4 \right] &= \frac{1}{2} Tr \left[M_\pi S'_3 M_\pi S'_3 \right] = \frac{M_\pi^2}{2} Tr \left[S'_3 S'_3 \right] = \frac{M_\pi^2}{2} \frac{4}{M_\pi^2} \left(k^2 - \frac{(k \cdot p)^2}{M_\pi^2} \right) \\
 &= -2 M_\pi^2 \mathcal{B}(k^2),
 \end{aligned} \tag{E.19}$$

na terceira integral, da Eq. (E.13), teremos os seguintes traços para realizar:

$$Tr \left[\not{p} S'_2 \right] = 4M_\pi^2 \quad \text{e} \quad Tr \left[\not{p} S'_3 \right] = 0. \tag{E.20}$$

Apresentando esses últimos resultados na Eq. (E.13), e fazendo as necessárias simplificações, chegaremos a:

$$\begin{aligned}
 T_{(1)} + T_{(2)} &= \\
 &= -8M_\pi^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \mathcal{B}(k^2) \phi_1 \phi_4 + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [2M_\pi^2 \phi_1 \phi_1 + 2M_\pi^2 \phi_2 \phi_2 + 2M_\pi^2 \mathcal{B}(k^2) \phi_3 \phi_3 + 2M_\pi^2 \mathcal{B}(k^2) \phi_4 \phi_4] \\
 &= -4M_\pi [M(k_q^2) + M(k_{\bar{q}}^2)] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \phi_2 \phi_1,
 \end{aligned} \tag{E.21}$$

fatorar e escrever tudo em um único integral e aplicar a condição de que a soma dos traços é igual a $-i2M_\pi^2$:

$$\begin{aligned}
 T_{(1)} + T_{(2)} &= -i2M_\pi^2 \\
 2M_\pi^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} &\left[\phi_1\phi_1 + \phi_2\phi_2 + \mathcal{B}\phi_3\phi_3 + \mathcal{B}\phi_4\phi_4 - 4\mathcal{B}\phi_1\phi_4 - 2\frac{M(k_q^2)}{M_\pi}\phi_2\phi_1 - 2\frac{M(k_q^2)}{M_\pi}\phi_2\phi_1 \right] \\
 &= -i2M_\pi^2.
 \end{aligned} \tag{E.22}$$

Portanto, a normalização lê:

$$i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\phi_1\phi_1 + \phi_2\phi_2 + \mathcal{B}\phi_3\phi_3 + \mathcal{B}\phi_4\phi_4 - 4\mathcal{B}\phi_1\phi_4 - \frac{2}{M_\pi}[M(k_q^2) + M(k_q^2)]\phi_2\phi_1 \right] = 1, \tag{E.23}$$

onde, as funções dinâmicas de massa do quark, para cada um dos quarks são escritas na frente de luz como:

$$\begin{aligned}
 M(k_q^2) &= m_0 - m^3 \left((k + p/2)^2 - \lambda^2 + i\epsilon \right)^{-1}, \\
 M(k_q^2) &= m_0 - m^3 \left((k - p/2)^2 - \lambda^2 + i\epsilon \right)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{E.24}$$

Devemos apresentar a RIN para cada função escalar ϕ_i , obtém-se:

$$\begin{aligned}
 1 &= \int_{-1}^1 dz' \int_0^{\gamma'_f} d\gamma' \int_{-1}^1 dz \int_0^{\gamma_f} d\gamma \mathcal{A}_1 \left[g_1(\gamma', z')g_1(\gamma, z) + g_2(\gamma', z')g_2(\gamma, z) \right] \\
 &+ \int_{-1}^1 dz' \int_0^{\gamma'_f} d\gamma' \int_{-1}^1 dz \int_0^{\gamma_f} d\gamma \mathcal{A}_2 \left[g_3(\gamma', z')g_3(\gamma, z) + g_4(\gamma', z')g_4(\gamma, z) - 4g_1(\gamma', z')g_4(\gamma, z) \right] \\
 &- \int_{-1}^1 dz' \int_0^{\gamma'_f} d\gamma' \int_{-1}^1 dz \int_0^{\gamma_f} d\gamma \mathcal{A}_3 g_2(\gamma', z')g_1(\gamma, z),
 \end{aligned} \tag{E.25}$$

onde definimos as funções:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_1 &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 + p \cdot kz' - \gamma' + i\epsilon']^3} \frac{1}{[k^2 + p \cdot kz - \gamma + i\epsilon]^3} \\
 \mathcal{A}_2 &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{B}(k^2)}{[k^2 + p \cdot kz' - \gamma' + i\epsilon']^3} \frac{1}{[k^2 + p \cdot kz - \gamma + i\epsilon]^3} \\
 \mathcal{A}_3 &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2}{M_\pi} \frac{M(k_q^2) + M(k_q^2)}{[k^2 + p \cdot kz' - \gamma' + i\epsilon']^3} \frac{1}{[k^2 + p \cdot kz - \gamma + i\epsilon]^3}.
 \end{aligned} \tag{E.26}$$

E.1 Calculando a integral da função \mathcal{A}_1

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_1 &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{P_1^3} \frac{1}{P_2^3} = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^6} \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(3)\Gamma(3)} \int_0^1 dv \int_0^1 du \frac{v^2 u^2 \delta(1-v-u)}{[vP_1 + uP_2]^6} \\
 &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dv \frac{30v^2(1-v)^2}{[vP_1 + (1-v)P_2]^6} \\
 &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dv \frac{30v^2(1-v)^2}{[v(k^2 + p \cdot kz' - \gamma' + i\epsilon') + (1-v)(k^2 + p \cdot kz - \gamma + i\epsilon)]^6} \\
 &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dv \frac{30 v^2(1-v)^2}{[k^2 + k \cdot p[vz' + (1-v)z] - \gamma'v - \gamma(1-v) + i\eta]^6},
 \end{aligned} \tag{E.27}$$

neste ponto iremos introduzir uma nova variável q , tal que $q = k + \lambda p/2$, onde estamos considerando que $\lambda' = [vz' + (1-v)z]$, e $\eta = v\epsilon' + (1-v)\epsilon$. Manipulando a definição de q podemos reescrever a expressão $k^2 + k \cdot p z' = q^2 - \lambda'^2 \frac{M_\pi^2}{4}$, assim:

$$\mathcal{A}_1 = i \int_0^1 dv 30 v^2(1-v)^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[q^2 - \lambda'^2 \frac{M_\pi^2}{4} - \gamma'v - \gamma(1-v) + i\eta]^6}, \tag{E.28}$$

aplicando a mudança $d^4 q \rightarrow id^4 q_E$, e usando a identidade abaixo:

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 - m^2 + i\epsilon)^n} = \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n-d/2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{-m^2 + i\epsilon} \right)^{n-d/2}, \tag{E.29}$$

então teremos:

$$\mathcal{A}_1 = -\frac{3}{32\pi^2} \int_0^1 dv \frac{v^2(1-v)^2}{[\lambda'^2 \frac{M_\pi^2}{4} + \gamma'v + \gamma(1-v) + i\eta]^4} \tag{E.30}$$

E.1.1 Calculando a integral da função \mathcal{A}_2

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_2 &= \frac{i}{M_\pi^4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k \cdot p)^2 - k^2 M_\pi^2}{[k^2 + k \cdot pz' - \gamma' + i\epsilon']^3} \frac{1}{[k^2 + k \cdot pz - \gamma + i\epsilon]^3} \\
 &= \frac{i}{M_\pi^4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} ((k \cdot p)^2 - k^2 M_\pi^2) \int_0^1 dv \frac{30 v^2 (1-v)^2}{[k^2 + k \cdot p[vz' + (1-v)z] - \gamma'v - \gamma(1-v) + i\eta]^6} \\
 &= \frac{i}{M_\pi^4} \int_0^1 dv 30 v^2 (1-v)^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(q \cdot p)^2 - M_\pi^2 q^2}{[q^2 - \lambda'^2 \frac{M_\pi^2}{4} - \gamma'v - \gamma(1-v) + i\eta]^6} \\
 &= -\frac{1}{M_\pi^2} \int_0^1 dv 30 v^2 (1-v)^2 \underbrace{\int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{-q_{E0}^2 + q_E^2}{[-q_E^2 - \lambda'^2 \frac{M_\pi^2}{4} - \gamma'v - \gamma(1-v) + i\eta]^6}}_{\mathbf{I}_E},
 \end{aligned} \tag{E.31}$$

realizando a transformação $d^4 q \rightarrow id^4 q_E$, devemos introduzir variáveis euclidianas, $(\rho, \phi, \theta_1, \theta_2)$, à integral que chamamos de \mathbf{I}_E :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_E &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\rho \rho^3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos(\theta_1) \int_0^\pi d\theta_2 \sin^2(\theta_2) \frac{-\rho^2 \cos^2(\theta_2) + \rho^2}{[-\rho^2 - \lambda'^2 \frac{M_\pi^2}{4} - \gamma'v - \gamma(1-v) + i\eta]^6} \\
 &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^\pi d\theta_2 \sin^4(\theta_2) \int d\rho \frac{\rho^5}{[-\rho^2 - \lambda'^2 \frac{M_\pi^2}{4} - \gamma'v - \gamma(1-v) + i\eta]^6},
 \end{aligned} \tag{E.32}$$

observe que :

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi d\theta_2 \sin^4(\theta_2) &= \int_0^\pi d\theta_2 [\sin^4(\theta_2)]^2 = \int_0^\pi d\theta_2 \left[\frac{1 - \cos(2\theta_2)}{2} \right]^2 \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^\pi d\theta_2 [1 - 2\cos(2\theta_2) + \cos^2(2\theta_2)] \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^\pi d\theta_2 \left[1 - 2\cos(2\theta_2) + \left(\frac{1 + \cos(4\theta_2)}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{3}{8} \int_0^\pi d\theta_2 - \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta_2 \cos(2\theta_2) + \frac{1}{8} \int_0^\pi d\theta_2 \cos(4\theta_2) = \frac{3\pi}{8};
 \end{aligned} \tag{E.33}$$

para a integral em ρ , inicialmente fazamos $y = \rho^2$,

$$\begin{aligned}
 \int d\rho \frac{\rho^5}{[-\rho^2 - \lambda'^2 \frac{M_\pi^2}{4} - \gamma'v - \gamma(1-v) + i\eta]^6} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dy \frac{y^2}{\underbrace{[y - \lambda'^2 \frac{M_\pi^2}{4} - \gamma'v - \gamma(1-v) + i\eta]^6}_\ell} = \\
 \frac{1}{2} \int_0^\infty dy \frac{1}{\ell^6} \frac{y^2}{[y/\ell + 1]^6} &= \frac{1}{2\ell^3} \int_0^\infty \frac{dy}{\ell} \frac{(y^2/\ell^2)}{\underbrace{[y/\ell + 1]^6}_h} = \frac{1}{2\ell^3} \int_0^\infty dh \frac{h^2}{\underbrace{[h + 1]^6}_w} = \\
 \frac{1}{2\ell^3} \int_1^\infty dw \frac{w^2 - 2w + 1}{w^6} &= \frac{1}{2\ell^3} \frac{1}{30} = \frac{1}{60} \frac{1}{[\lambda'^2 \frac{M_\pi^2}{4} + \gamma'v + \gamma(1-v) - i\eta]^3} \quad (\text{E.34})
 \end{aligned}$$

Então podemos retornar a expressão \mathbf{I}_E , na Eq. (E.32),

$$\mathbf{I}_E = \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{3\pi}{8} \frac{1}{60[\lambda'^2 \frac{M_\pi^2}{4} + \gamma'v + \gamma(1-v) - i\eta]^3} = \frac{1}{640\pi^2} \frac{1}{[\lambda'^2 \frac{M_\pi^2}{4} + \gamma'v + \gamma(1-v) - i\eta]^3}, \quad (\text{E.35})$$

conduzindo este resultado para a Eq. (E.31)

$$\mathcal{A}_2 = -\frac{1}{2M_\pi^2} \frac{3}{32\pi^2} \int_0^1 dv \frac{v^2(1-v)^2}{[\lambda'^2 \frac{M_\pi^2}{4} + \gamma'v + \gamma(1-v) - i\eta]^3}. \quad (\text{E.36})$$

E.1.2 Calculando a integral da função \mathcal{A}_3

$$\mathcal{A}_3 = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2}{M_\pi} \frac{[M(k_q^2) + M(k_q^2)]}{[k^2 + k \cdot pz' - \gamma' + i\epsilon']^3} \frac{1}{[k^2 + k \cdot pz - \gamma + i\epsilon]^3}, \quad (\text{E.37})$$

neste ponto, devemos lembrar que temos simetria na troca de z por $-z$ e isso nos leva a também ter simetria na troca de $(k + p/2)$ por $(kp - /2)$. Com esta última simetria, podemos escolher trabalhar com $M(k_q^2)$ ou $M(k_q^2)$, portanto a expressão anterior é reduzida a

$$\mathcal{A}_3 = 2 \frac{2i}{M_\pi} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(m_0 - \frac{m^3}{[(k + \frac{p}{2})^2 - \lambda^2 + i\epsilon]} \right) \frac{1}{[k^2 + k \cdot pz' - \gamma' + i\epsilon']^3} \frac{1}{[k^2 + k \cdot pz - \gamma + i\epsilon]^3}, \quad (\text{E.38})$$

dividindo a integral em duas, pois com isso podemos utilizar os resultados já encontrados para a parametrização de Feynman,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_3 &= \frac{2i m_0}{M_\pi} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 + k \cdot pz' - \gamma' + i\epsilon']^3} \frac{1}{[k^2 + k \cdot pz - \gamma + i\epsilon]^3} \\
 &- \frac{2i m^3}{M_\pi} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + \frac{p}{2})^2 - \lambda^2 + i\epsilon]} \frac{1}{[k^2 + k \cdot pz' - \gamma' + i\epsilon']^3} \frac{1}{[k^2 + k \cdot pz - \gamma + i\epsilon]^3} \\
 &= \mathcal{A}_{3a} + \mathcal{A}_{3b}.
 \end{aligned} \tag{E.39}$$

Na integral acima, o primeiro sendo o mesmo que o resolvido em \mathcal{A}_1 menos que uma constante multiplicativa, com isso temos que \mathcal{A}_{3a} :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{3a} &= \frac{2m_0}{M_\pi} \mathcal{A}_1 \\
 &= -\frac{3m_0}{16M_\pi\pi^2} \int_0^1 dv \frac{v^2(1-v)^2}{[\lambda^2 \frac{M_\pi^2}{4} + \gamma'v + \gamma(1-v) + i\eta]^4},
 \end{aligned} \tag{E.40}$$

o próximo passo será simplificar os três denominadores contidos em \mathcal{A}_{3b} usando os truques de Feynman,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{3b} &= -\frac{2m^3 i}{M_\pi} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 + k \cdot p + \frac{M_\pi^2}{4} - \lambda^2 + i\epsilon]} \frac{1}{[k^2 + k \cdot pz' - \gamma' + i\epsilon']^3} \frac{1}{[k^2 + k \cdot pz - \gamma + i\epsilon]^3} \\
 &= -\frac{2 m^3 i}{M_\pi} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{P_1} \frac{1}{P_2^3} \frac{1}{P_3^3} \\
 &= -\frac{2 m^3 i}{M_\pi} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\Gamma(7)}{\Gamma(1)\Gamma(3)\Gamma(3)} \int_0^1 dv \int_0^1 du \int_0^1 dx \frac{\delta(1-v-u-x) x^2 u^2}{[vP_1 + uP_2 + xP_3]^7} \\
 &= -\frac{360 m^3 i}{M_\pi} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dv \int_0^1 du \frac{(1-v-u)^2 u^2 \theta(1-v-u)}{[(P_1 - P_3)v + (P_2 - P_3)u + P_3]^7},
 \end{aligned} \tag{E.41}$$

simplificando o denominador, teremos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{3b} &= -\frac{360 m^3 i}{M_\pi} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dv \int_0^1 du (1-v-u)^2 u^2 \theta(1-v-u) \\
 &\times \frac{1}{\left\{ k^2 + [(1-v-u)z + uz' + v]k \cdot p + \frac{M_\pi^2}{4} - \lambda^2 + (v+u-1)\gamma - u\gamma' + i\epsilon \right\}^7},
 \end{aligned} \tag{E.42}$$

para realizar a integral no loop $d^4 k$ faremos a seguinte mudança de variável $q' = k + \lambda'' \frac{p}{2}$, onde estamos adotando $\lambda'' = [(1-v-u)z + uz' + v]$.

