

Dissertação apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Física Nuclear.

Aline Camargo Noronha

ESTADO LIGADO FÉRMION-BÓSON EM DIFERENTES CALIBRES

Dissertação aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:


Prof. Dr. Wayne Leonardo Silva de Paula

Orientador

Prof^ª. Dr^ª Emilia Villani
Pró-Reitora de Pós-Graduação

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP - Brasil
2022

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Divisão de Informação e Documentação

Noronha, Aline Camargo
Estado ligado Férmion-Bóson em diferentes calibres / Aline Camargo Noronha.
São José dos Campos, 2022.
83f.

Dissertação de Mestrado – Curso de Física. Área de Física Nuclear – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2022. Orientador: Prof. Dr. Wayne Leonardo Silva de Paula.

1. Estado ligado. 2. Equação de Bethe-Salpeter. 3. Espaço de Minkowski. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Título.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

NORONHA, Aline Camargo. **Estado ligado Férmion-Bóson em diferentes calibres.** 2022. 83f. Dissertação de Mestrado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DA AUTORA: Aline Camargo Noronha

TÍTULO DO TRABALHO: Estado ligado Férmion-Bóson em diferentes calibres.

TIPO DO TRABALHO/ANO: Dissertação / 2022

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta dissertação e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. A autora reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação pode ser reproduzida sem a autorização da autora.

Aline Camargo Noronha
Rua Vereador João Orlando de Carvalho
11606-157 – São Sebastião-SP

ESTADO LIGADO FÉRMION-BÓSON EM DIFERENTES CALIBRES

Aline Camargo Noronha

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr.	César Henrique Lenzi	Presidente	-	ITA
Prof. Dr.	Wayne Leonardo Silva de Paula	Orientador	-	ITA
Prof ^a . Dr ^a	Mariana Dutra da Rosa Lourenço	Membro Interno	-	ITA
Prof. Dr.	Elias Leite Mendonça	Membro Externo	-	UNESP - FEG

A minha família e amigos. E em memória a minha mãe, que nunca saiu do meu lado, Maria Paula.

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a minha família, em especial a minha mãe Maria Paula que sempre torceu por mim e agora mais do nunca esta olhando pelo meu sucesso. Aos meus avós paternos, João e Graça, ao meu pai Bismark e aos meus irmãos Bruna, Victor e David por me apoiarem sempre nas minhas decisões.

Ao meu orientador Wayne de Paula por toda a dedicação e incentivo. Obrigada por acreditar em mim e me motivar a cada dia.

Agradeço aos meus professores da pós-graduação que tiveram papel fundamental na minha formação.

As minha amigas de infância Gabriella, Manuela, Ana Carolina, Tayna, Tamara e Victória pela amizade e apoio, comemorando cada conquista comigo.

Agradeço ao meu namorado, Igor, por sempre acreditar em mim e me apoiar em todos os momentos. Agradeço ao meus colegas de turma pela parceria e cumplicidade.

Agradeço ao ITA - Instituto Tecnológico da Aeronáutica por todo incentivo a ciência.

Agradeço ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pela bolsa que me possibilitou que pudesse continuar meus estudos.

*"If I have seen farther than others,
it is because I stood on the shoulders of giants."*

— SIR ISAAC NEWTON

Resumo

Nesta dissertação estudamos o estado ligado $(1/2)^+$ em diferentes calibres covariantes. O sistema analisado é constituído por um par férmion-bóson com interação vetorial na aproximação de escada, com propagadores livres e vértices pontuais. Tal modelo pode ser utilizado para descrever o próton, constituído por um par quark-diquark (ALEXANDROU; LUCINI, 2006). Para descrever a formação do estado ligado, resolvemos a equação de Bethe-Salpeter (BETHE, 1951) no espaço de Minkowski. Para isso, utilizamos a Representação Integral de Nakanishi (NAKANISHI, 1971) para as componentes da amplitude de Bethe-Salpeter. Realizamos a projeção da equação de Bethe-Salpeter na frente de luz e obtivemos um sistema de equações integrais acopladas para as funções peso de Nakanishi para diferentes calibres. Estudamos esse sistema no limite ultravioleta e mostramos que ele apresenta invariância de escala. Mostramos que a constante de acoplamento crítica aumenta, à medida que se muda do calibre de Feynman para o de Landau. Por fim, estudamos como a estrutura da autofunção varia com o calibre e com o comportamento assintótico do momento transversal.

Abstract

In this dissertation we studied the bound state $(1/2)^+$ in different covariant gauges. The analyzed system is constituted by a fermion-boson pair with vector interaction in the ladder approximation, with free propagators and point vertices. Such a model can be used to describe the proton, constituted by a quark-diquark pair (ALEXANDROU; LUCINI, 2006). To describe the bound state formation, we solve the Bethe-Salpeter equation (BETHE, 1951) in Minkowski space. For this aim, we use the Nakanishi Integral Representation (NAKANISHI, 1971) for the components of the Beth-Salpeter amplitude. We perform the projection of the Bethe-Salpeter equation onto the light-front and we obtained a system of coupled integral equations for the Nakanishi weight functions, for different gauges. We studied this system in the ultraviolet limit and showed that it presents scale invariance. We show that the critical coupling constant increases as one moves from Feynman to Landau gauge. Finally, we studied how the structure of the eigenfunction changes with the gauge and with the asymptotic behavior of the transverse momentum.

