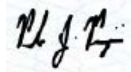


Dissertação apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Física Nuclear.

Guilherme de Albuquerque Bruneri

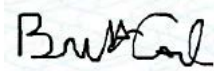
MECANISMOS DE CRIAÇÃO DE MASSA: HIGGS E STUECKELBERG

Dissertação aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:



Prof. Dr. Pedro José Pompeia

Orientador



Prof. Dr. Brett Vern Carlson

Coorientador

Prof^ª. Dr^ª. Emília Villani

Pró-Reitora de Pós-Graduação

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP - Brasil
2022

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Divisão de Informação e Documentação

Bruneri, Guilherme de Albuquerque
MECANISMOS DE CRIAÇÃO DE MASSA: HIGGS E STUECKELBERG / Guilherme de
Albuquerque Bruneri.
São José dos Campos, 2022.
73f.

Dissertação de Mestrado – Curso de Física. Área de Física Nuclear – Instituto Tecnológico de
Aeronáutica, 2022. Orientador: Prof. Dr. Pedro José Pompeia. Coorientador: Prof. Dr. Brett
Vern Carlson.

1. Teoria de calibre. 2. Modelo de Higgs. 3. Física de partículas. I. Instituto Tecnológico de
Aeronáutica. II. Título.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

BRUNERI, Guilherme de Albuquerque. **MECANISMOS DE CRIAÇÃO DE MASSA: HIGGS E STUECKELBERG**. 2022. 73f. Dissertação de Mestrado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Guilherme de Albuquerque Bruneri

TÍTULO DO TRABALHO: MECANISMOS DE CRIAÇÃO DE MASSA: HIGGS E STUECKELBERG.

TIPO DO TRABALHO/ANO: Dissertação / 2022

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta dissertação e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação pode ser reproduzida sem a autorização do autor.

Guilherme de Albuquerque Bruneri
Rua Ferruccio Beneduzzi,125
02350-030 – São Paulo-SP

MECANISMOS DE CRIAÇÃO DE MASSA: HIGGS E STUECKELBERG

Guilherme de Albuquerque Bruneri

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr. César Henrique Lenzi	Presidente	-	ITA
Prof. Dr. Pedro José Pompeia	Orientador	-	ITA
Prof. Dr. Brett Vern Carlson	Coorientador	-	ITA
Prof. Dr. Rodrigo Rocha Cuzinatto	Membro Externo	-	UNIFAL
Prof. Dr. Franciole da Cunha Marinho	Membro	-	ITA

Ao Prof. Dr. Pedro José Pompeia , meu orientador, pela confiança depositada na realização deste trabalho. Ao instituto pela incrível oportunidade. E a todos que contribuem para um Brasil mais desenvolvido.

Agradecimentos

Aos meus amigos do grupo de pesquisa, Silas, Elisa e Reinaldo, por momentos felizes de muita aprendizagem, colaboração e amizade.

Ao meu orientador Pedro Pompeia, ao qual tenho a maior admiração e respeito, que todos que se disporem a realizar uma pós-graduação possam ter a sorte de conhecer alguém como o senhor.

Aos colegas professores do ITA em especial o departamento de física pela contribuição em minha formação que se estende além dos limites da sala de aula e conteúdo.

À Juliana Reinbold minha companheira, pessoa indispensável em todo meu processo de formação. Se hoje sou o que sou é por ter conhecido uma pessoa tão grandiosa como você. Qualquer tentativa de expressar o impacto positivo que você faz em minha vida, seria uma pobre aproximação.

À minha Família por todo suporte, conforto e paciência.

A todos os amigos e colegas que de alguma forma contribuíram para a realização deste estudo.

Agradeço em especial a CAPES, pelo suporte financeiro. A qual possibilitou a este que vos escreve, prosseguir com um sonho.

*“Do not go gentle into that good night,
Old age should burn and rave at close of day;
Rage, rage against the dying of the light”.*

— THOMAS, DYLAN

Resumo

Neste trabalho foi realizada uma investigação sobre um segundo mecanismo de criação de massa, o de Stueckelberg, para os campos de matéria e os campos de gauge. Para tal investigação, foi revisada a construção da teoria de gauge para grupos de Lie semi-simples proposta por Utiyama. Onde, para preservar a invariância de um sistema de campos $\phi^a(x)$ sob transformações é necessário introduzir campos vetoriais, ou campos de gauge $A_\mu^a(x)$. Foi demonstrado que os campos de matéria, quando descritos por dubletos de massas diferentes, e os campos de gauge necessitam ser descritos como campos não massivos, para preservar a invariância, sendo necessário a utilização de um mecanismo capaz de fornecer massa. O mecanismo apresentado é o de maior consagração pela comunidade de físicos, o mecanismo de Higgs, demonstrando que o mecanismo fornece massa de forma dinâmica, mas não justifica a discrepância de massa entre os dubletos. Por fim é feita a abordagem com o mecanismo de Stueckelberg em interação com campos de matéria, no qual concluiu-se que, na abordagem de interação direta, o mecanismo não foi capaz de fornecer massa ao campo de matéria. Entretanto em uma interpretação de teoria efetiva foi possível mostrar uma interação com capacidade de modificar o termo massivo, abrindo margem para investigações futuras que possam justificar a afinidade dos campos de matéria com o campo de Higgs.

Abstract

In this work, an investigation was carried out on a second mass creation mechanism, the Stueckelberg one, for matter fields and gauge fields. For this investigation, the construction of the gauge theory for semi-simple Lie groups proposed by Utiyama was revised. Where, to preserve the invariance of a system of fields $\phi^a(x)$ under transformations it is necessary to introduce vector fields, or gauge fields $A_\mu^a(x)$. It was shown that matter fields, when described by doublets of different masses, and gauge fields need to be described as non-massive fields, to preserve invariance, requiring the use of a mechanism capable of providing mass. The presented mechanism is the most consecrated by the physics community, the Higgs mechanism, demonstrating that the mechanism provides mass dynamically, but does not justify the mass discrepancy between the doublets. Finally, the approach with the Stueckelberg mechanism in interaction with matter fields is made, in which it was concluded that, in the direct interaction approach, the mechanism was not able to provide mass to the matter field. However, in an effective theory interpretation, it was possible to show an interaction capable of modifying the massive term, opening space for future investigations that may justify the affinity of the matter fields with the Higgs field.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	TEORIA DE GAUGE POR RYOYU UTIYAMA	14
2.1	A invariância sob transformações globais	14
2.2	A invariância sob transformações locais e acoplamento mínimo	16
2.3	Densidade Lagrangiana para o potencial de gauge livre	21
3	TEORIA DE GAUGE EM INTERAÇÃO	26
3.1	Campos abelianos	26
3.2	Campo escalar complexo sob o grupo de transformações $U(1)$	29
3.3	Campos não-abelianos.	31
3.4	Comportamento do campo de matéria e suas interações sob o grupo de transformação $SU(2)$	32
4	QUEBRAS DE SIMETRIA E MECANISMO DE HIGGS	37
4.1	Quebra espontânea de simetria em uma abordagem discreta	37
4.2	Quebra espontânea para o caso de simetria contínua, global $U(1)$	40
4.3	Mecanismo de Higgs para grupos abelianos	42
4.4	Mecanismo de Higgs para grupos não abelianos	44
5	MODELO PARA OS LÉPTONS	47
6	MECANISMO DE STUECKELBERG	57
6.1	Campo de Proca e formalismo de Stueckelberg	57
6.2	Campo de Stueckelberg via método Utiyama para o grupo $U(1)$	59
6.3	Equações de campo para o caso Stueckelberg	61

6.4	Campo de matéria e o campo de Stueckelberg	62
7	CONCLUSÃO	67
	REFERÊNCIAS	69

1 Introdução

Desde que Rutherford em seu icônico experimento de espalhamento, no início do Séc.XX, modificou o modelo de átomo Thompson. Uma pergunta realizada na Grécia antiga sobre a constituinte fundamental da matéria se reacendeu. Com o elétron sendo uma partícula separada do núcleo atômico, rapidamente se percebeu que a mecânica clássica não era suficiente para explicar toda sua dinâmica (CARUSO; OGURI, 2007; RUTHERFORD, 2017a; RUTHERFORD, 2017b).

Em 1926, E. Schrödinger publica a equação que descreve o comportamento do microcosmos, no qual partículas são descritas por funções de ondas (campos), como o próprio elétron (SCHRODINGER, 1926). Como as partículas agora são descritas como campos e estes são objetos com números infinitos de graus de liberdades, sistemas contínuos, é necessário utilizar o ferramental da teoria clássica de campos e dos métodos de Lagrange e Hamilton baseados no princípio variacional (GOLDSTEIN *et al.*, 2002), para a criação de uma nova descrição da matéria.

Entretando, Sommerfeld (SOMMERFELD, 1924), havia mostrado que, para explicar a estrutura fina dos espectros de raios do átomo de hidrogênio, se faz necessário considerar correções relativísticas ao movimento do elétron orbital, visto que a equação de Schrödinger não atendia essa necessidade (SCHRODINGER, 1995). Foi em 1928, com Paul M. Dirac, que se obteve uma equação capaz de reunir a mecânica quântica e a teoria da relatividade especial. As soluções das equações de Dirac para partículas livres de massa m , levaram à previsão teórica do pósitron que foi posteriormente confirmado em 1930 por Anderson (DIRAC, 1930; CARUSO; OGURI, 2007; EINSTEIN, 1987; GRIFFITHS, 2008; NETO, 2017).

Na teoria clássica de campos temos transformações que são feitas nas coordenadas de espaço-tempo, transformações que compõem os conhecidos grupos de Lorentz e Poincaré e transformações sobre os campos, conhecidas na literatura, como transformações de calibre ou transformações de gauge e que, pelo teorema de Noether, se a ação possui uma simetria com respeito a uma determinada transformação é derivada uma quantidade conservada (GOLDSTEIN *et al.*, 2002). Então dado o fato de se ter transformações que afetam apenas os campos, as simetrias internas, temos acesso a uma gama de informações que se conservam para cada simetria, por exemplo a simetria sob transformações de fase de um

campo complexo leva a conservação da carga elétrica. Estas transformações que mostram as propriedades internas não estão relacionadas com as coordenadas do espaço-tempo do campo. As importantes contribuições fornecidas por Dirac e a teoria de campo se tornaram a base da eletrodinâmica quântica e da teoria quântica de campos, atualmente o “framework” natural da física de altas energias.(CARUSO; OGURI, 2007; NETO, 2017)

Na efervescência das ideias dos anos 1930-1960, com a descoberta do nêutron e de um conjunto enorme de partículas. As peças iniciais que levariam à descoberta das duas últimas forças fundamentais (fraca e forte) foram postas. Os trabalhos envolvendo as simetrias de gauge de Weyl (O’RAIFEARTAIGH, 1997), Gell-Mann e Zweig mostrou que estas desempenham um papel decisivo na descrição e organização das partículas. As descrições formais de simetria, ou como conhecida na matemática a teoria de grupos de simetria, passam a organizar as partículas por estruturas “não-observáveis”, que levaram a previsão e descobertas de outras partículas, segundo W. Heisenberg “ Nossas partículas elementares são comparáveis aos corpos regulares de Timeu de Platão.” (HEISENBERG, 1950; HEISENBERG, 1984; HEISENBERG, 2007; CARUSO; OGURI, 2007; ROBINSON *et al.*, 2008).

Em meados de 1970, uma serie de físicos buscando reduzir o processo de descrição a nível de interação fundamental, perceberam que, considerando um regime de altas energias (FEYNMAN, 1988) muito maiores que as energias de repouso de cada partícula, estas poderiam ser descritas por uma estrutura comum, denominados de quarks (CARUSO; OGURI, 2007; ILIOPOULOS, 2016; GREINER, 2000; GRIFFITHS, 2008; WEINBERG, 1967; GLASHOW, 1961; BASSALO; 3, 2008).

A confirmação de que as estruturas abstratas eram de fato partículas físicas reais e com a evolução do modelo de quarks para partículas, a descrição das interações fundamentais baseadas em argumentos de simetria (NOVAES, 2000), em especial a $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$, o Modelo Padrão foi construído. O modelo padrão é, até o momento, o melhor modelo já feito pela física das altas energias. O modelo previu corretamente, com uma precisão na casa de bilionésimos, o momento de dipolo magnético do elétron, confirmou existência dos bósons W e Z, em 1983, e do bóson de Higgs em 2012 (CHATRCHYAN *et al.*, 2012).

Embora tenha obtido resultados excepcionais, descrevendo com sucesso boa parte dos fenômenos, o modelo padrão não foi capaz de se consolidar como uma teoria de fato, pois depende de uma série de parâmetros que precisam ser ajustados “a mão”, ou seja, não é derivado de primeiros princípios. Como modelo ele apresenta algumas limitações sugerindo a existência de algo além. Medições do momento de dipolo magnético anômalo do múon, o experimento múon $g-2$, mostra interferências que sugerem novas partículas ou forças. Existe também a falta de previsão do modelo a respeito da matéria escura e as oscilações de neutrinos. (ALBAHRI *et al.*, 2021; ABI *et al.*, 2021; ELECTROWEAK *et al.*, 2006; WEINBERG, 1967; SHEARS, 2012; DOBRYNINA *et al.*, 2016) .

O modelo padrão é construído no que se pode chamar de teoria de gauge quântica. Para qualquer teoria de gauge usual (NETO, 2017), os campos de gauge não podem ter massa, conforme será mostrado, com o desenvolvimento da teoria feita por Utiyama (UTIYAMA, 1956). Não obstante, os campos de matéria são descritos por dubletos e respeitam a simetria $SU(2)$, no qual para haver simetria, é necessário respeitar a condição de que os dubletos de matéria, quando partículas diferentes, não possuam termos massivos. Entretanto, experimentalmente, verifica-se a existência de massa para ambos os campos.

Para resolver esta questão Peter Higgs, em 1963, propôs um mecanismo que se mostrou extremamente eficiente para resolver o problema das massas em ambos os casos. Higgs, desenvolve sua descrição das partículas considerando campos desprovidos de massa, acrescentando um campo e um potencial que, durante sua evolução dinâmica até um estado de vácuo, fornece massa aos campos de matéria e de gauge (HIGGS, 1964).

No entanto, devido a estrutura do campo de Higgs no Modelo Padrão ser de um dubleto do $SU(2)$, observa-se que as partículas ganham massa através de interações fracas com o Higgs. Exatamente no setor eletrofraco do modelo padrão encontramos uma das maiores limitações do modelo de partículas, a descrição da massa para neutrinos.

Proposto por W.Pauli 1930, os neutrinos eram tratados como partículas sem massa (NETO, 2017). Todavia, no início dos anos 2000, em uma colaboração de pesquisadores, foi medido o fluxo de neutrinos originários do Sol, no qual evidenciou, uma discrepância entre as previsões teóricas (Cleveland *et al.*, 1998). Os dados experimentais apresentados a respeito do fluxo de neutrinos, só ganham consistência no caso de os neutrinos admitirem massa e possuírem oscilação de sabores entre os tipos de neutrinos existentes (FUNCKE *et al.*, 2020; NUNOKAWA, 2000; MAJORANA, 1987; FUKS *et al.*, 2021; DOBRYNINA *et al.*, 2016).

O mecanismo de Higgs, embora seja capaz de fornecer massa para o neutrino, não justifica uma diferença tão grande de massa entre o lépton e o neutrino associado (NUNOKAWA, 2000). Essa diferença significativa pode vir a ser um indicativo de que pode haver algo além do que sabemos, como na questão do experimento múon $g-2$.

Motivados por esta discrepância, o objetivo deste trabalho é revisar os mecanismos de criação de massa de Higgs e de Stueckelberg (RUEGG; RUIZ-ALTABA, 2004), para os campos de matéria, no contexto da teoria de gauge. No capítulo dois foi apresentado o arcabouço ferramental da teoria de gauge desenvolvido por Utiyama. No capítulo três, é desenvolvido as interações entre campos de gauge e os campos de matéria, no regime de grupos abelianos e não-abelianos. O capítulo quatro é dedicado ao conceito de quebra espontânea de simetria e ao mecanismo de Higgs, com sua aplicação realizada no capítulo cinco para os léptons. Finalmente é feito, no capítulo seis, uma análise do mecanismo de Stueckelberg em associação com o campo de matéria com fins de investigar essas relações e no capítulo sete, nossas conclusões finais são apresentadas.

2 Teoria de gauge por Ryoyu Utiyama

Este capítulo consagra o desenvolvimento feito por Ryoyu Utiyama na construção de uma teoria de gauge para os grupos de Lie ditos semi-simples. Utiyama desenvolve em seu trabalho, “Invariant theoretical interpretation of interaction.” (UTIYAMA, 1956), uma forma geral que engloba não só os grupos ditos abelianos como os não-abelianos, incorporando assim de maneira metódica, o trabalho de Yang-Mills de 1954.

2.1 A invariância sob transformações globais

Para se verificar a invariância em uma transformação global, é necessário definir em uma região Ω do espaço-tempo, um sistema físico composto por N campos de matéria $\phi^A(x)$, onde $A = 1, 2, \dots, N$, descreve cada campo, que, em princípio, não apresenta interações. Então é construída uma densidade lagrangiana genérica, que seja dependente do campo de matéria e de sua derivada ordinária de primeira ordem no espaço-tempo, $\mathcal{L}_M = \mathcal{L}_M[\phi^A(x), \partial_\mu \phi^A(x)]$, onde foi utilizada uma notação compacta para derivada ordinária, $\partial_\mu \phi^A(x) \equiv \frac{\partial \phi^A(x)}{\partial x^\mu}$. Esta densidade lagrangiana, assumida como conhecida, é submetida a transformações que formam um grupo de Lie \mathcal{G}_n . O grupo \mathcal{G}_n apresenta “ n ” parâmetros constantes na coordenada x , representados por ϵ^c , sendo assim chamado de grupo global.

O ponto de partida é a densidade lagrangiana,

$$\mathcal{L}_M = \mathcal{L}_M[\phi^A(x), \partial_\mu \phi^A(x)] \quad (2.1)$$

e aplicando a convenção de Einstein para soma de índices repetidos, $\partial_\mu A^\mu = \partial_0 A^0 + \partial_1 A^1 + \partial_2 A^2 + \partial_3 A^3$, as equações de campo,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi^A} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (\partial_\mu \phi^A)} = 0, \quad (2.2)$$

são obtidas da aplicação do princípio da mínima ação para variações arbitrárias, analogamente à dedução das equações de movimento da mecânica clássica.

Postula-se que a integral de ação,

$$S[\phi] = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}_M(x), \quad (2.3)$$

é invariante sob a seguinte transformação infinitesimal do grupo de Lie \mathcal{G}_n ,

$$\phi^A \rightarrow \phi^A(x) + \delta\phi^A(x), \quad (2.4)$$

dependente dos n parâmetros, no campo, ou seja, essa variação é dada por uma combinação bilinear entre o parâmetro e o campo,

$$\delta\phi^A(x) = \epsilon^a I_{(a)B}^A \phi^B, \quad a = 1, 2, \dots, n, \quad (2.5)$$

com os elementos $I_{(a)B}^A$, sendo os geradores do grupo. Estes objetos definem através da operação de comutação, $[I_{(a)}, I_{(b)}]_B^A = I_{(a)C}^A I_{(b)B}^C - I_{(b)C}^A I_{(a)B}^C = f_a^c{}_b I_{(c)B}^A$, um conjunto de constantes de estruturas, $f_a^c{}_b$, independentes das representações.

As constantes de estrutura obedecem uma regra cíclica,

$$f_a^m{}_b f_m^l{}_c + f_b^m{}_c f_m^l{}_a + f_c^m{}_a f_m^l{}_b = 0, \quad (2.6)$$

conhecida como identidade de Jacobi. Essas constantes de estrutura também obedecem a relação de antissimetria:

$$f_a^c{}_b = -f_b^c{}_a. \quad (2.7)$$

Deve-se obter então:

$$\delta\mathcal{L}_M = \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\phi^A} \Big|_{\partial\phi=cte} \delta\phi^A + \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu\phi^A)} \Big|_{\phi=cte} \delta(\partial_\mu\phi^A) = 0. \quad (2.8)$$

Esta relação deve ser válida para qualquer ponto do espaço-tempo e independentemente da natureza do campo ser escalar, vetorial, tensorial ou outra.