Com isso chegamos a $k^2 + k \cdot p\lambda'' = q'^2 - \lambda''^2 \frac{M_\pi^2}{4}$ e execute a seguinte transformação

$$d^4 q' \longrightarrow id^4 q'_E$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{3b} = & -\frac{360 m^3}{M_\pi} \int_0^1 dv \int_0^1 du (1-v-u)^2 u^2 \theta(1-v-u) \\ & \times \int \frac{d^4 q'_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left\{ (q'_E)^2 - \lambda'^2 \frac{M_\pi^2}{4} + \frac{M_\pi^2}{4} - \lambda^2 + (v+u-1)\gamma - u\gamma' + i\epsilon \right\}^7}, \end{aligned} \quad (\text{E.43})$$

para fazer a integral em $d^4 q'_E$, usamos a identidade representada na Eq. (E.29), então obtemos

$$\mathcal{A}_{3b} = -\frac{3 m^3}{4\pi^2 M_\pi} \int_0^1 dv \int_0^1 du \frac{(1-v-u)^2 u^2 \theta(1-v-u)}{\left[\lambda'^2 \frac{M_\pi^2}{4} - \frac{M_\pi^2}{4} + \lambda^2 + (v+u-1)\gamma + u\gamma' - i\epsilon \right]^5}. \quad (\text{E.44})$$

Com isso, após combinar as expressões dadas pela Eq. (E.40) e Eq. (E.44), finalmente teremos que,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3 = & -\frac{3}{4M_\pi \pi^2} \int_0^1 dv \\ & \times \left\{ \frac{m_0 v^2 (1-v)^2}{4 \left[\lambda'^2 \frac{M_\pi^2}{4} + \gamma'v + \gamma(1-v) \right]^4} + \int_0^1 du \frac{m^3 (1-v-u)^2 u^2 \theta(1-v-u)}{\left[\lambda'^2 \frac{M_\pi^2}{4} - \frac{M_\pi^2}{4} + \lambda^2 + (v+u-1)\gamma + u\gamma' \right]^5} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.45})$$

Concluindo, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz \int_0^\infty d\gamma \mathcal{A}_1 [g_1(\gamma', z') g_1(\gamma, z) + g_2(\gamma', z') g_2(\gamma, z)] \\ & + \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz \int_0^\infty d\gamma \mathcal{A}_2 [g_3(\gamma', z') g_3(\gamma, z) + g_4(\gamma', z') g_4(\gamma, z) - 4g_1(\gamma', z') g_4(\gamma, z)] \\ & - \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz \int_0^\infty d\gamma (\mathcal{A}_{3a} + \mathcal{A}_{3b}) [g_2(\gamma', z') g_1(\gamma, z)] = 1, \end{aligned} \quad (\text{E.46})$$

e finalmente obter, após todas as integrações anteriores,

$$\begin{aligned}
 1 &= (\mathcal{N}^2) \left(-\frac{3N_c}{32\pi^2} \right) \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^{\gamma'_f} d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz \int_0^{\gamma_f} d\gamma \int_0^1 dv v^2 (1-v)^2 \\
 &\times \left\{ \frac{\mathcal{G}_{11} + \mathcal{G}_{22}}{\left[\frac{M_\pi^2}{4} \lambda'^2 + \gamma'v + \gamma(1-v) \right]^4} + \frac{\mathcal{G}_{33} + \mathcal{G}_{44} - 4 \mathcal{G}_{14}}{2M_\pi^2 \left[\frac{M_\pi^2}{4} \lambda'^2 + \gamma'v + \gamma(1-v) \right]^3} \right\} \\
 &- (\mathcal{N}^2) \left(-\frac{3N_c}{4M_\pi \pi^2} \right) \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^{\gamma'_f} d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz \int_0^{\gamma_f} d\gamma \int_0^1 dv \mathcal{G}_{21} \\
 &\times \left\{ \frac{2m_0 v^2 (1-v)^2}{4 \left[\lambda'^2 \frac{M_\pi^2}{4} + \gamma'v + \gamma(1-v) \right]^4} + \int_0^1 du \frac{2m^3 (1-v-u)^2 u^2 \theta(1-v-u)}{\left[\lambda''^2 \frac{M_\pi^2}{4} - \frac{M_\pi^2}{4} + \lambda^2 + (v+u-1)\gamma + u\gamma' \right]^5} \right\}.
 \end{aligned} \tag{E.47}$$

Onde $\mathcal{G}_{ij} = g_i(\gamma', z')g_j(\gamma, z)$, reforçar que em cada g_i g_j temos um fator de normalização \mathcal{N} e ainda temos que a dependencia de z and z' fica contida em λ' e λ'' .

Pion observables with the Minkowski Space Pion Model *

J. P. B. C. de Melo[†]

Laboratório de Física Teórica e Computacional - LFTC

Universidade Cruzeiro do Sul / Universidade Cidade de São Paulo, 01506-000 São Paulo, Brazil

E-mail: joao.mello@cruzeirodosul.edu.br

Rômulo M. Moita

Instituto Tecnológico de Aeronáutica, DCTA

12.228-900 São José dos Campos, SP, Brazil.

E-mail: rdmoses@hotmail.com

T. Frederico

Instituto Tecnológico de Aeronáutica, DCTA

12.228-900 São José dos Campos, SP, Brazil.

E-mail: tobias@ita.br

The pion structure in Minkowski space is described in terms of an analytic model of the Bethe - Salpeter amplitude combined with Euclidean Lattice QCD results for the running quark mass. In the present work, a pion model previously proposed, which allows for a Nakanishi integral representation, is studied in order to verify the sensitivity of the pion electromagnetic form factor to small variations of the quark self-energy. In addition, we extend the previous work, providing the Nakanishi integral representation for the invariants associated with a decomposition of the pion Bethe-Salpeter amplitude.

Light Cone 2019 - QCD on the light cone: from hadrons to heavy ions - LC2019

16-20 September 2019

Ecole Polytechnique, Palaiseau, France

*This work was supported in part by CAPES, and Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) under grants 308025/2015-6 (JPBCM), 308486/2015-3 (TF). Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) under the thematic projects 2013/26258-4 and 2017/05660-0, and by regular project 2019/02923-5 (JPBCM). Project INCT-FNA Proc. No. 464898/2014-5.

[†]Speaker.

1. Introduction

In the present work, we extend the previous study performed in [1] to test the sensitivity of the pion observables to the model parameters, and, check the limitations of the model presented with the original parameters. The model is built to fit the quark propagator in the space-like region obtained by Lattice QCD calculations in the Landau gauge (see the reference [1] for details), also the analytical model preserves the Lorentz invariance. The results from Lattice calculations used here, have two degenerate light quarks, u and d, and, the heavy quark s [2, 3].

The quark model propagator is given by $S_F(k) = \iota Z(k^2) [\not{k} - M(k^2) + \iota\epsilon]^{-1}$. Using that the pion is very close to the chiral limit, as a simplification, we not considere the momentum dependence of the quark wave function renormalization factor, i.e, $Z(k^2) = 1$. Then, the model for the dressed quark propagator is written as $S_F(k) = \iota(\not{k} + M(k^2)) (k^2 - M^2(k^2) + \iota\epsilon)^{-1}$.

The running quark mass model in the space-like region fits lattice calculations [1, 2, 3], and it is parametrized by the expression,

$$M(k^2) = m_0 - m^3 [k^2 - \lambda^2 + \iota\epsilon]^{-1}, \quad (1.1)$$

where $m_0 = 0.014 \text{ GeV}$, $m = 0.574 \text{ GeV}$ and $\lambda = 0.846 \text{ GeV}$, which we name initial parameter set (IP) [1]. In the chiral limit, where the current quark mass vanishes, the scalar part of the self-energy gives the invariant associated with the pseudoscalar component of the pion-quark-antiquark vertex. In this way, the present model incorporates effects from quark dressing and dynamical chiral symmetry breaking.

The quark propagator can be written in a factorized form, after solving $m_i^2 = M^2(m_i^2)$:

$$S_F(k) = \iota \frac{(k^2 - \lambda^2)^2 (\not{k} + m_0) - (k^2 - \lambda^2) m^3}{\prod_{i=1,3} (k^2 - m_i^2 + \iota\epsilon)}, \quad (1.2)$$

where for the parameter set given above, only real poles at the positions,

$$m_1 = 0.371 \text{ GeV}, \quad m_2 = 0.644 \text{ GeV}, \quad \text{and} \quad m_3 = 0.954 \text{ GeV},$$

are found. The propagator in the form

$$S_F(k) = \iota [A(k^2)\not{k} + B(k^2)]. \quad (1.3)$$

has for the self-energies:

$$A(k^2) = \frac{(k^2 - \lambda^2)^2}{\prod_{i=1,3} (k^2 - m_i^2 + \iota\epsilon)}, \quad B(k^2) = \frac{(\lambda^2 - k^2)m^3}{\prod_{i=1,3} (k^2 - m_i^2 + \iota\epsilon)} + A(k^2)m_0, \quad (1.4)$$

We can make for $A(k^2)$, the decomposition below,

$$\frac{(k^2 - \lambda^2)^2}{\prod_{i=1,3} (k^2 - m_i^2)} = \sum_{i=1}^3 \frac{D_i}{(k^2 - m_i^2)}, \quad (1.5)$$

and solving for D_i 's with the IP set, one gets:

$$D_1 = 1.4992, \quad D_2 = -0.594098 \quad \text{and} \quad D_3 = -0.0949811. \quad (1.6)$$

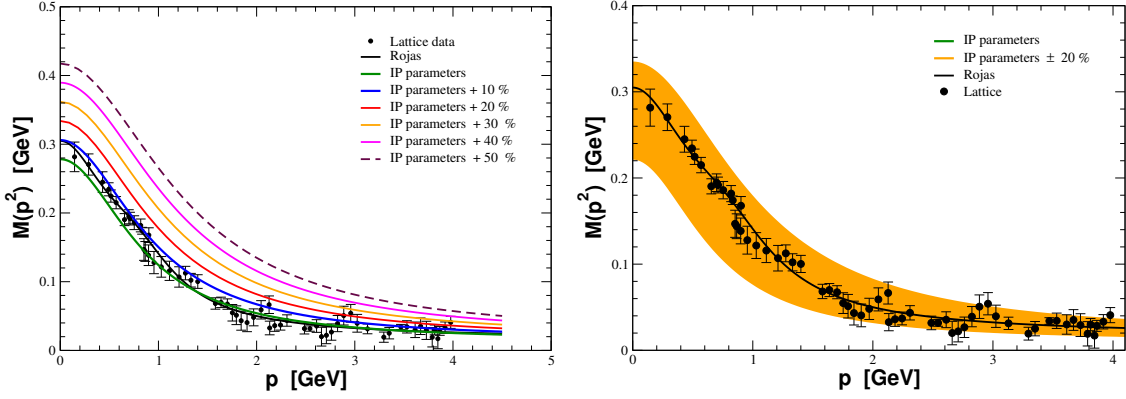


Figure 1: The running quark mass as a function of the momentum p , with the parameters from the previous work [1] compared to the results from the parameters variations. Also, in the figure are shown the LQCD results [3] and the parametrization given in Ref.[2].

Now, we must decompose $B(k^2)$ from Eq.(1.4) in the same way as above,

$$\frac{k^2 m^3 - \lambda^2 m^3}{\prod_{i=1,3}(k^2 - m_i^2)} + A(k^2)m_0 = \sum_{i=1}^3 \frac{D_i m_0 - E_i}{(k^2 - m_i^2)}, \quad (1.7)$$

and we find the following solution for the E 's:

$$E_1 = 0.42401285, \quad E_2 = -0.331377 \quad \text{and} \quad E_3 = -0.07863548.$$

The spectral decomposition for $A(k^2)$ and $B(k^2)$ reads,

$$A(k^2) = \int_0^\infty d\mu^2 \frac{\rho_A(\mu^2)}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}, \quad B(k^2) = \int_0^\infty d\mu^2 \frac{\rho_B(\mu^2)}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}, \quad (1.8)$$

with the spectral densities given by,

$$\rho_A(\mu^2) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} [A(\mu^2)] \quad \text{and} \quad \rho_B(\mu^2) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} [B(\mu^2)]$$

which, in principle, for a non-confining theory should obey the positivity constraints for the Källén-Lehman (KL) representation, $\mathcal{P}_a = \rho_A(\mu^2) \geq 0$ and $\mathcal{P}_b = \mu \rho_A(\mu^2) - \rho_B(\mu^2) \geq 0$.

We can write the function $A(k^2)$, as,

$$\int_0^\infty d\mu^2 \frac{\rho_A(\mu^2)}{k^2 - \mu^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{D_i}{k^2 - m_i^2} = \sum_{i=1}^3 \int_0^\infty d\mu^2 \frac{D_i \delta(\mu^2 - m_i^2)}{k^2 - \mu^2} \quad (1.9)$$

which leads to:

$$\rho_A(\mu^2) = D_1 \delta(\mu^2 - m_1^2) + D_2 \delta(\mu^2 - m_2^2) + D_3 \delta(\mu^2 - m_3^2). \quad (1.10)$$

and also

$$\int_0^\infty d\mu^2 \frac{\rho_B(\mu^2)}{k^2 - \mu^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{E_i}{k^2 - m_i^2} = \sum_{i=1}^3 \int_0^\infty d\mu^2 \frac{E_i \delta(\mu^2 - m_i^2)}{k^2 - \mu^2}, \quad (1.11)$$

which has a spectral density given by:

$$\rho_B(\mu^2) = E_1 \delta(\mu^2 - m_1^2) + E_2 \delta(\mu^2 - m_2^2) + E_3 \delta(\mu^2 - m_3^2) + m_0 \rho_A(\mu^2). \quad (1.12)$$

We observe that the parametrization of the quark self energy leads to a violation of the positivity constraints.

The pion Bethe-Salpeter amplitude (BSA) of this model can be written in terms of the Nakanishi integral representation (NIR) [4, 5]. The pion-quark-antiquark vertex denoted by $\Gamma_\pi(k, P)$ has the general form below,

$$\Gamma_\pi(k; P) = \gamma_5 [iE_\pi(k; P) + \not{P}F_\pi(k; P) + k^\mu P_\mu \not{G}_\pi(k; P) + \sigma_{\mu\nu} k^\mu P^\nu H_\pi(k; P)], \quad (1.13)$$

Considering the chiral limit, we have for BSA model the structure below:

$$\Psi_\pi(k; P) = - [A(k_q^2) \not{k}_q + B(k_q^2)] \frac{\mathcal{N} \gamma_5 m^3}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} [A(k_{\bar{q}}^2) \not{k}_{\bar{q}} + B(k_{\bar{q}}^2)] \quad (1.14)$$

where $k_q = (k + P/2)$, $k_{\bar{q}} = (k - P/2)$ and Eq.(1.3) for the quark propagator. In order to obtain the integral representation of the BSA model, we use Feynman's parameterization, elaborated in the identity below:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{[(k + \frac{P}{2})^2 - \mu'^2 + i\epsilon][k^2 - \lambda^2 + i\epsilon][(k - \frac{P}{2})^2 - \mu^2 + i\epsilon]} = \\ & = \int_0^\infty d\gamma \int_{-1}^1 dz \frac{\mathcal{F}(\gamma, z; \mu', \mu, M)}{[k^2 + zk \cdot P + \gamma + i\epsilon]^3}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

where

$$\mathcal{F}(\gamma, z; \mu', \mu) \equiv \frac{2 \theta(1+z-2\alpha) \theta(\alpha-z) \theta(1-\alpha) \theta(\alpha)}{|2\lambda^2 + M^2/4 - \mu'^2 - \mu^2|}, \quad (1.16)$$

and

$$\alpha(\gamma, z; \mu', \mu) = \frac{\gamma - z(\mu^2 - \lambda^2 - M^2/4) + \lambda^2}{2\lambda^2 + M^2/4 - \mu^2 - \mu'^2}. \quad (1.17)$$

The BSA from Eq.(1.14) can be decomposed in terms of the Dirac operators,

$$\begin{aligned} \Psi_\pi(k; P) &= \gamma_5 \chi_1(k, P) + \not{k}_q \gamma_5 \chi_2(k, P) + \gamma_5 \not{k}_{\bar{q}} \chi_3(k, P) + \not{k}_q \gamma_5 \not{k}_{\bar{q}} \chi_4(k, P) = \\ &= -A(k_q^2) \not{k}_q \frac{m^3 \mathcal{N} \gamma_5}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} A(k_{\bar{q}}^2) \not{k}_{\bar{q}} - A(k_q^2) \not{k}_q \frac{m^3 \mathcal{N} \gamma_5}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} B(k_{\bar{q}}^2) \\ &\quad - B(k_q^2) \frac{m^3 \mathcal{N} \gamma_5}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} A(k_{\bar{q}}^2) \not{k}_{\bar{q}} - B(k_q^2) \frac{m^3 \mathcal{N} \gamma_5}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} B(k_{\bar{q}}^2), \end{aligned} \quad (1.18)$$

and the invariants $\chi_i(k, P)$ can be written with the Nakanishi integral representation (NIR), with weight functions determined analytically as shown in the following.

In order to obtain the invariants, $\chi_i(k, P)$, we introduce $A(k_q^2)$, $B(k_q^2)$, $A(k_{\bar{q}}^2)$ and $B(k_{\bar{q}}^2)$ in Eq.(1.18), that leads to:

$$\chi_i(k, P) = \int_0^\infty d\mu'^2 \frac{\rho_{(A,B)}(\mu'^2)}{[(k + \frac{P}{2})^2 - \mu'^2 + i\epsilon]} \frac{m^3(-\mathcal{N})}{[k^2 - \lambda^2 + i\epsilon]} \int_0^\infty d\mu^2 \frac{\rho_{(A,B)}(\mu^2)}{[(k - \frac{P}{2})^2 - \mu^2 + i\epsilon]}. \quad (1.19)$$

One can write the scalar functions, $\chi_i(k, p)$, with NIR as:

$$\chi_i(k, P) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\gamma \int_{-1}^1 dz \frac{G_i(\gamma, z; M)}{[k^2 + zk \cdot P + \gamma + i\epsilon]^3}, \quad (1.20)$$

and after replacing the spectral densities, ρ_A and ρ_B , and integrating over the Dirac delta's in the χ_i 's, we obtain the weight functions:

$$\begin{aligned} G_1(\gamma, z; P) &= -m^3 \mathcal{N} \sum_{i,j} (E_i + m_0 D_i)(E_j + m_0 D_j) F_{ij}, \quad G_2(\gamma, z; M) = -m^3 \mathcal{N} \sum_{i,j} D_i (E_j + m_0 D_j) F_{ij}, \\ G_3(\gamma, z; M) &= -m^3 \mathcal{N} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (E_i + m_0 D_i) D_j F_{ij}, \quad G_4(\gamma, z; M) = -m^3 \mathcal{N} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_i D_j F_{ij}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

where $1 \leq i, j \leq 3$ and F_{ij} are lengthy functions computed with the help of Eq. (1.16), which will be presented elsewhere.

The light-front projection of Eq. (1.20) is the basic ingredient to obtain the valence wave function:

$$\Psi_i(z, \vec{k}_\perp) = \frac{P^+}{\sqrt{2}} z(1-z) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^-}{2\pi} \chi_i(k, P) = \frac{i}{8\sqrt{2}} (1-z^2) \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma \frac{G_i(\gamma, z, P)}{[-z^2 \frac{M^2}{4} - |\vec{k}_\perp|^2 - \gamma]^2}, \quad (1.22)$$

where $z = -\frac{2k^+}{P^+}$ and we have chosen $\vec{P}_\perp = 0$.

In relation to the the previous work [1], we allowed a variation of the model parameters, to check the robustness of the predictions for the the pion electromagnetic form factor allowing some change in the quark mass function as the basic input from LQCD calculations. Such variations gives also an idea of what to expect in terms of theory uncertainties when comparing with the forthcoming data from the TJLAB laboratory (12 GeV upgrade TJLAB) for energies above their first results [6].