Lista de Figuras

- FIGURA 2.1 – Representação da Amplitude de Bethe-Salpeter com diagramas de Feynman 22
- FIGURA 2.2 – Representação do cone de luz. Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Cone de luz/media/Ficheiro:Cone-de-luz.png](https://pt.wikipedia.org/wiki/Cone_de_luz/media/Ficheiro:Cone-de-luz.png) 24
- FIGURA 3.1 – Representação da Equação de Bethe-Salpeter utilizando diagramas de Feynman. 27
- FIGURA 3.2 – Representação via diagramas de Feynman: no painel de cima está a representação do vértice escalar-vetor. No painel de baixo está a representação do vértice férmion-vetor. 27
- FIGURA 5.1 – Painel da esquerda: autovalores da equação de BS no limite ultravioleta, no calibre de Feynman e $|r| = 0.25$, para diferentes números de pontos de Gauss. Painel da direita: autofunções da Eq. (5.10) no calibre de Feynman e $|r| = 0.25$, para diferentes números de pontos de Gauss. 58
- FIGURA 5.2 – Comparação entre os resultados dos cálculos numéricos para os autovalores da equação de BS no limite ultravioleta em função da potência $|r|$ e suas interpolações. Painel da esquerda: calibre de Feynman. Painel da direita: calibre de Landau. 59
- FIGURA 5.3 – Painel da esquerda: autovalores da equação de BS no limite ultravioleta, para os calibres de Feynman, Landau e $\zeta = 0.5$ em função da potência $|r|$. Painel da direita: autovalores críticos da equação de BS no limite ultravioleta em função do calibre. 60
- FIGURA 5.4 – Autovalores da equação de BS no limite ultravioleta em função do calibre para diferentes potências r . Painel da esquerda: $0 < |r| \leq 0.5$. Painel da direita: $0.5 \leq |r| < 1$ 61

-
- FIGURA 5.5 – Autofunções da equação de BS no limite ultravioleta para $|r| = 0.25$, no calibre de Feynman, Landau e $\zeta = 0.5$. No painel da esquerda é apresentado o comportamento em todo intervalo da fração de momento ξ . No painel da direita é mostrado o comportamento assintótico para $\xi \rightarrow 0$ 62
- FIGURA 5.6 – Autofunções da equação de BS no limite ultravioleta para $|r| = 0.25$, no calibre de Feynman, Landau e $\zeta = 0.5$ 63
- FIGURA 5.7 – Autofunções da equação de BS no limite ultravioleta para diferentes potências $|r|$. No painel da esquerda foi utilizado o calibre de Feynman. No painel da direita foi considerado o calibre de Landau. 63

Lista de Tabelas

TABELA 5.1 – Análise da convergência da constante de acoplamento.	59
---	----

Lista de Abreviaturas e Siglas

EBS Equação de Bethe-Salpeter
ABS Amplitude de Bethe-Salpeter

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Objetivo	15
1.2	Motivação	15
1.3	Organização do trabalho	17
2	TÓPICOS DE TEORIA DE CAMPOS	18
2.1	Campos escalares, vetoriais e fermiônicos	18
2.1.1	Campo escalar	18
2.1.2	Campo vetorial	19
2.1.3	Campo fermiônico	20
2.2	Representação integral de Nakanishi	21
2.3	Dinâmica na frente de luz	23
3	ESTADO LIGADO FÉRMION-BÓSON: CALIBRE DE FEYNMAN	26
3.1	Estado ligado férmion-bóson no calibre de Feynman	26
3.1.1	Integração quadridimensional	30
3.1.2	Projeção na frente de luz	33
4	ESTADO LIGADO FÉRMION-BÓSON: CALIBRE COVARIANTE AR- BITRÁRIO	40
4.1	Integração quadridimensional	43
4.1.1	Integral quadridimensional para $C_{ij}^{(2)}(k, k', p)$	44
4.2	Projeção na frente de luz	49
4.2.1	Projeção do lado direito da equação de Bethe-Salpeter	50

5	REGIME ULTRAVIOLETA	55
5.1	Equações integrais	55
5.2	Método numérico	57
5.2.1	Análise da convergência	58
5.3	Efeito do calibre na formação do estado ligado	58
5.3.1	Autovalores em diferentes calibres	59
5.3.2	Autofunções em diferentes calibres	61
6	CONCLUSÃO	64
	REFERÊNCIAS	66
	APÊNDICE A – DERIVADA FUNCIONAL E FUNCIONAL GERADOR	68
A.1	Demonstração	68
A.2	Teoria livre	69
	APÊNDICE B – CÁLCULO DOS TRAÇOS	70
	APÊNDICE C – COEFICIENTES PARA EQUAÇÃO DE BS EM UM CALIBRE COVARIANTE ARBITRÁRIO	73
	APÊNDICE D – COEFICIENTES PARA EQUAÇÃO DE BS NO LIMITE ULTRAVIOLETA	81