Ao se utilizar a regra de Leibniz no segundo termo e abreviando-se a notação para derivação parcial,

$$\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu\phi^A)} \partial_\mu(\delta\phi^A) = \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu\phi^A)} (\delta\phi^A) \right] - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu\phi^A)} (\delta\phi^A), \quad (2.9)$$

é possível reescrever a equação de modo que,

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\phi^A} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu\phi^A)} \right) \delta\phi^A + \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu\phi^A)} (\delta\phi^A) \right] = 0. \quad (2.10)$$

O primeiro membro da igualdade é nulo, se tomarmos como válida a equação de campo Eq.(2.2). Como os parâmetros são constantes e independentes entre si, temos uma corrente conservada para cada valor de a :

$$\partial_\mu J_a^\mu = 0, \quad (2.11)$$

onde,

$$J_a^\mu \equiv \left[\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (\partial_\mu \phi^A)} (I_{(a)B}^A \phi^B) \right], \quad (2.12)$$

que caracteriza uma corrente conservada,

$$\epsilon^a \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (\partial_\mu \phi^A)} (I_{(a)B}^A \phi^B) \right] = 0. \quad (2.13)$$

E verifica-se também que a transformação global do grupo preserva a invariância da densidade lagrangiana.

Uma última análise pode ser feita também em relação aos parâmetros. Partindo da Eq.(2.8) e notando que a variação δ é referente à forma do campo ϕ^A , e não ao sistema de coordenadas, é lícito realizar a troca com a derivada, ou “dito de outra forma, as transformações de gauge não afetam as coordenadas sendo, por essa mesma razão, chamadas transformações internas.” (ACEVEDO *et al.*, 2018). Então,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi^A} \epsilon^a I_{(a)B}^A \phi^B + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (\partial_\mu \phi^A)} \partial_\mu (\epsilon^a I_{(a)B}^A \phi^B) = 0. \quad (2.14)$$

Como os parâmetros são constantes, independentes entre si e diferentes de zero como argumentado, conclui-se:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi^A} I_{(a)B}^A \phi^B + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (\partial_\mu \phi^A)} I_{(a)B}^A \partial_\mu \phi^B = 0. \quad (2.15)$$

2.2 A invariância sob transformações locais e acoplamento mínimo

Na seção anterior foi verificada a invariância sob uma transformação global. Nesta seção é verificada “a ideia básica da teoria de gauge, segundo a qual se um sistema físico é invariante em relação a um grupo contínuo de transformações \mathcal{G}_n , independentes do espaço-tempo, este sistema preserva sua invariância quando o grupo é feito local $\mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{G}_{\infty n}(x)$, ou seja, passa a ser dependente do espaço-tempo.” (O’RAIFEARTAIGH, 1997)

O ponto de partida é novamente a densidade lagrangiana,

$$\mathcal{L}_M = \mathcal{L}_M [\phi^A(x), \partial_\mu \phi^A(x)], \quad (2.16)$$

com a hipótese de que sua integral de ação,

$$S[\phi] = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}_M(x), \quad (2.17)$$

é invariante sob a transformação infinitesimal, correspondente ao grupo local de Lie $\mathcal{G}_n(x)$, com

$$\delta\phi^A(x) = \epsilon^a(x) I_{(a)B}^A \phi^B. \quad (2.18)$$

É de se notar que, em um grupo local, o parâmetro agora possui dependência com o ponto do espaço-tempo, o que significa que sua derivação deve ser considerada. Como pode se verificar ao assumir a invariância, temos a Eq.(2.8), em que, aplicando-se as novas transformações dos parâmetros Eq.(2.18) e a regra de derivação, é possível reorganizar a expressão para

$$\delta\mathcal{L}_M = \left(\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\phi^A} I_{(a)B}^A \phi^B + \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu\phi^A)} I_{(a)B}^A \partial_\mu\phi^B \right) \epsilon^a(x) + \left(\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu\phi^A)} I_{(a)B}^A \phi^B \right) \partial_\mu\epsilon^a(x). \quad (2.19)$$

A Eq.(2.15), por hipótese, determina que o primeiro termo da Eq.(2.19) é zero, independente do parâmetro e, portanto,

$$\delta\mathcal{L}_M = \left(\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu\phi^A)} I_{(a)B}^A \phi^B \right) \partial_\mu\epsilon^a(x) \neq 0, \quad (2.20)$$

uma vez que, o gerador $I_{(a)B}^A$ não pode ser nulo, e por hipótese $\partial_\mu\epsilon^a(x)$ não é necessariamente nula. Ou seja, em uma transformação local, perde-se a invariância da densidade lagrangiana. Para recuperá-la é necessário “forçar” que $\delta\mathcal{L}_M \equiv 0$, isso pode ser feito acrescentando um termo, no caso um campo extra, que anule o termo que carrega a derivada do parâmetro.

Para se recuperar a invariância, Utiyama, em seu trabalho, acrescentou e especificou um campo $A^a_\mu(x)$. Para os propósitos deste desenvolvimento optei por uma apresentação mais objetiva do campo e da sua variação, dada por um “ansatz” do tipo,

$$\delta A^a_\mu = S_{(c)}^a{}_\mu{}^\nu A^b_\nu \epsilon^c(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu\epsilon^a(x), \quad (2.21)$$

em que $S_{(c)}^a{}_\mu{}^\nu$, é uma constante de combinação a se determinar. O leitor motivado pela curiosidade poderá encontrar o desenvolvimento das relações acima no trabalho de Utiyama, “Invariant Theoretical Interpretation of Interaction” (UTIYAMA, 1956) e em uma abordagem com viés didático no trabalho de Acevedo (ACEVEDO *et al.*, 2018).

A densidade lagrangiana passa a ser função também do novo campo compensador,

$$\mathcal{L}'_M = \mathcal{L}'_M[\phi^A(x), \partial_\mu\phi^A(x), A^a_\mu(x)], \quad (2.22)$$

em que por hipótese simplificadora, não existe a necessidade de a densidade lagrangiana depender da derivada do campo compensador, $\partial_\nu A^a_\mu(x)$. De posse desta nova densidade lagrangiana, é postulado, novamente, que a integral de ação,

$$S'[\phi, A] = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}'_M(x), \quad (2.23)$$

seja invariante em relação à transformação de grupo local. Fazendo uso das Eqs.(2.18) e Eq.(2.21), escreve-se,

$$\delta \mathcal{L}'_M = \frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial \phi^A} \delta \phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial (\partial_\mu \phi^A)} \delta (\partial_\mu \phi^A) + \frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A^a_\mu} \delta A^a_\mu = 0, \quad (2.24)$$

ou,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial \phi^A} I_{(a)B}^A \phi^B + \frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial (\partial_\mu \phi^A)} I_{(a)B}^A \partial_\mu \phi^B + \frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A^c_\nu} S_{(a)\nu b}^{c\mu} A^b_\mu \right) \epsilon^a(x) \\ & + \left(\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial (\partial_\mu \phi^A)} I_{(a)B}^A \phi^B + \frac{1}{g} \frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A^a_\mu} \right) \partial_\mu \epsilon^a(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Como os parâmetros $\epsilon^a(x)$ são arbitrários e independentes entre si, não há a exigência de se estabelecer uma dependência entre $\epsilon^a(x)$ e $\partial_\mu \epsilon^a(x)$. Assim, os termos da Eq.(2.25) anulam-se independentemente, formando um sistema de equações ditas equações hierárquicas. Então:

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial \phi^A} I_{(a)B}^A \phi^B + \frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial (\partial_\mu \phi^A)} I_{(a)B}^A \partial_\mu \phi^B + \frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A^c_\nu} S_{(a)\nu b}^{c\mu} A^b_\mu = 0 \quad (2.26)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial (\partial_\mu \phi^A)} I_{(a)B}^A \phi^B + \frac{1}{g} \frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A^a_\mu} = 0. \quad (2.27)$$

A Eq.(2.27) é satisfeita se a dependência de \mathcal{L}'_M em $\partial_\mu \phi^A$ e A^a_μ , ocorrer através da combinação:

$$\nabla_\mu \phi^A \equiv \partial_\mu \phi^A - g A^a_\mu I_{(a)B}^A \phi^B. \quad (2.28)$$

A densidade lagrangiana passa a ser expressa como,

$$\mathcal{L}'_M[\phi^A(x), \partial_\mu \phi^A(x), A^a_\mu(x)] \equiv \mathcal{L}''_M[\phi^A(x), \nabla_\mu \phi^A(x)]. \quad (2.29)$$

Para a Eq.(2.26), usamos os seguintes resultados oriundos da regra da cadeia:

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial \phi^L} = \frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial \phi^L} \Big|_{\nabla_\mu \phi} - g \frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial (\nabla_\nu \phi^C)} \Big|_{\phi} A^a_\nu I_{(a)L}^C. \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial (\partial_\mu \phi^A)} = \frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial (\nabla_\nu \phi^B)} \Big|_\phi \delta_A^B \delta^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial (\nabla_\mu \phi^A)} \Big|_\phi. \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A^a_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial (\nabla_\nu \phi^B)} \Big|_\phi \frac{\partial (\nabla_\nu \phi^B)}{\partial A^a_\mu} = -g \frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial (\nabla_\mu \phi^B)} \Big|_\phi I_{(a)C}^B \phi^C. \quad (2.32)$$

Novamente suprimindo a notação da derivação parcial, a Eq.(2.26) se torna,

$$\frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial \phi^A} I_{(a)B}^A \phi^B + \frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial (\nabla_\mu \phi^A)} I_{(a)B}^A \nabla_\mu \phi^B - g \frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial (\nabla_\mu \phi^A)} I_{(a)B}^A \phi^B S_{(a)\nu b}^c A^b_\mu = 0. \quad (2.33)$$

Para a Eq.(2.26), primeira do sistema de equações hierárquicas, em uma primeira análise é compreendido que, “no caso do grupo de gauge global ϵ^a (a = constante) a Eq.(2.27) não aparece e a Eq.(2.26) tem o mesmo significado da condição de invariância de gauge global Eq.(2.15). Em verdade, Eq.(2.26) reduz-se é Eq.(2.15) quando \mathcal{L}'_M passa à \mathcal{L}_M , para a qual $\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial A^a_\mu} = 0$ ” (ACEVEDO *et al.*, 2018).

O interesse passa a ser a verificação da invariância da nova densidade langrangiana, que depende da derivada covariante, ou seja:

$$\delta \mathcal{L}''_M = \frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial \phi^A} \delta \phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial (\nabla_\mu \phi^A)} \delta (\nabla_\mu \phi^A) = 0. \quad (2.34)$$

O primeiro termo assume forma,

$$\frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial \phi^A} \delta \phi^A = \frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial \phi^A} \epsilon^a(x) I_{(a)B}^A \phi^B. \quad (2.35)$$

O segundo termo apresenta o novo objeto, no qual utilizando-se das equações, Eq.(2.28) e Eq.(2.18), conclui-se que,

$$\delta (\nabla_\mu \phi^A) = \epsilon^a(x) [I_{(a)B}^A \partial_\mu \phi^B - g A^b_\mu (I_{(b)C}^A I_{(a)B}^C) \phi^B - g S_{(a)\mu b}^c A^b_\nu I_{(c)B}^A \phi^B]. \quad (2.36)$$

Ao se introduzir o campo A e supor que sua transformação fosse dada por Eq.(2.21), é possível verificar que o termo $\partial_\mu \epsilon^a(x)$, foi anulado como desejado. Para completar a definição do objeto, é necessário então avaliar $(-I_{(b)C}^A I_{(a)B}^C)$ e $S_{(a)\mu b}^c$;

Utilizando a relação de comutação dos geradores,

$$-I_{(b)C}^A I_{(a)B}^C = [I_{(a)}, I_{(b)}]_B^A - I_{(a)C}^A I_{(b)B}^C = f_a^c{}_b I_{(c)B}^A - I_{(a)C}^A I_{(b)B}^C. \quad (2.37)$$

Substituindo no objeto da Eq.(2.36),

$$\delta (\nabla_\mu \phi^A) = \epsilon^a(x) [I_{(a)B}^A (\nabla_\mu \phi^B) + (f_a^c{}_b \delta_\mu^\nu - S_{(a)\mu b}^c) g A^b_\nu I_{(c)B}^A \phi^B]. \quad (2.38)$$

Realizando a substituição da Eq.(2.38) na Eq.(2.34), obtém-se finalmente,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}''_M &= \frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial \phi^A} \epsilon^a(x) I_{(a)B}^A \phi^B + \frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial (\nabla_\mu \phi^A)} \epsilon^a(x) I_{(a)B}^A (\nabla_\mu \phi^B) \\ &+ \frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial (\nabla_\mu \phi^A)} \epsilon^a(x) (f_a^c{}_b \delta_\mu^\nu - S_{(a)}^c{}_\mu{}^\nu{}_b) g A^b{}_\nu I_{(c)B}^A \phi^B = 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Como os parâmetros são funções arbitrárias e independentes entre si e devem valer para todo ponto, conclui-se que

$$\frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial \phi^A} I_{(a)B}^A \phi^B + \frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial (\nabla_\mu \phi^A)} I_{(a)B}^A (\nabla_\mu \phi^B) + \frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial (\nabla_\mu \phi^A)} (f_a^c{}_b \delta_\mu^\nu - S_{(a)}^c{}_\mu{}^\nu{}_b) g A^b{}_\nu I_{(c)B}^A \phi^B = 0. \quad (2.40)$$

A equação acima é realmente semelhante à Eq.(2.15),

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi^A} I_{(a)B}^A \phi^B + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (\partial_\mu \phi^A)} I_{(a)B}^A \partial_\mu \phi^B = 0, \quad (2.41)$$

com exceção do último termo que carrega o elemento $S_{(a)}^c{}_\mu{}^\nu{}_b$, que é uma constante a ser determinada e pode ser escolhida de tal forma a anular o terceiro termo da Eq.(2.40). Esta escolha é motivada pelo formato adquirido no objeto. Observe que fazendo

$$S_{(a)}^c{}_\mu{}^\nu{}_b = f_a^c{}_b \delta_\mu^\nu, \quad (2.42)$$

temos

$$\delta (\nabla_\mu \phi^A) = \epsilon^a(x) I_{(a)B}^A (\nabla_\mu \phi^B), \quad (2.43)$$

que se transforma exatamente como é determinado pela lei de transformação do campo da Eq.(2.18),

$$\delta \phi^A(x) = \epsilon^a(x) I_{(a)B}^A \phi^B, \quad (2.44)$$

e define completamente a variação do campo de gauge, ao ser substituído na Eq.(2.21),

$$\delta A^c{}_\nu = \epsilon^a f_a^c{}_b A^b{}_\nu + \frac{1}{g} \partial_\nu \epsilon^c. \quad (2.45)$$

Além de evidenciar o caráter covariante, conclui-se a investigação sobre a invariância da densidade lagrangiana sob transformações locais, uma vez que, “espera-se que uma teoria mais geral seja capaz de reproduzir os resultados da teoria particular. Conforme esta premissa, os resultados da análise da invariância de $\mathcal{L}_M [\phi^A(x), \partial_\mu \phi^A(x)]$ sob ação do grupo de \mathcal{G}_n devem ser recuperados em algum limite apropriado dos resultados encontrados pelo estudo da invariância do mesmo sistema sob um grupo mas geral” (ACEVEDO *et al.*,

2018). Este limite se verifica quando se submete \mathcal{L}''_M ao limite dado por

$$A^b_\nu \Rightarrow 0, \quad (2.46)$$

e assim se observa que

$$\mathcal{L}''_M [\phi^A(x), \nabla_\mu \phi^A(x)] \Rightarrow \mathcal{L}''_M [\phi^A(x), \partial_\mu \phi^A(x)] = \mathcal{L}_M [\phi^A(x), \partial_\mu \phi^A(x)], \quad (2.47)$$

ou seja, as descrições iniciais do sistema foram recuperadas. Assim, a relação pode ser posta da seguinte forma:

$$\mathcal{L}''_M [\phi^A(x), \nabla_\mu \phi^A(x)] = \mathcal{L}_M [\phi^A(x), \nabla_\mu \phi^A(x)]. \quad (2.48)$$

Ao se extrapolar esta relação para além do limite imposto, obtemos a chamada prescrição de acoplamento mínimo, a qual representa-se como

$$\partial_\mu \phi^A(x) \xrightarrow{int} \nabla_\mu \phi^A(x) \Rightarrow \mathcal{L}_{M+int} [\phi^A(x), \nabla_\mu \phi^A(x)] \equiv \quad (2.49)$$

$$\equiv \mathcal{L}''_M [\phi^A(x), \nabla_\mu \phi^A(x)] = \mathcal{L}_M [\phi^A(x), \nabla_\mu \phi^A(x)], \quad (2.50)$$

em outras palavras, para se manter a invariância em uma transformação local, precisamos introduzir um campo A^b_ν e forçar sua interação com o campo ϕ^A através da substituição da derivada ordinária pela derivada covariante que tenha a forma da Eq.(2.28).

2.3 Densidade Lagrangiana para o potencial de gauge livre

Esta seção é dedicada à análise do campo de gauge em si, onde até o momento ele foi apresentado como recurso necessário para se manter a invariância sob uma transformação local. A atenção agora se volta ao campo livre e em seu comportamento, como massa associada e dinâmica descrita na equação de campo.

Assim, assumindo que a densidade lagrangiana correspondente ao campo de gauge é de até primeira ordem na dependência com a derivada,

$$\mathcal{L}_A [A^a_\mu; \partial_\nu A^a_\mu] (x), \quad (2.51)$$

onde,

$$\partial_\nu A^a_\mu = \frac{\partial A^a_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (2.52)$$

e que a lagrangiana seja invariante pela transformação da Eq.(2.45), da seção anterior,

temos,

$$\delta \mathcal{L}_A = \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^a_\mu} \delta A^a_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial (\partial_\nu A^a_\mu)} \delta (\partial_\nu A^a_\mu) = 0. \quad (2.53)$$

Assim, realizando a troca da derivada com δ , aplicando a regra de Leibniz no segundo termo e substituindo as relações de variação de A^a_μ , obtém-se:

$$\epsilon^c \left[\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^a_\mu} f_c^a{}^b A^b_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial (\partial_\nu A^a_\mu)} f_c^a{}^b \partial_\nu A^b_\mu \right] + \partial_\nu \epsilon^c \left[\frac{1}{g} \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^c_\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial (\partial_\nu A^a_\mu)} f_c^a{}^b A^b_\mu \right] \quad (2.54)$$

$$+ \frac{1}{g} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial (\partial_\nu A^a_\mu)} \right] \partial_\nu \partial_\mu \epsilon^a = 0. \quad (2.55)$$

Como os parâmetros e suas derivadas devem ser independentes entre si e da relação de simetria das derivadas,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial (\partial_\nu A^a_\mu)} \right] \partial_\nu \partial_\mu \epsilon^a &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial (\partial_\nu A^a_\mu)} \right] \partial_\nu \partial_\mu \epsilon^a + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial (\partial_\nu A^a_\mu)} \right] \partial_\nu \partial_\mu \epsilon^a = \\ &= \partial_\mu \partial_\nu \epsilon^a \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial (\partial_\mu A^a_\nu)} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial (\partial_\nu A^a_\mu)} \right], \end{aligned} \quad (2.56)$$

tem-se as equações hierárquicas para o potencial de gauge livre,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^a_\mu} f_c^a{}^b A^b_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial (\partial_\nu A^a_\mu)} f_c^a{}^b \partial_\nu A^b_\mu = 0, \quad (2.57)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^c_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial (\partial_\mu A^a_\nu)} f_a^c{}^b A^b_\nu = 0, \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial (\partial_\nu A^a_\mu)} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial (\partial_\mu A^a_\nu)} = 0. \quad (2.59)$$

A última das três equações demonstra que a derivada do campo gauge deve estar contida dentro da densidade lagrangiana, através da combinação

$$A^a_{[\mu,\nu]} \equiv \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu. \quad (2.60)$$

Assim, podemos escrever uma nova densidade langrangiana em termos deste objeto,

$$\mathcal{L}'_A = \mathcal{L}'_A [A^a_\mu(x); A^a_{[\mu,\nu]}(x)]. \quad (2.61)$$

Adotando o mesmo procedimento da seção anterior, ou seja, aplicando a regra da

cadeia e verificando os novos termos se obtém,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial (\partial_\nu A^c_\mu)} = \frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A^c_{[\mu,\nu]}} = -\frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A^c_{[\nu,\mu]}}. \quad (2.62)$$

É possível reescrever a Eq.(2.58) como,

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A^a_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A^c_{[\mu,\nu]}} f_a{}^c{}_b A^b_\nu = 0. \quad (2.63)$$

Assim, adotando o mesmo raciocínio, conclui-se que a derivada de A^a_μ aparece em \mathcal{L}'_A , apenas através da combinação,

$$F^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g f_b{}^a{}_c A^b_\mu A^c_\nu. \quad (2.64)$$

O objeto $F^a{}_{\mu\nu}$ é chamado de tensor de intensidade de campo e é antissimétrico no espaço-tempo. E portanto, se obtém

$$F^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - \frac{1}{2} g f_b{}^a{}_c (A^b_\mu A^c_\nu - A^c_\mu A^b_\nu), \quad (2.65)$$

com o qual é possível reescrever a densidade lagrangiana como

$$\mathcal{L}''_A = \mathcal{L}''_A [A^a_\mu(x); F^a{}_{\mu\nu}(x)]. \quad (2.66)$$

É possível visualizar os procedimentos da seguinte forma. Partindo das equações Eq.(2.51), Eq.(2.61) e Eq.(2.66),

$$\mathcal{L}_A [A^a_\mu(x); \partial_\nu A^a_\mu(x)] \xrightarrow{A^a_{[\mu,\nu]}} \mathcal{L}'_A [A^a_\mu(x); A^a_{[\mu,\nu]}(x)] \xrightarrow{F^a{}_{\mu\nu}} \mathcal{L}''_A [A^a_\mu(x); F^a{}_{\mu\nu}(x)]. \quad (2.67)$$

De posse da Eq.(2.64), é possível verificar que, realizando uma mudança de índices, o primeiro termo da segunda das equações hierárquicas, Eq.(2.63), é

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A^a_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial A^a_\mu} \Big|_{F^d{}_{\mu\rho}} - g \frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial F^d{}_{\mu\rho}} \Big|_{A^a_\mu} f_a{}^d{}_g A^g_\rho. \quad (2.68)$$

Para o segundo termo, obtém-se,

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_A}{\partial A^c_{[\mu,\nu]}} = \frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial F^d{}_{\rho\sigma}} \frac{\partial F^d{}_{\rho\sigma}}{\partial A^c_{[\mu,\nu]}} = \frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial F^c{}_{\mu\nu}}. \quad (2.69)$$

Substituindo a Eq.(2.68) e a Eq.(2.69), é possível expressar o primeiro membro da Eq.(2.63)

como,

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^a{}_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial (\partial_\mu A^c{}_\nu)} f_a{}^c{}_b A^b{}_\nu = \frac{1}{g} \frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial A^a{}_\mu} \Big|_{F^c{}_{\mu\nu}} - \frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial F^c{}_{\mu\nu}} f_a{}^c{}_b A^b{}_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial F^c{}_{\mu\nu}} f_a{}^c{}_b A^b{}_\nu = 0 \quad (2.70)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial A^c{}_\mu} \Big|_{F^c{}_{\mu\nu}} = 0. \quad (2.71)$$

Evidenciando que a nova lagrangiana não depende explicitamente do campo $A^a{}_\mu$.