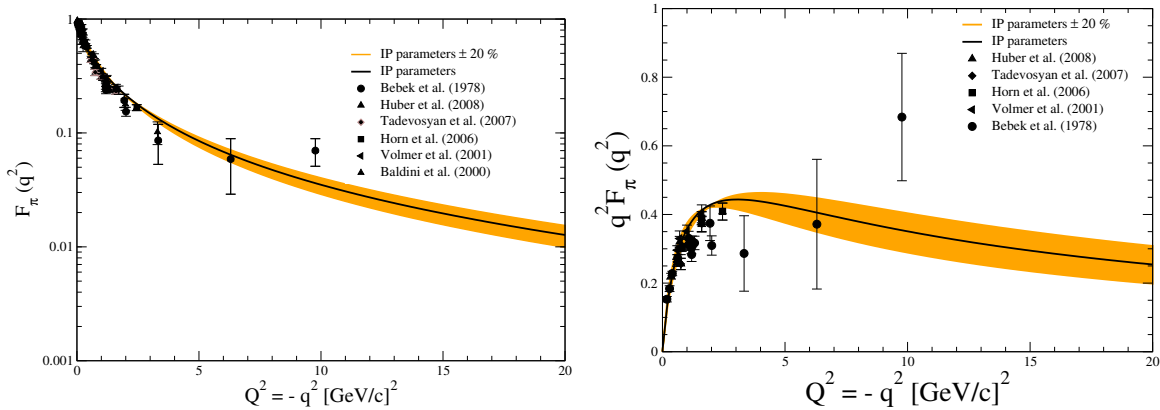


Figure 2: The pion electromagnetic form factor calculated with the model from [1], compared with the experimental data. The band represents results obtained from a $\pm 20\%$ variation of the parameters.

In the present work, the pion space-like electromagnetic form factor is calculated with a quark electromagnetic current operator that satisfies the Ward-Takahashi identity to ensure current conservation [1]. For the original set of parameters we have a good agreement with the experimental

electromagnetic radius for the pion, $r_{\pi}^{Exp.} = 0.659 \pm 0.004 [fm]$, and also, for the weak pion decay constant, $f_{\pi}^{Exp.} = 90.276 \pm 0.0707 [MeV]$ (PDG [11]). The new results for the pion electromagnetic form factor shown in Fig.(2), electromagnetic radius and the weak decay constant, are found to be consistent with the experimental data [7, 8, 9, 10, 11], taking into account a 20 % variation for the model parameters. The resulting band encodes the present experimental data and provides an estimation of the expected error in the prediction of the form factor for large momentum transfers. Also, in the present work, we sketch the derivation of the Nakanishi weight functions of the model, which will allow to investigate the effect of the quark self-energy in these functions preparing the basis for more refined approaches.

References

- [1] Clayton S. Mello, J.P.B.C. de Melo, T. Frederico, *Minkowski space pion model inspired by lattice QCD running quark mass*, Phys. Lett. B **766** (2017) 86.
- [2] E. Rojas, J. P. B. C. de Melo, B. El-Bennich, O. Oliveira and T. Frederico, *On the Quark-Gluon Vertex and Quark-Ghost Kernel: combining Lattice Simulations with Dyson-Schwinger equations*, JHEP **1310** (2013) 193, [arXiv:1306.3022 [hep-ph]].
- [3] M. B. Parappilly, P. O. Bowman, U. M. Heller, D. B. Leinweber, A. G. Williams and J. B. Zhang, *Scaling behavior of quark propagator in full QCD*, Phys. Rev. D **73** (2006) 054504.
- [4] N. Nakanishi, *Partial-Wave Bethe-Salpeter Equation*, Phys. Rev. **130** (1963) 1230. *ibid.*, *A General survey of the theory of the Bethe-Salpeter equation*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **43** (1969) 1.
- [5] J. Carbonell and V. A. Karmanov, *Solving Bethe-Salpeter equation for two fermions in Minkowski space*, Eur. Phys. J. A **46** (2010) 387.
- [6] Jozef Dudek et al., *Physics Opportunities with the 12 GeV Upgrade at Jefferson Lab*, Eur. Phys. J. A **48** (2012) 187, [arXiv:1208.1244 [hep-ex]].
- [7] J. Volmer et al. [Jefferson Lab F(pi) Collaboration], *Measurement of the Charged Pion Electromagnetic Form-Factor*, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 1713, [nucl-ex/0010009].
- [8] T. Horn et al. [Jefferson Lab F(pi)-2 Collaboration], *Determination of the Charged Pion Form Factor at $Q^2 = 1.60$ and $2.45-(GeV/c)^2$* , Phys. Rev. Lett. **97**, 192001 (2006) 192001, [nucl-ex/0607005].
- [9] V. Tadevosyan et al. [Jefferson Lab F(pi) Collaboration], *Determination of the pion charge form-factor for $Q^{*2} = 0.60-GeV^2 - 1.60-GeV^2$* , Phys. Rev. C **75**, 055205 (2007) 055205, [nucl-ex/0607007].
- [10] G. M. Huber et al. [Jefferson Lab Collaboration], *Charged pion form-factor between $Q^{*2} = 0.60-GeV^{*2}$ and $2.45-GeV^{*2}$. II. Determination of, and results for, the pion form-factor*, Phys. Rev. C **78**, (2008) 045203, [arXiv:0809.3052 [nucl-ex]].
- [11] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. **D98** (2018) 030001 and 2019 update.

Exploring the flavor content of light and heavy-light pseudoscalars

R. M. Moita,¹ J. P. B. C. de Melo^{1,2}, K. Tsushima^{1,2} and T. Frederico¹

¹*Instituto Tecnológico de Aeronáutica, DCTA, 12228-900 São José dos Campos, Brazil*

²*Laboratório de Física Teórica e Computacional-LFTC, Universidade Cruzeiro do Sul and Universidade Cidade de São Paulo (UNICID) 01506-000 São Paulo, Brazil*



(Received 4 April 2021; accepted 6 October 2021; published 30 November 2021)

The electroweak properties of light and charmed D and D_s pseudoscalar mesons are investigated within a unified covariant constituent quark model. The quark-antiquark-meson vertices are assumed to have a symmetric form by the exchange of quark momenta, which is successful in describing the light pseudoscalar meson properties. The flavor decomposition of the elastic electromagnetic form factors, electromagnetic charge radii, and weak decay constants are calculated. Based on the results a discussion on the SU(3) and SU(4) symmetry breaking is made and a comparison with the pion and kaon properties to highlight the Higgs contribution to the structure of these mesons.

DOI: [10.1103/PhysRevD.104.096020](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.104.096020)

I. INTRODUCTION

The interplay between dynamical and explicit chiral symmetry breaking in quantum chromodynamics (QCD), drives the properties of the heavy-light pseudoscalar mesons, like D and D_s , where dressing of the light quarks comes together with the mass of the heavy partner from the coupling to the Higgs boson. The consequence of the dynamical chiral symmetry breaking is the dressing of the light quarks (u, d, s) and the Goldstone boson nature of the pion and kaon (see, e.g., [1,2]), while in heavy sector the charm quark basically acquires its mass from the Higgs coupling, breaking badly the SU(4) flavor symmetry, separating the Goldstone bosons formed by $u\bar{d}$ and $u\bar{s}$ from the $c\bar{d}$ and $c\bar{s}$ pseudoscalars (see, e.g., [3,4]).

The evolution of the structural properties of the pseudoscalar mesons within the SU(4) multiplet allows to study the competition between the two mass generation mechanisms, as the constituent quark masses change from a couple of hundreds of MeV, of the order of Λ_{QCD} , to the GeV scale. Each meson encodes the full complexity of QCD in Minkowski space, namely its wave function, for example in the light-front (LF), is spread out over an infinite set of Fock-components [5], while by itself the dressed quark degree of freedom encodes such rich structure and it is considered a building block, since the primordial era of studies of the strong interaction. Nowadays, QCD studies of

mesons are far beyond such naive representations with several groups performing lattice (LQCD) calculations over the world. Also, the dressing of light quarks, gluons and ghosts have been computed within LQCD (see, e.g., [6]) strengthening the concept of effective quark and gluon degrees of freedom as the building blocks in phenomenological descriptions of hadrons. On the other hand the heavy quarks are barely dressed by gluons, and the Higgs coupling being the dominant effect to acquire their masses.

The well separated mass scales of the light and the charm quarks should manifest in the heavy-light meson internal structure, as already recognized long ago (see, e.g., [7,8]). The combined study of mesons, where the largest component in their wave functions are the non-exotic ones, namely a $q\bar{q}$, formed by a dressed light quark and antiquark or a heavy-light $q\bar{q}$ pair, should allow us to follow the transition in the internal structure when a light quark is substituted by a heavy one. In the extreme situation where the heavy mass tends to infinity, the heavy quark in the $q\bar{q}$ valence component is placed at the center of mass of the meson, while the light quark explores the confining QCD interaction. The pseudoscalar mesons radically change from the Goldstone boson nature of the pion and kaon, associated with dynamical symmetry breaking, to for example D and D_s , where the chiral symmetry is explicitly broken. Such physical transition should be manifested in the structure of these mesons, and in particular in their charge distribution. In the heavy quark limit part of the charge should be distributed at the short-range, while an another part at larger distances, while for the pion and kaon, both the quark and antiquark should bring somewhat similar charge distributions, apart the individual charge carried by each constituent. This sharp modification in the structure of the light-light to the heavy-light pseudoscalars should be reflected in the elastic

Published by the American Physical Society under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International license](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). Further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the published article's title, journal citation, and DOI. Funded by SCOAP³.

electromagnetic (EM) form factors, and in particular in their flavor decomposition.

Experimental information on the EM form factors of the pion and kaon are available in Refs. [9–13] and [14,15], respectively. Furthermore the charge radii of the pion and kaon are quite well determined to be, respectively, $r_\pi = 0.672 \pm 0.08$ fm and $r_K = 0.560 \pm 0.03$ fm (see [16] and references therein). However, it is still missing experimental information on the elastic EM form factors of the charged D and D_s mesons, which would be essential to address the structural modifications moving from Goldstone bosons to the heavy-light pseudoscalars. On the other side, *ab-initio* calculations of the D and D_s charge radii at the physical pion mass point are not yet available, although some results were obtained within a $2 + 1$ flavor LQCD [17] for pion masses from 300 up to 700 MeV and with twisted boundary conditions [18] for pion masses of 300 and 315 MeV. The extracted charge radius were found around 0.4 fm for the D^+ and somewhat smaller for the D_s^+ , indicating the decrease in the size of these mesons with respect to the charged pion and kaon, as follows from the Higgs coupling to the heavy quarks in opposition to the light ones acquiring dynamically their masses. The performed flavor decomposition of the charge radius clearly supports the physical picture outlined before. Additionally, the EM form factors and the corresponding flavor decomposition for the D^+ up to 1.5 GeV² [17] and for D^+ and D_s^+ below 1.2 GeV² were computed within LQCD [18]. It is of note that the scarce information of the EM structure of the pseudoscalar mesons is contrasted by the knowledge of the weak decay constants from the experiments and LQCD calculations (see, e.g., [16]), which is an important piece of information of the meson valence wave function at short distances, and necessary to be taken into account by phenomenological models.

The above discussion featuring the evolution of the pseudoscalar meson structure from light to heavy-light mesons as represented by their charge distributions, motivates our study of π^+ , K^+ , D^+ , and D_s^+ within a common and covariant framework with a minimum number of scale parameters, besides the constituent quark masses, all embody in a Bethe-Salpeter (BS) amplitude model. It corresponds to the matrix element of an interpolating operator between the vacuum and the meson state which is built with a minimum number of field operators characterized by the meson quantum numbers [19]. The BS model has a constituent quark and antiquark and a pseudo scalar vertex with one scale parameter, in a generalization of the model proposed in [20], applied with success to compute the pion electroweak properties, and later on used to study the kaon and D^+ electromagnetic form factors [21,22]. Furthermore, the projection of the $q\bar{q}$ BS amplitude to the LF gives the valence component of the wave function (see, e.g., [23,24]), which allows one to explore the valence quark momentum distributions (see, e.g., [25,26]).

In the present work, the BS amplitude model [20] is applied to compute the EM form factors of π^+ , K^+ , D^+ and D_s^+ , as well as their flavor decomposition, via the Mandelstam formula [27], represented by the triangle Feynman diagram. The model has constituent quarks u , d , s and c , with fixed masses and one individual scale parameter fitted to the well known value of each meson decay constant. The model is covariant and conserves the EM current, as the constituent quarks are point like, with a bare current, which trivially satisfy the Ward-Takahashi identity [19]. In addition, the decay constant is computed from the antialigned quark spin component of the LF valence wave function, which is derived from the BS amplitude model.

In Sec. II, an analytical form for the Bethe-Salpeter amplitude in terms of constituent quarks for the pseudoscalars, π^+ , K^+ , D^+ and D_s^+ is proposed within a unified covariant model, and from that the weak decay constant is derived, and its association with the antialigned quark spin component of the valence LF wave function is presented. In Sec. III, the electromagnetic current for the elastic process is constructed, the flavor decomposition of the elastic electromagnetic form factors is derived, and the method for treating numerically the loop integrations with LF technique is discussed. The results for the static electroweak observables are provided in Sec. IV, and discussed in comparison with LQCD calculations and other models. The electromagnetic form factors from our model are discussed in Sec. V and compared with the vector meson dominance model and with experimental data for the pion and kaon, while for D^+ and D_s^+ with LQCD results. The work is closed in Sec. VI with a summary of the main results.

II. THE COVARIANT FRAMEWORK

A. Quark-meson spin coupling: Effective Lagrangian

We adopt here a simple scheme to build the spin coupling of the quark-antiquark pair to build the meson starting from an effective Lagrangian. Note that, later on a meson vertex will be introduced carrying a mass scale dictated by the weak decay constant.

We start by coupling the quark to the pseudoscalar meson field within the SU(4) flavor symmetry scheme, which is expressed by the following effective Lagrangian:

$$\mathcal{L}_I = -ig\bar{\Psi}M_{\text{SU}(4)}\gamma^5\Psi \equiv -i\frac{g}{\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{15}(\bar{\Psi}\lambda_i\gamma^5\Psi)\varphi^i, \quad (1)$$

where g is a coupling constant, λ_i ($i = 1, \dots, 15$) are the SU(4) Gell-Mann matrices [28], φ^i is the Cartesian components of the pseudoscalar meson fields, the quark field is $\Psi^T = (u, d, s, c)$ (T : transposition) decomposed in its quark-flavor components and

$$M_{SU(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_c}{\sqrt{12}} & \pi^+ & K^+ & \bar{D}^0 \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_c}{\sqrt{12}} & K^0 & D^- \\ K^- & \bar{K}^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\eta + \frac{\eta_c}{\sqrt{12}} & D_s^- \\ D^0 & D^+ & D_s^+ & -\frac{3\eta_c}{\sqrt{12}} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

is the SU(4) pseudoscalar meson field matrix [29–31].

In particular, the positively charged pseudo-scalar mesons which we focus in this study are selected from the SU(4) meson matrix through the traces

$$\begin{aligned} \pi^+ &= \text{Tr}[M_{SU(4)} \lambda_{\pi^+}], \quad K^+ = \text{Tr}[M_{SU(4)} \lambda_{K^+}], \\ D^+ &= \text{Tr}[M_{SU(4)} \lambda_{D^+}], \quad D_s^+ = \text{Tr}[M_{SU(4)} \lambda_{D_s^+}], \end{aligned} \quad (3)$$

where the flavor matrices are given by:

$$\begin{aligned} \lambda_{\pi^+} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_1 + i\lambda_2), \quad \lambda_{K^+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_4 + i\lambda_5), \\ \lambda_{D^+} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_{11} - i\lambda_{12}), \quad \lambda_{D_s^+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_{13} - i\lambda_{14}), \end{aligned} \quad (4)$$

and the corresponding physical mesons are indicated by the subindices.

B. Bethe-Salpeter amplitude model

The effective Lagrangian from Eq. (1), is associated to a meson vertex without structure and pointlike, introduced only to guide us in a practical form to build both the spin and favor composition of each meson. In what follows, we will allow the meson vertex to have an extension, represented by a scalar function to keep the covariance of the model. In this way, the Bethe-Salpeter amplitude model for the pseudoscalar mesons considered in this study is given by:

$$\Psi_M(k, p) = S_q(k) \gamma^5 g \Lambda_M(k, p) \lambda_M S_q(k - p), \quad (5)$$

where the constituent quark propagator is

$$S_q(k) = i[\not{k} - \hat{m}_q + i\epsilon]^{-1}, \quad (6)$$

and the quark constituent mass matrix is diagonal,

$$\text{diag}[\hat{m}_q] = [m_u, m_d, m_s, m_c].$$

The vertex function for the pseudoscalar mesons, $M = (\pi, K^+, D^+, D_s^+)$, adopted in the present work is

$$g \Lambda_M(k, p) = \frac{C_M}{k^2 - \mu_M^2 + i\epsilon} + [k \rightarrow p - k], \quad (7)$$

which generalizes the model proposed in Ref. [20] for the pion and the kaon [22] to the heavy-light case. The model assumes that the infrared (IR) dynamics of QCD is translated to the mass scale, μ_M , for each pseudoscalar meson in the SU(4) flavor multiplet. The ultraviolet (UV) physics is reflected in the analytic form of the vertex function. The constant C_M also depends on the meson and it is determined by the covariant normalization of the BS amplitude:

$$\begin{aligned} 2i p^\mu &= N_c \text{Tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} g^2 \Lambda_M^2(k, p) \\ &\times [\gamma^5 \lambda_M S_q(k - p) \gamma^\mu S_q(k - p) \gamma^5 \lambda_M^\dagger S_q(k) \\ &+ \gamma^5 \lambda_M^\dagger S_q(k + p) \gamma^\mu S_q(k + p) \gamma^5 \lambda_M S_q(k)], \end{aligned} \quad (8)$$

where it was made the simplified assumption that the kernel which would have given origin to this particular vertex function had no dependence on the total momentum, as it is the case of the ladder approximation of the BS equation (see, e.g., [26,32]).

The breaking of the SU(4) symmetry is reflected in the variation of the mass scale μ_M and the constituent quark masses as a consequence of both mass generation by the Higgs mechanism and the dynamical chiral symmetry breaking. In particular, μ_M is obtained by fitting f_M , the weak decay constant of the meson M , for a given set of constituent quark masses.

We observe that the masses of the constituent quarks are associated to an energy scale characteristic of each meson. Such energy scale sets the initial condition for the evolution to obtain the parton distribution function at the different energy scales. For practical applications, it is about 0.5 GeV for the pion (see, e.g., [25]), but could change with the meson.