1 Introdução

1.1 Objetivo

Esta dissertação tem como objetivo estudar o efeito do calibre na formação do estado ligado $(1/2)^+$, constituído por um par férmion-bóson, interagindo pela troca de um bóson vetorial na aproximação de escada, com propagadores livres e vértices pontuais. Tal modelo pode ser utilizado para descrever o próton, constituído por um par quark-diquark (ALEXANDROU; LUCINI, 2006).

1.2 Motivação

Deste os tempos antigos tentamos entender do que são feitas as coisas, o que nos leva ao estudo das partículas elementares. Sabemos que a matéria é feita de átomos, que ganhou esse nome pois seria a forma indivisível da matéria. Porém, estudos mostraram que os átomos são formados por elétrons, prótons e nêutrons, sendo o núcleo do átomo composto por prótons e nêutrons.

Naturalmente, houve a necessidade de se entender como que o núcleo se mantinha unido, pois sendo composto por prótons, e cargas iguais se repelem, deveria haver alguma força que contrabalançava a interação eletromagnética. Nesse contexto, surgiu o modelo de Yukawa, que previa a existência de uma interação entre os prótons pela troca de um méson massivo, o que constitui o marco inicial da física nuclear. No ano de 1947 foi detectado experimentalmente o pión (LATTES H. MUIRHEAD, 1947), com a valiosa contribuição do cientista brasileiro Cesar Lattes.

Com a criação de grandes laboratórios, foi-se aumentando consideravelmente a escala de energia dos experimentos e cada vez mais tivemos acesso a estrutura interna das partículas. Destacam-se os experimentos realizados por Friedmann, Kendall e Taylor para estudar a estrutura do próton, onde foram usados elétrons com energia da ordem de 20GeV (BREIDENBACH J. I. FRIEDMAN; TAYLOR, 1969). A conclusão desses experimentos foi surpreendente: o próton é constituído por outras partículas (quarks), que interagem muito

fracamente para altas energias (liberdade assintótica). Nesse contexto, surgiu a Cromodinâmica Quântica (QCD) (HOOFT; VELTMAN, 1972; POLITZER, 1973; GROSS; WILCZEK, 1973), que é uma teoria de calibre $SU(3)$ com 3 “cores”, ou cargas. Até hoje, não se detectou partículas que carreguem cor, apenas partículas de cor zero, que são denominadas hádrons. Isso levou a se formular a conjectura do confinamento, em que seria impossível ter uma partícula colorida como estado assintótico.

A teoria que melhor descreve os constituintes hadrônicos é a QCD, porém, devido a sua complexidade, ainda não se tem uma descrição completa dos bárions (hadrons de spin semi-inteiro). Atualmente, existem dados experimentais sobre a estrutura interna do próton que desafiam nosso conhecimento (CARLSON, 2015). Assim, o desenvolvimento de modelos dinâmicos para os bárions são muito desejáveis. Uma maneira de tratar este sistema é considerar o ponto de vista dos quarks constituintes, ou seja, o efeito do glúon é levado em conta em uma massa efetiva de quarks. A equação de estado ligado de três corpos relativística correspondente (equações de Fadeev) pode ser simplificada ainda mais negligenciando as forças de três corpos, obtendo a chamada descrição quark-diquark (EICHMANN H. SANCHIS-ALEPUZ; FISCHER, 2016). De fato, a correlação diquark tem um papel importante na descrição da estrutura hadrônica (veja (BARABANOV M. A. BEDOLLA; ENT, 2021) para uma revisão). Também é importante mencionar que simulações de QCD na rede (Lattice QCD) mostraram que as correlações de diquarks emergem da lagrangiana da QCD (ALEXANDROU; LUCINI, 2006; DEGRAND; SCHAEFER, 2008; BABICH N. GARRON; REBBI, 2007; BI H. CAI; YANG, 2016).

Em (NOGUEIRA, 2019) foi proposto um modelo para descrição do próton considerando uma estrutura quark-diquark. Nesse contexto, o quark foi representado como uma partícula fermiônica e o diquark como um bóson escalar. A interação férmion-bóson se dá pela troca de um bóson vetorial, que faz o papel do glúon na interação quark-diquark. Originalmente, esse modelo foi construído no calibre de Feynman. Nossa proposta é estender esse modelo e estudar como esse sistema se comporta em outros calibres covariantes.

Para descrever a dinâmica da formação do estado ligado, resolveremos a equação de Bathe-Salpeter (BETHE, 1951) no espaço de Minkowski. Utilizaremos a Representação Integral de Nakanishi (NAKANISHI, 1971) para as componentes da amplitude de Bethe-Salpeter. Faremos a projeção da equação de Bethe-Salpeter na frente de luz para obter um sistema de equações integrais acopladas para as funções peso de Nakanishi para diferentes calibres.