Finalmente, a última verificação que se faz necessária é sobre o comportamento do tensor intensidade de campo, sob a transformação do grupo local $\mathcal{G}_{\infty n}(x)$. Para tal, é preciso encontrar e definir a transformação, do tensor dado na Eq.(2.64),

$$\delta F^a{}_{\mu\nu} = \delta (\partial_\mu A^a{}_\nu) - \delta (\partial_\nu A^a{}_\mu) - g f_b{}^a{}_c \delta (A^b{}_\mu) A^c{}_\nu - g f_b{}^a{}_c A^b{}_\mu \delta (A^c{}_\nu), \quad (2.72)$$

Realizando a troca das deltas com as derivadas, substituindo os termos com o encontrado na Eq.(2.45), após uma longa manipulação, encontramos:

$$\delta F^a{}_{\mu\nu} = \epsilon^d [f_d{}^a{}_b A^b{}_{[\mu,\nu]} - g f_c{}^b{}_g f_b{}^a{}_d A^g{}_\mu A^c{}_\nu]. \quad (2.73)$$

Realizando uma dupla troca antissimétrica, é possível colocar a constante de estrutura em evidência e finalmente, tem-se substituindo a relação da Eq.(2.64), a transformação do tensor intensidade de campo, é definida como

$$\delta F^a{}_{\mu\nu} = \epsilon^c f_c{}^a{}_b F^b{}_{\mu\nu}. \quad (2.74)$$

De posse da Eq.(2.74), resta apenas a análise da primeira das equações hierárquicas para o potencial de gauge, a Eq.(2.57), em termos do tensor intensidade de campo. Substituindo então, a Eq.(2.58) na Eq.(2.57), usando a antissimetria de F e a propriedade de ciclicidade da constante de estrutura, é possível mostrar que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial F^c{}_{\mu\nu}} f_a{}^c{}_b F^b{}_{\mu\nu} \equiv 0. \quad (2.75)$$

Como verificado durante o desenvolvimento, a densidade lagrangiana para o potencial de gauge livre, \mathcal{L}_A , permite descrições equivalentes do sistema de campos de gauge A, seja com \mathcal{L}'_A ou \mathcal{L}''_A . Então, o problema inicial, se apresenta de fato como,

$$\delta \mathcal{L}_A \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^a{}_\mu} \delta A^a{}_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a{}_{\mu\nu}} \delta F^a{}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.76)$$

Substituindo na expressão as soluções das Eq.(2.45) e Eq.(2.75),

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^a{}_\mu} \left(\epsilon^c f_c{}^a{}{}_b A^b{}_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \epsilon^a \right) + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a{}_{\mu\nu}} (\epsilon^c f_c{}^a{}{}_b F^b{}_{\mu\nu}) = 0, \quad (2.77)$$

temos que,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^a{}_\mu} f_c{}^a{}{}_b A^b{}_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a{}_{\mu\nu}} f_c{}^a{}{}_b F^b{}_{\mu\nu} = 0, \quad (2.78)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^a{}_\mu} = 0. \quad (2.79)$$

Como o segundo termo de 2.78 é nulo, resta a conclusão de que,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^a{}_\mu} f_c{}^a{}{}_b A^b{}_\mu = 0, \quad (2.80)$$

e portanto de que a densidade lagrangiana deve ser função apenas do tensor de intensidade de campo,

$$\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_A (F^a{}_{\mu\nu}). \quad (2.81)$$

Considerando a descrição do objeto $F^a{}_{\mu\nu}$, descrito na Eq.(2.64), com a não dependência da lagrangiana sob o objeto $A^a{}_\mu$, explícito na Eq.(2.79), conclui-se que o campo de gauge não apresenta termos massivos. Tal afirmação será discutida com maior ênfase nos capítulos seguintes.

3 Teoria de gauge em interação

O capítulo anterior foi apresentado o formalismo de Utiyama para teorias de gauge. Foi demonstrado que é possível recuperar a simetria do sistema, desde que se faça o acréscimo de um campo de gauge via acoplamento mínimo. Mas a contribuição do campo de gauge dependia da condição do grupo ser ou não abeliano, “Desta equação, concluímos que a corrente conservada não terá contribuições dos campos de gauge $F_{\mu\nu}^a$, no caso em que o grupo de transformações é abeliano $f_a^b{}_c = 0$, mas o terá quando o grupo for não-abeliano $f_a^b{}_c \neq 0$.” (ACEVEDO *et al.*, 2018). Neste capítulo vamos aplicar o formalismo a grupos abelianos e não abelianos para verificar as características do novo campo e sua interação com o campo de matéria.

3.1 Campos abelianos

O ponto de partida agora é oriundo da imposição da invariância de um campo carregado, escalar e complexo,

$$\phi^A(x) = \left(\varphi^{\bar{A}}(x); \varphi^{*\bar{A}}(x) \right), \quad \text{onde } A = 1, \dots, N, \quad e \quad \bar{A} = 1, \dots, \frac{N}{2}, \quad (3.1)$$

com “N” sendo inteiro e par, sob o grupo de transformação.

A transformação do campo é dada por uma diferença de fase,

$$\varphi^{\bar{A}}(x) \Rightarrow e^{i\alpha} \varphi^{\bar{A}}(x). \quad (3.2)$$

Para o campo complexo conjugado,

$$\varphi^{*\bar{A}}(x) \Rightarrow e^{-i\alpha} \varphi^{*\bar{A}}(x), \quad (3.3)$$

onde α é uma constante real.

A transformação na sua forma infinitesimal é expressa por,

$$\phi'^A(x) = \phi^A(x) + \delta\phi^A(x), \quad (3.4)$$

onde, por uma expansão em série da exponencial são descartados termos de ordem superior, $\mathcal{O}(x^2)$, como proposto por Utiyama (O'RAIFEARTAIGH, 1997), resultando em,

$$\delta\varphi^{\bar{A}}(x) = i\alpha\varphi^{\bar{A}}(x), \quad (3.5)$$

e respectivamente,

$$\delta\varphi^{*\bar{A}}(x) = -i\alpha\varphi^{*\bar{A}}(x). \quad (3.6)$$

No capítulo anterior, verificou-se que a mudança infinitesimal,

$$\delta\phi^A(x) = \epsilon^a I_{(a)B}^A \phi^B, \quad (3.7)$$

depende do parâmetro e do gerador de grupo de forma bilinear, de modo que para um par de campos, a descrição é feita por,

$$\delta\phi^1(x) = \epsilon^1 I_{(1)1}^1 \phi^1 + \epsilon^1 I_{(1)2}^1 \phi^2, \quad (3.8)$$

e

$$\delta\phi^2(x) = \epsilon^1 I_{(1)1}^2 \phi^1 + \epsilon^1 I_{(1)2}^2 \phi^2. \quad (3.9)$$

Transpondo para a situação com campos complexos e seus conjugados, ao se comparar com as variações das equações Eq.(3.5) e Eq.(3.6), se observa que os geradores são definidos por

$$\delta\varphi = \alpha I_{(1)1}^1 \varphi + \alpha I_{(1)2}^1 \varphi^*, \quad (3.10)$$

e respectivamente,

$$\delta\varphi^* = \alpha I_{(1)1}^2 \varphi + \alpha I_{(1)2}^2 \varphi^*. \quad (3.11)$$

Substituindo os termos,

$$i\alpha\varphi = \alpha I_{(1)1}^1 \varphi + \alpha I_{(1)2}^1 \varphi^*, \quad (3.12)$$

e finalmente,

$$-i\alpha\varphi^* = \alpha I_{(1)1}^2 \varphi + \alpha I_{(1)2}^2 \varphi^*. \quad (3.13)$$

Assim, em forma matricial, os geradores são,

$$(I_{(1)}) = \begin{pmatrix} I_{(1)1}^1 & I_{(1)2}^1 \\ I_{(1)1}^2 & I_{(1)2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

e os termos ficam completamente identificados. Se o parâmetro for dado por:

$$\epsilon^a = \alpha \text{ com } (a = 1), \quad (3.15)$$

os geradores por, $I_{(a)B}^{\bar{A}} = i\delta_B^{\bar{A}}$ e $I_{(a)B}^{\left(\frac{N}{2}+\bar{A}\right)} = -i\delta_B^{\left(\frac{N}{2}+\bar{A}\right)}$. O comutador entre os geradores

fica definido por

$$[I_{(a)}, I_{(b)}]_B^A = 0. \quad (3.16)$$

Com esta relação de comutação, as constantes de estrutura f_a^b são nulas, que é uma característica dos grupos abelianos (BASSALO; 3, 2008). Portanto como as transformações realizadas fazem parte de um grupo denominado $U(1)$, cuja principal característica é a falta de autointeração do campo de gauge, devido ao valor da constante de estrutura, é possível dizer que a transformação pode ser entendida como uma mudança de fase.

Definidos os parâmetros e a transformação para o caso do grupo abeliano $U(1)$, faz-se a transformação local onde o parâmetro passa a depender do ponto $\alpha \rightarrow \alpha(x)$ e introduzimos um campo compensador $A_\mu^a(x)$, para se preservar a invariância.

O campo de gauge $A_\mu^a(x)$ possui a lei de transformação dada na Eq.(2.45)

$$\delta A_\mu^a(x) = \epsilon^c f_c^a A_\mu^b + \frac{1}{g} \partial_\mu \epsilon^a, \quad (3.17)$$

porém, como a constante de estrutura é dada por $f_c^a = 0$, a variação é definida por:

$$\delta A_\mu(x) = \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha. \quad (3.18)$$

Prosseguindo com o procedimento do capítulo anterior, a derivada covariante, $\nabla_\mu \phi^A = \partial_\mu \phi^A - g A_\mu^B I_B^A \phi^B$, adaptada para o campo escalar complexo, passa a ser expressa por:

$$\nabla_\mu \phi^A = \begin{cases} \nabla_\mu \phi^{\bar{A}} = \partial_\mu \phi^{\bar{A}} - ig \phi^{\bar{A}} A_\mu \\ \nabla_\mu \phi^{*\bar{A}} = \partial_\mu \phi^{*\bar{A}} + ig \phi^{*\bar{A}} A_\mu \end{cases}. \quad (3.19)$$

De posse da derivada covariante e aplicando a prescrição de acoplamento, ou seja, a substituição da derivada ordinária pela covariante, se obtém

$$\mathcal{L}_M [\phi^A; \partial_\mu \phi^A] \rightarrow \mathcal{L}_M [\phi^A; \nabla_\mu \phi^A] = \mathcal{L}_M [\varphi; \varphi^*; \nabla_\mu \varphi; \nabla_\mu \varphi^*]. \quad (3.20)$$

A Lagrangiana do campo de gauge livre é dada por:

$$\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_A (F_{\mu\nu}^a). \quad (3.21)$$

Como descrito pela Eq.(2.64), o tensor intensidade de campo é

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf_b^a A_\mu^b A_\nu^c, \quad (3.22)$$

onde a constante de estrutura, para o caso em questão é nula, e então,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.23)$$

A equação Eq.(3.23) é a definição do campo eletromagnético na formulação dos potenciais vetores. E, finalmente, temos que a corrente conservada neste caso é dado por:

$$J^\mu = -ig \left(\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial \nabla_\mu \varphi^{\bar{A}}} \varphi^{\bar{A}} - \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial \nabla_\mu \varphi^{*\bar{A}}} \varphi^{*\bar{A}} \right). \quad (3.24)$$

3.2 Campo escalar complexo sob o grupo de transformações U(1)

Partindo de uma densidade lagrangiana genérica, $\mathcal{L} = \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^*$, no qual m^2 é um termo de massa para o campo de matéria, a análise do comportamento da interação entre o campo de gauge e o campo ϕ , sob o grupo de transformação de fase, é feita aplicando a prescrição de acoplamento mínimo.

$$\mathcal{L} = \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi - m^2 \phi \phi^*. \quad (3.25)$$

A lagrangiana total do sistema é dada por,

$$\mathcal{L}_T = \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_A \equiv \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi - m^2 \phi \phi^* + \mathcal{L}_A (F_{\mu\nu}^a). \quad (3.26)$$

O campo de gauge deve se transformar de modo a garantir a covariância da derivada ∇_μ e a invariância da lagrangiana:

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha. \quad (3.27)$$

A transformação dada preserva a invariância de forma esperada como proposto por Utiyama (O'RAIFEARTAIGH, 1997). Uma vez que,

$$\nabla^\mu \phi = \partial^\mu \phi - ig \phi A^\mu. \quad (3.28)$$

De forma análoga,

$$\nabla_\mu \phi^* = \partial_\mu \phi^* + ig \phi^* A_\mu. \quad (3.29)$$

Substituindo na densidade lagrangiana,

$$\mathcal{L}_M = \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi^* + ig [(\partial^\mu \phi) A_\mu \phi^* - (\partial_\mu \phi^*) A^\mu \phi] + [g^2 A^\mu A_\mu - m^2] \phi^* \phi. \quad (3.30)$$

Para a lagrangiana do campo de gauge livre, partindo da na Eq.(3.23), temos,

$$\mathcal{L}_A (F_{\mu\nu}^a) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (3.31)$$

e assim, a lagrangiana total é escrita por, $\mathcal{L}_T = \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_A$, onde,

$$\mathcal{L}_M + \mathcal{L}_A = \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi^* + ig [(\partial^\mu \phi) A_\mu \phi^* - (\partial_\mu \phi^*) A^\mu \phi] + g^2 \left[A^\mu A_\mu - \left(\frac{m}{g} \right)^2 \right] \phi^* \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (3.32)$$

As equações de campo são obtidas, das equações,

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial (\partial_\nu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial \phi} = 0, \quad (3.33)$$

para o campo ϕ ,

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial (\partial_\nu \phi^*)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial \phi^*} = 0, \quad (3.34)$$

para o campo ϕ^* e

$$\partial_\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial (\partial_\sigma A_\rho)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial A_\rho} = 0, \quad (3.35)$$

para o campo de gauge. Resulta:

$$(\square + ig\eta^{\mu\sigma} \partial_\sigma A_\mu + ig\eta^{\mu\sigma} A_\mu \partial_\sigma - g^2 A^\mu A_\mu + m^2) \phi^* = 0, \quad (3.36)$$

$$(\square - ig\eta^{\mu\sigma} \partial_\sigma A_\mu - ig\eta^{\mu\sigma} A_\mu \partial_\sigma - g^2 A^\mu A_\mu + m^2) \phi = 0, \quad (3.37)$$

$$\partial_\sigma F^{\sigma\rho} - ig (\partial^\rho \phi) \phi^* + ig (\partial^\rho \phi^*) \phi - 2g^2 A^\rho \phi^* \phi = 0. \quad (3.38)$$

E, assim, verifica-se que para o grupo U(1) de transformações de fato corresponde a um número complexo, que pode ser parametrizado. A transformação de fase mantém a invariância que, pelo teorema de Noether temos o surgimento da interação eletromagnética. Não se observa termos de autointeração entre o campo de gauge, A_μ . E g^2 é uma constante adimensional de acoplamento, que pode ser relacionada a carga do elétron,.

3.3 Campos não-abelianos.

Na década de 1930, Wolfgang Ernst Pauli (Áustria, 1900 - 1958) criou um novo número quântico, o Spin isotópico (Isospin) para classificar partículas nucleares, no qual o isospin é associado ao operador de momento angular na direção de um eixo espacial. Quando duas partículas interagem entre si, os seus isospins se combinam para produzir diferentes estados possíveis, incluindo termos de auto-interações, o que se faz concluir o pertencimento aos grupos ditos não-abelianos. Neste capítulo, a análise feita é direcionada às teorias de Yang-Mills e o grupo de simetria SU(2).

O ponto de partida agora é um campo de isospin, ou dubleto, descrevendo um próton e um nêutron.

$$\psi^\alpha = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Prót \\ Nêu \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

onde, como proposto por Acevedo, “Tomamos a teoria independente de carga elétrica e a densidade lagrangiana invariante por rotações no espaço de spin isotópico tridimensional” (ACEVEDO *et al.*, 2018), para fins de simplicidade. A variação do campo é dada por:

$$\delta\psi^\alpha = i\epsilon^c \tau_{(c)}^\alpha{}_\beta \psi^\beta \quad \text{com } c = 1, 2, 3, \quad (3.40)$$

onde o termo $\tau_{(c)}$ representa matrizes usuais 2×2 unitárias de isospin, representadas pelas matrizes de Pauli, e são os geradores do grupo SU(2). Ou então,

$$I_{(a)}^\alpha{}_\beta \rightarrow i\tau_{(c)}^\alpha{}_\beta \quad \text{com } \alpha, \beta = 1, 2. \quad (3.41)$$

A constante de estrutura para o caso em questão passa a ser o símbolo antissimétrico de Levi-Civita e o comutador dos geradores então é expresso, por:

$$[i\tau_{(a)}, i\tau_{(b)}]_B^A = \varepsilon_a{}^c{}_b i\tau_{(c)}. \quad (3.42)$$

Ao se localizar a simetria nestas condições, se faz necessário a introdução de três novos campos de gauge, um para cada parâmetro e são conhecidos na literatura como campos de Yang-Mills, $B_\mu^c(x)$. Fazendo a transformação do parâmetro fixo ϵ^c para parâmetros que são funções do ponto no espaço, $\epsilon^c(x)$, os campos de Yang-Mills se transformam como o campo compensador A_μ^a , visto, no capítulo anterior. Assim,

$$\delta B_\mu^c = \epsilon^a \varepsilon_a{}^c{}_b B_\mu^b + \frac{1}{g} \partial_\mu \epsilon^c. \quad (3.43)$$

A derivada covariante é dada por,

$$\nabla_\mu \psi^\alpha = \partial_\mu \psi^\alpha - ig\tau_{(c)\beta}^\alpha \psi^\beta B_\mu^c, \quad (3.44)$$

com a sua variação expressa por:

$$\delta(\nabla_\mu \psi^\alpha) = ig\tau_{(c)\beta}^\alpha \epsilon^c \nabla_\mu \psi^\beta. \quad (3.45)$$

O tensor intensidade de campo $F_{\mu\nu}^a$ carrega em si os termos derivados do novo campo $B_\mu^c(x)$,

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a - \frac{g}{2} \varepsilon_c^{ab} (B_\mu^b B_\nu^c - B_\nu^b B_\mu^c), \quad (3.46)$$

e a variação do tensor como visto na prescrição dos capítulos anteriores, é:

$$\delta F_{\mu\nu}^a = \epsilon^c \varepsilon_c^{ab} F_{\mu\nu}^b. \quad (3.47)$$

O tensor $F_{\mu\nu}^a$, “transforma-se pelo grupo de rotação como um vetor, ou seja, o spin isotópico do campo B é a unidade” (ACEVEDO *et al.*, 2018). Finalmente, a expressão para a corrente,

$$J_a^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial B_\mu^a} = -g \left(\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial (\nabla_\mu \psi^\alpha)} i\tau_{(a)\beta}^\alpha \psi^\beta + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F_{\mu\nu}^b} \varepsilon^{abc} B_\nu^c \right), \quad (3.48)$$

revela um termo de auto-interação no segundo membro do parênteses, dado ao fato de que a constante de estrutura não é nula, diferentemente do caso abeliano e o tensor intensidade de campo possui termos correspondente aos campos B_ν , como verificado na Eq.(3.46).