Another comment is appropriate, in order to keep the simplicity of the present phenomenological covariant model, we have adopted the same form of the vertex function for all mesons, which at large momentum behaves as $1/k^2$. Such asymptotic form should naively correspond to the situation where the quark and antiquark, exchange a very large momentum, flowing through the one-gluon exchange

interaction, that due to the asymptotic freedom dominates the short-distance dynamics of the system (see, e.g., Ref. [33]). Of course, we could have other types of vertices, at the expense of introducing more parameters, but we chose to keep the minimal number of scale parameters in this work, namely one per meson.

C. Weak decay constant

The pion weak decay constant is a measure of the strong interaction dynamical scale, and as such a fundamental requirement that a model satisfies. The weak decay constant comes as a balance of both short-range and long-range QCD physics to the meson valence wave function, and therefore a necessary constrain in phenomenological models. In the present work, the chosen model satisfies such physical requirement not only for the pion but also for all the pseudoscalar mesons. The pseudoscalar meson decay constants encode relevant physical information on the structure of the pseudoscalar mesons, allowing together with the Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) matrix elements [16,34] via the leptonic weak decay, $M \rightarrow l\nu_l$ (l represents the charged leptons, $l = e, \mu, \tau$) to obtain the weak decay width. In the lowest order it is given by [16,34]:

$$\Gamma(M \rightarrow l\nu_l) = \frac{G_F^2}{8\pi} f_M^2 m_l^2 m_M \left(1 - \frac{m_l^2}{m_M^2}\right)^2 |V_{q_1 q_2}|^2, \quad (9)$$

where, G_F is the Fermi coupling constant, m_l is the lepton mass, m_M is the pseudoscalar meson mass, and $V_{q_1 q_2}$ is the corresponding CKM matrix element.

The pseudoscalar meson decay constant, f_M , is defined through the matrix element of the axial-vector current operator [19,35],

$$\langle 0 | A_\mu^j | M^k \rangle = i p_\mu f_M \delta^{jk}, \quad (10)$$

where $A_\mu^j = \bar{q}(0) \gamma_\mu \gamma^5 \frac{\lambda_j}{2} q(0)$ is the axial-vector current. The indices j and k identify the isospin (flavor) components of the current operator and pseudoscalar meson.

According to the diagram shown in Fig. 1, we obtain the following expression for the decay constant, with the vertex function from Eq. (7):

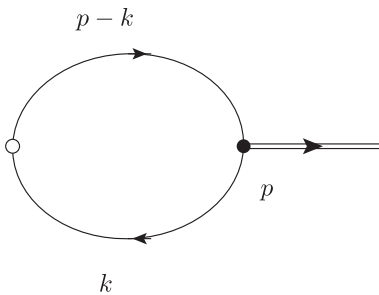


FIG. 1. Diagrammatic representation of the pseudoscalar meson weak decay amplitude.

$$i p^\mu f_M = N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^5 \lambda_M^\dagger \Psi(k, p)], \quad (11)$$

where the pseudoscalar meson is simply labeled by M and the trace is taken over the spinor and flavor spaces. $N_c = 3$ is the number of quark colors.

The decay constant f_M in (11) is evaluated in the rest frame of the pseudoscalar meson, $p^\mu = (m_M, \vec{0})$, considering the plus component of the axial-vector current corresponding to $\gamma^+ \gamma^5 = (\gamma^0 + \gamma^3) \gamma^5$, and the loop integration is performed with LF momentum. After integration over the LF energy k^- , we obtain:

$$f_M = \frac{N_c}{4\pi^3} \int d^2 k_\perp \int_0^1 dx \psi_M(x, \vec{k}_\perp; m_M, \vec{0}_\perp), \quad (12)$$

where ψ_M is the momentum part of the antialigned quark spin component of the pseudoscalar meson valence wave function, given by:

$$\begin{aligned} \psi_M(x, \vec{k}_\perp; p^+, \vec{p}_\perp) &= \frac{p^+}{m_M} \frac{g C_M}{m_M^2 - \mathcal{M}^2(m_q, m_{\bar{q}})} \\ &\times \left[\frac{1}{(1-x)(m_M^2 - \mathcal{M}^2(m_q, \mu_M))} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{x(m_M^2 - \mathcal{M}^2(\mu_M, m_{\bar{q}}))} \right] \\ &\quad + [m_q \leftrightarrow m_{\bar{q}}], \end{aligned} \quad (13)$$

where, $x = \frac{k^+}{p^+}$, $0 < x < 1$, and

$$\mathcal{M}^2(m_1, m_2) = \frac{|\vec{k}_\perp|^2 + m_1^2}{x} + \frac{|\vec{p}_\perp - \vec{k}_\perp|^2 + m_2^2}{1-x} - |\vec{p}_\perp|^2. \quad (14)$$

Note that, the valence wave function is obtained from the Bethe-Salpeter amplitude (5), by integration over the light-front energy, k^- , after the instantaneous terms of the quark propagators are dropped out (see Ref. [23] for more details). The plus component of the axial-vector current in (11) due to the property $(\gamma^+)^2 = 0$ kills the instantaneous terms of the quark propagator and the choice of $\gamma^+ \gamma^5$ to obtain the decay constant selects the valence wave function with antialigned quark spins (see Refs. [24,26]).

III. ELECTROMAGNETIC CURRENT

The quark electromagnetic current operator for the photo-absorption process in a pointlike constituent quark is defined by,

$$j^\mu = \frac{2}{3} \bar{u} \gamma^\mu u + \frac{2}{3} \bar{c} \gamma^\mu c - \frac{1}{3} \bar{d} \gamma^\mu d - \frac{1}{3} \bar{s} \gamma^\mu s \quad (15)$$

where u, d, s , and c are the quark fields. In the flavor space

$$\text{diag}[\hat{Q}] = [e_u, e_d, e_s, e_c] = [2/3, -1/3, -1/3, 2/3],$$

is the charge operator defined by a diagonal matrix.

$$\begin{aligned} \langle p'; M | j_1^\mu | p; M \rangle &= -iN_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} g\Lambda_M(k, p') g\Lambda_M(k, p) \text{Tr} [\gamma^5 \lambda_M S_q(k-p) \hat{Q} \gamma^\mu S_q(k-p') \gamma^5 \lambda_M^\dagger S_q(k)], \\ \langle p'; M | j_2^\mu | p; M \rangle &= -iN_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} g\Lambda_M(k, p') g\Lambda_M(k, p) \text{Tr} [\gamma^5 \lambda_M^\dagger S_q(k+p') \hat{Q} \gamma^\mu S_q(k+p) \gamma^5 \lambda_M S_q(k)], \end{aligned} \quad (16)$$

where the trace is performed over the Dirac and flavor indices, and the total microscopic current is

$$\langle p'; M | j^\mu | p; M \rangle = \langle p'; M | j_1^\mu | p; M \rangle + \langle p'; M | j_2^\mu | p; M \rangle. \quad (17)$$

Note the above expression contains the two diagrams shown in Fig. 2, and they are written in flavor space and represent the photon being absorbed by each quark of the meson.

The spacelike elastic electromagnetic form factor is extracted by equating the covariant expression (16) to the macroscopic formula of the current:

$$\langle p'; M | j^\mu | p; M \rangle = (p'^\mu + p^\mu) F_M(q^2), \quad (18)$$

where $q = p' - p$ is the momentum transfer and $F_M(q^2)$ is the elastic electromagnetic form factor.

We point out that the normalization constant C_M appearing in the vertex function (7) is determined by $F_M(0) = 1$, i.e., the form factor normalization. In addition, the mass scale, μ_M , is fitted to reproduce the experimental weak decay constant. The constituent quark mass values (m_q) are chosen according to previous studies [20,22,37] with similar covariant models.

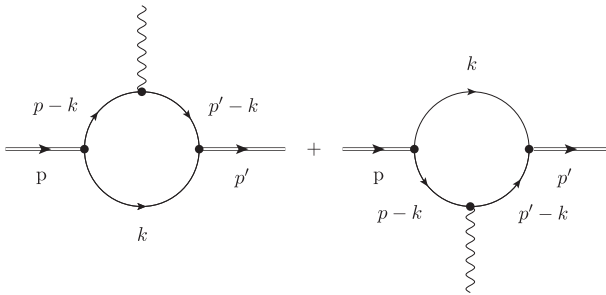


FIG. 2. Feynman diagrams representing the electromagnetic interactions with pseudoscalar mesons for calculating the elastic electromagnetic form factors in the present work, where expressions for each meson are given in Eq. (22).

The matrix element of the electromagnetic current for each meson is obtained from the Mandelstam formula represented by the Feynman diagrams depicted in Fig. 2 (cf. Hutaurok *et al.* [36]):

A. Flavor decomposition

We can separate the individual contribution from each quark in Eq. (16) by writing the two traces as the sum of two terms: one associated with the photon being absorbed by the quark with charge $+2/3$; and other one corresponds to the antiquark with charge $+1/3$. Therefore, we have that for the sum of the two traces:

$$\text{Tr}[\hat{Q}] = 2 \left(\frac{2}{3} \Delta_{\bar{a}ba}^\mu + \frac{1}{3} \Delta_{\bar{b}ab}^\mu \right), \quad (19)$$

which can be rewritten simply as:

$$\Delta_{aba}^\mu = \text{Tr} [\gamma^5 S_q^a(k-p) \gamma^\mu S_q^a(k-p') S_q^b(k) \gamma^5], \quad (20)$$

the same as (16) j_1^μ , where the diagonal matrix element of the quark propagator is S_q^a for flavor a . The photon probes in each case the quark or antiquark labeled a in the first term and \bar{b} in the second term of Eq. (19), corresponding to the quarks (u or c) and to the antiquarks (\bar{d} or \bar{s}), respectively.

Therefore, the matrix element of the current can be decomposed in the quark flavor content according to:

$$\begin{aligned} \langle p'; M | j^\mu | p; M \rangle &= -2iN_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} g\Lambda_M(k, p') g\Lambda_M(k, p) \\ &\times \left(\frac{2}{3} \Delta_{\bar{a}ba}^\mu + \frac{1}{3} \Delta_{\bar{b}ab}^\mu \right), \end{aligned} \quad (21)$$

where the photon interacts with the quark a in the first term and with the antiquark \bar{b} in the second one. From that we can write the flavor decomposition of the form factors

$$\begin{aligned} F_{\pi^+}(q^2) &= \frac{2}{3} F_{u\bar{d}u}(q^2) + \frac{1}{3} F_{\bar{u}d\bar{u}}(q^2), \\ F_{K^+}(q^2) &= \frac{2}{3} F_{u\bar{s}u}(q^2) + \frac{1}{3} F_{\bar{u}s\bar{u}}(q^2), \\ F_{D^+}(q^2) &= \frac{2}{3} F_{c\bar{d}c}(q^2) + \frac{1}{3} F_{\bar{d}c\bar{d}}(q^2), \\ F_{D_s^+}(q^2) &= \frac{2}{3} F_{c\bar{s}c}(q^2) + \frac{1}{3} F_{\bar{s}c\bar{s}}(q^2). \end{aligned} \quad (22)$$

In the SU(2) isospin symmetry limit with the u and d quark masses being equal, Eq. (21) implies that $F_{\pi^+}(q^2) = F_{u\bar{d}u}(q^2) = F_{\bar{d}u\bar{d}}(q^2)$. For K^+ , D^+ and D_s^+ , respectively the SU(2), S(3) and SU(4) symmetries are broken. By the charge conservation, it is required that

$$\begin{aligned} F_{u\bar{s}u}(0) &= F_{\bar{s}u\bar{s}}(0) = 1, \\ F_{c\bar{d}c}(0) &= F_{\bar{d}c\bar{d}}(0) = 1, \\ F_{c\bar{s}c}(0) &= F_{\bar{s}c\bar{s}}(0) = 1. \end{aligned} \quad (23)$$

The partial quark contributions to each meson form factor becomes different when increasing the momentum transfer, despite the same normalization, as will be shown by our calculations.

B. LF technique

The calculation of the elastic photo-absorption transition amplitude, Eq. (21), is performed in the Breit frame, with the choice of initial and final meson four-momentum $p^\mu = (\sqrt{m_M^2 + \frac{1}{4}q_x^2}, -\frac{1}{2}q_x, 0, 0)$ and $p'^\mu = (\sqrt{m_M^2 + \frac{1}{4}q_x^2}, \frac{1}{2}q_x, 0, 0)$, respectively. Furthermore, the meson light-front momentum components are chosen as $p^+ = p'^+ = p^- = p'^-$, $p'_\perp = (q_x/2, 0)$ and $p_\perp = (-q_x/2, 0)$, which corresponds to $q^+ = 0$ fulfilling the Drell-Yan condition [38]. The form factor is obtained from the plus component of the EM current $J^+ = J^0 + J^3$, implying in the usage of the quark current associated with $\gamma^+ = \gamma^0 + \gamma^3$ in Eq. (21), when the relevant Dirac trace is performed, to give:

$$F_M(q^2) = \frac{1}{2p^+} \langle p' | J_M^+ | p \rangle. \quad (24)$$

We should stress that the choice γ^+ eliminates the instantaneous terms of the fermion propagators attached to the quark EM current. The loop integration is carried out analytically

over k^- , the light-front energy, and, after the integrations over k^+ and k_\perp are performed. Relevant to observe that the choice of the Drell-Yan frame and plus component of the current is enough to eliminate the end-point singularities for this pseudoscalar model (see [20,39]). However, for frames with $q^+ \neq 0$, in order to preserve the full covariance of the model, it is necessary to take into account a nonvalence contribution to the form factor [20,40].

As a technical remark, the Feynman parametrization could be used alternatively to evaluate the one-loop integrals, keeping the explicit covariance of the model at all steps of the calculations. For our purpose, using the light-cone variables, as we did, or Feynman parametrization should not affect the quantitative results.

IV. STATIC ELECTROWEAK OBSERVABLES

The Bethe-Salpeter amplitude model for the π , K , D , and D_s has for each meson three parameters: the constituent quark masses m_q with q from $\{u, d, s, c\}$ and a mass scale μ_M [see Eqs. (5) and (7)]. The parameter μ_M constrains the model to provide the observed weak decay constant. We work here with six sets of parameters, namely (A,B,C,D,E, F), which respectively correspond to the pseudoscalar mesons (π^+ , π^+ , K^+ , K^+ , D^+ , D_s^+), as well as to the different choices of quark masses as given in Table I. The choices of constituent quark masses are: for the light quark mass values of 384 MeV as estimated in [37] (386 MeV was used in [37]) and 220 MeV [20]; the strange constituent mass values of 508 MeV [37] and 440 MeV [22]; and, the charm constituent mass value of 1623 MeV from [37], (see also, the reference [37] for discussions). Note that, the constituent quark mass values for all the models (A), (C), (E), and (F) are from Ref. [37] in the calculation. However, we are assuming that the energy scale associated with each meson should be the same, which may not be valid. We will return to this point later.

The static observables considered, i.e., the charge radius and decay constant, are shown in Table I, where the

TABLE I. Pseudoscalar meson static electroweak observables. The notation for the entries, (A,B,C,D,E,F) respectively correspond to the different model parameters and pseudoscalar mesons for (π^+ , π^+ , K^+ , K^+ , D^+ , D_s^+). In particular, the results with models B and D are from Ref. [22]. Note that, all the relevant constituent quark mass values for the models A, C, E, and F, are from Ref. [37]. The experimental data come from Refs. [16,34]. The masses m_q , $m_{\bar{q}}$, μ_M , binding energy (ϵ_M) and decay constant (f_M) are given in [MeV]. The charge radius (r_M) is given in [fm].

| Model/meson | Flavors | $I(J^P)$ | m_q | $m_{\bar{q}}$ | m_M | ϵ_M | μ_M | r_M | f_M | r_M^{Expt} | f_M^{Expt} |
|-------------|------------|--------------------|-------|---------------|-------|--------------|---------|-------|-------|---------------------|----------------------------|
| (A) π^+ | $u\bar{d}$ | $1(0^-)$ | 384 | 384 | 140 | 628 | 225 | 0.665 | 92.55 | 0.672(8) | 92.28(7) [16] |
| (B) | | | 220 | 220 | | 300 | 600 | 0.736 | 92.12 | | |
| (C) K^+ | $u\bar{s}$ | $\frac{1}{2}(0^-)$ | 384 | 508 | 494 | 398 | 420 | 0.551 | 110.8 | 0.560(3) | 110(1) [16] |
| (D) | | | 220 | 440 | | 166 | 600 | 0.754 | 110.8 | | |
| (E) D^+ | $c\bar{d}$ | $\frac{1}{2}(0^-)$ | 1623 | 384 | 1869 | 138 | 1607 | 0.505 | 144.5 | | 144(3) [16] |
| (F) D_s^+ | $c\bar{s}$ | $0(0^-)$ | 1623 | 508 | 1968 | 163 | 1685 | 0.377 | 182.7 | | 182(3) [16] 179(5) [34] |

available experimental data for these two quantities come from Ref. [16], and from [34] for the D_s^+ weak decay constant. In addition, the model binding energy shown in the table is given by:

$$\epsilon_M = m_q + m_{\bar{q}} - m_M > 0. \quad (25)$$

The pion and kaon appear as strongly bound systems with binding energies ranging from about 600 to 400 MeV, respectively, for the best agreement with the charge radius by fitting the decay constants. Both mesons are the Goldstone bosons of the dynamically broken chiral symmetry, and their masses in the chiral limit vanishes according to the Gell-Mann-Oakes-Renner relation, indicating that these states should form strongly bound quark-antiquark systems with constituent quark degrees of freedom.

The Cutkosky rules [19] applied to the triangle diagram (see Fig. 2) taking into account our model for the vertex function, give that the relevant cuts as function of m_M that have branch points in the regions:

$$\mu_M + m_q - m_M > 0 \quad \text{and} \quad \mu_M + m_{\bar{q}} - m_M > 0. \quad (26)$$

These branch points are also clear in the analytic form of Eq. (13) for the wave function. The minimum value of the position of the branch point is actually the dominant scale that determines the charge radius. From the perspective of the closest value to the continuum, namely corresponding to the minimum value among ϵ_M and the branch points in Eq. (26), we can analyze the results for the parametrizations after fitting the decay constants as given in Table I.