Estudaremos esse sistema no limite ultravioleta e discutiremos como o calibre impacta na formação do estado ligado.

1.3 Organização do trabalho

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

No capítulo 2, faremos uma breve revisão de alguns conceitos de Teoria de Campos. Utilizando o formalismo funcional, obteremos os propagadores dos campos escalar, vetorial e fermiônico. Apresentaremos a representação integral de Nakanishi e definiremos a projeção na frente de luz.

No capítulo 3, faremos uma revisão do cálculo do estado ligado férmion-bóson no calibre de Feynman no espaço de Minkowski (NOGUEIRA, 2019).

No capítulo 4, mostramos o estudo da equação de Bethe-Salpeter para o estado ligado $(1/2)^+$, constituído por um sistema férmion-bóson com interação vetorial, na aproximação de escada e em um calibre arbitrário.

No capítulo 5, os resultados desse estudo para o limite de altas energias serão mostrados. Por fim, no capítulo 6, apresentaremos as conclusões e próximos passos.

2 Tópicos de teoria de campos

Nesse capítulo, faremos uma breve revisão sobre alguns conceitos que serão utilizados ao longo da dissertação. Definiremos o funcional gerador dos campos escalares, vetoriais e fermiônicos e, a partir deles, obteremos os seus respectivos propagadores. Apresentaremos a representação integral de Nakanishi, que será utilizada para descrever as componentes da amplitude de Bethe-Salpeter do estado ligado férmion-bóson. Por fim, apresentaremos uma breve revisão sobre a dinâmica dos campos na frente de luz, uma vez que, para resolver a equação de Bethe-Salpeter, faremos sua projeção no plano nulo.

2.1 Campos escalares, vetoriais e fermiônicos

O objetivo dessa dissertação é descrever a formação do estado ligado de um sistema relativístico férmion-bóson. Para isso, utilizaremos um modelo baseado no formalismo da Teoria Quântica de Campos. A seguir, serão obtidos os propagadores dos campos escalares, vetoriais e fermiônicos utilizando integrais de trajetória.

2.1.1 Campo escalar

Utilizando o formalismo funcional, podemos calcular as funções de correlação a partir do funcional gerador $Z[J]$ (PESKIN MICHAEL E.; SCHROEDER, 2007). Para a teoria escalar, o funcional gerador é dado por

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\Phi \exp \left(i \int d^4x (\mathcal{L} + J(x) \Phi(x)) \right), \quad (2.1)$$

onde $J(x) \Phi(x)$ é o termo de fonte. Essa integral representa a soma sobre todas as configurações do campo escalar $\Phi(x)$.

A partir do funcional gerador, é possível obter a função de n -pontos (Apêndice A):

$$(-i)^n \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^n Z}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} = \langle \Omega | T \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) | \Omega \rangle, \quad (2.2)$$

onde T é o operador Time Ordering.

Um elemento importante em nosso modelo é a função de dois pontos, conhecida como propagador. Considerando um campo escalar livre, a lagrangiana é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \Phi^2, \quad (2.3)$$

onde m é a massa da partícula. Substituindo a lagrangiana do campo escalar livre, Eq.(2.3), na expressão dada pela Eq.(2.2), obtém-se o propagador do campo escalar:

$$\langle 0|T\Phi(x_1)\Phi(x_2)|0 \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}. \quad (2.4)$$

No espaço dos momentos, podemos utilizar diagramas de Feynman (FEYNMAN, 1949) e representar o propagador escalar como:

$$----- = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

2.1.2 Campo vetorial

Em nosso modelo, consideraremos que a interação entre o campo fermiônico e o campo escalar se dá pela troca de um bóson vetorial. Para descrevê-lo, utilizaremos a lagrangiana do campo eletromagnético livre, dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. A integral funcional de interesse é

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]}, \quad (2.6)$$

onde $S[A]$ é a ação do campo eletromagnético livre e $\mathcal{D}A = \mathcal{D}A^0 \mathcal{D}A^1 \mathcal{D}A^2 \mathcal{D}A^3$. Note que a lagrangiana, Eq.(2.5), é invariante sob a transformação de calibre (PESKIN MICHAEL E.; SCHROEDER, 2007)

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\beta(x). \quad (2.7)$$

Dessa forma, para cada configuração física, há infinitas cópias redundantes. Para extrair apenas uma configuração física, é necessário utilizar a prescrição de Fadeev-Popov (PESKIN MICHAEL E.; SCHROEDER, 2007). Eles mostraram como a fixação de calibre pode ser implementada pela adição de um termo na ação, obtendo:

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\zeta}(\partial_\mu A^\mu)^2 \right), \quad (2.8)$$

onde ζ é uma constante cujo valor representa a escolha de um particular calibre.