3.4 Comportamento do campo de matéria e suas interações sob o grupo de transformação SU(2)

O ponto de partida da seguinte análise se dá através da densidade lagrangiana de Dirac que descreve partículas/campos com spin $\frac{1}{2}$, a esta estão associados os campos de matéria ψ , tanto leptônicos como quarkiônicos, em suma férmions. Então:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \hbar c [\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] - c^2 \bar{\psi} \mathbf{M} \psi \quad (3.49)$$

como a estrutura de uma função lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = T - V, \quad (3.50)$$

onde identifica-se o termo cinético,

$$T = \frac{i}{2} \hbar c [\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] \quad (3.51)$$

e o termo relacionado ao potencial,

$$V = -c^2 \bar{\psi} \mathbf{M} \psi, \quad (3.52)$$

em que, \mathbf{M} representa uma matriz com parâmetros que posteriormente serão identificados como o termo massivo. Ou seja,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad (3.53)$$

e $\gamma^\mu = \{\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\}$, compõe as matrizes de Dirac, que por sua vez estão associadas às matrizes de Pauli, e satisfazem a algebra,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} I. \quad (3.54)$$

O campo ψ , na formulação de Dirac, representa um campo espinorial, historicamente desenvolvido para descrever o modelo de prótons e nêutrons. Para fins demonstrativos, optei por seguir a tradição e descrever o campo formado pelo dubleto,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_p \end{pmatrix}, \quad (3.55)$$

a contração do campo hermitiano conjugado com a matriz gama, se dá por:

$$(\psi)^\dagger \gamma^0 = \bar{\psi} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_n & \bar{\psi}_p \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

Portanto, a lagrangiana de Dirac é expressa por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{i}{2} \hbar c & \left[\begin{pmatrix} \bar{\psi}_n & \bar{\psi}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_n \\ \gamma^\mu \partial_\mu \psi_p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \partial_\mu \bar{\psi}_n & \partial_\mu \bar{\psi}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^\mu \psi_n \\ \gamma^\mu \psi_p \end{pmatrix} \right] \\ & - c^2 \begin{pmatrix} \bar{\psi}_n & \bar{\psi}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_n & 0 \\ 0 & m_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_p \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Fazendo os produtos contidos na equação, conclui-se que:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \hbar c [\bar{\psi}_n \gamma^\mu \partial_\mu \psi_n + \bar{\psi}_p \gamma^\mu \partial_\mu \psi_p - \partial_\mu \bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_n - \partial_\mu \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_p] - c^2 (\bar{\psi}_n m_n \psi_n + \bar{\psi}_p m_p \psi_p). \quad (3.58)$$

Faremos a transformação local,

$$\psi' = \psi + \delta\psi, \quad (3.59)$$

onde os geradores do grupo agora são as três matrizes de Pauli, como visto na equação Eq.(3.41). Neste ponto é importante reconhecer a abordagem com a representação adjunta,

$$\delta\psi^\alpha = i\epsilon^c \tau_{(c)}^\alpha{}_\beta \psi^\beta \quad \text{com } c = 1, 2, 3. \quad (3.60)$$

Substituindo os elementos das matrizes de Pauli, correspondentes ao valor de τ , se obtém a transformação dos campos,

$$\psi^{1'} = \psi^1 + i\epsilon^1\psi^2 + \epsilon^2\psi^2 + i\epsilon^3\psi^1, \quad (3.61)$$

$$\psi^{2'} = \psi^2 + i\epsilon^1\psi^1 - \epsilon^2\psi^1 - i\epsilon^3\psi^2, \quad (3.62)$$

$$\bar{\psi}^{1'} = \bar{\psi}^1 - i\epsilon^1\bar{\psi}^2 + \epsilon^2\bar{\psi}^2 - i\epsilon^3\bar{\psi}^1, \quad (3.63)$$

$$\bar{\psi}^{2'} = \bar{\psi}^2 - i\epsilon^1\bar{\psi}^1 - \epsilon^2\bar{\psi}^1 + i\epsilon^3\bar{\psi}^2. \quad (3.64)$$

A densidade lagrangiana modificada é então reescrita, como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = \frac{i}{2}\hbar c \left[\begin{pmatrix} \bar{\psi}_n - i\epsilon^1\bar{\psi}_p + \epsilon^2\bar{\psi}_p - i\epsilon^3\bar{\psi}_n & \bar{\psi}_p - i\epsilon^1\bar{\psi}_n - \epsilon^2\bar{\psi}_n + i\epsilon^3\bar{\psi}_p \\ \gamma^\mu \partial_\mu \begin{pmatrix} \psi_n + i\epsilon^1\psi_p + \epsilon^2\psi_p + i\epsilon^3\psi_n \\ \psi_p + i\epsilon^1\psi_n - \epsilon^2\psi_n - i\epsilon^3\psi_p \end{pmatrix} \\ -\partial_\mu \begin{pmatrix} \bar{\psi}_n - i\epsilon^1\bar{\psi}_p + \epsilon^2\bar{\psi}_p - i\epsilon^3\bar{\psi}_n & \bar{\psi}_p - i\epsilon^1\bar{\psi}_n - \epsilon^2\bar{\psi}_n + i\epsilon^3\bar{\psi}_p \\ \gamma^\mu \begin{pmatrix} \psi_n + i\epsilon^1\psi_p + \epsilon^2\psi_p + i\epsilon^3\psi_n \\ \psi_p + i\epsilon^1\psi_n - \epsilon^2\psi_n - i\epsilon^3\psi_p \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right] \\ -c^2 \begin{pmatrix} \bar{\psi}_n - i\epsilon^1\bar{\psi}_p + \epsilon^2\bar{\psi}_p - i\epsilon^3\bar{\psi}_n & \bar{\psi}_p - i\epsilon^1\bar{\psi}_n - \epsilon^2\bar{\psi}_n + i\epsilon^3\bar{\psi}_p \\ \begin{pmatrix} m_n & 0 \\ 0 & m_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_n + i\epsilon^1\psi_p + \epsilon^2\psi_p + i\epsilon^3\psi_n \\ \psi_p + i\epsilon^1\psi_n - \epsilon^2\psi_n - i\epsilon^3\psi_p \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Realizando as multiplicações, cancelando os termos correspondentes de sinais opostos e desprezando termos de ordem quadrática nos parâmetros, o termo cinético é descrito apenas por:

$$T = \frac{i}{2}\hbar c (\bar{\psi}_n \gamma^\mu \partial_\mu \psi_n + \bar{\psi}_p \gamma^\mu \partial_\mu \psi_p - \partial_\mu \bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_n - \partial_\mu \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_p). \quad (3.66)$$

Finalmente, para o termo correspondente ao potencial, se realiza a distribuição, elimina-se os termos quadráticos dos parâmetros e ao se colocar o termo massivo em evidência,

se obtém,

$$\begin{aligned}
V = & -c^2 m_n \bar{\psi}_n \psi_n - c^2 m_p \bar{\psi}_p \psi_p \\
& + c^2 (-m_n + m_p) (i\epsilon^1 \bar{\psi}_n \psi_p + \epsilon^2 \bar{\psi}_n \psi_p) \\
& + c^2 (-m_n + m_p) (-i\epsilon^1 \bar{\psi}_p \psi_n + \epsilon^2 \bar{\psi}_p \psi_n).
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Portanto, reescreve-se a função, como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' = & \frac{i}{2} \hbar c (\bar{\psi}_n \gamma^\mu \partial_\mu \psi_n + \bar{\psi}_p \gamma^\mu \partial_\mu \psi_p - \partial_\mu \bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_n - \partial_\mu \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_p) \\
& - c^2 m_n \bar{\psi}_n \psi_n - c^2 m_p \bar{\psi}_p \psi_p \\
& + c^2 (-m_n + m_p) (i\epsilon^1 \bar{\psi}_n \psi_p + \epsilon^2 \bar{\psi}_n \psi_p) \\
& + c^2 (-m_n + m_p) (-i\epsilon^1 \bar{\psi}_p \psi_n + \epsilon^2 \bar{\psi}_p \psi_n).
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Neste ponto, observa-se que, para se manter a invariância a uma transformação local, as massas do próton e do nêutron precisam ser necessariamente iguais, para que se anule as duas últimas linhas da equação, ou ser nula, eliminando todo o setor correspondente ao potencial. Na construção do modelo padrão, é usual descrever os campos sem os termos de massa, temos então:

$$\mathcal{L}' = \frac{i}{2} \hbar c (\bar{\psi}_n \gamma^\mu \partial_\mu \psi_n + \bar{\psi}_p \gamma^\mu \partial_\mu \psi_p - \partial_\mu \bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_n - \partial_\mu \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_p). \tag{3.69}$$

Resta agora a aplicação da prescrição de acoplamento mínimo e adição dos campos de gauge para verificação. A derivada covariante então é fornecida pela relação Eq.(3.44), $\nabla_\mu \psi^\alpha = \partial_\mu \psi^\alpha - ig\tau_{(c)}^{\alpha\beta} \psi^\beta B_\mu^c$, em que, expandindo os índices e já realizando a substituição dos termos correspondentes as matrizes de Pauli, se obtém para cada campo,

$$\nabla_\mu \psi^1 = \partial_\mu \psi^1 - ig\psi^2 B_\mu^1 - g\psi^2 B_\mu^2 - ig\psi^1 B_\mu^3, \tag{3.70}$$

$$\nabla_\mu \psi^2 = \partial_\mu \psi^2 - ig\psi^1 B_\mu^1 + g\psi^1 B_\mu^2 + ig\psi^2 B_\mu^3, \tag{3.71}$$

$$\nabla_\mu \bar{\psi}^1 = \partial_\mu \bar{\psi}^1 + ig\bar{\psi}^2 B_\mu^1 - g\bar{\psi}^2 B_\mu^2 + ig\bar{\psi}^1 B_\mu^3, \tag{3.72}$$

$$\nabla_\mu \bar{\psi}^2 = \partial_\mu \bar{\psi}^2 + ig\bar{\psi}^1 B_\mu^1 + g\bar{\psi}^1 B_\mu^2 - ig\bar{\psi}^2 B_\mu^3. \tag{3.73}$$

Realizando a substituição na densidade lagrangiana,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' = & \frac{i}{2} \hbar c \left[\bar{\psi}_n \gamma^\mu \partial_\mu \psi_n - \partial_\mu \bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_n + \bar{\psi}_p \gamma^\mu \partial_\mu \psi_p - \partial_\mu \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_p \right. \\
& + \left(-ig \bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_p - ig \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n - ig \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n - ig \bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_p \right) B^1_\mu \\
& + \left(-g \bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_p + g \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n + g \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n - g \bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_p \right) B^2_\mu \\
& \left. + \left(-ig \bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_n + ig \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_p - ig \bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_n + ig \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_p \right) B^3_\mu \right] \quad (3.74)
\end{aligned}$$

Agrupando os termos semelhantes e acrescentando os termos de campo livre de gauge, temos a lagrangiana total dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_T = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{i}{2} \hbar c \left[\bar{\psi}_n \gamma^\mu \partial_\mu \psi_n - \partial_\mu \bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_n + \bar{\psi}_p \gamma^\mu \partial_\mu \psi_p - \partial_\mu \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_p \right. \\
& - 2ig \left(\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n + \bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_p \right) B^1_\mu + 2g \left(\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n + \bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_p \right) B^2_\mu \\
& \left. - 2ig \left(\bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_n - \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_p \right) B^3_\mu \right], \quad (3.75)
\end{aligned}$$

é possível verificar que os campos de Yang-Mills não apresentam estrutura de massa do tipo $m^2 B_\mu^a$.

No próximo capítulo, será explorado o fato de que tanto os campos de matéria, agora descritos como não massivos, como os campos de gauge podem adquirir massa, através de um mecanismo dinâmico que quebra a simetria e cede graus de liberdade aos campos.

4 Quebras de simetria e Mecanismo de Higgs

No capítulo, anterior foi demonstrado que para grupos não abelianos, surgem termos, no potencial, que misturam as componentes dos campos de matéria. Assim para preservar a invariância da densidade lagrangiana sob o grupo de transformação $SU(2)$, foi necessário assumir que os campos de matéria deveriam ter massas iguais ou nulas. Uma vez que os campos de Yang-Mills são naturalmente desprovidos de massa. Entretanto, essa conclusão é confrontada com os dados experimentais, pois, como sabemos, as partículas possuem massa e com valores diferentes de acordo com sua natureza. No presente capítulo, será apresentado o mecanismo de criação de massa para os campos, com maior consagração pela comunidade científica: o mecanismo de Higgs, o qual se utiliza do conceito de quebra espontânea da simetria de um sistema, ou seja, a simetria é perdida sem um agente externo, para dar massa aos campos.

4.1 Quebra espontânea de simetria em uma abordagem discreta

Dado um campo escalar real ϕ , com densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\mu^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4. \quad (4.1)$$

Verifica-se que a lagrangiana é invariante a transformação discreta de paridade do campo

$$\phi \rightarrow \phi' = -\phi, \quad (4.2)$$

uma vez que realizando a substituição na equação Eq.(4.1), obtemos

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} (\partial_\mu (-\phi))^2 - \frac{\mu^2}{2} (-\phi)^2 - \frac{\lambda}{4} (-\phi)^4 = \mathcal{L}. \quad (4.3)$$

Realizando uma análise a respeito da energia total, parcela cinética com a soma da parcela potencial integrada em todo espaço, temos:

$$E = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{\mu^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 \right]. \quad (4.4)$$

onde μ e λ são parâmetros, com a condição de que $\lambda > 0$. O estado de menor energia, nesta perspectiva, pode ser definido apenas para os campos que não possuam dependência com o tempo e sejam homogêneos no espaço. O que implica em,

$$\partial_0 \phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (4.5)$$

e

$$\partial_i \phi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (4.6)$$

Conclui-se então que o campo ϕ no estado de vácuo é constante. Seu valor pode ser determinado, minimizando o potencial,

$$V(\phi) = \frac{\mu^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4, \quad (4.7)$$

e portanto, temos

$$\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\mu^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 \right) = 0. \quad (4.8)$$

Obtêm-se então a expressão,

$$(\mu^2 + \lambda \phi^2) \phi = 0, \quad (4.9)$$

que permite duas possibilidades. Para valores no qual $\mu^2 \geq 0$, a única possibilidade é se $\phi = 0$, sendo este invariante a transformação Eq.(4.2). A segunda opção, para $\mu^2 < 0$, leva a equação

$$(\mu^2 + \lambda \phi^2) = 0, \quad (4.10)$$

a um mínimo absoluto dado por

$$\phi_0^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}. \quad (4.11)$$

O valor do campo no vácuo, ϕ_0 , corresponde a uma esfera N-dimensional de raio v , dado por

$$v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}. \quad (4.12)$$

Em que cada ponto desta região está associado um estado de vácuo, temos portanto, estados de vácuo degenerado.

A análise energética acima demonstra que, removendo a energia do campo ele vai para um dos estados de menor energia dado pela equação Eq.(4.12). Uma vez atingido o estado de vácuo, para trocar de um estado para outro é necessário fornecer energia.

Este estado de menor energia, obtido da evolução dinâmica do campo, não é invariante à transformação Eq.(4.2), e portanto se diz que houve uma quebra espontânea da simetria.

Para a energia no vácuo, verifica-se que:

$$E_0 = \Omega V(\phi_0) = \Omega \left(\frac{1}{2} \mu^2 \phi_0^2 + \frac{\lambda}{4} \phi_0^4 \right). \quad (4.13)$$

Em que Ω é o volume contemplado no espaço.

Substituindo os campos pela relação de vácuo, dado na equação Eq.(4.12), temos

$$E_0 = -\Omega \frac{\mu^4}{4\lambda}. \quad (4.14)$$

A relação da energia no vácuo permite calcular a energia com base em E_0 , então, partindo de uma nova densidade lagrangeana que difere, da Eq.(4.1), apenas de uma constante,

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{\mu^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4 + \frac{\mu^4}{4\lambda}. \quad (4.15)$$

Substituindo os termos em função do vácuo,

$$\sqrt{\lambda} \phi_0 = \mu, \quad (4.16)$$

reescreve-se então

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \phi_0^2)^2. \quad (4.17)$$

O interesse passa a ser o estudo do comportamento do campo ao se realizar perturbações, em torno do ponto de menor energia. Portanto, supondo pequenas perturbações, $\chi(x) \ll \phi_0$, dado por

$$\phi(x) = \phi_0 + \chi(x), \quad (4.18)$$

a nova densidade lagrangiana sob a influência da perturbação é:

$$\mathcal{L}_\chi = \mathcal{L}(\phi_0 + \chi). \quad (4.19)$$

Para o termo cinético, temos que

$$\partial_\mu (\phi_0 + \chi) = \partial_\mu \chi. \quad (4.20)$$

Para o termo potencial, conclui-se que,

$$V_\chi(\chi) = \mu^2 \chi^2 + \sqrt{\lambda \mu} \chi^3 + \frac{\lambda}{4} \chi^4. \quad (4.21)$$

Substituindo-se o termo cinético e o potencial, finalmente se obtém:

$$\mathcal{L}_\chi = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \mu^2 \chi^2 - \sqrt{\lambda \mu} \chi^3 - \frac{\lambda}{4} \chi^4, \quad (4.22)$$

com μ^2 sendo associado a um termo massivo para o campo χ .

4.2 Quebra espontânea para o caso de simetria contínua, global U(1)

Para verificar a quebra espontânea em simetrias contínuas, o ponto de partida é a densidade lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - c, \quad (4.23)$$

em que c é uma constante. O campo ϕ é um campo complexo, dado por

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2). \quad (4.24)$$

No capítulo três, concluiu-se que a densidade lagrangiana é invariante à transformação U(1) do campo, ou de fase, dado por

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha} \phi(x). \quad (4.25)$$

A energia total novamente é dada pela soma do termo cinético com o potencial,

$$E = \int d^3x (\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi + V(\phi^* \phi)). \quad (4.26)$$

O potencial dado na equação Eq.(4.23),

$$V(\phi^* \phi) = \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2 + c, \quad (4.27)$$

Para atingir o estado de vácuo é necessário ser minimizado, uma vez que os campos não dependem do espaço e do tempo e portanto são constantes, como feito na seção passada.

Então temos

$$\frac{\partial V(\phi^* \phi)}{\partial \phi} = 0, \quad (4.28)$$

o valor do campo, no estado de vácuo, é determinado por duas expressões, uma para o campo real,

$$0 = (\mu^2 + 2\lambda \phi^* \phi) \phi. \quad (4.29)$$

E para o campo complexo conjugado, de forma análoga,

$$0 = (\mu^2 + 2\lambda\phi^*\phi) \phi^*. \quad (4.30)$$

Novamente, existem apenas duas opções para o parâmetro μ , com $\mu^2 \geq 0$, o campo fica restrito ao caso trivial com $\phi = 0$ e as perturbações representam dois campos reais, ϕ_1 e ϕ_2 , em que para uma escolha especial de interação, $(\phi_1^2 + \phi_2^2)$, temos a mesma massa para ambos e a simetria U(1) é preservada. Para $\mu^2 < 0$, tem forma bem conhecida de um sólido de revolução em três dimensões, sendo chamado de potencial estilo chapéu mexicano. Dependendo apenas de uma variável,

$$|\phi| = \sqrt{\frac{\phi_1^2 + \phi_2^2}{2}}. \quad (4.31)$$

O estado de vácuo, desta vez, é um conjunto contínuo em torno do ponto central, dado por

$$\phi = e^{i\alpha} \frac{\phi_0}{\sqrt{2}}. \quad (4.32)$$

O valor de ϕ_0 pode ser verificado fazendo:

$$0 = \mu^2 + 2\lambda\phi^*\phi. \quad (4.33)$$

Substituindo a norma dos campos na equação, temos

$$\phi_0 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}, \quad (4.34)$$

para o valor do campo no vácuo.

Fazendo pequenas perturbações em torno do ponto de menor energia e escolhendo os valores para os campos no vácuo, $\phi_1 = \phi_0$ e $\phi_2 = 0$. Temos

$$\phi_1 = \phi_0 + \chi(x), \quad (4.35)$$

$$\phi_2 = \theta(x). \quad (4.36)$$

Com θ representando perturbações na direção compreendida pela região de vácuo. E χ como perturbações na direção radial.