For the pion, one finds for sets (A) and (B), 469 and 680 MeV, respectively, for the closest branch point to the continuum. That shows a strongly bound system of constituent quarks, and not surprisingly closer values for the two sets than the binding energies. For the kaon, the sets (C) and (D) present the branching points at 310 and 326 MeV,

respectively, that are somewhat closer than considering the comparison only of the binding energies.

For the D^+ , set (E), one realizes that in agreement with the constraint coming from Eq. (26), the value of $\mu_M \sim m_c$, and the minimum branch point is actually at 122 MeV, that is associated with the charge radius of 0.505 fm, while for the D_s^+ we find 225 MeV, and a radius of 0.377 fm. The larger value of the D_s^+ branch point and the concomitant decreasing of the radius with respect to D^+ come from the larger value of $f_{D_s^+}$ and m_s in comparison to f_{D^+} and m_d . Therefore, the quarks in D_s^+ are in a more compact configuration than the corresponding ones in D^+ , and it is expect in general that $r_{D_s^+} < r_{D^+}$.

Analogous qualitative explanation of the fact that $r_{K^+} < r_{\pi^+}$ should be valid. As we will discuss later on, LQCD results obtained using consistent data sets shows that $r_{D_s^+} < r_{D^+}$ [17,18], supporting our expectation.

The minimum value of the position of the branch point is actually the dominant scale that determines the charge radius. From the perspective of the closest value to the continuum, namely corresponding to the minimum value among ϵ_M and the branch points in Eq. (26).

A. Pion and kaon

In Table II we present our results for the pion (A) and kaon (C) charge radii for the sake of comparison with other calculations [32,36,41–46]. Our collection of results from the literature is by no means complete, and our intention is just to place our model with respect to a sample that covers continuum approaches to QCD with Euclidean Schwinger-Dyson and Bethe-Salpeter, phenomenological ones with and without confinement. In the table, we also show the experimental results from [16,34].

The results obtained with the Euclidean Schwinger-Dyson and Bethe-Salpeter equations with phenomenological kernels that satisfy the axial-vector Ward-identities, having dynamical chiral symmetry breaking in the

TABLE II. Decay constants and electromagnetic radii of π^+ (model A) and K^+ (model C) in the present model, compared with the other works in the literature, as well as the experimental data in particle data group (PDG) [16]. The decay constants are in [MeV], and the charge radius are in [fm].

| Reference | f_π^+ | f_K^+ | r_{π^+} | r_{K^+} | f_{K^+}/f_{π^+} |
|-----------------------------|-----------|---------|-------------|-----------|---------------------|
| This work | 92.55 | 110.8 | 0.665 | 0.551 | 1.196 |
| Maris & Tandy [32] | 92.62 | 109.60 | 0.671 | 0.615 | 1.182 |
| Faessler <i>et al.</i> [41] | 92.62 | 113.83 | 0.65 | | 1.23 |
| Ebert <i>et al.</i> [47,48] | 109.60 | 165.45 | 0.66 | 0.57 | 1.24 |
| Bashir <i>et al.</i> [42] | 101 | | | | |
| Chen & Chang [43] | 93 | 111 | | | 1.192 |
| Hutauruk <i>et al.</i> [36] | 93 | 97 | 0.629 | 0.586 | 1.043 |
| Ivanov <i>et al.</i> [44] | 92.14 | 111.0 | | | 1.20 |
| Silva <i>et al.</i> [45] | 101 | 129 | 0.672 | 0.710 | 1.276 |
| Jia & Vary [46] | 142.8 | 166.7 | 0.68(5) | 0.54(3) | 1.166 |
| PDG [16] | 92.28(7) | 110(1) | 0.672(8) | 0.560(3) | 1.192(14) |

SU(3) sector were taken from Refs. [32,42]. A modern approach along this direction [43] has the quark-antiquark interaction composed by a flavor dependent IR part and a flavor independent UV part. We also compare with results from a relativistic constituent quark model, which implements a linear realization of chiral symmetry [41].

The solution of the Bethe-Salpeter equation for the Nambu and Jona-Lasinio (NJL) model with proper-time regularization is given in [36]. The results for the covariant confining quark model treated in Euclidean space were reviewed in Ref. [44].

Calculations performed in LF approaches [45,46] were also presented in Table II. In Ref. [45] a refined light-front phenomenological model for the pion and kaon elastic form factors, relying on the use of Pauli-Villars regulators in a non-symmetrical form, presents result close to our findings. In Ref. [46], a model with color singlet NJL and confining interactions was studied within basis of light-front quantization.

The pion and kaon are strongly bound systems of constituent quarks in the models presented, and in general they are able to provide reasonable reproduction of their decay constants and charge radii. This is the main feature learned from Table II, and once the decay constant is reproduced in the strongly bound system the charge radius follows [49,50].

B. D^+ and D_s^+ mesons

The comparison of our results and a selection of models from the literature [41,42,44,51–54] is presented in

Table III, together with the outcomes of LQCD calculations [58–17,18,55]. In the table we present the charge radii and weak decay constants for D^+ and D_s^+ mesons, as well as the experimental data from Refs. [16,34], and in particular the ratio $f_{D_s^+}/f_{D^+} = 1.226(31)(2)(3)$ [16].

The results within Euclidean Schwinger-Dyson and Bethe-Salpeter equation framework with phenomenological quark-antiquark interaction kernel that entails infrared confinement and ultraviolet one-gluon exchange from QCD applied to the heavy-light mesons were taken from Ref. [42]. The calculations within light-cone phenomenological models with confinement come from Refs. [51,52,54]. A confining potential model in instant form applied to describe the heavy-light mesons were used in [53]. The results from LQCD for decay constants were taken from Refs. [55,56], the D^+ charge radius comes from [17] and for D^+ and D_s^+ from [18]. In general, the decay constants are quite close to the experimental values, while for the charge radii there is a spread in the theory results.

Our results for the charge radii, $r_{D^+} = 0.505$ fm and $r_{D_s^+} = 0.377$ fm, are somewhat larger than the ones computed within LQCD [17,18] and the models with confinement [52,53]. The present model does not have explicit confinement, as the meson is formed as a bound state with about 100 MeV binding energy, and even considering that the decay constants were fitted the charge radii, it is not strongly constrained. Differently from the pion and kaon, the decay constant does not seem to determine definitively the charge radius. We can trace back this behavior to the dominant factor

TABLE III. D^+ and D_s^+ weak decay constants in [MeV], and the electromagnetic radius in [fm] for various models. Experimental data from [16,34].

| Reference | f_{D^+} | $f_{D_s^+}$ | r_{D^+} | $r_{D_s^+}$ | $f_{D_s^+}/f_{D^+}$ |
|-----------------------------|-----------------|-----------------|---------------------------|---------------------------|---------------------|
| This work | 144.50 | 182.70 | 0.505 | 0.377 | 1.26 |
| Faessler <i>et al.</i> [41] | 149.20 | 156.98 | | | 1.05 |
| Bashir <i>et al.</i> [42] | 155.4 | 205.1 | | | 1.32 |
| Ivanov <i>et al.</i> [44] | 145.7 | 182.2 | | | 1.25 |
| Choi [51] | 149.2 | 179.6 | | | 1.20 |
| Hwang [52] | 145.7(6.3) | 189(13) | $0.406_{+0.014}^{-0.012}$ | $0.300_{+0.023}^{-0.018}$ | 1.30(4) |
| Das <i>et al.</i> [53] | | | 0.510 | 0.465 | |
| Dhiman & Dahiya [54] | 147.8 | 167.6 | | | 1.13 |
| Tang <i>et al.</i> [59] | 295(63) | 313(67) | | | 1.06(32) |
| LQCD | | | | | |
| Aubin <i>et al.</i> [55] | 142(2)(12) | 176(2)(11) | | | 1.24(1)(7) |
| Follana <i>et al.</i> [56] | 147(3) | 170(2) | | | 1.16(3) |
| Chen <i>et al.</i> [57] | 143.1(1.6)(1.8) | 182.9(0.8)(2.0) | | | 1.28(3) |
| Carrasco <i>et al.</i> [58] | 146.6(2.6)(0.6) | 174.8(2.8)(1.0) | | | 1.19(3)(1) |
| Can <i>et al.</i> [17] | | | 0.371(17) | | |
| | | | 0.390(33) | | |
| Li & Wu [18] | | | 0.402(61) | 0.286(19) | |
| | | | 0.420(82) | 0.354(18) | |
| PDG [16] | 144(3) | 182(3) | | | 1.26(5) |
| Ablikin <i>et al.</i> [34] | | 178.8(2.6) | | | |

m_c/x carried by the valence wave function, Eq. (13), to the expression for the decay constant, Eq. (12), as the charm constituent mass is substantially larger than the light quark ones, in other words the heavy quark is close to the center of mass of the system, which corresponds to the region that the wave function is probed in the weak decay amplitude. Therefore, naively it is quite reasonable that the light quark in the BS amplitude is loosely constrained by fitting the decay constant, however its contribution to the charge radius is far more important than the charm one as one can check, e.g., in the LQCD calculations [17,18].

The light quark within the heavy meson can explore larger distances where the QCD infrared physics is relevant and from where the meson gains weight, i.e., the mass is formed, and thus, one should expect a correlation of the charge radius and the actual value of mass of the charmed mesons found within LQCD. In Table IV, we compare the charge radius of D^+ and D_s^+ with the LQCD results from Refs. [18]. For the D_s meson the LQCD radius increases with the mass and indicates that our result would be compatible, within their uncertainties. For the D , although there is a slight increase of the radius with the mass, these LQCD results have large errors to make a firm conclusion from the comparison. In the table we also show our calculation for the charge radius changing the mass of the D^+ mesons according to the LQCD values. We observe that the tendency of increasing radius by increasing the D^+ and D_s^+ meson masses as found in the LQCD calculation seems to somewhat reproduced by our model. This feature comes in our model due to the decreasing of the binding energy, which leads to the increase of the meson size. This suggests that the quantum mechanical binding mechanism is somewhat acting in these heavy-light mesons, even though the complexity of the quark confinement mechanism.

TABLE IV. Pseudoscalar meson static observables with the masses for D and D_s mesons from LQCD ensembles (B1), (C1) used in Refs. [18] to compute the EM form factors; and the present model (E,F) parameters: $m_c = 1623$ MeV, $m_u = 384$ MeV, $m_s = 508$ MeV, $\mu_{D^+} = 1607$ MeV, and $\mu_{D_s^+} = 1685$ MeV. The mass and decay constant are given in MeV, while the charge radius is given in fm.

| Inputs | (B1) | (C1) | (E,F) |
|------------------|-----------|-----------|-------|
| m_D^+ | 1737 | 1824 | 1869 |
| $m_{D_s^+}$ | 1801 | 1880 | 1968 |
| Static observ. | (B1) | (C1) | (E,F) |
| r_{D^+} [18] | 0.402(61) | 0.420(82) | |
| r_{D^+} | 0.347 | 0.422 | 0.505 |
| f_{D^+} | 205.5 | 170.3 | 144.5 |
| $r_{D_s^+}$ [18] | 0.286(19) | 0.354(18) | |
| $r_{D_s^+}$ | 0.281 | 0.312 | 0.377 |
| $f_{D_s^+}$ | 243.3 | 219.4 | 182.7 |

The flavor decomposition of the charge radii of the D^+ and D_s^+ mesons is presented in Table V, where we also compare our model with LQCD results from the linear fit and quadratic fit extrapolating to the physical pion mass given in Ref. [17], and from the ensembles (B1) and (C1) used in Refs. [18]. The flavor contribution to the D^+ and D_s^+ charge radius squared are defined as:

$$\begin{aligned}
 r_{D^+,c}^2 &= 6 \frac{\partial}{\partial q^2} F_{c\bar{d}c}(q^2)|_{q^2=0}, \\
 r_{D^+,\bar{d}}^2 &= 6 \frac{\partial}{\partial q^2} F_{\bar{d}c\bar{d}}(q^2)|_{q^2=0}, \\
 r_{D_s^+,c}^2 &= 6 \frac{\partial}{\partial q^2} F_{c\bar{s}c}(q^2)|_{q^2=0}, \\
 r_{D_s^+,\bar{s}}^2 &= 6 \frac{\partial}{\partial q^2} F_{\bar{s}c\bar{s}}(q^2)|_{q^2=0},
 \end{aligned} \tag{27}$$

and the relations to the meson charge radius are

$$\begin{aligned}
 r_{D^+}^2 &= \frac{2}{3} r_{D^+,c}^2 + \frac{1}{3} r_{D^+,\bar{d}}^2, \\
 r_{D_s^+}^2 &= \frac{2}{3} r_{D_s^+,c}^2 + \frac{1}{3} r_{D_s^+,\bar{s}}^2.
 \end{aligned} \tag{28}$$

The full charge radii given in Table V are largely dominated by the light quark contribution, and we observe this property is also shared by the LQCD calculations. The heavy quark predominantly is placed close to the center of mass of the heavy-light meson, while the light one is in the region of about 0.6–1 fm distance from the meson center. Amazingly, even being at the confinement region the charge radius contribution from the light quark is quite consistent with the more recent LQCD results from

TABLE V. Flavor decomposition of the charge radii of the D^+ and D_s^+ mesons. Comparison with LQCD results from the linear fit (L) and quadratic fit (Q) extrapolating to the physical pion mass from Ref. [17], and from the ensembles (B1) and (C1) used in Refs. [18].

| Radius (fm) | LQCD [17] | LQCD [18] | This work |
|---------------------|---------------------------------|----------------------------------|-----------|
| r_{D^+} | 0.371(17) (L) 0.390(33) (Q) | 0.402(61) (B1) 0.420(82) (C1) | 0.505 |
| $r_{D^+,c}$ | 0.226(24) (L) 0.272(29) (Q) | 0.17(15) (B1) 0.20(19) (C1) | 0.233 |
| $r_{D^+,\bar{d}}$ | 0.585(57) (L) 0.566(104) (Q) | 0.692(61) (B1) 0.718(82) (C1) | 0.810 |
| $r_{D_s^+}$ | | 0.286(19) (B1) 0.354(18) (C1) | 0.377 |
| $r_{D_s^+,c}$ | | 0.119(50) (B1) 0.222(33) (C1) | 0.218 |
| $r_{D_s^+,\bar{s}}$ | | 0.461(12) (B1) 0.545(15) (C1) | 0.576 |

Refs. [18], although we observe the tendency to overestimate these lattice calculations.

V. EM FORM FACTORS

A. Pion and kaon

The extraction of the pion charge form factor from the experimental cross section for the exclusive pion electroproduction on the proton relies on the dominance of the Sullivan process, due to the pion pole close to the allowed kinematic region for small t 's [1]. In principle, it is possible to perform exclusive electroproduction of K^+ in experiments on the proton, to extract the form factor at higher momentum transfers [1,60]. However, in the case of K^+ , there is no recent experimental data for the EM form factor. The experimental data obtained at CERN in 1986, come from the most precise measurement for the K^+ meson [15] that exist up to the present, and what will be used in the study of our model.

We start the discussion of the light pseudoscalar EM form factors based on the vector meson dominance (VMD) model, formulated by Sakurai and others [61–63]. The charge form factors of π^+ and K^+ within the VMD description are parametrized by the vector mesons masses m_ρ and m_ϕ , as:

$$F_{\pi^+}(q^2) = (e_u + e_{\bar{d}}) \frac{m_\rho^2}{m_\rho^2 - q^2}, \quad (29)$$

$$F_{K^+}(q^2) = e_u \frac{m_\rho^2}{m_\rho^2 - q^2} + e_{\bar{s}} \frac{m_\phi^2}{m_\phi^2 - q^2}, \quad (30)$$

where in the spacelike region $Q^2 \equiv -q^2 > 0$. We assume within the SU(3) flavor symmetry that the coupling constants of the ρ and ϕ are flavor independent, i.e., $g_{\rho,u} = g_{\rho,d} = g_{\phi,s}$, which implies in the expressions written in Eqs. (29) and (30). From that the ratio between the two contributions to the form factor at $Q^2 = 0$ are the same as the quark charge ratio, as in our formulation of the form factor for K^+ due to the charge conservation expressed by Eq. (23). As a matter of fact, this is also verified in our model when the charm and light quark contributions are separated in the D^+ and D_s^+ form factors.

Furthermore, at the level of the VMD, we found that the ratio between the quark contributions to $F_{K^+}(q^2)$ for $Q^2 \gg m_\phi^2$ is given by:

$$\left. \frac{e_{\bar{s}} F_{\bar{s}u\bar{s}} m_\phi^2}{e_u F_{u\bar{s}u} m_\rho^2} \right|_{(q^2 \gg m_\phi^2)} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{m_\phi^2}{m_\rho^2} = 0.86, \quad (31)$$

where the experimental meson masses are used [16]. For comparison, the present model gives $\simeq 0.56$ (at 10 GeV²) with parameters from set (C) (see Tables I and VI).

TABLE VI. Partial ratios for the electromagnetic form factors of pion (A) and kaon (C) at 10 GeV², compared with the NJL model from Ref. [36].

| Model | $\frac{F_{u\bar{s}u}}{F_{u\bar{d}u}}$ | $\frac{F_{\bar{s}u\bar{s}}}{F_{\bar{d}u\bar{d}}}$ | $\frac{e_{\bar{s}} F_{\bar{s}u\bar{s}}}{e_u F_{u\bar{s}u}}$ |
|-----------|---------------------------------------|---|---|
| This work | 0.80 | 1.10 | 0.69 |
| NJL [36] | 0.36 | 2.74 | 0.56 |

In Fig. 3, we present the results for the pion EM form factor obtained with the parameter sets (A), (B) (see Table I) and the VMD model in Eq. (29). In both panels the experimental data from [9–13] are also shown. In the upper panel of the figure, the individual quark contributions are shown up to 10 GeV² for set (A), and the contributions from the u and \bar{d} quarks are in the ratio 2 : 1, as it should be from the model with SU(2) flavor symmetry.