Utilizando essa nova ação, que contém o termo de fixação de Calibre, Eq.(2.8), na expressão dada pela Eq.(2.2), obtém-se o propagador do campo vetorial em um calibre ζ :

$$\langle 0|TA(x_1)A(x_2)|0 \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2 + i\epsilon} \left(g^{\mu\nu} - (1 - \zeta) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2 + i\epsilon} \right) e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}. \quad (2.9)$$

Esse resultado foi obtido para um campo vetorial sem massa. Nesse trabalho, consideraremos um campo vetorial massivo. Assim, é importante apresentar a generalização da função de dois pontos para um campo vetorial massivo (massa μ), que é dado por:

$$\langle 0|TA(x_1)A(x_2)|0 \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon} \left(g^{\mu\nu} - (1 - \zeta) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2 - \zeta \mu^2 + i\epsilon} \right) e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}. \quad (2.10)$$

No espaço dos momentos, podemos utilizar diagramas de Feynman e representar o propagador vetorial como:

$$\text{~~~~~} = \frac{-i}{q^2 - \mu^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - \frac{(1-\zeta)q_\mu q_\nu}{q^2 - \zeta \mu^2 + i\epsilon} \right) .$$

2.1.3 Campo fermiônico

Para efetuar a quantização funcional do campo fermiônico, é necessário representá-lo como um campo de Grassman. Isso está relacionado ao fato de que campos fermiônicos obedecem a relação canônica de anticomutação.

O funcional gerador para o Campo de Dirac é:

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x \left(\bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + \bar{\eta}\psi + \eta\bar{\psi} \right) \right], \quad (2.11)$$

onde $\bar{\eta}$ e η são fontes de Grassmann. A função de dois pontos pode ser obtida como:

$$\langle 0|T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0 \rangle = \frac{1}{Z_0} \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \right) \left(-i \frac{\delta}{\delta \eta} \right) Z[\bar{\eta}, \eta], \quad (2.12)$$

onde $Z_0 = Z|_{\bar{\eta}=\eta=0}$. Substituindo o funcional gerador do campo fermiônico, Eq.(2.11), na Eq.(2.12), obtemos o propagador:

$$\langle 0|T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0 \rangle = \int d^4x \frac{i e^{ik \cdot (x_1 - x_2)}}{\not{k} - m + i\epsilon}, \quad (2.13)$$

onde \not{k} é a representação das matrizes Gamma γ^μ multiplicada pelo quadrimomento k_μ da partícula, $\gamma^\mu k_\mu = \not{k}$. Utilizando diagramas de Feynman no espaço dos momentos, o

propagador fermiônico é:

$$\text{---}\blacktriangleright\text{---} = \frac{i}{\not{k}-m+i\epsilon} .$$

2.2 Representação integral de Nakanishi

Vamos analisar um diagrama de Feynman (G), com N momentos externos p_i , n propagadores internos com momento l_i e massas m_i , e k loops. A amplitude de transição, para a teoria escalar, é dada por:

$$f_G(p_i) = \prod_{r=1}^k \int d^4 q_r \frac{1}{(l_1^2 - m_1^2 + i\epsilon) \dots (l_n^2 - m_n^2 + i\epsilon)} . \quad (2.14)$$

Para resolver essa integral, o primeiro passo é juntar os fatores do denominador em um único termo. Para isso, utilizaremos a parametrização de Feynman:

$$\frac{1}{A_1 \dots A_n} = (n-1) \prod_{i=1}^n \int_0^1 d\alpha_i \frac{\delta(1 - \sum \alpha_i)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i} . \quad (2.15)$$

Com isso, obtemos:

$$f_G(p_i) = \frac{(i\pi)^k (n-2k-1)!}{(n-1)!} \prod_{i=1}^n \int_0^1 d\alpha_i \frac{\delta(\sum \alpha_i - 1)}{U^2 (\sum_{ii'} e_{ii'} p_i p_i' - \sum_{i=1}^n \alpha_i m_j^2 + i\epsilon)^{n-2k}} \quad (2.16)$$

Note que o denominador é uma combinação linear dos produtos escalares dos momentos externos e de suas massas. Os coeficientes e o expoente $(n-2k)$ dependem do particular diagrama de Feynman que está sendo considerado. Após fazermos uma mudança de variáveis, podemos escrever:

$$f_G(p_i) = \Pi_h \int_0^1 dz_h \int_0^\infty d\xi \frac{\delta(1 - \sum_i z_i) \phi_G^{(n-2k)}(z, \chi)}{(\sum_i z_i s_i - \chi + i\epsilon)^{n-2k}} . \quad (2.17)$$

Integrando por partes, chegamos na seguinte representação integral:

$$f_G(p_i) = \Pi_h \int_0^1 dz_h \int_0^\infty d\chi \frac{\delta(1 - \sum_i z_i) \phi_G^{(1)}(z, \chi)}{(\sum_i z_i s_i - \chi + i\epsilon)} , \quad (2.18)$$

onde

$$\phi_G^{(1)}(\chi, z_h) = (-1)^{n-2k-1} \frac{\partial^{n-2k-1}}{\partial \xi^{n-2k-1}} \phi_G^{(n-2k)}(\chi, z_h) . \quad (2.19)$$

A dependência dos detalhes do diagrama passa do denominador para o numerador, mais especificamente para a função $\phi_G^{(1)}(\chi, z_h)$. Obtemos a mesma expressão formal para o

denominador de qualquer diagrama de Feynman.