Assim, reescrevendo o potencial Eq.(4.27), em termos dos campos perturbados,

$$V = -\frac{\mu^2}{2} [(\phi_0 + \chi)^2 + \theta^2] + \frac{\lambda}{4} [(\phi_0 + \chi)^2 + \theta^2]^2 + \frac{\mu^4}{4\lambda} + c, \quad (4.37)$$

escolhendo a constante “c” de modo que a energia no estado de vácuo seja zero e conside-

rando apenas os termos quadráticos, se obtém a expressão para o potencial,

$$V = \mu^2 \chi^2. \quad (4.38)$$

Uma vez que termos quadráticos em θ são curvas na direção de ϕ_2 e portanto, sendo avaliada em zero, assim como termos do tipo $\chi\theta$. E assim, a densidade lagrangiana em termos dos campos perturbados, pode ser escrita como,

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \theta)^2 - \mu^2 \chi^2. \quad (4.39)$$

Em que é possível identificar um termo massivo para o campo χ , $m_\chi = \sqrt{2}\mu$, enquanto θ permanece não massivo. O campo θ é chamado de campo de Goldstone e a falta dos termos correspondente a massa é devido a simetria U(1) com a não-simetria do estado de vácuo, uma vez que ϕ não é zero em todo ponto do espaço-tempo, levando a uma quebra espontânea de simetria.

4.3 Mecanismo de Higgs para grupos abelianos

Nos anos 60, Peter Higgs desenvolveu um método de fornecer massa aos campos, partindo do princípio da quebra espontânea de simetria, onde o campo fornece dinamicamente massa após “ceder alguns de seus graus de liberdade aos campos de gauge para que adquiram massa.”(BASSALO; 3, 2008). Ao longo desta seção busca-se demonstrar o funcionamento do mecanismo e como o campo de gauge se comporta durante as interações.

Suponha a densidade lagrangiana para um campo complexo e escalar,

$$\mathcal{L} = \nabla_\mu \phi (\nabla^\mu \phi)^* - V(\phi) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (4.40)$$

com respeito à qual procedemos de maneira pragmática aplicando o acoplamento mínimo, realizando assim a troca da derivada ordinária e adicionando os campos de gauge. O potencial é descrito pela mesma equação Eq.(4.27)

$$V(\phi) = \mu^2 \phi \phi^* - \lambda (\phi \phi^*)^2. \quad (4.41)$$

As transformações dos campos são expressas por,

$$A'_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x) \quad e \quad \phi' \rightarrow e^{i\alpha(x)} \phi. \quad (4.42)$$

O estado fundamental é obtido minimizando a energia, $E(A_\mu, \phi)$. No estado de vácuo, temos novamente, o campo ϕ constante no espaço-tempo. O campo, no estado de vácuo,

é encontrado então minimizando o potencial e portanto,

$$\frac{\partial V}{\partial |\phi|} = \frac{\mu^2}{2} - \frac{\lambda}{2} |\phi|^2 = 0. \quad (4.43)$$

Desconsiderando o caso em que $\mu^2 \geq 0$. Os parâmetros assumem os valores, para $\mu^2 < 0$ e $\lambda > 0$:

$$|\phi|^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}. \quad (4.44)$$

A expressão mostra que se obtém um vácuo infinitamente degenerado, compreendido pela região circular de raio

$$v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}. \quad (4.45)$$

Realizando pequenas perturbações em torno de um ponto P qualquer, no limite do raio v , o campo perturbado, é descrito por uma expansão dado por,

$$\phi(x) = v + \eta(x) + i\theta(x). \quad (4.46)$$

Desenvolvendo a derivada covariante no campo expandido:

$$\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \eta(x) + g\theta(x) A_\mu + i(\partial_\mu \theta(x) - gvA_\mu - e\eta(x) A_\mu). \quad (4.47)$$

De forma análoga para o termo complexo conjugado,

$$\nabla^\mu \phi^* = \partial^\mu \eta(x) + g\theta(x) A^\mu - i(\partial^\mu \theta(x) - gvA^\mu - e\eta(x) A^\mu). \quad (4.48)$$

Para não sobrecarregar a notação, reescreve-se, $\eta = \eta(x)$ e $\theta = \theta(x)$. Assim, a densidade lagrangiana pode ser reescrita em termos dos campos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + g^2 \theta^2 A_\mu A^\mu + 2g\theta A_\mu \partial^\mu \eta + \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta + g^2 v^2 A_\mu A^\mu + g^2 \eta^2 A_\mu A^\mu \\ & - 2gv A_\mu \partial^\mu \theta - 2g\eta A_\mu \partial^\mu \theta + 2g^2 v \eta A_\mu A^\mu - \mu^2 \eta^2 + \lambda v \eta^3 \\ & + \frac{\lambda}{4} \eta^4 + \frac{\lambda}{4} \theta^4 + \frac{\lambda}{2} \eta^2 \theta^2 + \lambda v \eta \theta^2 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

em que a estrutura da densidade lagrangiana mostra termos massivos apenas em:

$$\frac{m_A^2}{2} A^2 = g^2 v^2 A_\mu A^\mu \rightarrow m_A = \sqrt{2}gv, \quad (4.50)$$

e em

$$\frac{m_\eta^2}{2} \eta^2 = -\mu^2 \eta^2 = \lambda v^2 \eta \rightarrow m_\eta = \sqrt{2\lambda}v. \quad (4.51)$$

Todos os outros termos, carregam interações entre os campos.

4.4 Mecanismo de Higgs para grupos não abelianos

Na presente seção será estendido o procedimento de dar massa aos campos, utilizando o mecanismo de Higgs para os campos de Yang-Mills. O ponto de partida passa a ser a densidade lagrangiana.

$$\mathcal{L} = \nabla_\mu \phi^* \nabla^\mu \phi - V(\phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (4.52)$$

o campo passa a ser um espinor e expresso por um dubleto,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (4.53)$$

e o seu dual, expresso por,

$$\phi^* = \begin{pmatrix} \phi_1^* & \phi_2^* \end{pmatrix}. \quad (4.54)$$

Com o potencial dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \mu^2 (\phi^\dagger \phi) + \frac{1}{4} \lambda (\phi^\dagger \phi)^2. \quad (4.55)$$

O estado de vácuo é obtido de forma semelhante ao desenvolvido na seção anterior, minimizando o potencial V ,

$$\frac{\partial V}{\partial |\phi|} = 0. \quad (4.56)$$

Conclui-se que:

$$0 = \frac{1}{2} \mu^2 + \frac{\lambda}{2} |\phi|^2. \quad (4.57)$$

Assim, o módulo do campo é,

$$|\phi|^2 = \phi^* \phi = \frac{-\mu^2}{\lambda}. \quad (4.58)$$

Adaptando para espinores, escrevem-se os campos na notação matricial,

$$\begin{pmatrix} \phi_1^* & \phi_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \phi_1^* \phi_1 + \phi_2^* \phi_2 = \frac{-\mu^2}{\lambda}. \quad (4.59)$$

Escolhendo de forma conveniente

$$\phi_1^* = \phi_1 = 0, \quad (4.60)$$

e

$$\phi_2^* \phi_2 = \frac{-\mu^2}{\lambda}, \quad (4.61)$$

descreve-se uma região de raio v , que corresponde a um círculo no menor nível de energia,

vácuo, onde v é dado por:

$$v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}. \quad (4.62)$$

Assim, expande-se o campo, em torno de um ponto qualquer no vácuo. como

$$\phi = e^{\frac{i}{2v}\vec{\sigma}\cdot\vec{\theta}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{pmatrix}. \quad (4.63)$$

Para a construção da derivada covariante, sem sobrecarregar a notação, reescreve-se $\eta = \eta(x)$ e $\theta = \theta(x)$. Então,

$$\nabla_\mu \phi = (\partial_\mu - ig\vec{\sigma} \cdot A_\mu) e^{\frac{i}{2v}\vec{\sigma}\cdot\vec{\theta}(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta \end{pmatrix}, \quad (4.64)$$

para a derivada do campo complexo conjugado, atuando pela direita, se obtém

$$\nabla^\mu \phi^* = \begin{pmatrix} 0 & v + \eta \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{2v}\vec{\sigma}^\dagger \cdot \vec{\theta}(x)} (\partial^\mu + ig\vec{\sigma} \cdot A^\mu) \quad (4.65)$$

de forma análoga, uma vez que, σ é hermitiano e portanto, $\vec{\sigma}^\dagger = \vec{\sigma}$. Neste ponto é possível fixar o gauge de modo a absorver o campo θ , campo de Goldstone, que surge com a derivada do parâmetro e então perde-se a simetria. Para realizar este procedimento, é necessário satisfazer a seguinte relação,

$$i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu \rightarrow U i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{B}_\mu U^{-1} + \frac{1}{g} (\partial_\mu U) U^{-1}, \quad (4.66)$$

correspondente à transformação dos campos de gauge para o grupo SU(2), em que, por convenção e visando praticidade futura, troca-se a nomenclatura do campo de gauge A_μ para os campos de Yang-Mills B_μ e os parâmetros dados por

$$U = e^{\frac{i}{2v}\vec{\sigma}\cdot\vec{\theta}}, \quad (4.67)$$

e

$$U^{-1} = e^{-\frac{i}{2v}\vec{\sigma}\cdot\vec{\theta}}, \quad (4.68)$$

são as matrizes de transformações. Então, substituindo os resultados em Eq.(4.66), a transformação para os campos de gauge é dado por

$$i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu \rightarrow e^{\frac{i}{2v}\vec{\sigma}\cdot\vec{\theta}} i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{B}_\mu e^{-\frac{i}{2v}\vec{\sigma}\cdot\vec{\theta}} + \frac{1}{g} \left(\partial_\mu e^{\frac{i}{2v}\vec{\sigma}\cdot\vec{\theta}} \right) e^{-\frac{i}{2v}\vec{\sigma}\cdot\vec{\theta}}. \quad (4.69)$$

De posse do campo transformado, a transformação da derivada covariante por substi-

tuição se dá por

$$(\nabla_\mu \phi)' = e^{\frac{i}{2v} \vec{\sigma} \cdot \vec{\theta}} \left[-\frac{i}{2} g \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu \eta \end{pmatrix} \right], \quad (4.70)$$

e

$$(\nabla^\mu \phi^*)' = \left[\begin{pmatrix} 0 & v + \eta \end{pmatrix} \frac{i}{2} g \vec{\sigma} \cdot \vec{B}^\mu + \begin{pmatrix} 0 & \partial^\mu \eta \end{pmatrix} \right] e^{-\frac{i}{2v} \vec{\sigma} \cdot \vec{\theta}}. \quad (4.71)$$

Substituindo as equações Eq.(4.70) e Eq.(4.71), na densidade lagrangiana, obtém-se,

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu})' + (\nabla^\mu \phi^*)' (\nabla_\mu \phi)' + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^{*'} \phi' - \frac{1}{4} \lambda (\phi^{*'} \phi')^2, \quad (4.72)$$

no qual o termo cinético torna-se:

$$(\nabla^\mu \phi^*)' (\nabla_\mu \phi)' = \frac{1}{4} g^2 [v^2 B^\mu \cdot B_\mu + \eta^2 B^\mu \cdot B_\mu] + \frac{1}{4} \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta, \quad (4.73)$$

onde se identifica, novamente pela estrutura, os termos massivos do tipo $\frac{1}{2} m^2 B^2$, verificando-se o termo massivo do campo B por

$$M_{B^2} = \left(\frac{gv}{\sqrt{2}} \right)^2. \quad (4.74)$$

A expressão para o termo de interação se expressa na forma,

$$V = \frac{1}{2} \mu^2 \begin{pmatrix} 0 & v + \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \lambda \left[\begin{pmatrix} 0 & v + \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta \end{pmatrix} \right]^2, \quad (4.75)$$

o qual recupera a forma já conhecida da seção anterior,

$$V = -\mu^2 \eta^2 + \lambda v \eta^3 + \frac{\lambda}{4} \eta^4, \quad (4.76)$$

acaba por fornecer o termo massivo $M_\eta = \sqrt{2} \mu$, para o campo η , conhecido como o campo de Higgs.

5 Modelo para os Léptons

Este capítulo se encarrega da demonstração do modelo atualmente de maior consagração que descreve o setor eletrofraco do modelo padrão de partículas. Este setor foi escolhido essencialmente por dois motivos em primeiro, para fins da aplicação do mecanismo de Higgs para a construção do modelo padrão. Em segundo, para denunciar um dos maiores incômodos do modelo, a descrição da massa dos dubletos, em especial a do neutrino do elétron. Os neutrinos são descritos como partículas não massivas, inicialmente propostas por Pauli, enquanto estudava decaimentos β , para preservar a lei de conservação da energia. Entretanto, com os avanços tecnológicos de detecções, foram constatadas discrepâncias significativas entre a quantidade observada de neutrinos e as estimativas teóricas, esta diferença pode ser justificada se houver a presença de massa para os neutrinos.

O ponto de partida é a densidade lagrangiana de Dirac para partículas com spin $\frac{1}{2}$,

$$\mathcal{L} = (\hbar c) \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2 \bar{\psi} \psi, \quad (5.1)$$

onde o campo ψ representa um espinor e γ^μ são as matrizes de Dirac 4x4 (DIRAC, 1930). Das soluções das equações de Dirac, é possível construir dois operadores de projeção que descrevem autoestados distintos das partículas,

$$\frac{1}{2} (1 \pm S_{\vec{p}}) \psi = \psi_{\pm}^h \rightarrow S_{\vec{p}} \psi_{\pm}^h = \pm \frac{\hbar}{2} \psi_{\pm}^h, \quad (5.2)$$

sendo $S_{\vec{p}}$ o projetor de helicidade,

$$\frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5) \psi = \psi_{\pm}^c \rightarrow \gamma^5 \psi_{\pm}^c = \pm \psi_{\pm}^c, \quad (5.3)$$

e $P_{\pm} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5)$ o projetor de quiralidade. Definindo uma representação de espinor, representação de Weyl, reescrevesse os campos como,

$$\psi_R = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_- \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

onde o campo ψ assume a seguinte forma,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_R + \psi_L \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Aplicando o operador de projeção quiral, $P_{\pm} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} \pm \gamma^5)$ em ψ , verifica-se que o operador seleciona, de um espinor arbitrário de 4 componentes, a parte correspondente à quiralidade, no caso $\psi_R = P_+ \psi$ e $\psi_L = P_- \psi$. Como as matrizes de Dirac apresentam as seguintes propriedades:

$$(\gamma^5)^2 = \mathbf{I} \quad , \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \quad e \quad [\gamma^5, \gamma^\mu] = 0, \quad (5.6)$$

para o complexo conjugado $\bar{\psi}$, é definido que,

$$\bar{\psi} = i\psi^\dagger \gamma^0. \quad (5.7)$$

As representações em mão direita e esquerda, neste caso são dadas por

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_R &= \overline{\frac{1}{2}(\mathbf{I} + \gamma^5)\psi} = i \left(\frac{1}{2}(\mathbf{I} + \gamma^5)\psi \right)^\dagger \gamma^0 = i\psi^\dagger \left(\frac{1}{2}(\mathbf{I} + \gamma^5) \right)^\dagger \gamma^0 \\ &= i\psi^\dagger \left(\frac{1}{2}(\mathbf{I} + \gamma^5) \right) \gamma^0 = i\psi^\dagger \gamma^0 \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \gamma^5) = \bar{\psi} P_- \end{aligned} \quad (5.8)$$

e de forma análoga para o o campo de mão esquerda,

$$\bar{\psi}_L = \bar{\psi} P_+. \quad (5.9)$$

De posse dos objetos, reescreve-se a Lagrangiana de Dirac com a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \hbar c (\bar{\psi}_R + \bar{\psi}_L) \gamma^\mu \partial_\mu (\psi_R + \psi_L) - mc^2 [(\bar{\psi}_R + \bar{\psi}_L) (\psi_R + \psi_L)]. \quad (5.10)$$

Esta lagrangiana genérica oferece uma descrição para todos os férmions. Mas antes de avançarmos para a descrição das partículas, algumas observações:

1. Para combinações do tipo,

$$\bar{\psi}_R \psi_R = \bar{\psi}_L \psi_L = 0, \quad (5.11)$$

uma vez que $(\gamma^5)^2 = 1$.

2. Para os termos mistos nas derivadas, encontra-se,

$$\bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = \bar{\psi} \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0. \quad (5.12)$$

Com base nas observações, a densidade lagrangiana assume a forma

$$\mathcal{L} = \hbar c (\bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R + \bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L) - mc^2 (\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R). \quad (5.13)$$

Esta é a densidade lagrangiana que descreve todos os férmions conhecidos.

Para realizar a transformação local, é necessário esclarecer alguns pontos. Primeiramente, é necessário assumir que os campos de matéria, para o setor leptônico, e os campos de gauge não apresentam termos massivos. Em segundo que o grupo de simetria utilizado aqui é o $SU(2)_L \times U(1)_Y$, ou seja, apresenta simetria do SU(2) apenas para quiralidade de mão esquerda e simetria U(1), com Y sendo uma referência a hipercarga, para ambas quiralidades. E em terceiro que para fins demonstrativos do mecanismo de Higgs, usaremos a notação finita da teoria de gauge e usaremos a notação usual dos campos W^\pm . Reescrevendo então os campos como

$$\chi_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix} \quad e \quad \chi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ e_R \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

e o dual dado por

$$\bar{\chi} = i\chi^\dagger \gamma^0, \quad (5.15)$$

resulta em:

$$\bar{\chi}_L = \begin{pmatrix} \bar{\nu}_e & \bar{e}_L \end{pmatrix} \quad e \quad \bar{\chi}_R = \begin{pmatrix} 0 & \bar{e}_R \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

A densidade lagrangiana é expressa por:

$$\mathcal{L} = \hbar c (\bar{\chi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \chi_L + \bar{\chi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \chi_R), \quad (5.17)$$

onde para fins de praticidade foi utilizada apenas a descrição do dubleto neutrino do elétron e elétron para os demais tipos, o procedimento é exatamente análogo. Agora, aplica-se o procedimento de transformação local.

Para o $SU(2)_L$ o campo se transforma como

$$\chi_L \Rightarrow \chi'_L = e^{i\theta(\mathbf{x})\hat{\mathbf{T}}} \chi_L, \quad (5.18)$$

o dual como

$$\bar{\chi}_L \Rightarrow \bar{\chi}'_L = \bar{\chi}_L e^{-i\theta(\mathbf{x})\hat{\mathbf{T}}}, \quad (5.19)$$

em que é possível constatar a necessidade de acrescentar três campos de gauge, ou um tripleto, devido a presença de 3 geradores, as matrizes de Pauli contidas no operador \hat{T} dado por

$$\hat{\mathbf{T}}_k = \frac{1}{2} \sigma_k, \quad k = 1, 2, 3. \quad (5.20)$$

Para $U(1)_Y$ a transformação se dá por

$$\begin{cases} \chi_L \Rightarrow \chi_L'' = e^{i\hat{Y}\phi(x)}\chi_L \\ \chi_R \Rightarrow \chi_R' = e^{i\hat{Y}\phi(x)}\chi_R \end{cases}, \quad (5.21)$$

onde a presença de mais um campo de gauge é estabelecida, totalizando 1 tripleto e 1 singleto.