The comparison between the results for sets (A), (B) and the VMD model is presented in the lower panel of Fig. 3. Note that the set (A) reproduces well the experimental values of π^+ charge radius and decay constant, while set (B) performs better at large momentum transfers, but the charge radius is overvalued (see Table I). However, both sets have

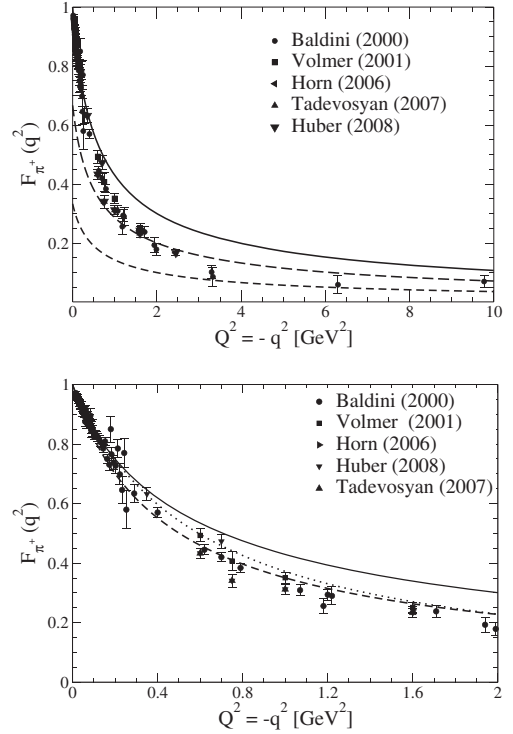


FIG. 3. Pion electromagnetic form factor as a function of $q^2 < 0$. Upper panel: flavor decomposition of $F_\pi(q^2)$ for the parameter set (A) (see Table I). Pion form factor (solid line), u contribution— $e_u F_{u\bar{d}u}$ (dashed line) and \bar{d} contribution— $e_{\bar{d}} F_{\bar{d}u\bar{d}}$ (short-dashed line). Lower panel: comparison between the parameter sets (A) (solid line) and (B) (dashed line) with the VMD model (dotted line) from Eq. (29). Experimental data are from Refs. [9–13].

form factors with the same analytical behavior at large momentum transfer region, and only their normalizations differ by a couple of tenths of percent. This suggests a limitation in the chosen form of the vertex function to describe the pion charge distribution. Indeed, models with running quark masses and incorporating the asymptotic QCD counting rules are known to perform better with respect to the experimental data (see, e.g., [32,42,64]).

In order to overcome the limitation of the model, we allowed a $\pm 20\%$ parameter variation in sets (A) and (B), keeping the pion mass fixed in Fig. 4. This changes both the decay constant and charge radius, while it allows that results with the variation of set (A) becomes much closer to the experimental data, set (B) produces a band englobing almost all the experimental data. In the chiral limit, where the pion becomes massless the changes in the constituent quark masses and mass scale parameter by a factor λ will give for the new form factor, $f'_\pi(q^2)$, the scaling relation:

$$f'_\pi(q^2) = f_\pi(\lambda^2 q^2), \quad (32)$$

and it represents reasonably well the band that one sees in the figure.

A last comment on the pion form factor is in order. The pion and heavy meson energy scales can be different, as we

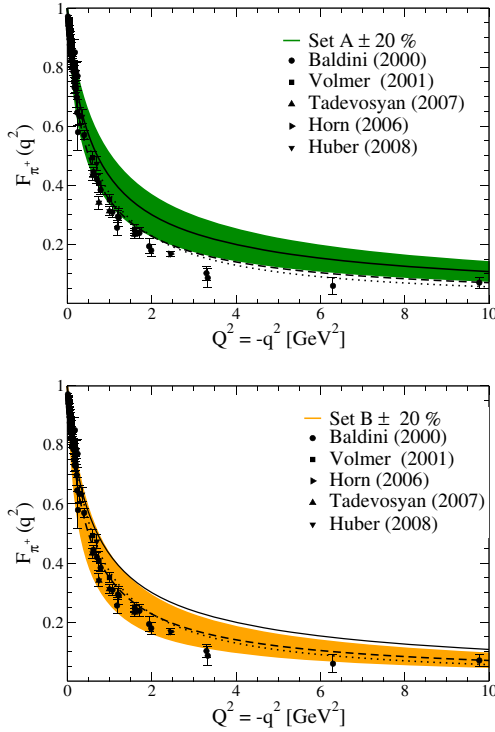


FIG. 4. Pion electromagnetic form factor calculated with variation of the model parameters. Upper panel: band for set (A) with $\pm 20\%$ variation of the model parameters. Lower panel: band for set (B) with $\pm 20\%$ variation of the model parameters. In both panels: set (A) (solid line), set(B) (dashed line) and VMD (dotted line). Experimental data are from Refs. [9–13].

have pointed out earlier. The pion is a strongly bound system of the constituent quarks, and therefore should be associated with a somewhat larger energy scale with respect to the heavy meson ones. This explains why the pion form factor at large momentum transfers is better reproduced with model B having lighter u and d quarks, in contrast with model A, where the quark mass is appropriate for the heavy mesons.

We present the results for the K^+ form factor in Figs. 5 and 6 obtained with the two sets of parameters (C) and (D) (see Table I). We also compare the results with the VMD model and the experimental data from [14,15]. We remind that the set (C) presents a charge radius and weak decay constant in agreement with the experimental values. The parameter set (D) reproduces the decay constant but has about 20% difference with the experimental value of the kaon charge radius. In the upper panel of Fig. 5, we show the results obtained with the set C, for the full and the u and \bar{s} quark contributions for the kaon form factor. In the figure, it is possible to see, that the SU(3) flavor symmetry is slightly broken, as the ratio $e_{\bar{s}}F_{\bar{s}u\bar{s}}/(e_uF_{u\bar{s}u}) > 1/2$ for $Q^2 \neq 0$. The same feature is also found in the NJL model [36].

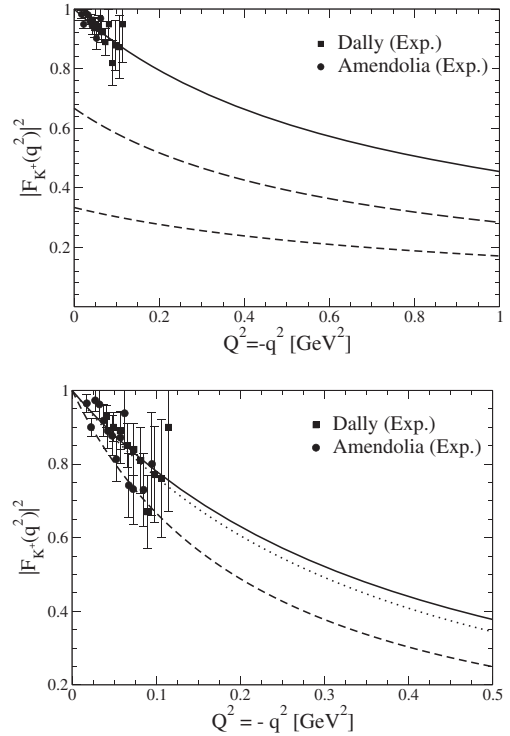


FIG. 5. Kaon electromagnetic form factor as a function $q^2 < 0$. Upper panel: kaon form factor (full line), u contribution— $e_u F_{u\bar{s}u}$ (dashed line) and \bar{s} contribution— $e_{\bar{s}} F_{\bar{s}u\bar{s}}$ (short-dashed line), computed with the parameter set (C) (see Table I). Lower panel: $|F_{K^+}|^2$, comparison between the results from parameter sets (C) (full line), (D) (dashed line) and the VMD model from Eq. (30) (dotted line). Experimental data from [14,15].

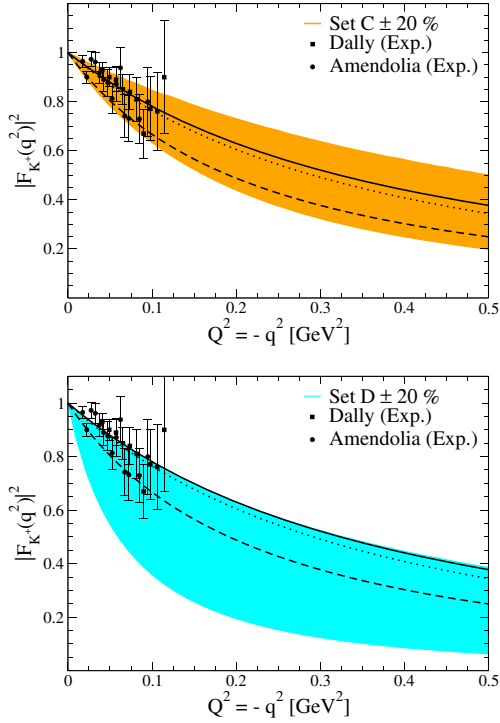


FIG. 6. Kaon electromagnetic form factor square with variation of the model parameters. Upper panel: band for set (C) with $\pm 20\%$ variation of the model parameters. Lower panel: band for set (D) with $\pm 20\%$ variation of the model parameters. In both panels: set (C) (solid line), set(D) (dashed line) and VMD (dotted line). Experimental data from Refs. [14,15].

In the lower panel of Fig. 5 we compare the results for the kaon form factor in the low momentum transfer region up to 0.5 GeV^2 obtained with set (C), (D) and the VMD model together with the experimental data [14,15].

One can see that this data cannot unambiguously resolve between sets (C) and (D), with both somewhat consistent with the experimental results. From Table I, we have that set (C) reproduces the experimental kaon charge radius and it is also consistent with the VMD form factor, therefore taking that into account we could say that it presents an overall better consistency with the data.

In the upper panel of Fig. 6, we examine the effects of a $\pm 20\%$ variation in the model parameters on the kaon EM form factor using set (C). The band now encapsulates the experimental data for the form factor. Although, the validity of an analogous scaling property as verified for the pion in Eq. (32) is questionable, as the constituent quark masses, mass scale parameter and binding energy are large enough, a similar band is found as in the pion case. However, the 20% change in the parameters of set (D) keeping the kaon mass fixed as presented in the lower panel of the figure, shows a quite large band. This is due to the fact that decreasing the masses in set (D) by 20% makes the binding energy drops from 166 MeV (Table I) to only 34 MeV, producing a large increase in the radius, and consequently the wide band observed in the figure.

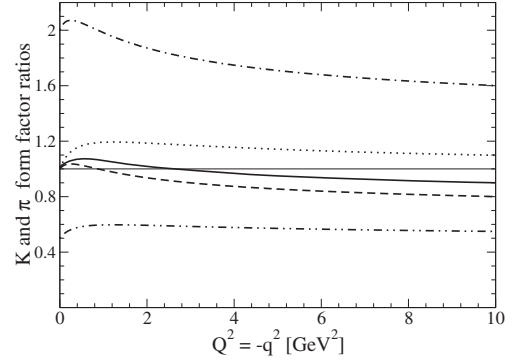


FIG. 7. The electromagnetic form factor ratios for the pion and kaon using sets (A) and (C), respectively. Ratios of flavor contributions to the pion and kaon form factors: F_{K^+}/F_{π^+} (solid line); $e_u F_{u\bar{s}u}/(e_{\bar{d}} F_{\bar{d}u\bar{d}})$ (dot-dashed line), $F_{u\bar{s}u}/F_{u\bar{d}u}$ (dashed line); $F_{\bar{s}u\bar{s}}/F_{\bar{d}u\bar{d}}$ (dotted line); $e_{\bar{s}} F_{\bar{s}u\bar{s}}/(e_u F_{u\bar{s}u})$ (dot-dot-dashed line). A thin solid line is the reference for the SU(3) flavor symmetry.

The breaking of the SU(3) flavor symmetry is analyzed using the sets (A) and (C) in Fig. 7, where we show several ratios of form factors to evidence such effect in the spacelike region. The ratio of the kaon and pion form factors goes above unity at low momentum reflecting the more compact charge distribution of the kaon with respect to the pion one, while at large momentum transfers we observe that the ratio stays below the unity. This can be traced back to the fact that set (A) produces a pion form factor above the experimental data at large momentum transfers, as well as above the VMD results (see Fig. 4), while the kaon form factor for set (C) agrees with the VMD one (see the lower panel of Fig. 5). The VMD model from Eqs. (29) and(30) gives the ratio at large momentum transfers:

$$\frac{F_{K^+}(q^2)}{F_{\pi^+}(q^2)} \rightarrow e_u + e_s \frac{m_\phi^2}{m_\rho^2} = 1.24, \quad (33)$$

while QCD for $Q^2 \gg \Lambda_{\text{QCD}}^2$ predicts that [65]:

$$\frac{F_{K^+}(q^2)}{F_{\pi^+}(q^2)} \rightarrow \frac{f_K^2}{f_\pi^2} = 1.42 \pm 0.03, \quad (34)$$

where we have used the experimental value for the decay constant ratio [16]. If we had chosen set (B) for the pion with set (C) for the kaon to compute $F_{K^+}(q^2)/F_{\pi^+}(q^2)$, we would have had a value somewhat larger than unity, toward the QCD results, however the model does not have the perturbative QCD dynamics built in, and we do not expect to reproduce Eq. (34) in the asymptotic momentum region. Indeed, emphasizing that our model is to be applicable at low momentum transfers, we computed for $Q^2 = 200 \text{ GeV}^2$ the product $Q^2 F_\pi(Q^2)$, which is already saturated around a value of 1.96 GeV^2 for set A and 1 GeV^2 for set B from Table I, while the asymptotic QCD formula $Q^2 F_\pi(Q^2) \rightarrow 16\pi\alpha_s(Q^2)f_\pi^2$ [65] for $Q^2 = 200 \text{ GeV}^2$ gives $\sim 0.1 \text{ GeV}^2$ with $\alpha_s(Q^2)$ from [16].

In addition, in Fig. 7 the ratios of flavor contributions for the pion and kaon form factors are shown. The ratio of the u quark contribution to the kaon and pion form factors, denoted by $F_{u\bar{s}u}/F_{u\bar{d}u}$ follows a similar trend as the ratio of the full form factor, as well as $e_u F_{u\bar{s}u}/(e_{\bar{d}} F_{\bar{d}u\bar{d}})$ apart the factor 2 from the charge ratio, as for the pion $F_{u\bar{d}u} = F_{\bar{d}u\bar{d}}$. At small momentum transfers, we observe that the configuration where photon is absorbed by the u quark in the pion is somewhat larger than in the kaon. The ratio of \bar{s} contribution in the kaon to the \bar{d} one in the pion given by $F_{\bar{s}u\bar{s}}/F_{\bar{d}u\bar{d}}$ presents a dependence on Q^2 , similar as we have discussed, i.e., it reflects the more compact configuration of the kaon with respect to the pion. We should say, that despite the large momentum behavior of the pion form factor for set (A) overestimate the experimental data, its prediction in lower momentum transfer region should be reasonable. As shown in the figure, the ratio between the \bar{s} and u contributions to the kaon form factor, namely $e_{\bar{s}} F_{\bar{s}u\bar{s}}/(e_u F_{u\bar{s}u})$, clearly is above the flavor symmetric value of $1/2$ for larger momentum transfers as 10 GeV^2 . Such an effect is quite visible in Fig. 5, when looking to the individual flavor contribution to the kaon charge form factor.

In Table VI, the ratios of flavor form factors of the pion and kaon for the sets (A) and (C), respectively, and presented in Fig. 7 are compared with the results from the NJL model obtained in Ref. [36] at the particular value of $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$. The results in the table illustrate once more the SU(3) flavor symmetry breaking through the flavor form factor ratios. Our results show the deviation of $F_{u\bar{s}u}/F_{u\bar{d}u}$ and $F_{\bar{s}u\bar{s}}/F_{\bar{d}u\bar{d}}$ from unity, which are considerably smaller than in the NJL model reflecting that set (A) overestimates the pion form factor at large momentum. The results of the NJL model from Ref. [36] show a larger symmetry breaking for these ratios. The ratio between the \bar{s} and u flavor contributions to the kaon form factor (fourth column in Table VI) are consistent, even taking into account that quark current is dressed in Ref. [36], and in addition it shows that our Bethe-Salpeter model has a small, namely about 10%, flavor symmetry breaking for the up and strange quarks within the kaon. One important difference to be pointed out is that the NJL model as studied in Ref. [36], has infrared and ultraviolet scales, while our model is less flexible, having just one mass scale, which makes the present model more robust against flavor symmetry breaking among the quark contributions to the kaon form factor.

From the Phragmén-Lindelöf's theorem it follows that at large momentum transfers the asymptotic behavior of the form factors in the spacelike and timelike regions must be the same [66,67]. Therefore, in principle, we could compare our results for space like form factors at large momentum transfers with the experimental timelike ones [68,69]. In Table VII, we present the ratios of F_{π^+}/F_{K^+} at some large Q^2 values for our model calculated

TABLE VII. Ratio of the electromagnetic form factors for pion (A) and kaon (C), compared with calculations from [36,70,71] and experimental timelike data [68,69].

| Reference | Q^2 [(GeV/c) 2] | F_{π^+}/F_{K^+} |
|-----------------------------|-----------------------|---------------------|
| This work | 10.0 | 1.10 |
| | 13.48 | 1.14 |
| | 14.2 | 1.13 |
| | 17.4 | 1.16 |
| Hutauruk <i>et al.</i> [36] | 10.0 | 0.87 |
| Bakulev <i>et al.</i> [70] | 13.48 | 0.53 |
| Shi <i>et al.</i> [71] | 17.4 | 0.81 |
| Pedlar <i>et al.</i> [68] | 13.48 | 1.19(17) |
| Seth <i>et al.</i> [69] | 14.2 | 1.21(3) |
| Seth <i>et al.</i> [69] | 17.4 | 1.09(4) |

with sets (A) and (C), compared to results from other models [36,70,71]. In the flavor SU(3) symmetry limit, all the ratios presented in the table should be unity, which is clearly not the case. Furthermore, QCD predicts that for $Q^2 \gg \Lambda_{\text{QCD}}$ the ratio between the form factors approaches $f_{\pi}^2/f_K^2 \approx 0.70$ [65], which suggests by comparing this ratio with the timelike experimental data, that $Q^2 \sim 17 \text{ GeV}^2$ is still not in the asymptotic region. In particular our results for the ratio using set (A) and (C), for the pion and kaon respectively, overestimate the ratio, and if we had used instead set (B) for the pion we would have found a value below the unity, as the other models. We emphasize, that the parameter set (A) for the pion was chosen to analyze the pion, as it gives a better representation of the form factor at low momentum transfers, and in addition larger light quark masses of this set avoid to unbind the D^+ and D_s^+ , as we have already shown when discussing the static observables of these heavy-light mesons.