Considere dois bósons interagindo e formando um estado ligado de momento p . O objeto que representa o estado ligado é a amplitude de Bethe-Salpeter, que é definida como

$$\Phi(x_1, x_2; p) = \langle 0 | T \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) | p \rangle, \quad (2.20)$$

cuja representação em termos de diagramas de Feynman é mostrada na Fig. (2.1). Para

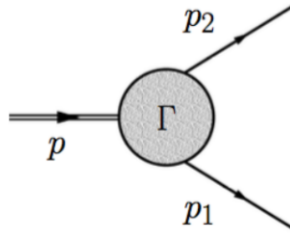


FIGURA 2.1 – Representação da Amplitude de Bethe-Salpeter com diagramas de Feynman

esse sistema, consideramos as partículas constituintes com momentos p_1, p_2 e o estado ligado com momento p . Adicionalmente, introduzimos o quadrimomento k , tal que:

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2, \\ k &= \frac{(p_1 - p_2)}{2}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Desta forma, a equação (2.18) torna-se:

$$f_3(p_i) = \Pi_h \int_0^1 dz_h \delta\left(\sum_h z_h - 1\right) \int_0^\infty d\chi \frac{\phi_3^{(1)}(\chi, z_h)/(z_1 + z_2)}{\left(k^2 + p \cdot k \frac{(z_1 - z_2)}{(z_1 + z_2)} + \frac{M^2/4(z_1 + z_2 + 4z_3) - \chi}{(z_1 + z_2)} + i\epsilon\right)}. \quad (2.22)$$

Usando as identidades

$$\begin{aligned} 1 &= \int d\gamma' \delta\left(\gamma' + \left(\frac{M^2/4(z_1 + z_2 + 4z_3) - \chi}{(z_1 + z_2)}\right)\right), \\ 1 &= \int_{-1}^1 dz' \delta\left(z' - \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right)\right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

obtemos a representação integral de Nakanishi:

$$f_3(p, k) = \int d\gamma' \int_{-1}^1 dz' \frac{g^{(1)}(\gamma', z')}{k^2 + z'p \cdot k - \gamma' + i\epsilon}, \quad (2.24)$$

onde

$$g^{(1)}(\gamma', z') = \prod_h \int_0^1 dz_h \delta\left(\sum_h z_h - 1\right) \int_0^\infty d\chi \frac{\phi_3^{(1)}(\chi, z_h)}{(z_1 + z_2)} \delta\left(z' - \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right)\right) \times \\ \delta\left(\gamma' + \left(\frac{M^2/4(z_1 + z_2 + 4z_3) - \chi}{(z_1 + z_2)}\right)\right). \quad (2.25)$$

Fazendo integrações por parte, é possível alterar a potência do denominador. Ao longo dessa dissertação, utilizaremos a potência 3. Assim, a representação integral de Nakanishi para a amplitude de Bethe-Salpeter será dada por:

$$\phi(k, p) = \int_{-1}^1 dz' \int_0^\infty d\gamma' \frac{g(\gamma', z')}{(\gamma' + \kappa^2 - k^2 - p \cdot kz' - i\epsilon)^3}. \quad (2.26)$$

A utilização da representação integral de Nakanishi é uma ferramenta fundamental para o desenvolvimento de nosso trabalho. A razão é que ela nos fornece a estrutura analítica da amplitude de BS em termos dos momentos externos. Isso possibilitará a integração no loop de momentos de maneira apropriada. A incógnita a ser determinada em nosso problema passa a ser a função peso de Nakanishi $g(\gamma', z')$, que não depende dos momentos externos.

2.3 Dinâmica na frente de luz

Para descrever sistemas que se propagam em altas velocidades é necessário incorporar os conceitos da relatividade restrita. Uma vez que o limite superior para a velocidade de propagação é a velocidade da luz, a dinâmica desses sistemas está restrita ao espaço-tempo interior ao cone de luz (ver Fig. 2.2).

Dentro do cone de luz dois pontos no espaço-tempo são conectados causalmente, fora os pontos não são conectados e sobre a hipersuperfície do cone de luz os pontos são conectados por um sinal de luz. Assim, para descrever a dinâmica de um sistema físico é necessário especificar os valores das variáveis dinâmicas em uma dada hipersuperfície inicial. A escolha desta hipersuperfície determina o tipo de variáveis que se pode utilizar para descrever a evolução física.