Para as transformações das derivadas, os campos de gauge, relacionados a simetria $SU(2)$, devem se transformar como,

$$\hat{\mathbf{T}} \cdot \vec{W}'_\mu = e^{i\theta(x)\hat{\mathbf{T}}} \hat{\mathbf{T}} \cdot \vec{W}_\mu e^{-i\theta(x)\hat{\mathbf{T}}} - \frac{i}{g} \left(\partial_\mu e^{i\theta(x)\hat{\mathbf{T}}} \right) e^{-i\theta(x)\hat{\mathbf{T}}}, \quad (5.22)$$

em que \vec{W}_μ são os campos de Yang-Mills, para que seja invariante e se obtenha:

$$\nabla_\mu \chi_L \rightarrow (\nabla_\mu \chi_L)' = e^{i\theta(x)\hat{\mathbf{T}}} \nabla_\mu \chi_L. \quad (5.23)$$

Como a transformação referente ao grupo $U(1)_Y$ também é considerada, temos:

$$\begin{cases} \nabla_\mu \chi_L \Rightarrow (\nabla_\mu \chi_L)' = e^{i\hat{Y}\phi(x)} \nabla_\mu \chi_L, \\ \nabla_\mu \chi_R \Rightarrow (\nabla_\mu \chi_R)' = e^{i\hat{Y}\phi(x)} \nabla_\mu \chi_R. \end{cases} \quad (5.24)$$

Para satisfazer essa condição, o campo de gauge vetorial B_μ , em que o uso da notação B_μ foi escolhida pois este campo, posteriormente, será associado ao campo eletromagnético A_μ . precisa se transformar como visto em capítulos anteriores,

$$B'_\mu = B_\mu + \frac{2}{g'} \partial_\mu \phi(x), \quad (5.25)$$

o mesmo ocorre para o termo de “mão direita”. Assim, a derivada covariante, assume a forma:

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - ig\hat{\mathbf{T}} \cdot \vec{W}_\mu - \frac{i}{2}g'\hat{Y}B_\mu. \quad (5.26)$$

Substituindo os valores encontrados nas equações acima, reescreve-se a Lagrangiana invariante por transformação local,

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} = \hbar c (\bar{\chi}_L \gamma^\mu \nabla_\mu \chi_L + \bar{\chi}_R \gamma^\mu \nabla_\mu \chi_R), \quad (5.27)$$

ou,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \hbar c \left[\bar{\chi}_L \gamma^\mu \left(\partial_\mu \chi_L - ig \hat{\mathbf{T}} \cdot \vec{W}_\mu \chi_L - \frac{i}{2} g' \hat{Y} B_\mu \chi_L \right) \right. \\ \left. + \bar{\chi}_R \gamma^\mu \left(\partial_\mu \chi_R - ig \hat{\mathbf{T}} \cdot \vec{W}_\mu \chi_R - \frac{i}{2} g' \hat{Y} B_\mu \chi_R \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Para identificar os objetos, recorre-se ao uso da relação dos operadores de isospin e hipercarga,

$$eQ = \left(T^3 + \frac{1}{2} Y \right). \quad (5.29)$$

E assim a densidade lagrangiana é reescrita como,

$$\mathcal{L} = \hbar c \left\{ \bar{\chi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \chi_L - \bar{\chi}_L \gamma^\mu ig \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{W}_\mu \chi_L + \bar{\chi}_L \gamma^\mu \frac{i}{2} g' B_\mu \chi_L + \bar{\chi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \chi_R + \bar{\chi}_R \gamma^\mu ig' B_\mu \chi_R \right\}. \quad (5.30)$$

Introduzindo os termos cinéticos para os campos de gauge,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \\ + \hbar c \left(\bar{\chi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \chi_L - \bar{\chi}_L \gamma^\mu ig \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{W}_\mu \chi_L + \frac{i}{2} g' \bar{\chi}_L \gamma^\mu B_\mu \chi_L + \bar{\chi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \chi_R + ig' \bar{\chi}_R \gamma^\mu B_\mu \chi_R \right). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Aqui também verifica-se a existência de três novos bósons, responsáveis pela interação fraca. Os campos W_μ^\pm e Z_μ surgem da relação

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{W}_\mu = \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

Renomeando como,

$$W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \quad Z_\mu = (gW_\mu^3 - g' B_\mu), \quad (5.33)$$

$$W_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 + iW_\mu^2) \quad A_\mu = (gW_\mu^3 + g' B_\mu). \quad (5.34)$$

Reescreve-se então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \hbar c \bar{\nu}_e \gamma^\mu \partial_\mu \nu_e - \frac{i}{2} \hbar c \bar{\nu}_e \gamma^\mu Z_\mu \nu_e \\ - \hbar c \frac{i}{2} g \bar{\nu}_e \gamma^\mu W_\mu^+ e_L - \hbar c \frac{i}{2} g \bar{e}_L \gamma^\mu W_\mu^- \nu_e + \hbar c \bar{e} \gamma^\mu \partial_\mu e + \hbar c \frac{i}{2} \bar{e} \gamma^\mu A_\mu e \end{aligned} \quad (5.35)$$

A relação encontrada demonstra a interação entre elétron e anti-neutrino e seus pares antagonicos de anti-partículas por meio dos bósons W^+ e W^- , entretanto observa-se

também que não existe a presença de campos massivos, como esperado. Para dar massa aos campos encontrados, é necessário aplicar o mecanismo de Higgs como demonstrado no capítulo anterior.

Assumindo o ponto de partida a densidade lagrangiana, fornecida na equação Eq.(5.28) e já eliminando o termo de mão direita da simetria SU(2), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \\ & + \hbar c \left[\bar{\chi}_L \gamma^\mu \left(\frac{i}{2}g\partial_\mu - ig\vec{\sigma} \cdot \vec{W}_\mu + \frac{i}{2}g'B_\mu \right) \chi_L + \bar{e}_R \gamma^\mu (\partial_\mu + ig'B_\mu) e_R \right]. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Neste ponto, é possível introduzir um campo isoescalar, $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix}$, em interação com os campos de matéria. Assim, temos um novo termo extra dado por

$$\mathcal{L}_e = -h [(\bar{\chi}_L \Phi) e_R + \bar{e}_R (\Phi^\dagger \chi_L)], \quad (5.37)$$

onde “h” é uma constante de acoplamento. A lagrangiana deve assumir nos termos cinéticos para o campo isoescalar a forma de:

$$\mathcal{L}_e = (\nabla^\mu \Phi)^\dagger \nabla_\mu \Phi - V(\Phi). \quad (5.38)$$

O termo que irá conectar os campos, é dado pela derivada covariante,

$$\nabla_\mu \Phi = \left(\partial_\mu - \frac{i}{2}g\vec{\sigma} \cdot \vec{W}_\mu - \frac{i}{2}g'B_\mu \right) \Phi, \quad (5.39)$$

com o potencial assumindo a forma já verificada durante o capítulo passado,

$$V(\Phi) = -\frac{1}{2}\mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) + \frac{1}{4}\lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2. \quad (5.40)$$

A lagrangiana total, para o modelo do elétron, é então reescrita como se segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + (\nabla^\mu \Phi)^\dagger \nabla_\mu \Phi + \frac{1}{2}\mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) \\ & - \frac{1}{4}\lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 - h [(\bar{e}_L \Phi) e_R + \bar{e}_R (\Phi^\dagger e_L)] \\ & + \hbar c \left[\bar{\chi}_L \gamma^\mu \left(\frac{i}{2}g\partial_\mu - ig\vec{\sigma} \cdot \vec{W}_\mu + \frac{i}{2}g'B_\mu \right) \chi_L + \bar{e}_R \gamma^\mu (\partial_\mu + ig'B_\mu) e_R \right]. \end{aligned} \quad (5.41)$$

A massa dos campos de gauge surge com a aplicação do mecanismo de Higgs para grupos não abelianos, portanto minimizando o potencial para encontrar o valor do campo,

no estado de vácuo, assumindo $\mu^2 < 0$ e $\lambda > 0$, temos

$$\frac{\partial V}{\partial |\Phi|} = -\frac{\mu^2}{\lambda} = v^2. \quad (5.42)$$

Como $|\Phi|$ é o campo composto pelas componentes no vácuo,

$$\Phi_v^{+*} \Phi_v^+ + \Phi^{0*} \Phi^0 = v^2, \quad (5.43)$$

é possível escolher:

$$\Phi_v^+ = 0 \quad e \quad \Phi^0 = v. \quad (5.44)$$

E assim, conclui-se que,

$$\Phi^{0*} \Phi^0 = v^2. \quad (5.45)$$

Para pequenas perturbações em torno do ponto de equilíbrio, o campo se comporta como

$$\Phi = e^{\frac{i}{2v} \vec{\sigma} \cdot \vec{\theta}(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{pmatrix}. \quad (5.46)$$

Aplica-se a derivada covariante no campo transformado e verifica-se que

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \Phi &= \frac{i}{2v} \vec{\sigma} \cdot \partial_\mu \theta e^{\frac{i}{2v} \vec{\sigma} \cdot \vec{\theta}(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{pmatrix} + e^{\frac{i}{2v} \vec{\sigma} \cdot \vec{\theta}(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu \eta(x) \end{pmatrix} \\ &\quad - \left(\frac{i}{2} g \vec{\sigma} \cdot \vec{W}_\mu + \frac{i}{2} g' B_\mu \right) e^{\frac{i}{2v} \vec{\sigma} \cdot \vec{\theta}(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Fixando o campo de gauge como

$$\frac{i}{2} \sigma \cdot \vec{W}'_\mu = e^{\frac{i}{2v} \vec{\sigma} \cdot \vec{\theta}(x)} \frac{i}{2} \sigma \cdot \vec{W}_\mu e^{-\frac{i}{2v} \vec{\sigma} \cdot \vec{\theta}(x)} + \frac{1}{g} \left(\partial_\mu e^{\frac{i}{2v} \vec{\sigma} \cdot \vec{\theta}(x)} \right) e^{-\frac{i}{2v} \vec{\sigma} \cdot \vec{\theta}(x)} \quad (5.48)$$

o campo de Goldstone, campo θ , é absorvido conclui-se que

$$\nabla_\mu \Phi = e^{\frac{i}{2v} \vec{\sigma} \cdot \vec{\theta}(x)} \left[\left(-g \frac{i}{2} \sigma \cdot \vec{W}_\mu - \frac{i}{2} g' B_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu \eta(x) \end{pmatrix} \right]. \quad (5.49)$$

De forma análoga, o campo complexo conjugado assume

$$(\nabla^\mu \Phi)^\dagger = \left[\begin{pmatrix} 0 & v + \eta(x) \end{pmatrix} \left(g \frac{i}{2} \sigma \cdot \vec{W}^\mu + \frac{i}{2} g' B^\mu \right) + \begin{pmatrix} 0 & \partial^\mu \eta(x) \end{pmatrix} \right] e^{-\frac{i}{2v} \vec{\sigma} \cdot \vec{\theta}(x)}, \quad (5.50)$$

de forma que o termo cinético é então expresso por

$$\begin{aligned} (\nabla^\mu \Phi)^\dagger \nabla_\mu \Phi &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} \left(g\sigma \cdot \vec{W}^\mu - g'B^\mu \right) \left(g\sigma \cdot \vec{W}_\mu - g'B_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & \eta \end{pmatrix} \left(g\sigma \cdot \vec{W}^\mu - g'B^\mu \right) \left(g\sigma \cdot \vec{W}_\mu - g'B_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} \\ &+ \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta. \end{aligned} \quad (5.51)$$

O termo de interação com os campos de gauge é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} \left(g^2 \sigma \cdot \vec{W}_\mu \sigma \cdot \vec{W}^\mu + g'^2 B_\mu B^\mu + 2gg' B_\mu \sigma \cdot \vec{W}^\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (5.52)$$

Aplicando as matrizes de Pauli, e a identidade $(\sigma^i)^2 = 1$, reescreve-se a equação como:

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} \left[g'^2 B_\mu B^\mu + g^2 \vec{W}_\mu \vec{W}^\mu + 2gg' B^\mu \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (5.53)$$

ou ainda,

$$\mathcal{L}_m = \frac{v^2}{4} \left(g'^2 B_\mu B^\mu + g^2 \vec{W}_\mu \vec{W}^\mu + 2gg' B^\mu W_\mu^3 \right). \quad (5.54)$$

A densidade lagrangiana completa para o elétron é dado por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \hbar c \bar{\nu}_e \gamma^\mu \partial_\mu \nu_e + \partial^\mu \eta(x) \partial_\mu \eta(x) + \hbar c \bar{e} \gamma^\mu \partial_\mu e + \hbar c \frac{i}{2} \bar{e} \gamma^\mu A_\mu e \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} &- \frac{i}{2} \hbar c \bar{\nu}_e \gamma^\mu Z_\mu \nu_e - \hbar c \frac{i}{2} g \bar{\nu}_e \gamma^\mu W^+ e_L - \hbar c \frac{i}{2} g \bar{e}_L \gamma^\mu W^- \nu_e - \hbar \Phi^0 \bar{e} e \\ &+ \lambda v \eta^3 + \frac{\lambda}{4} \eta^4 + \left[\frac{v^2}{4} + \frac{\eta^2}{4} \right] \left((g^2 + g'^2) Z_\mu Z^\mu + \frac{v^2 g^2}{2} W_\mu^+ W^{-\mu} \right) - \mu^2 \eta^2 + C. \end{aligned}$$

A função que descreve o múon e o tau é feita adotando um procedimento exatamente análogo.

A equação pode ser posta em forma matricial, com isso identifica-se os termos massivos aos respectivos campos como se segue,

$$\mathcal{L}_m = \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} B_\mu & W_{\mu 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g'^2 & -gg' \\ -gg' & g^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^\mu \\ W_3^\mu \end{pmatrix}, \quad (5.56)$$

onde identifica-se a matriz dos acoplamentos M ,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} g'^2 & -gg' \\ -gg' & g^2 \end{pmatrix}, \quad (5.57)$$

a qual pode ser diagonalizada pelo problema dos autovalores

$$\det(M - \xi \mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} g'^2 - \xi & -gg' \\ -gg' & g^2 - \xi \end{pmatrix} = \xi \left[\xi - (g^2 + g'^2) \right] = 0, \quad (5.58)$$

fornecendo duas opções:

$$\xi = 0 \quad \text{ou} \quad \xi = (g^2 + g'^2). \quad (5.59)$$

Esses são os autovalores associados aos campos de forma a identificar,

$$\text{fóton} \rightarrow \xi = 0 \rightarrow A_\mu, \quad (5.60)$$

$$Z \text{ bóson} \rightarrow \xi = (g^2 + g'^2) \rightarrow Z_\mu. \quad (5.61)$$

E assim, por substituição na Eq.(5.56), conclui-se que

$$\mathcal{L}'_m = \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} A_\mu & Z_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g^2 + g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \end{pmatrix}, \quad (5.62)$$

ou ainda,

$$\mathcal{L}'_m = \frac{v^2}{4} (g^2 + g'^2) Z_\mu Z^\mu. \quad (5.63)$$

Reescrevendo o termo correspondente ao campo W como

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \pm iW_\mu^2), \quad (5.64)$$

a densidade lagrangiana, pode ser reescrita com a seguinte forma,

$$\mathcal{L}_m = \frac{v^2}{4} (g^2 + g'^2) Z_\mu Z^\mu + \frac{v^2 g^2}{2} W_\mu^+ W^{-\mu}. \quad (5.65)$$

Utilizando-se da relação,

$$W^+ W^- = \frac{1}{2} W^+ W^{+\ast} + \frac{1}{2} W^- W^{-\ast}, \quad (5.66)$$

identifica-se através da estrutura da função os termos massivos do tipo $\frac{m^2}{2} A^2$, e portanto

as massas:

$$M_A = 0, M_Z = \frac{v}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} \text{ e } M_W = \frac{vg}{\sqrt{2}}. \quad (5.67)$$

A relação direta de transformação pode ser feita também por uma matriz que contém a forma de uma matriz de rotação, conhecida por matriz S,

$$S = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g & -g' \\ -g' & g \end{pmatrix}, \quad (5.68)$$

e costuma-se definir um parâmetro, dado por:

$$\frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \sin \theta_W, \quad (5.69)$$

chamado de ângulo de Weinberg, e assim a transformação dos campos acontece por aplicação direta da mesma,

$$\begin{pmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} B^\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} A^\mu & = \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B^\mu \\ Z^\mu & = \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B^\mu \end{cases}. \quad (5.70)$$

Partindo deste ponto e do ângulo de Weinberg fixado por parâmetros experimentais, atualmente a massa dos campos Z e W é verificada na faixa de

$$M_Z \simeq 90 \text{ GeV} \text{ e } M_W \simeq 80 \text{ GeV}. \quad (5.71)$$

6 Mecanismo de Stueckelberg

Nos capítulos anteriores, foi observado que ao se adicionar o campo de gauge A_μ para recuperar a invariância das transformações locais, este campo possui necessariamente massa nula, caso contrário, perde-se a invariância. Entretanto, como foi demonstrado nos capítulos 4 e 5, o mecanismo de Higgs foi capaz de fornecer massa aos campos de matéria, como aos campos de gauge W^\pm e Z . No presente capítulo, é apresentado um formalismo alternativo para gerar massa aos campos vetoriais, inicialmente proposto por Ernst C. G. Stueckelberg em 1938. Esta proposta é resgatada com a motivação de investigar alternativas para os problemas que a física de partículas encontra com o modelo padrão, em especial a discrepância de massa dos dubletos e a presença de massa para neutrinos.

6.1 Campo de Proca e formalismo de Stueckelberg

O campo de Proca, fornece uma descrição completa de campos vetoriais massivos reais e complexos e partículas com spin =1. O formalismo de Stueckelberg, também descreve o comportamento de campos vetoriais massivos, porém utilizando-se de uma abordagem diferente do formalismo de Proca. O ponto de partida é a densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu A_\nu^\dagger \partial^\mu A^\nu + m^2 A_\mu^\dagger A^\mu. \quad (6.1)$$

A equação de campo de Euler-Lagrange, para o campo é,

$$(\partial_\nu \partial^\nu + m^2) A^\mu = 0. \quad (6.2)$$

É imediata “a constatação de que a Eq.(6.2), não fornece a condição de Lorentz, como ocorre com a equação de Proca” (RUEGG; RUIZ-ALTABA, 2004), com o qual não se pode afirmar que a hamiltoniana do sistema é positiva definida. Para contornar este problema, Stueckelberg, acrescenta um campo escalar B, evitando assim o artifício usado por Fermi, para estados físicos na Q.E.D. Assim, a lagrangiana dada na Eq.(6.1) é reescrita como:

$$\mathcal{L}_{stueck} = -\partial_\mu A_\nu^\dagger \partial^\mu A^\nu + m^2 A_\mu^\dagger A^\mu + \partial_\mu B^\dagger \partial^\mu B - m^2 B^\dagger B. \quad (6.3)$$

E temos que os campos se transformam como

$$A_\mu(x) \Rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \epsilon(x), \quad (6.4)$$

e:

$$B(x) \Rightarrow B'(x) = B(x) + m\epsilon(x). \quad (6.5)$$

Ou seja, os campos se transformam de maneira linear com o parâmetro, sobre o qual é imposta a condição

$$(\partial^\nu \partial_\nu + m^2) \epsilon = 0. \quad (6.6)$$

A invariância da lagrangiana é obtida quando tomamos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{stueck} = & -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^\dagger F^{\mu\nu} + m^2 \left(gA_\mu^\dagger - \frac{1}{m} \partial_\mu B^\dagger \right) \left(gA^\mu - \frac{1}{m} \partial^\mu B \right) \\ & - (g\partial^\mu A_\mu^\dagger + mB^\dagger) (g\partial_\nu A^\nu + mB), \end{aligned} \quad (6.7)$$

onde,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x), \quad (6.8)$$

é o tensor intensidade de campo obtido nos capítulos anteriores com expressão dada na equação Eq.(2.64) e constante de estrutura nula. Note que:

$$\left(gA_\mu^\dagger - \frac{1}{m} \partial_\mu B^\dagger \right) = A_\mu^\dagger(x) - \frac{1}{m} \partial_\mu B^\dagger(x), \quad (6.9)$$

é invariante, por outro lado,

$$(g\partial^\mu A_\mu^\dagger + mB^\dagger) = g\partial^\mu A_\mu^\dagger(x) + mB^\dagger(x) + (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \epsilon(x). \quad (6.10)$$

O último termo da expressão é avaliado, pela Eq.(6.6), então:

$$(\partial^\mu A_\mu^\dagger + mB^\dagger) = \partial^\mu A_\mu^\dagger(x) + mB^\dagger(x). \quad (6.11)$$

Por fim, conclui-se que:

$$\mathcal{L}_{stueck} = \mathcal{L}'_{stueck}. \quad (6.12)$$

O tensor intensidade F também é invariante, posto que a sua dependência é dada apenas pelas derivadas do campo de gauge. As equações de Euler-Lagrange para o campo de gauge e o campo de Stueckelberg, são do tipo Proca e Klein-Gordon respectivamente. Vale ressaltar que, comparando, com a densidade lagrangiana de Proca, temos:

$$\mathcal{L}_{stueck} = \mathcal{L}_{Proca} - (g\partial^\mu A_\mu^\dagger(x) + mB^\dagger(x)) (g\partial^\mu A_\mu(x) + mB(x)) \quad (6.13)$$

diferenciando-se por um termo extra.

6.2 Campo de Stueckelberg via método Utiyama para o grupo U(1)

No capítulo 2 foi desenvolvido o método de Utiyama para as teorias de gauge. Em seguida, foram desenvolvidos os casos para o grupo U(1) e SU(2). Nesta seção é explorada a possibilidade de se aplicar o método de Utiyama para um campo de Stueckelberg .