B. D^+ and D_s^+ mesons

We study in what follows the D^+ and D_s^+ EM form factors and their flavor decomposition. In particular, we illustrate quantitatively the manifestation of the SU(4) flavor symmetry breaking on the contributions of each quark to the form factor. We have used the parameter sets (E) and (F) given in Table I, which fit the D^+ and D_s^+ decay constants, respectively. The masses of these heavy-light mesons are the experimental ones and given in the table. The comparison will be made with LQCD results of the form factors for D^+ [17,18] for D_s^+ [18], even though the physical masses of these mesons were not achieved in these calculations. This has an impact on the charge radius, as it was verified in our discussion of Table IV. However taking into account the quoted errors of the lattice calculations our results are quite consistent with ensemble C1 used in Refs. [18]. Such a trend will be confirmed by comparing the form factors and the corresponding quark contributions with such LQCD results.

To have a phenomenological handle on the computed form factors, we exploit the VMD applied for D^+ and D_s^+ :

$$F_{D^+}(q^2) = \frac{2}{3} \frac{m_{J/\psi}^2}{m_{J/\psi}^2 - q^2} + \frac{1}{3} \frac{m_\rho^2}{m_\rho^2 - q^2}, \quad (35)$$

$$F_{D_s^+}(q^2) = \frac{2}{3} \frac{m_{J/\psi}^2}{m_{J/\psi}^2 - q^2} + \frac{1}{3} \frac{m_\phi^2}{m_\phi^2 - q^2}. \quad (36)$$

The expressions for the form factors based on the VMD where the masses of J/Ψ , ρ and ϕ determines the closest poles to the spacelike momentum region in the photon-absorption amplitude. The values of the vector meson masses come from [16]. The VMD model form factor gives for D^+ a charge radius of $r_{D^+} = 0.381$ fm and for D_s^+ it gives $r_{D_s^+} = 0.302$ fm. These values are somewhat close to the present model and also to the lattice results (see the Table III).

The results for the EM form factors of the D^+ and D_s^+ mesons are presented in Figs. 8 and 9, respectively. In addition the flavor decomposition and the comparison with LQCD results from [17,18] are shown. The three panels of Fig. 8 are dedicated to the D^+ form factor, where our calculations with parameter set (E) given in Table I, and the corresponding quark contributions, namely $F_{\bar{d}c\bar{d}}$ and $F_{c\bar{d}c}$, are compared with LQCD results and the VMD model from Eq. (35). In the upper panel, the LQCD form factors [17] are shown together with the VMD, and set (E) models. As anticipated in the analysis of the charge radii in Table V we observe consistently that our model form factors are below the results from [17] up to 2 GeV^2 .

The heavy quark contribution to the D^+ form factor shown in Fig. 8 decreases slowly as it sits at the center of mass of the meson, while the light quark form a ‘‘halo’’ charge distribution around the heavy quark, exploring the confinement region. Despite of that the behavior of $F_{\bar{d}c\bar{d}}$ with Q^2 is smooth making useful our model to represent the heavy-light meson charge distribution. The LQCD calculations from Ref. [18] were done with two ensembles, namely (B1) and (C1), with the last one providing the closest value of the D^+ meson mass to the experimental value (see Table IV). These LQCD results are compared to our model, which are shown in the figure middle and lower panels. Up to the errors of the form factor computed with ensemble C1, we found agreement with our model, which does not happen with the VMD form factor. The light quark halo charge form factor from LQCD ensemble C1 is also reproduced, as well as the charm contribution to the D^+ form factor.

In Fig. 9, we show results for the D_s^+ electromagnetic form factor and the corresponding flavor decomposition for our model obtained with the parameter set (F). The comparison with VMD model and LQCD calculations from Ref. [18] with ensembles B1 (upper panel) and C1 (lower

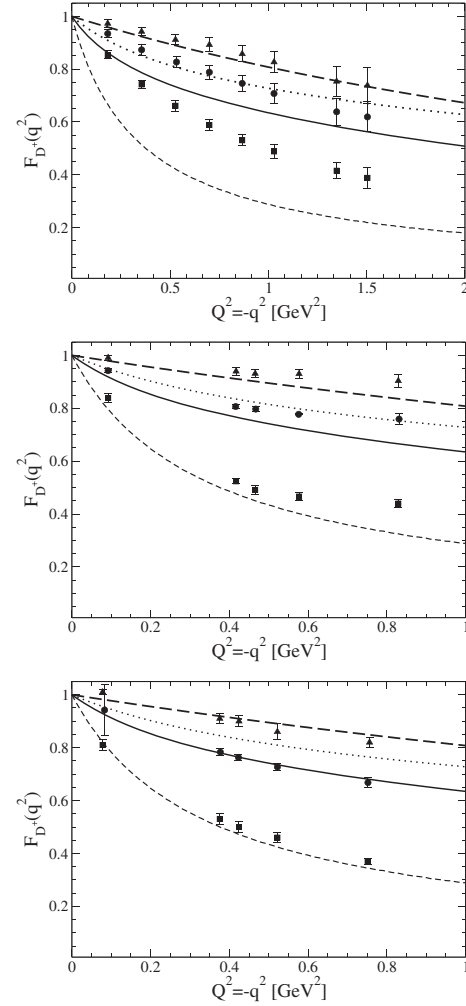


FIG. 8. D^+ electromagnetic form factor with the corresponding quark contributions and comparison with lattice calculations. Our results: D^+ form factor (full line), \bar{d} contribution— $e_{\bar{d}}F_{\bar{d}c\bar{d}}$ (short-dashed line) and c contribution— $e_cF_{c\bar{d}c}$ (dashed line). VMD (dotted line) from Eq. (35). LQCD results for D^+ form factor (circles), \bar{d} contribution (squares) and c contribution (triangles). Upper panel: comparison with LQCD results from Ref. [17]. Middle panel: comparison with LQCD results from ensemble (B1) [18]. Lower panel: comparison with LQCD results from ensemble (C1) [18].

panel) is also shown. The form factor $F_{D_s^+}$, and flavor contributions $F_{c\bar{s}c}$ and $F_{\bar{s}c\bar{s}}$ underestimate the results from the LQCD ensembles B1, and the VMD model, are given in the upper panel of the figure. This result is expected as the computed radii are larger than the ones obtained with ensemble B1 (see Table V). The D_s^+ form factor and its flavor content obtained with our model are in agreement with the outcomes from the lattice ensemble C1 as shown in the lower panel of the figure, a finding consistent with the one observed for D^+ presented in the lower panel of Fig. 8. The consistency found for both D^+ and D_s^+ form factors and flavor content with the LQCD results from ensemble C1, suggests that the IR physics embedded within our

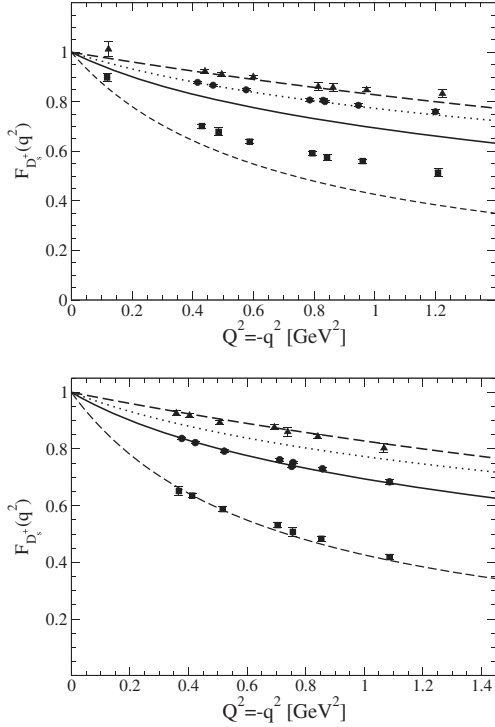


FIG. 9. D_s^+ electromagnetic form factors with the corresponding quark contributions and comparison with lattice calculations. Our results: D_s^+ form factor (full line), \bar{d} contribution (short-dashed line) and c contribution (dashed line), VMD (dotted line) from Eq. (35). LQCD results for D_s^+ form factor (circles), \bar{s} contribution (squares) and c contribution (triangles). Upper panel: comparison with LQCD results from ensemble (B1) [18]. Lower panel: comparison with LQCD results from ensemble (C1) [18].

parametrization and constituent masses reflect consistently the QCD long-distance effects in these heavy-light mesons. Important to observe that our choice of parametrization (A) for the pion and (C) for the kaon, describe both their charge radii and decay constants, quantities carrying the QCD nonperturbative IR physics.

In the following we discuss the manifestation of the SU(4) symmetry breaking in D^+ and D_s^+ form factors. For that aim in Fig. 10, we present several ratios of the electromagnetic form factors of the D mesons and their flavor components with the pion ones from model (A). In the upper panel, we present the ratio F_{D^+}/F_{π^+} , which tends to a value close to 2 for large momentum transfers. This ratio flattens above $Q^2 = -q^2 \gtrsim 3 \text{ GeV}^2$ that indicates the momentum region where the difference in the constituent quark masses and values of the regulator scales μ_M are somewhat irrelevant for the dependence on q^2 , while the value of the ratio ~ 2 seems to be more particular to our model. However, we should convey that the normalizations of the form factors are essentially determined at low momentum scales which should be more constrained with the fitting of the decay constant and charge radius. On the other hand, taking into

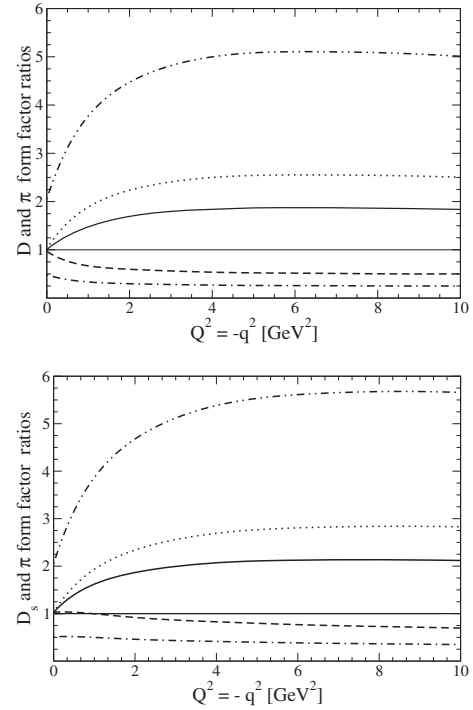


FIG. 10. The electromagnetic form factor ratios for the pion (A) and D mesons. Upper panel: F_{D^+}/F_{π^+} (solid line); $F_{\bar{d}c\bar{d}}/F_{\bar{d}u\bar{d}}$ (dashed line); $e_{\bar{d}}F_{\bar{d}c\bar{d}}/(e_u F_{u\bar{d}u})$ (dot-dashed line); $F_{\bar{c}\bar{d}c}/F_{u\bar{d}u}$ (dotted line); $e_c F_{\bar{c}\bar{d}c}/(e_{\bar{d}} F_{\bar{d}u\bar{d}})$ (dot-dot-dashed line). Lower panel: $F_{D_s^+}/F_{\pi^+}$ (solid line); $F_{\bar{s}c\bar{s}}/F_{\bar{d}u\bar{d}}$ (dashed line); $e_{\bar{s}} F_{\bar{s}c\bar{s}}/(e_u F_{u\bar{d}u})$ (dot-dashed line); $F_{\bar{c}\bar{s}c}/F_{u\bar{d}u}$ (dotted line); $e_c F_{\bar{c}\bar{s}c}/(e_{\bar{d}} F_{\bar{d}u\bar{d}})$ (dot-dot-dashed line). The thin solid line is the reference for the SU(4) flavor symmetry.

account the ratio of decay constants squared the present value is about half of the value that it should be for $F_{D_s^+}/F_{\pi^+}$ (lower panel), while for $F_{D^+}/F_{\pi^+} \sim 2$ is consistent with that ratio.

The ratios of the \bar{d} contribution to the D^+ and D_s^+ to pion form factor, namely $F_{\bar{d}c\bar{d}}/F_{\bar{d}u\bar{d}}$ (upper panel) and $F_{\bar{s}c\bar{s}}/F_{\bar{d}u\bar{d}}$ (lower panel), respectively, exemplify two aspects of the SU(4) flavor symmetry breaking, a strong one in the distribution of the \bar{d} charge in the D^+ , which is extended with respect to the one in the pion, while the effect is somewhat weaker in the D_s^+ , where the \bar{s} is heavier than \bar{d} and its charge distribution in D_s^+ is similar to the pion one. This last observation is corroborated by the similar radii $r_{D_s^+, \bar{s}}$ and r_{π} (see Tables I and V). The ratios $e_{\bar{d}} F_{\bar{d}c\bar{d}}/(e_u F_{u\bar{d}u})$ (upper panel) and $e_{\bar{s}} F_{\bar{s}c\bar{s}}/(e_u F_{u\bar{d}u})$ (lower panel) just reflect what we have already discussed. The heavy quark contribution to the D^+ and D_s^+ form factors and the associated evidence of SU(4) flavor symmetry breaking is clearly seen in the ratios $F_{\bar{c}\bar{d}c}/F_{u\bar{d}u}$ (upper panel) and $F_{\bar{c}\bar{s}c}/F_{u\bar{d}u}$ (lower panel), which saturate above $\sim 3 \text{ GeV}^2$, attaining a ratio about 3, in connection with the strong localization of the heavy quark at the meson center of mass. Such large ratio would be even increased if we had chosen a

pion model that fits the form factor like model (B) at large momentum, and the flavor symmetry breaking would be even enhanced. These characteristics are visible in the ratios $e_c F_{c\bar{d}c}/(e_{\bar{d}} F_{\bar{d}u\bar{d}})$ (upper panel) and $e_c F_{c\bar{s}c}/(e_{\bar{s}} F_{\bar{s}u\bar{s}})$ (lower panel).

In Fig. 11, we show the effect of the variation of 5% in the parameters for both the form factors of D^+ (upper panel) and D_s^+ (lower panel). For reference, we include in the figure the LQCD results from [18]. The band width is larger for the case of D^+ because it has a smaller binding energy, making the form factor much more sensitive to changes in the quark masses and regulator mass (μ_M), while for the D_s^+ one observes a smaller band width. In both cases such parameter change is enough to englobe the LQCD results from ensembles B1 and C1 of Refs. [18], and for D^+ also the calculations from Ref. [17] not shown in the figure.

Finally, to close our discussion we show in Fig. 12 the heavy-light meson charge radii obtained with the change of m_c while keeping the other parameters of set (E) and (F) fixed. The heavier the charm quark mass becomes, the charge radius of the D^+ and D_s^+ tends to saturate in a decreasing behavior and the main contribution comes from the light quark, which in our model perceives the minimum branch point value, namely, $m_{\bar{d}(\bar{s})} + \mu_{D^+(D_s^+)} - m_{D^+(D_s^+)}$, which is not affected by the increase of the charm mass and

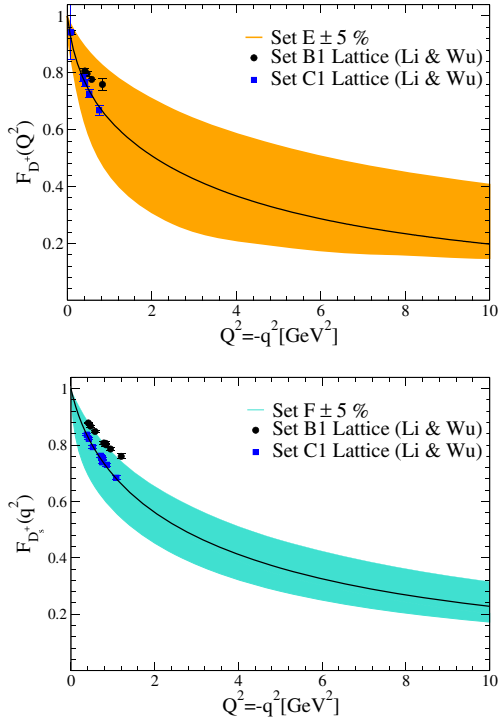


FIG. 11. D^+ and D_s^+ electromagnetic form factors, together with bands for parameter variations. Upper panel: D^+ form factor band for set (E) with $\pm 5\%$ variation of the model parameters. Lower panel: D_s^+ form factor band for set (F) with $\pm 5\%$ variation of the model parameters. For reference the LQCD results from ensembles B1 (circles) and C1 (squares) [18] are shown.

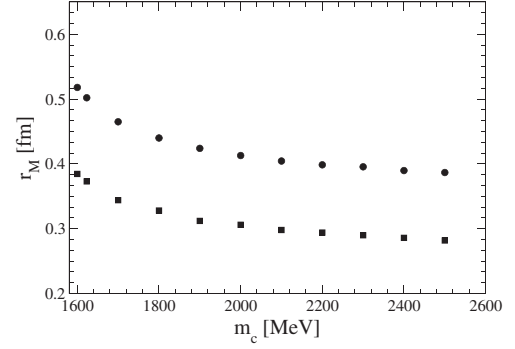


FIG. 12. Charge radii of D^+ and D_s^+ mesons as a function of the charm quark mass, m_c , having all other parameters fixed to set (E) for D^+ (circles) and to set (F) for D_s^+ (squares).

its corresponding localization. Such mechanism is particular to the present model, and mimics the realization of the heavy quark limit of QCD, where the center of the confining force is fixed at the position of the heavy quark. In our case, such physics is simulated by keeping the lowest branch point fixed. However, it is necessary to distinguish that the present model, although bearing some properties that QCD dictates to these heavy-light mesons, it does not possess the absolute confinement of the quarks.

VI. SUMMARY

In the present work, the electroweak properties of light and charmed D and D_s pseudoscalar mesons are investigated within a unified covariant constituent quark model, where the quark-antiquark-meson vertices are assumed to have a symmetric form by the exchange of quark momenta, which were successful in describing the light pseudoscalar meson properties [20,22]. The model has constituent quark masses up, down, strange and charm, which embody dynamical chiral symmetry breaking and the Higgs contribution to the masses. In addition, each meson has one mass regulator parameter tuned to reproduce the weak decay constant. Consistently with the infrared relevance of the dynamical chiral symmetry breaking, we chose a light quark constituent mass that reproduces the pion charge radius, even losing fit at large momentum of the experimental form factor data.