Dirac mostrou que é possível definir uma dinâmica relativística no hiperplano tangente ao cone de luz (DIRAC, 1949), definido por

$$x^0 + x^3 = 0. \quad (2.27)$$

Esse hiperplano também é conhecido como frente de luz, cujas coordenadas são definidas

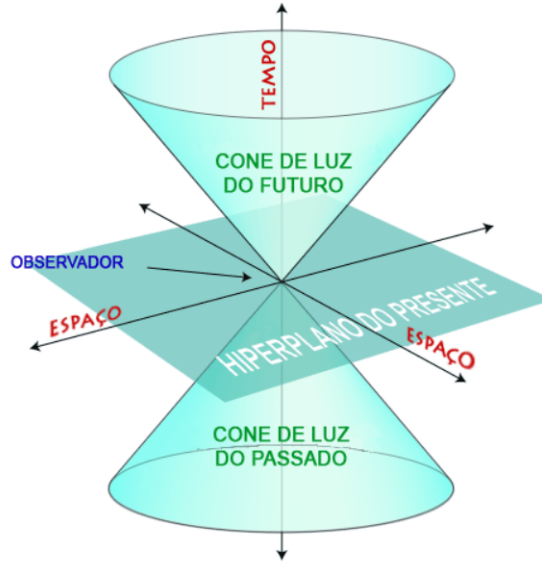


FIGURA 2.2 – Representação do cone de luz. Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Cone de luz/media/Ficheiro:Cone-de-luz.png](https://pt.wikipedia.org/wiki/Cone_de_luz/media/Ficheiro:Cone-de-luz.png)

como:

$$x^+ = x^0 + x^3, \quad (2.28)$$

$$x^- = x^0 - x^3, \quad (2.29)$$

$$\vec{x}_\perp = \{x^1, x^2\}. \quad (2.30)$$

As condições iniciais para a dinâmica são definidas em $x^+ = 0$ e a evolução do sistema ocorre para $x^+ > 0$. Assim, x^+ desempenha uma função análoga à do tempo na quantização canônica usual (forma instantânea). Por isso, x^+ é conhecido como o tempo no plano nulo.

Nesse sistema de coordenadas, o quadrimomento k^μ pode ser escrito como:

$$k^+ = k^0 + k^3, \quad (2.31)$$

$$k^- = k^0 - k^3, \quad (2.32)$$

$$\vec{k}_\perp = \{k^1, k^2\}. \quad (2.33)$$

O produto escalar em coordenadas da frente de luz é dado por:

$$k^\mu p_\mu = \frac{1}{2} (k^+ p^- + k^- p^+) - \vec{k}_\perp \cdot \vec{p}_\perp \quad (2.34)$$

Um procedimento importante que será realizado nesse trabalho é a projeção na frente de luz. De maneira geral, isso significa restringir os campos ao plano nulo. Tecnicamente,

pode-se implementar tal restrição multiplicando o campo por uma delta de Dirac $\delta(x^+)$. A seguir, vamos mostrar que isso é equivalente a se realizar uma integração na coordenada k^- .

Para exemplificar, considere um campo escalar $\phi(x)$. Façamos a integração em k^- de sua transformada de Fourier:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dk^-}{2\pi} \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \phi(x) e^{-ik \cdot x} &= \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \int \frac{dk^-}{2\pi} \phi(x) e^{-i(\frac{1}{2}(k^+x^- + k^-x^+) - \vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp)} \\
 &= \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \phi(x) e^{-i(\frac{1}{2}k^+x^- - \vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp)} \int \frac{dk^-}{2\pi} e^{-\frac{i}{2}k^-x^+} \\
 &= \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \phi(x) e^{-ik \cdot x} \delta(x^+), \tag{2.35}
 \end{aligned}$$

o que mostra que a projeção na frente de luz pode ser obtida realizando a integração na coordenada k^- .

3 Estado ligado férmion-bóson: calibre de Feynman

Neste capítulo iremos utilizar a formulação relativística proposta por E.E. Salpeter e H.A. Bethe em 1951 (BETHE, 1951), para descrever a formação de um estado ligado a partir da interação entre duas partículas. Eles mostraram que a dinâmica do estado ligado é obtida resolvendo uma equação integral proveniente da análise do polo da função de Green de 4 pontos (Equação de Bethe-Salpeter) (ZUBER JEAN-BERNARD; ITZYKSON, 2006). Nesse capítulo faremos uma revisão do cálculo do estado ligado férmion-bóson no calibre de Feynman (NOGUEIRA, 2019) no espaço de Minkowski. No próximo capítulo, faremos a generalização para outros calibres covariantes e estudaremos o seu efeito no cálculo da amplitude de Bethe-Salpeter (BS).