O ponto de partida, como de costume, é a densidade lagrangiana, composta por um campo vetorial A_μ , um campo escalar B e suas derivadas.

$$\mathcal{L}_{su} = \mathcal{L}_{su} [A_\mu, \partial_\nu A_\mu, B, \partial_\mu B]. \quad (6.14)$$

Por hipótese, esta nova densidade lagrangiana deve ser invariante sob a transformação de grupo local,

$$\delta \mathcal{L}_{su} \equiv 0. \quad (6.15)$$

Assim, impondo a condição acima, a densidade lagrangiana Eq.(6.14) leva a:

$$\delta \mathcal{L}_{su} = \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial A_\mu} \delta A_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \delta (\partial_\nu A_\mu) + \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial B} \delta B + \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial (\partial_\mu B)} \delta (\partial_\mu B), \quad (6.16)$$

Fazendo uso das transformações obtidas das Eq.(6.4), Eq.(6.5), se obtém as variações

$$\delta A_\mu = A'_\mu - A_\mu = \frac{1}{g} \partial_\mu \epsilon, \quad (6.17)$$

$$\delta B = B' - B = \frac{m}{g} \epsilon. \quad (6.18)$$

Substituindo as variações encontradas na Eq.(6.16) e realizando a troca de δ pela derivada, tem-se:

$$\delta \mathcal{L}_{su} = \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial A_\mu} \left(\frac{1}{g} \partial_\mu \epsilon \right) + \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \partial_\nu \left(\frac{1}{g} \partial_\mu \epsilon \right) + \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial B} \left(\frac{m}{g} \epsilon \right) + \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial (\partial_\mu B)} \partial_\mu \left(\frac{m}{g} \epsilon \right) = 0. \quad (6.19)$$

O parâmetro e sua derivada, como visto no capítulo 2, são independentes entre si, acarretando em um sistema de equações hierárquicas,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial B} \frac{m}{g} = 0 \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial A_\mu} \frac{1}{g} + \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial (\partial_\mu B)} \frac{m}{g} = 0 \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} + \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = 0 \quad (6.22)$$

A última das equações hierárquicas, obtida pela relação de simetria com as derivadas, é conhecida uma vez que se realiza as considerações sobre o tensor intensidade de campo,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x). \quad (6.23)$$

Assim, a dependência de \mathcal{L}_{su} para as derivadas dos campos A_μ fica definida por

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial F_{\sigma\rho}} \frac{\partial F_{\sigma\rho}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial F_{\sigma\rho}} (\delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu - \delta_\sigma^\nu \delta_\rho^\mu) = \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial F_{\mu\nu}}. \quad (6.24)$$

Deste modo, a Eq.(6.22), ao se aplicar as relações de antissimetria de $F_{\mu\nu}$, é satisfeita:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} + \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial F_{\mu\nu}} + \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial F_{\nu\mu}} = \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial F_{\mu\nu}} - \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial F_{\mu\nu}} = 0. \quad (6.25)$$

A segunda das equações hierárquicas sugere uma combinação linear do tipo

$$G_\mu = \partial_\mu B - mA_\mu. \quad (6.26)$$

Se reescrevermos a densidade lagrangiana com a dependência em G_μ , é obtido para cada elemento de Eq.(6.21):

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial A_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial G_\alpha} \Big|_A \frac{\partial G_\alpha}{\partial A_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial A_\mu} \Big|_G = -m \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial G_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial A_\mu} \Big|_G, \quad (6.27)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial (\partial_\mu B)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial G_\alpha} \frac{\partial G_\alpha}{\partial (\partial_\mu B)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial G_\mu}. \quad (6.28)$$

Assim, reescrevendo a segunda equação hierárquica se tem,

$$\frac{m}{g} \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial G_\mu} - \frac{m}{g} \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial G_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial A_\mu} \Big|_G = 0, \quad (6.29)$$

portanto,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{su}}{\partial A_\mu} \Big|_G = 0. \quad (6.30)$$

Como a Eq.(6.20), demonstra que a densidade lagrangiana não depende do campo B, a Eq.(6.30), que a dependência do campo A_μ de forma explícita é nula. É lícito então

reescrever Eq.(6.14), em função dos novos objetos:

$$\mathcal{L}_{su} = \mathcal{L}_{su} [A_\mu, \partial_\nu A_\mu, B, \partial_\mu B] = \mathcal{L}_{su} [F_{\mu\nu}, G_\mu] \quad (6.31)$$

Conclui-se que a lagrangiana \mathcal{L}_{su} não possui termos massivos do tipo B^2 , para os campos de Stueckelberg. Entretanto, resta averiguar se o objeto G_μ fornece massa ao campo vetorial A_μ .

6.3 Equações de campo para o caso Stueckelberg

Para verificar que o mecanismo de Stueckelberg pode fornecer massa aos campos vetoriais A_μ , faz se a análise de um caso particular:

$$\mathcal{L}_p = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}G_\mu G^\mu. \quad (6.32)$$

Como os objetos $F_{\mu\nu}$ e G_μ foram definidos, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p = & -\frac{1}{4}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} [\partial_\mu A_\nu \partial_\alpha A_\beta - \partial_\mu A_\nu \partial_\beta A_\alpha - \partial_\nu A_\mu \partial_\alpha A_\beta + \partial_\nu A_\mu \partial_\beta A_\alpha] \\ & + \frac{1}{2}g^{\mu\sigma} [\partial_\mu B \partial_\sigma B - m \partial_\mu B A_\sigma - m \partial_\sigma B A_\mu + m^2 A_\mu A_\sigma]. \end{aligned} \quad (6.33)$$

A equação Eq.(6.33) fornece então uma equação de campo para os campos de gauge A_μ ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right) = -mG^\mu - \partial_\nu F^{\nu\mu} = 0, \quad (6.34)$$

ou,

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} + mG^\mu = 0, \quad (6.35)$$

onde m é interpretado como sendo a massa de A , contido em G . Para o campo de Stueckelberg, Eq.(6.33) fornece:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial B} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial (\partial_\mu B)} \right) = \partial_\mu G^\mu = 0. \quad (6.36)$$

Assim, é possível observar que o campo G_μ satisfaz uma equação que lembra a condição de Lorenz, além de que

$$\partial^\mu G_\mu = \square B - m \partial^\mu A_\mu, \quad (6.37)$$

mostra que B satisfaz uma equação de onda. A equação Eq.(6.35) pode ser reescrita na forma:

$$\partial^\mu (\partial_\nu A^\nu + mB) - (\square + m^2) A^\mu = 0. \quad (6.38)$$

Então fazendo o gauge fixing,

$$\partial_\nu A^\nu + mB = 0 \Rightarrow \partial_\nu A^\nu = -mB, \quad (6.39)$$

segue que $(\square + m^2)A = 0$. Já a substituição deste gauge fixing na equação Eq.(6.37), leva a:

$$\square B - m\partial^\mu A_\mu = 0. \quad (6.40)$$

Substituindo o termo $\partial_\nu A^\nu = -mB$,

$$\square B - m(-mB) = 0 \Rightarrow \square B + m^2 B = 0, \quad (6.41)$$

ou,

$$(\square + m^2) B = 0. \quad (6.42)$$

As equações mostram que tanto o campo A , vetorial, quanto o campo B, de Stueckelberg, satisfazem a equação de Klein-Gordon de campo massivo, ambos os campos A e B com a mesma massa. Além desta observação, o gauge fixing realizado faz com que o formalismo do Utiyama perca sua eficácia, sendo preservado apenas para transformações de gauge em que o parâmetro ϵ satisfaz a equação de Klein-Gordon. Assim, o gauge fixing proposto pode ser entendido como uma liberdade de gauge residual, do formalismo de Stueckelberg-Utiyama, que desacopla os campos A e B.

6.4 Campo de matéria e o campo de Stueckelberg

Nas seções anteriores, foi observado que o campo de Stueckelberg pode fornecer massa ao campo de gauge. Esse método se mostrou consistente com a teoria de gauge de Utiyama, desde que fixando “parcialmente” o gauge. Nesta seção verifica-se o comportamento do campo de Stueckelberg com o campo de matéria, considerando o caso do grupo abeliano de transformações U(1) .

O ponto de partida então é a densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}_\phi = \mathcal{L}_\phi [\phi^A(x), \partial_\mu \phi^A(x), A^a_\mu(x), B], \quad (6.43)$$

onde, novamente por hipótese simplificadora, não existe a dependência da derivada do campo de gauge, nem a derivada do campo de Stueckelberg. Supondo também que a ação dada por

$$S[\phi, A, B] = \int_\Omega dx^4 \mathcal{L}_\phi(x), \quad (6.44)$$

seja invariante para o grupo de transformações $U(1)$, então:

$$\delta\mathcal{L}_\phi \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_\phi}{\partial\phi^A}\delta\phi^A + \frac{\partial\mathcal{L}_\phi}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}\delta(\partial_\mu\phi^A) + \frac{\partial\mathcal{L}_\phi}{\partial A^a{}_\mu}\delta A^a{}_\mu + \frac{\partial\mathcal{L}_\phi}{\partial B}\delta B = 0. \quad (6.45)$$

Levando em consideração as transformações das equações Eq.(2.18), Eq.(2.45) e Eq.(6.18), reescreve-se a Eq.(6.45) como,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}_\phi}{\partial\phi^A}I_B^A\phi^B\epsilon + \frac{\partial\mathcal{L}_\phi}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}I_B^A\phi^B\partial\epsilon + \frac{\partial\mathcal{L}_\phi}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}I_B^A\partial_\mu\phi^B\epsilon \\ + \frac{\partial\mathcal{L}_\phi}{\partial A^a{}_\mu}\frac{1}{g}\partial_\mu\epsilon + \frac{\partial\mathcal{L}_\phi}{\partial B}\frac{m}{g}\epsilon = 0. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Como o parâmetro ϵ e sua derivada $\partial\epsilon$, são independentes entre si, tem-se,

$$\frac{\partial\mathcal{L}_\phi}{\partial\phi^A}I_B^A\phi^B + \frac{\partial\mathcal{L}_\phi}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}I_B^A\partial_\mu\phi^B + \frac{\partial\mathcal{L}_\phi}{\partial B}\left(\frac{m}{g}\right) = 0, \quad (6.47)$$

e,

$$\frac{\partial\mathcal{L}_\phi}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}I_B^A\phi^B + \frac{\partial\mathcal{L}_\phi}{\partial A^a{}_\mu}\frac{1}{g} = 0. \quad (6.48)$$

Novamente, temos, pela segunda das equações e pelo argumento de d'Alembert, o objeto de derivada covariante

$$\nabla_\mu\phi^A = \partial_\mu\phi^A - gA^a{}_\mu I_B^A\phi^B. \quad (6.49)$$

Com base neste novo objeto, reescrevemos então,

$$\mathcal{L}_\phi = \mathcal{L}_\phi[\phi^A(x), \partial_\mu\phi^A(x), A^a{}_\mu(x), B] = \mathcal{L}_\Xi[\phi^A(x), \nabla_\mu\phi^A(x), B]. \quad (6.50)$$

Aplicando a regra da cadeia, definimos para a nova lagrangiana:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_\phi}{\partial\phi^A} = \frac{\partial\mathcal{L}_\Xi}{\partial\phi^A}|_{\nabla_\mu\phi, B} + \frac{\partial\mathcal{L}_\Xi}{\partial(\nabla_\nu\phi^B)}|_{\phi, B}\frac{\partial(\nabla_\nu\phi^B)}{\partial\phi^A} = \frac{\partial\mathcal{L}_\Xi}{\partial\phi^A}|_{\nabla_\mu\phi, B} - \frac{\partial\mathcal{L}_\Xi}{\partial(\nabla_\nu\phi^B)}|_{\phi}gA^B{}_\mu I^A{}_\nu, \quad (6.51)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_\phi}{\partial(\partial_\mu\phi^A)} = \frac{\partial\mathcal{L}_\Xi}{\partial(\nabla_\nu\phi^B)}|_{\phi}\frac{\partial(\nabla_\nu\phi^B)}{\partial(\partial_\mu\phi^A)} = \frac{\partial\mathcal{L}_\Xi}{\partial(\nabla_\nu\phi^B)}|_{\phi}\delta^B_A\delta^\mu_\nu = \frac{\partial\mathcal{L}_\Xi}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)}|_{\phi}, \quad (6.52)$$

e

$$\frac{\partial\mathcal{L}_\phi}{\partial B} = \frac{\partial\mathcal{L}_\Xi}{\partial B}|_{\nabla_\mu\phi} + \frac{\partial\mathcal{L}_\Xi}{\partial(\nabla_\nu\phi^B)}|_{\phi}\frac{\partial(\nabla_\nu\phi^B)}{\partial B} = \frac{\partial\mathcal{L}_\Xi}{\partial B}|_{\nabla_\mu\phi}. \quad (6.53)$$

A equação Eq.(6.47) torna-se:

$$\frac{g}{m}\frac{\partial\mathcal{L}_\Xi}{\partial\phi^A}|_{\nabla_\mu\phi=const}I_B^A\phi^B + \frac{g}{m}\frac{\partial\mathcal{L}_\Xi}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)}|_{\phi}I_B^A(\nabla_\mu\phi^B) + \frac{\partial\mathcal{L}_\Xi}{\partial B}|_{\nabla_\mu\phi} = 0. \quad (6.54)$$

Neste ponto, é possível construir dois objetos para análise. O objeto

$$\Phi^A = \phi^A - \frac{g}{m} I_B^A \phi^B B, \quad (6.55)$$

e o objeto dado pela relação com a derivada covariante,

$$D_\mu \phi^A = (\nabla_\mu \phi^A) - \frac{g}{m} B I_B^A (\nabla_\mu \phi^B). \quad (6.56)$$

De posse dos objetos e partindo de uma densidade lagrangiana dada por:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - M^2 \phi \phi^*, \quad (6.57)$$

onde, os campos se transformam como,

$$\begin{aligned} \phi &\Rightarrow \phi' = e^{-i\alpha} \phi \\ \phi^* &\Rightarrow \phi'^* = e^{i\alpha} \phi. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Aplica-se o acoplamento mínimo, resultando em

$$\mathcal{L} = \nabla_\mu \phi^* \nabla^\mu \phi - M^2 \phi^* \phi, \quad (6.59)$$

realizando em seguida o segundo acoplamento, obtém-se

$$\mathcal{L} = D_\mu \phi^* D^\mu \phi - M^2 \Phi^* \Phi. \quad (6.60)$$

Substituindo as equações Eq.(6.55) e Eq.(6.56), na equação Eq.(6.60) e realizando a substituição da derivada covariante, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left[\partial_\mu \phi^* + ig A_\mu \phi^* + \frac{ig}{m} B \partial_\mu \phi^* - \frac{g^2}{m} B A_\mu \phi^* \right] \left[\partial^\mu \phi - ig A^\mu \phi + \frac{ig}{m} B \partial^\mu \phi + \frac{g^2}{m} B A^\mu \phi \right] \\ & - M^2 \Phi^* \Phi. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Desenvolvendo os termos da densidade lagrangiana, é possível verificar os termos de interação entre os campos e assim, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - ig \partial_\mu \phi^* A^\mu \phi + ig A_\mu \partial^\mu \phi \phi^* + g^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi \\ & + 2i \frac{g}{m} B \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + 2 \frac{g^2}{m} B \partial_\mu \phi^* A^\mu \phi - 2 \frac{g^2}{m} B A_\mu \partial^\mu \phi \phi^* \\ & + 2i \frac{g^3}{m} B A_\mu A^\mu \phi^* \phi - \frac{g^2}{m^2} B^2 \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + i \frac{g^3}{m^2} B^2 \partial_\mu \phi^* A^\mu \phi \\ & - i \frac{g^3}{m^2} B^2 A_\mu \partial^\mu \phi \phi^* - \frac{g^4}{m^2} B^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi - M^2 \Phi^* \Phi. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Substituindo agora o objeto $\Phi^A = \phi^A - \frac{g}{m} I^A_B \phi^B B$, vemos que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - ig \partial_\mu \phi^* A^\mu \phi + ig A_\mu \partial^\mu \phi \phi^* + g^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi \\
& + 2i \frac{g}{m} B \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + 2 \frac{g^2}{m} B \partial_\mu \phi^* A^\mu \phi - 2 \frac{g^2}{m} B A_\mu \partial^\mu \phi \phi^* \\
& + 2i \frac{g^3}{m} B A_\mu A^\mu \phi^* \phi - \frac{g^2}{m^2} B^2 \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + i \frac{g^3}{m^2} B^2 \partial_\mu \phi^* A^\mu \phi \\
& - i \frac{g^3}{m^2} B^2 A_\mu \partial^\mu \phi \phi^* - \frac{g^4}{m^2} B^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi - M^2 \left[\left(\phi^* + i \frac{g}{m} \phi^* B \right) \left(\phi - i \frac{g}{m} \phi B \right) \right].
\end{aligned} \tag{6.63}$$

Realizando as multiplicações devidas e colocando os termos em evidência, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - ig \partial_\mu \phi^* A^\mu \phi + ig A_\mu \partial^\mu \phi \phi^* + g^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi \\
& + 2i \frac{g}{m} B \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + 2 \frac{g^2}{m} B \partial_\mu \phi^* A^\mu \phi - 2 \frac{g^2}{m} B A_\mu \partial^\mu \phi \phi^* \\
& + 2i \frac{g^3}{m} B A_\mu A^\mu \phi^* \phi - \frac{g^2}{m^2} B^2 \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + i \frac{g^3}{m^2} B^2 \partial_\mu \phi^* A^\mu \phi \\
& - i \frac{g^3}{m^2} B^2 A_\mu \partial^\mu \phi \phi^* - \frac{g^4}{m^2} B^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi - M^2 \left[1 + \frac{g^2}{m^2} B^2 \right] \phi \phi^*.
\end{aligned} \tag{6.64}$$

A equação Eq.(6.64) acima mostra que, a presença do campo B não cria necessariamente um termo de massa para o campo de matéria, mas um termo de modificação da massa efetiva. O termo de modificação pode vir a ser um fator contribuinte ou até justificar a diferença encontrada entre as massas dos dubletos.

Finalmente, para que os objetos criados de fato façam sentido dentro da teoria, eles precisam ser covariantes, o que pode-se verificar fazendo-se,

$$\delta \Phi = \delta \phi^A - \frac{g}{m} I^A_B \delta (\phi^B B). \tag{6.65}$$

Aplicando a regra de Leibniz e partindo das equações Eq.(2.18) e Eq.(6.18), temos que:

$$\delta \Phi = I^A_B \epsilon \phi^B - \frac{g}{m} \epsilon I^A_B I^B_C \phi^C B - I^A_B \epsilon \phi^B, \tag{6.66}$$

$$\delta \Phi = -\frac{g}{m} \epsilon I^A_B I^B_C \phi^C B. \tag{6.67}$$

Para o objeto formado por $D_\mu \phi^A$, verificou-se que,

$$\delta D_\mu \phi^A = \delta (\nabla_\mu \phi^A) - \frac{g}{m} I^A_B \delta [B (\nabla_\mu \phi^B)], \tag{6.68}$$

o que resulta em,

$$\begin{aligned} \delta D_\mu \phi^A &= I^A_B \partial_\mu \phi^B \epsilon - A_\mu I^A_B \left(\delta^B_C - \frac{B}{m} I^B_C \right) I^C_D \phi^D \epsilon \\ &+ A_\mu I^A_B I^B_C \phi^C \epsilon + \frac{B}{m} I^A_B I^B_C \phi^C \partial_\mu \epsilon. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Observa-se então que os objetos não são covariantes, inviabilizando a aplicação da teoria, dentro desta perspectiva de interação direta do campo de Stueckelberg com o campo de matéria.

7 Conclusão

Com o intuito de investigar os mecanismos de criação de massa para partículas e tendo como motivação identificar elementos que justificassem a discrepância de massa dos dubletos do modelo padrão, esse trabalho iniciou-se nos fundamentos teóricos da teoria de gauge construída por Utiyama. Foram observados os elementos de covariância dos campos e de suas transformações, assim como a adição de campos compensadores, gauge, desprovidos de massa para preservação da invariância.

Em um segundo momento, nos capítulos dois e três, foi abordado o comportamento dos campos sob as estruturas de simetrias abelianas e não abelianas como os casos $U(1)$ e $SU(2)$, respectivamente. Finalmente, verificou-se as interações entre os campos de matéria e os campos de gauge e foi constatado que, para a preservação da invariância, na descrição de léptons, ambos os campos necessitam ser não massivos. O capítulo 4 foi dedicado ao desenvolvimento do mecanismo Higgs, que, com enorme sucesso, justifica as massas das partículas encontradas na natureza, experimentalmente detectadas.

O ferramental apresentado se consolida no capítulo 5, onde é desenvolvido o setor eletrofraco do modelo padrão para léptons, uma vez que o modelo é uma teoria quântica de gauge em conjunto com o mecanismo de Higgs, no caso em questão todo o conteúdo é explorado dentro de um contexto de teorias clássicas de campo. O setor eletrofraco foi cuidadosamente escolhido por evidenciar com maior propriedade as diferenças de massa dos dubletos e por carregar possivelmente uma inconsistência do próprio modelo, que envolve neutrinos massivos.