The reason for such a choice was to study the kaon, D^+ , D_s^+ electromagnetic form factors at low spacelike momentum transfer squared up to about 1 GeV^2 , where experimental data for the kaon is available [14,15], as well as lattice calculations for the D^+ [17,18] and D_s^+ [18]. In particular, we gave attention to the SU(3) and SU(4) flavor symmetry breaking as a consequence of the Higgs contribution to the quark masses, where from the LQCD calculations also provide the flavor decomposition of these heavy-light meson form factors. Furthermore, we have compared our charge radius results with some models from the literature, which can be useful for

contextualizing our effort within what has been done. The charge distribution of \bar{s} is somewhat more compact than the corresponding one for the u , a feature that will be strongly emphasized for the charmed heavy-light pseudoscalars.

Each of the form factors were decomposed in its flavor content, $F_{u\bar{d}u}(q^2)$ and $F_{\bar{d}u\bar{d}}(q^2)$ for the pion, $F_{u\bar{s}u}(q^2)$ and $F_{\bar{s}u\bar{s}}(q^2)$ for the kaon, $F_{c\bar{d}c}(q^2)$ and $F_{\bar{d}c\bar{d}}(q^2)$ for D^+ , $F_{c\bar{s}c}(q^2)$ and $F_{\bar{s}c\bar{s}}(q^2)$ for the D_s^+ . Each of these flavor form factors has particular properties with respect to the flavor symmetry. The model has SU(2) flavor symmetry and trivially we have $F_{u\bar{d}u}(q^2) = F_{\bar{d}u\bar{d}}(q^2) = F_{\pi^+}(q^2)$, which we used constituent quark mass that reproduced quite well the pion charge radius, favoring a better description of the infrared properties of the model. The SU(3) flavor symmetry is slightly broken within the kaon expressed by $F_{\bar{s}u\bar{s}}(q^2) \gtrsim F_{u\bar{s}u}(q^2)$ by about 10% above 3 GeV², as consequence of the Higgs contribution to the strange quark, which makes it about 30% heavier than the up quark in our model. The study of the flavor contribution to the D^+ and D_s^+ form factors within the model, showed that the charm quark is localized close to the center of the meson, while the light quark forms a halo exploring larger distances where the confining force of QCD is active, and the infrared physics dominating. Such strong asymmetry is a direct consequence of the Higgs providing a large mass to the charm quark in comparison with light ones. The flavor decomposition of the charge radii provided by the model is consistent with the lattice QCD calculation from Refs. [18] where the ensemble C1 was used, and the D^+ and D_s^+ masses were found close to the experimental values.

We found that the heavier is the charm quark, the charge radius of the D^+ and D_s^+ decrease and saturates, as dominant contribution to the charge radius comes from the light quark. The contribution of the light quark to the heavy-light form factor is essentially dependent on the minimum branch point value at $m_{\bar{d}(\bar{s})} + \mu_{D^+(D_s^+)} - m_{D^+(D_s^+)}$, which is insensitive to the increase of the charm quark mass, and its corresponding localization. Such feature is particular to the present model, and is able to incorporate aspects of the heavy quark limit of QCD, where the force center of the confining force stays at

the meson center of mass, and therefore the charge distribution becomes independent of the heavy quark mass.

However, the present model does not possess the absolute confinement of the quarks, and they are represented as bound states of constituents quarks. The SU(4) flavor symmetry is largely broken as manifested in the contributions to the form factors, where we found in the case of the D^+ that $F_{c\bar{d}c}(q^2) > F_{\bar{d}c\bar{d}}(q^2)$ and saturating the ratio above 3 GeV², attaining the ratio a value ~ 5 . For the D_s^+ , we observe the same behavior as for the D^+ having that $F_{c\bar{s}c}(q^2) > F_{\bar{s}c\bar{s}}(q^2)$ and the ratio saturating at a value around 5 above 3 GeV². This is a strong manifestation of the SU(4) flavor symmetry breaking in the structure of these heavy-light pseudoscalar mesons. We also found that the flavor decomposition of the D^+ and D_s^+ form factors are in agreement with the lattice QCD calculation from Refs. [18] where the ensemble C1 was used, with results in the spacelike region up to 1.2 GeV². The structure of the D^+ and D_s^+ mesons can be studied in much more detail within this model, like for generalized parton distributions, generalized transverse momentum distributions and finally fragmentation functions of the heavy quarks, left for future investigations as well as the application of the model to study $B, \eta_c, J/\psi, \eta_b$, and Υ mesons.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported in part by CAPES, and by the Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Grants, No. 308486/2015-3 (TF), Process, No. 307131/2020-3 (JPBCM), Process, No. 313063/2018-4 (KT), and No. 426150/2018-0 (KT), and Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Process, No. 2019/02923-5 (JPBCM), No. 2019/00763-0 (KT), and was also part of the projects, Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia—Nuclear Physics and Applications (INCT-FNA), Brazil, Process No. 464898/2014-5, and FAPESP Temático, Brazil, Process, the thematic projects, No. 2013/26258-4 and No. 2017/05660-0.

-
- [1] T. Horn and C. D. Roberts, *J. Phys. G* **43**, 073001 (2016).
 [2] A. C. Aguilar *et al.*, *Eur. Phys. J. A* **55**, 190 (2019).
 [3] N. Brambilla *et al.*, *Eur. Phys. J. C* **71**, 1534 (2011).
 [4] H.-X. Chen, W. Chen, X. Liu, Y.-R. Liu, and S.-L. Zhu, *Rep. Prog. Phys.* **80**, 076201 (2017).
 [5] B. L. G. Bakker *et al.*, *Nucl. Phys. B, Proc. Suppl.* **251–252**, 165 (2014).

- [6] O. Oliveira, P. J. Silva, J.-I. Skullerud, and A. Sternbeck, *Phys. Rev. D* **99**, 094506 (2019).
 [7] M. Y. Khlopov, *Yad. Fiz.* **28**, 1134 (1978) [*Sov. J. Nucl. Phys.* **28**, 583 (1978)].
 [8] M. Neubert, *Phys. Rep.* **245**, 259 (1994).
 [9] R. Baldini, S. Dubnička, P. Gauzzi, S. Pacetti, E. Pasqualucci, and Y. Srivastava, *Nucl. Phys.* **A666**, 38 (2000).

- [10] J. Volmer, D. Abbott, H. Anklin, C. Armstrong, J. Arrington, K. Assamagan, S. Avery, O. Baker, H. Blok, C. Bochna *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1713 (2001).
- [11] T. Horn, K. Aniol, J. Arrington, B. Barrett, E. Beise, H. Blok, W. Boeglin, E. Brash, H. Breuer, C. Chang *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 192001 (2006).
- [12] V. Tadevosyan, H. Blok, G. Huber, D. Abbott, H. Anklin, C. Armstrong, J. Arrington, K. Assamagan, S. Avery, O. Baker *et al.*, *Phys. Rev. C* **75**, 055205 (2007).
- [13] G. Huber, H. Blok, T. Horn, E. Beise, D. Gaskell, D. Mack, V. Tadevosyan, J. Volmer, D. Abbott, K. Aniol *et al.*, *Phys. Rev. C* **78**, 045203 (2008).
- [14] E. B. Dally *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 232 (1980).
- [15] S. R. Amendolia *et al.*, *Phys. Lett. B* **178**, 435 (1986).
- [16] P. A. Zyla *et al.* (Particle Data Group Collaboration), *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2020**, 083C01 (2020).
- [17] K. U. Can, G. Erkol, M. Oka, A. Ozpineci, and T. T. Takahashi, *Phys. Lett. B* **719**, 103 (2013).
- [18] N. Li and Y.-J. Wu, *Eur. Phys. J. A* **53**, 56 (2017).
- [19] C. Itzykson and J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, International Series In Pure and Applied Physics (McGraw-Hill, New York, 1980), ISBN 978-0-486-44568-7.
- [20] J. P. B. C. de Melo, T. Frederico, E. Pace, and G. Salmè, *Nucl. Phys. A* **707**, 399 (2002).
- [21] B. El-Bennich, J. P. B. C. de Melo, B. Loiseau, J. P. Dedonder, and T. Frederico, *Braz. J. Phys.* **38**, 465 (2008).
- [22] G. H. S. Yabusaki, I. Ahmed, M. A. Paracha, J. P. B. C. de Melo, and B. El-Bennich, *Phys. Rev. D* **92**, 034017 (2015).
- [23] T. Frederico and G. Salmè, *Few-Body Syst.* **49**, 163 (2011).
- [24] C. Mezrag, H. Moutarde, and J. Rodriguez-Quintero, *Few-Body Syst.* **57**, 729 (2016).
- [25] C. Fanelli, E. Pace, G. Romanelli, G. Salmè, and M. Salmistraro, *Eur. Phys. J. C* **76**, 253 (2016).
- [26] W. de Paula, E. Ydrefors, J. H. A. Nogueira, T. Frederico, and G. Salmè, *Phys. Rev. D* **103**, 014002 (2021).
- [27] S. Mandelstam, *Proc. R. Soc. A* **233**, 248 (1955).
- [28] F. E. Close, *An Introduction to Quarks and Partons* (Academic Press, London, 1979), ISBN 978-0-12-175152-4.
- [29] Z. W. Lin, C. M. Ko, and B. Zhang, *Phys. Rev. C* **61**, 024904 (2000).
- [30] M. E. Bracco, M. Chiapparini, F. S. Navarra, and M. Nielsen, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **67**, 1019 (2012).
- [31] H. Georgi, *Weak Interactions and Modern Particle Theory*, Advanced Book Program (The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Menlo Park, California, 1984), ISBN 978-0-8053-3163-9.
- [32] P. Maris and P. C. Tandy, *Phys. Rev. C* **62**, 055204 (2000).
- [33] G. Lepage and S. J. Brodsky, *Phys. Rev. D* **22**, 2157 (1980).
- [34] M. Ablikim *et al.* (BESIII Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **122**, 071802 (2019).
- [35] L. A. M. Salcedo, J. P. B. C. de Melo, D. Hadjmichef, and T. Frederico, *Braz. J. Phys.* **34**, 297 (2004).
- [36] P. T. P. Hutauruk, I. C. Cloët, and A. W. Thomas, *Phys. Rev. C* **94**, 035201 (2016).
- [37] E. F. Suisso, J. P. B. C. de Melo, and T. Frederico, *Phys. Rev. D* **65**, 094009 (2002).
- [38] S. J. Brodsky, H.-C. Pauli, and S. S. Pinsky, *Phys. Rep.* **301**, 299 (1998).
- [39] J. P. C. B. de Melo, H. W. L. Naus, and T. Frederico, *Phys. Rev. C* **59**, 2278 (1999).
- [40] B. L. G. Bakker, H.-M. Choi, and C.-R. Ji, *Phys. Rev. D* **63**, 074014 (2001).
- [41] A. Faessler, T. Gutsche, M. A. Ivanov, V. E. Lyubovitskij, and P. Wang, *Phys. Rev. D* **68** (2003).
- [42] A. Bashir, L. Chang, I. C. Cloët, B. El-Bennich, Y.-X. Liu, C. D. Roberts, and P. C. Tandy, *Commun. Theor. Phys.* **58**, 79 (2012).
- [43] M. Chen and L. Chang, *Chin. Phys. C* **43**, 114103 (2019).
- [44] M. A. Ivanov, J. G. Körner, J. N. Pandya, P. Santorelli, N. R. Soni, and C.-T. Tran, *Front. Phys. (Beijing)* **14**, 64401 (2019).
- [45] E. O. da Silva, J. P. B. C. de Melo, B. El-Bennich, and V. S. Filho, *Phys. Rev. C* **86**, 038202 (2012).
- [46] S. Jia and J. P. Vary, *Phys. Rev. C* **99**, 035206 (2019).
- [47] D. Ebert, R. N. Faustov, and V. O. Galkin, *Phys. Lett. B* **635**, 93 (2006).
- [48] D. Ebert, R. N. Faustov, and V. O. Galkin, *Eur. Phys. J. C* **47**, 745 (2006).
- [49] R. Tarrach, *Z. Phys. C* **2**, 221 (1979).
- [50] S. B. Gerasimov, *Yad. Fiz.* **29**, 513 (1979); *Yad. Fiz.* **32**, 304 (E) (1980) [*Sov. J. Nucl. Phys.* **32**, 156(E) (1980)].
- [51] H.-M. Choi, *Phys. Rev. D* **75**, 073016 (2007).
- [52] C.-W. Hwang, *Phys. Rev. D* **81**, 054022 (2010).
- [53] T. Das, D. K. Choudhury, and K. K. Pathak, *Indian J. Phys.* **90**, 1307 (2016).
- [54] N. Dhiman and H. Dahiya, *Eur. Phys. J. Plus* **133**, 134 (2018).
- [55] C. Aubin *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 122002 (2005).
- [56] E. Follana, C. T. H. Davies, G. P. Lepage, and J. Shigemitsu (HPQCD, UKQCD Collaborations), *Phys. Rev. Lett.* **100**, 062002 (2008).
- [57] W.-P. Chen, Y.-C. Chen, T.-W. Chiu, H.-Y. Chou, T.-S. Guu, and T.-H. Hsieh (TWQCD Collaboration), *Phys. Lett. B* **736**, 231 (2014).
- [58] N. Carrasco *et al.*, *Phys. Rev. D* **91**, 054507 (2015).
- [59] S. Tang, Y. Li, P. Maris, and J. P. Vary, *Eur. Phys. J. C* **80**, 522 (2020).
- [60] R. Trotta, T. Horn, and A. Vargas, in *APS Division of Nuclear Physics Meeting Abstracts*, APS Meeting Abstracts Vol. 2017 (2017), p. CF004.
- [61] J. J. Sakurai, *Ann. Phys. (N.Y.)* **11**, 1 (1960).
- [62] J. J. Sakurai, *Currents and Mesons* (University of Chicago Press, Chicago, 1969).
- [63] H. B. O'Connell, B. C. Pearce, A. W. Thomas, and A. G. Williams, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **39**, 201 (1997).
- [64] C. S. Mello, J. P. B. C. de Melo, and T. Frederico, *Phys. Lett. B* **766**, 86 (2017).
- [65] G. Lepage and S. J. Brodsky, *Phys. Lett.* **87B**, 359 (1979).
- [66] S. M. Bilenky, C. Giunti, and V. Wataghin, *Z. Phys. C* **59**, 475 (1993).
- [67] A. Denig and G. Salmè, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **68**, 113 (2013).
- [68] T. K. Pedlar *et al.* (CLEO Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **95**, 261803 (2005).
- [69] K. K. Seth, S. Dobbs, Z. Metreveli, A. Tomaradze, T. Xiao, and G. Bonvicini, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 022002 (2013).
- [70] A. P. Bakulev, S. V. Mikhailov, and N. G. Stefanis, *Phys. Lett. B* **508**, 279 (2001); **590**, 309(E) (2004).
- [71] C. Shi, L. Chang, C. D. Roberts, S. M. Schmidt, P. C. Tandy, and H.-S. Zong, *Phys. Lett. B* **738**, 512 (2014).

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

| | | | |
|---|----------------------------------|---|-------------------------|
| 1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO TD | 2. DATA 28 de janeiro de 2022 | 3. DOCUMENTO Nº DCTA/ITA/TD-040/2021 | 4. Nº DE PÁGINAS 171 |
| 5. TÍTULO E SUBTÍTULO: ESTRUTURA DE MÉSONS PSEUDO-ESCALARES LEVES E PESADOS NO ESPAÇO DE MINKOWSKI | | | |
| 6. AUTOR(ES): Rômulo Moreira Moita | | | |
| 7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA | | | |
| 8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: Sabores de Quark; Amplitude de Bethe-Salpeter; Representação integral | | | |
| 9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Mésons pseudo-escalares; Dinâmica quântica de sabores; Equações de Bethe-Salpeter; Interações eletromagnéticas; Física de partículas; Física. | | | |
| 10. APRESENTAÇÃO: (X) Nacional () Internacional ITA, São José dos Campos. Curso de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Física Nuclear. Orientador: Prof. Dr. Tobias Frederico. Coorientadora: Prof. Dr. João Pacheco Bicudo de Melo. Defesa em 06/12/2021. Publicada em 2021. | | | |
| 11. RESUMO: Na primeira parte desse trabalho, as propriedades eletrofracas de mésons pseudoescalares D^+ e D_s^+ charmosos e leves são investigadas dentro de um modelo covariante de quark constituintes unificado. Os vértices quarks-antiquarks-mésons são assumidos como tendo uma forma simétrica pela troca dos momentos dos quarks. Esse tipo de modelo foi bem-sucedido na descrição das propriedades dos mésons pseudoescalares leves. A decomposição de sabor dos fatores de forma eletromagnéticos elásticos, raios de carga eletromagnéticos e as constantes de decaimento eletrofracas são calculadas. Com base nesses resultados é feita uma discussão sobre a quebra de simetria SU(3) e SU(4). Em particular, as propriedades do pión e kaon são comparadas para destacar a contribuição de Higgs para a estrutura desses mésons, representada pela diferença de massa dos quarks up(down) e estranho. Em uma segunda parte desse trabalho faz-se também um estudo da estrutura do pión no espaço de Minkowski, onde esse méson é descrito em termos de um modelo analítico da amplitude de Bethe-Salpeter combinada com resultados de QCD na rede. O modelo leva em consideração a massa do quark dependente no momento, que corresponde a componente escalar da auto-energia do quark e que é ajustada aos resultados de QCD na rede no calibre de Landau. O vértice pseudoescalar é diretamente associado à função de massa dependente de momento do quark, baseado na sua natureza de Bóson de Goldstone como justificado pela quebra dinâmica da simetria quiral. Nesse modelo o propagador do quark é descrito em termos de uma representação espectral, e com isso deduzimos a representação integral de Nakanishi da amplitude de Bethe-Salpeter para o pión. As funções pesos de Nakanishi foram derivadas das amplitudes escalares associadas a decomposição da amplitude de Bethe-Salpeter em diferentes bases de operadores no espaço spinorial de Dirac. Em particular, utilizamos uma base ortogonal que já foi adotada para resolver a equação Bethe-Salpeter no espaço de Minkowski. Finalmente, partindo da representação integral de Nakanishi calculamos vários observáveis para o pión, como a constante de decaimento, a probabilidade de valência e as distribuições de momento longitudinais e transversais associadas à componente de valência da função de onda na frente de luz. | | | |
| 12. GRAU DE SIGILO: (X) OSTENSIVO () RESERVADO () SECRETO | | | |