Finalmente, é proposta uma investigação sobre o mecanismo de dar massa aos campos envolvendo outro modelo, o de Stueckelberg, com fins de encontrar justificativas e/ou alternativas de construção para as diferenças de massa.

O mecanismo de Stueckelberg tem sucesso ao fornecer massa aos campos vetoriais, mas para a criação de massa de campos de matéria, apresenta complicações consideráveis. Quando realizada a interação do campo de Stueckelberg com o campo de matéria, foi apresentado que, em uma abordagem de teorias efetivas, vemos através da Eq.(6.64), que o mecanismo de Stueckelberg, embora não forneça massa aos campos, pode modificá-los, isso é consideravelmente positivo e fornece possibilidades de investigação de incômodos como a

diferença de massa dos dubletos e até mesmo de abrir novas possibilidades para a questão de oscilação dos neutrinos. Uma vez que o mecanismo de Stueckelberg aparentemente é compatível com o mecanismo de Higgs, pode-se especular que durante o processo dos campos de adquirirem massa o campo de Stueckelberg pode vir a participar dificultando a interação de certos campos com o Higgs, como o do neutrino. O trabalho requer maior investigação, incluindo para o caso para a simetria do $SU(2)$.

Referências

ABI, B.; ALBAHRI, T.; AL-KILANI, S.; ALLSPACH, D.; ALONZI, L. P.; ANASTASI, A.; ANISENKOV, A.; AZFAR, F.; BADGLEY, K.; BAELEER, S.; BAILEY, I.; BARANOV, V. A.; BARLAS-YUCEL, E.; BARRETT, T.; BARZI, E.; BASTI, A.; BEDESCHI, F.; BEHNKE, A.; BERZ, M.; BHATTACHARYA, M.; BINNEY, H. P.; BJORKQUIST, R.; BLOOM, P.; BONO, J.; BOTTALICO, E.; BOWCOCK, T.; BOYDEN, D.; CANTATORE, G.; CAREY, R. M.; CARROLL, J.; CASEY, B. C. K.; CAUZ, D.; CERAVOLO, S.; CHAKRABORTY, R.; CHANG, S. P.; CHAPELAIN, A.; CHAPPA, S.; CHARITY, S.; CHISLETT, R.; CHOI, J.; CHU, Z.; CHUPP, T. E.; CONVERY, M. E.; CONWAY, A.; CORRADI, G.; CORRODI, S.; COTROZZI, L.; CRNKOVIC, J. D.; DABAGOV, S.; LURGIO, P. M. D.; DEBEVEC, P. T.; FALCO, S. D.; MEO, P. D.; SCIASCIO, G. D.; STEFANO, R. D.; DRENDEL, B.; DRIUTTI, A.; DUGINOV, V. N.; EADS, M.; EGGERT, N.; EPPS, A.; ESQUIVEL, J.; FAROOQ, M.; FATEMI, R.; FERRARI, C.; FERTL, M.; FIEDLER, A.; FIENBERG, A. T.; FIORETTI, A.; FLAY, D.; FOSTER, S. B.; FRIEDSAM, H.; FRLE, E.; FROEMMING, N. S.; FRY, J.; FU, C.; GABBANINI, C.; GALATI, M. D.; GANGULY, S.; GARCIA, A.; GASTLER, D. E.; GEORGE, J.; GIBBONS, L. K.; GIOIOSA, A.; GIOVANETTI, K. L.; GIROTTI, P.; GOHN, W.; GORRINGE, T.; GRANGE, J.; GRANT, S.; GRAY, F.; HACIOMEROGLU, S.; HAHN, D.; HALEWOOD-LEAGAS, T.; HAMPAL, D.; HAN, F.; HAZEN, E.; HEMPSTEAD, J.; HENRY, S.; HERROD, A. T.; HERTZOG, D. W.; HESKETH, G.; HIBBERT, A.; HODGE, Z.; HOLZBAUER, J. L.; HONG, K. W.; HONG, R.; IACOVACCI, M.; INCAGLI, M.; JOHNSTONE, C.; JOHNSTONE, J. A.; KAMMEL, P.; KARGIANTOULAKIS, M.; KARUZA, M.; KASPAR, J.; KAWALL, D.; KELTON, L.; KESHAVARZI, A.; KESSLER, D.; KHAW, K. S.; KHECHADOORIAN, Z.; KHOMUTOV, N. V.; KIBURG, B.; KIBURG, M.; KIM, O.; KIM, S. C.; KIM, Y. I.; KING, B.; KINNAIRD, N.; KOROSTELEV, M.; KOURBANIS, I.; KRAEGELOH, E.; KRYLOV, V. A.; KUCHIBHOTLA, A.; KUCHINSKIY, N. A.; LABE, K. R.; LABOUNTY, J.; LANCASTER, M.; LEE, M. J.; LEE, S.; LEO, S.; LI, B.; LI, D.; LI, L.; LOGASHENKO, I.; CAMPOS, A. L.; LUCÀ, A.; LUKICOV, G.; LUO, G.; LUSIANI, A.; LYON, A. L.; MACCOY, B.; MADRAK, R.; MAKINO, K.; MARIGNETTI, F.; MASTROIANNI, S.; MAXFIELD, S.; MCEVOY, M.; MERRITT, W.; MIKHAILICHENKO, A. A.; MILLER, J. P.; MIOZZI, S.; MORGAN, J. P.; MORSE, W. M.; MOTT, J.; MOTUK, E.; NATH, A.; NEWTON, D.; NGUYEN, H.; OBERLING, M.; OSOFSKY, R.; OSTIGUY, J.-F.; PARK, S.; PAULETTA, G.; PIACENTINO, G. M.; PILATO, R. N.; PITTS, K. T.; PLASTER, B.; PO, D.; POHLMAN, N.; POLLY, C. C.; POPOVIC, M.; PRICE, J.; QUINN, B.; RAHA, N.; RAMACHANDRAN, S.; RAMBERG, E.; RIDER, N. T.; RITCHIE, J. L.; ROBERTS, B. L.; RUBIN, D. L.; SANTI, L.; SATHYAN, D.; SCHELLMAN, H.;

SCHLESIER, C.; SCHRECKENBERGER, A.; SEMERTZIDIS, Y. K.; SHATUNOV, Y. M.; SHEMYAKIN, D.; SHENK, M.; SIM, D.; SMITH, M. W.; SMITH, A.; SOHA, A. K.; SORBARA, M.; STÖCKINGER, D.; STAPLETON, J.; STILL, D.; STOUGHTON, C.; STRATAKIS, D.; STROHMAN, C.; STUTTARD, T.; SWANSON, H. E.; SWEETMORE, G.; SWEIGART, D. A.; SYPHERS, M. J.; TARAZONA, D. A.; TEUBNER, T.; TEWSLEY-BOOTH, A. E.; THOMSON, K.; TISHCHENKO, V.; TRAN, N. H.; TURNER, W.; VALETOV, E.; VASILKOVA, D.; VENANZONI, G.; VOLNYKH, V. P.; WALTON, T.; WARREN, M.; WEISSKOPF, A.; WELTY-RIEGER, L.; WHITLEY, M.; WINTER, P.; WOLSKI, A.; WORMALD, M.; WU, W.; YOSHIKAWA, C. Measurement of the positive muon anomalous magnetic moment to 0.46 ppm. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 126, p. 141801, Apr 2021. Available at: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.141801>.

ACEVEDO, O.; CUZINATTO, R.; PIMENTEL, B.; POMPEIA, P. Teorias de gauge a la utiyama. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 40, 2018.

ALBAHRI, T.; ANASTASI, A.; BADGLEY, K.; BAELER, S.; BAILEY, I.; BARANOV, V. A.; BARLAS-YUCEL, E.; BARRETT, T.; BEDESCHI, F.; BERZ, M.; BHATTACHARYA, M.; BINNEY, H. P.; BLOOM, P.; BONO, J.; BOTTALICO, E.; BOWCOCK, T.; CANTATORE, G.; CAREY, R. M.; CASEY, B. C. K.; CAUZ, D.; CHAKRABORTY, R.; CHANG, S. P.; CHAPELAIN, A.; CHARITY, S.; CHISLETT, R.; CHOI, J.; CHU, Z.; CHUPP, T. E.; CONWAY, A.; CORRODI, S.; COTROZZI, L.; CRNKOVIC, J. D.; DABAGOV, S.; DEBEVEC, P. T.; FALCO, S. D.; MEO, P. D.; SCIASCIO, G. D.; STEFANO, R. D.; DRIUTTI, A.; DUGINOV, V. N.; EADS, M.; ESQUIVEL, J.; FAROOQ, M.; FATEMI, R.; FERRARI, C.; FERTL, M.; FIENBERG, A. T.; FIORETTI, A.; FLAY, D.; FROEMMING, N. S.; GABBANINI, C.; GALATI, M. D.; GANGULY, S.; GARCIA, A.; GEORGE, J.; GIBBONS, L. K.; GIOIOSA, A.; GIOVANETTI, K. L.; GIROTTI, P.; GOHN, W.; GORRINGE, T.; GRANGE, J.; GRANT, S.; GRAY, F.; HACIOMEROGLU, S.; HALEWOOD-LEAGAS, T.; HAMPAL, D.; HAN, F.; HEMPSTEAD, J.; HERROD, A. T.; HERTZOG, D. W.; HESKETH, G.; HIBBERT, A.; HODGE, Z.; HOLZBAUER, J. L.; HONG, K. W.; HONG, R.; IACOVACCI, M.; INCAGLI, M.; KAMMEL, P.; KARGIANTOULAKIS, M.; KARUZA, M.; KASPAR, J.; KAWALL, D.; KELTON, L.; KESHAVARZI, A.; KESSLER, D.; KHAW, K. S.; KHECHADOORIAN, Z.; KHOMUTOV, N. V.; KIBURG, B.; KIBURG, M.; KIM, O.; KIM, Y. I.; KING, B.; KINNAIRD, N.; KRAEGELOH, E.; KUCHINSKIY, N. A.; LABE, K. R.; LABOUNTY, J.; LANCASTER, M.; LEE, M. J.; LEE, S.; LI, B.; LI, D.; LI, L.; LOGASHENKO, I.; CAMPOS, A. L.; LUCÀ, A.; LUKICOV, G.; LUSIANI, A.; LYON, A. L.; MACCOY, B.; MADRAK, R.; MAKINO, K.; MARIGNETTI, F.; MASTROIANNI, S.; MILLER, J. P.; MIOZZI, S.; MORSE, W. M.; MOTT, J.; NATH, A.; NGUYEN, H.; OSOFSKY, R.; PARK, S.; PAULETTA, G.; PIACENTINO, G. M.; PILATO, R. N.; PITTS, K. T.; PLASTER, B.; PO, D.; POHLMAN, N.; POLLY, C. C.; PRICE, J.; QUINN, B.; RAHA, N.; RAMACHANDRAN, S.; RAMBERG, E.; RITCHIE, J. L.; ROBERTS, B. L.; RUBIN, D. L.; SANTI, L.; SCHLESIER, C.; SCHRECKENBERGER, A.; SEMERTZIDIS, Y. K.; SHEMYAKIN, D.; SMITH, M. W.; SORBARA, M.; STÖCKINGER, D.; STAPLETON, J.; STOUGHTON, C.; STRATAKIS, D.; STUTTARD, T.; SWANSON, H. E.; SWEETMORE, G.; SWEIGART, D. A.; SYPHERS, M. J.; TARAZONA, D. A.; TEUBNER, T.; TEWSLEY-BOOTH, A. E.; THOMSON, K.; TISHCHENKO, V.; TRAN, N. H.; TURNER, W.; VALETOV, E.; VASILKOVA, D.; VENANZONI, G.;

WALTON, T.; WEISSKOPF, A.; WELTY-RIEGER, L.; WINTER, P.; WOLSKI, A.; WU, W. Magnetic-field measurement and analysis for the muon $g - 2$ experiment at fermilab. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 103, p. 042208, Apr 2021. Available at: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.103.042208>.

BASSALO, J. M. F.; 3. **Teoria de Grupos**. [S.l.]: LIVRARIA DA FISICA EDITORA, 2008. ISBN 9788578610005.

CARUSO, F.; OGURI, V. **Física Moderna Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos**. [S.l.]: EDITORA CAMPUS, 2007. ISBN 9788535218787.

CHATRCHYAN, S.; KHACHATRYAN, V.; SIRUNYAN, A. M.; TUMASYAN, A.; ADAM, W.; AGUILO, E.; BERGAUER, T.; DRAGICEVIC, M.; ERÖ, J.; FABJAN, C. *et al.* Observation of a new boson at a mass of 125 gev with the cms experiment at the lh. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 716, n. 1, p. 30–61, 2012.

Cleveland, B. T.; Daily, T.; Davis RAYMOND, J.; Distel, J. R.; Lande, K.; Lee, C. K.; Wildenhain, P. S.; Ullman, J. Measurement of the Solar Electron Neutrino Flux with the Homestake Chlorine Detector. **APJ**, v. 496, n. 1, p. 505–526, mar. 1998.

DIRAC, P. A. M. **Quantum Mechanics**. [S.l.]: Oxford: Claredon Press (1958), 1930. 330 p. ISBN 9781607965602.

DOBRYNINA, A.; KARTAVTSEV, A.; RAFFELT, G. Helicity oscillations of dirac and majorana neutrinos. American Physical Society (APS), v. 93, n. 12, p. 125030, 2016.

EINSTEIN, A. **The collected papers of Albert Einstein**. [S.l.]: Princeton University Press, 1987. ISBN 0691084076.

ELECTROWEAK, T. S.; GROUPS, H. F.; COLLABORATION, A.; COLLABORATION, D.; COLLABORATION, L.; COLLABORATION, O.; COLLABORATION, S.; GROUP, L. E. W. *et al.* Precision electroweak measurements on the z resonance. **Physics Reports**, Elsevier, v. 427, n. 5-6, p. 257–454, 2006.

FEYNMAN, R. P. **Qed - The Strange Theory of Light and Matte**. [S.l.]: Penguin Books, 1988. 176 p. ISBN 9780140125054.

FUKS, B.; NEUNDORF, J.; PETERS, K.; RUIZ, R.; SAIMPERT, M. Majorana neutrinos in same-sign $W^\pm W^\pm$ scattering at the LHC: Breaking the TeV barrier. **Phys. Rev. D**, v. 103, n. 5, p. 055005, 2021.

FUNCKE, L.; RAFFELT, G.; VITAGLIANO, E. Distinguishing dirac and majorana neutrinos by their decays via nambu-goldstone bosons in the gravitational-anomaly model of neutrino masses. American Physical Society (APS), v. 101, n. 1, p. 015025, 2020.

GLASHOW, S. L. Partial-symmetries of weak interactions. **Nuclear physics**, Elsevier, v. 22, n. 4, p. 579–588, 1961.

GOLDSTEIN, H.; POOLE, C. P.; SAFKO, J. L. **Classical Mechanics (3rd Edition)**. [S.l.]: Addison Wesley, 2002. 680 p. ISBN 9780201657029.

- GREINER, W. **Gauge theory of weak interactions**. [*S.l.*]: Springer, 2000. 402 p. ISBN 3540676724.
- GRIFFITHS, D. **Introduction to Elementary Particles**. [*S.l.*]: Wiley-VCH, 2008. 450 p. ISBN 9783527406012.
- HEISENBERG, W. **The physical principles of the quantum theory**. [*S.l.*]: Dover Publications, 1950. 183 p. ISBN 0486601137.
- HEISENBERG, W. Introduction to the unified field theory of elementary particles. *In: Scientific Review Papers, Talks, and Books Wissenschaftliche Übersichtsartikel, Vorträge und Bücher*. [*S.l.*]: Springer Berlin Heidelberg, 1984. p. 677–861.
- HEISENBERG, W. **Physics and Philosophy: The revolution in modern science**. [*S.l.*]: Harper Perennial Modern Classics, 2007. 201 p. ISBN 9780061209192.
- HIGGS, P. W. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 13, p. 508–509, Oct 1964. Available at: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.508>.
- ILIOPOULOS, J. Introduction to the standard model of the electro-weak interactions. CERN, Geneva, p. Vol 5 (2016): Proceedings of the 2015 CERN–, 2016.
- MAJORANA, E. **Lezioni all'Universita di Napoli**. [*S.l.*]: Bibliopolis, 1987. 195 p. ISBN 8870881717.
- NETO, J. B. **Teoria de Campos e a Natureza : parte quântica**. [*S.l.*]: Livraria da Física, 2017.
- NOVAES, S. F. Standard model: An introduction. 2000.
- NUNOKAWA, H. Neutrino mass, mixing and oscillations. FapUNIFESP (SciELO), v. 30, n. 2, 2000.
- O'RAIFEARTAIGH, L. **The dawning of gauge theory**. [*S.l.*]: Princeton University Press, 1997. 249 p. ISBN 0691029784.
- ROBINSON, M.; BLAND, K.; CLEAVER, G.; DITTMANN, J. A simple introduction to particle physics. 2008.
- RUEGG, H.; RUIZ-ALTABA, M. THE STUECKELBERG FIELD. World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 19, n. 20, p. 3265–3347, 2004.
- RUTHERFORD, E. **Collected Papers of Lord Rutherford of Nelson Volume 1: Volume 1**. [*S.l.*]: Taylor and Francis Group, 2017. 964 p. ISBN 9781138997745.
- RUTHERFORD, E. **Collected Papers of Lord Rutherford of Nelson Volume 2: Volume 2**. [*S.l.*]: Taylor and Francis Group, 2017. 618 p. ISBN 9781138988934.
- SCHRODINGER, E. **Collected Papers on Wave Mechanics (Ams Chelsea Publishing)**. [*S.l.*]: American Mathematical Society, 1926. 208 p. ISBN 9780821835241.
- SCHRODINGER, E. **The interpretation of quantum mechanics: Dublin seminars (1949-1955) and other unpublished essays**. [*S.l.*]: Ox Bow Press, 1995. 151 p. ISBN 1881987086.

- SHEARS, T. The standard model. **Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society Publishing, v. 370, n. 1961, p. 805–817, 2012.
- SOMMERFELD, A. **Atomic Structure and Spectral Lines**. [*S.l.*]: Methuen and Company, 1924.
- UTIYAMA, R. Invariant theoretical interpretation of interaction. *American Physical Society*, v. 101, p. 1597–1607, 1956. Available at: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.101.1597>.
- WEINBERG, S. A model of leptons. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 19, p. 1264–1266, Nov 1967. Available at: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.19.1264>.

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO DM	2. DATA 04 de Janeiro de 2023	3. DOCUMENTO Nº DCTA/ITA/DM-143/2022	4. Nº DE PÁGINAS 73
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: MECANISMOS DE CRIAÇÃO DE MASSA: HIGGS E STUECKELBERG			
6. AUTOR(ES): Guilherme de Albuquerque Bruneri			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: 1.Theorias de Calibre 2.Mecanismo de Higgs 3.Física de Altas Energias.			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: 1.Theorias de Calibre 2.Modelo de Higgs 3.Física de partículas 4.Partículas elementares 5.Física nuclear 6.Física			
10. APRESENTAÇÃO: <input checked="" type="checkbox"/> Nacional <input type="checkbox"/> Internacional ITA, São José dos Campos. Curso de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Física Nuclear. Orientador: Prof. Dr Pedro José Pompeia. Coorientador: Prof. Dr. Bret Vern Carlson. Defesa em 16/12/2022. Publicada em 2022.			
11. RESUMO: <p>Neste trabalho foi realizada uma investigação sobre um segundo mecanismo de criação de massa, o de Stueckelberg, para os campos de matéria e os campos de gauge. Para tal investigação, foi revisada a construção da teoria de gauge para grupos de Lie semi-simples proposta por Utiyama. Onde, para preservar a invariância de um sistema de campos $\phi^a(x)$ sob transformações é necessário introduzir campos vetoriais, ou campos de gauge $A_\mu^a(x)$. Foi demonstrado que os campos de matéria, quando descritos por dubletos de massas diferentes, e os campos de gauge necessitam ser descritos como campos não massivos, para preservar a invariância, sendo necessário a utilização de um mecanismo capaz de fornecer massa. O mecanismo apresentado é o de maior consagração pela comunidade de físicos, o mecanismo de Higgs, demonstrando que o mecanismo fornece massa de forma dinâmica, mas não justifica a discrepância de massa entre os dubletos. Por fim é feita a abordagem com o mecanismo de Stueckelberg em interação com campos de matéria, no qual concluiu-se que, na abordagem de interação direta, o mecanismo não foi capaz de fornecer massa ao campo de matéria. Entretanto em uma interpretação de teoria efetiva foi possível mostrar uma interação com capacidade de modificar o termo massivo, abrindo margem para investigações futuras que possam justificar a afinidade dos campos de matéria com o campo de Higgs.</p>			
12. GRAU DE SIGILO: <input checked="" type="checkbox"/> OSTENSIVO <input type="checkbox"/> RESERVADO <input type="checkbox"/> SECRETO			