3.1 Estado ligado férmion-bóson no calibre de Feynman

O sistema físico que estamos interessados em estudar é governado pela seguinte lagrangiana de interação

$$\mathcal{L} = \lambda_F \bar{\psi} \not{V} \psi - i\lambda_S \phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi V^\mu, \quad (3.1)$$

onde V^μ é o campo do bóson de interação vetorial, ψ é o campo fermiônico, ϕ é o campo escalar e λ_F e λ_S são as constantes de acoplamento para os campos fermiônico e escalar, respectivamente. A equação de Bethe-Salpeter (BS) para o sistema férmion-bóson formando um estado ligado $(1/2)^+$, com interação na aproximação de escada é:

$$\Phi(k, p) = G_0(p/2 - k) S(p/2 + k) \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} iK(k, k', p) \Phi(k', p), \quad (3.2)$$

onde $\Phi(k, p)$ é a amplitude de BS, $G_0(q)$ é o propagador escalar, $S(q)$ é o propagador fermiônico e $iK(k, k', p)$ é o Kernel de interação vetorial, que são dados por:

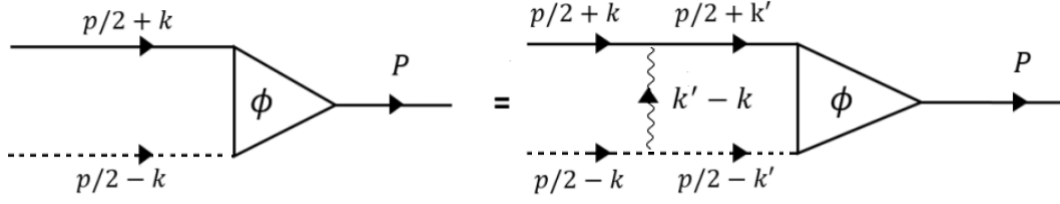


FIGURA 3.1 – Representação da Equação de Bethe-Salpeter utilizando diagramas de Feynman.

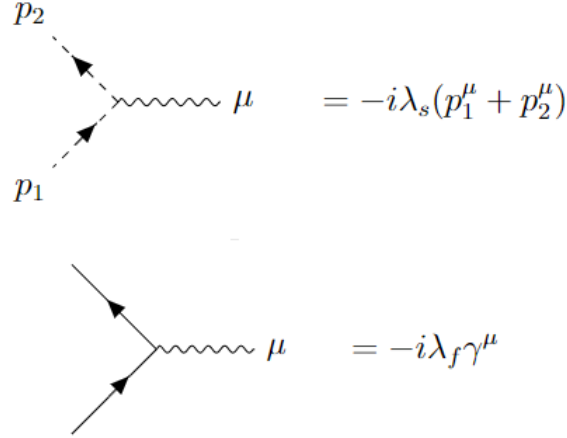


FIGURA 3.2 – Representação via diagramas de Feynman: no painel de cima está a representação do vértice escalar-vetor. No painel de baixo está a representação do vértice férmion-vetor.

$$G_0(p/2 - k) = \frac{i}{(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon}, \quad (3.3)$$

$$S(p/2 + k) = i \frac{\not{p}/2 + \not{k} + m_f}{(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon}, \quad (3.4)$$

$$iK(k, k', p) = -i \lambda_S \lambda_F \frac{\not{p} - \not{k} - \not{k}'}{(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon}. \quad (3.5)$$

Nas definições acima, foram introduzidas as massas dos campos escalar (m_s), fermiônico (m_f) e vetorial (μ). Na Fig. 3.1 temos a representação da Equação de BS, na aproximação de escada, em termos de diagramas de Feynman. Adicionalmente, também definiremos a massa do estado ligado como M . É importante notar que o estado ligado carrega um momento p e que $p^2 = M^2$. Temos também que \not{p} é a representação das matrizes Gamma γ^μ multiplicada pelo quadrimomento p_μ da partícula, $\gamma^\mu p_\mu = \not{p}$.

Podemos decompor a amplitude de BS em uma base de matrizes de Dirac:

$$\Phi(k, p) = [O_1(k) \phi_1(k, p) + O_2(k) \phi_2(k, p)] U(p, s), \quad (3.6)$$

onde $O_1(k) = \hat{1}$, $O_2(k) = \frac{\not{k}}{M}$ e $U(p, s) = \frac{\not{p} + M}{2M}$ são matrizes e $\phi_1(k, p)$ e $\phi_2(k, p)$ são funções, que representam as componentes da amplitude de Bethe-Salpeter.

Substituindo as Eqs. (3.3), (3.4), (3.5) e (3.6) em (3.2), temos:

$$\begin{aligned}
 [O_1(k)\phi_1(k, p) + O_2(k)\phi_2(k, p)]U(p, s) &= \frac{i}{(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon} i \frac{\not{p}/2 + \not{k} + m_f}{(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon} \times \\
 &\int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \left(-i \lambda_S \lambda_F \frac{\not{p} - \not{k} - \not{k}'}{(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon} \right) [O_1(k)\phi_1(k, p) + O_2(k)\phi_2(k, p)]U(p, s).
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Substituindo os operadores $O_1(k)$, $O_2(k)$ e $U(p, s)$, o lado esquerdo da equação de BS torna-se:

$$LHS = \left[\hat{1}\phi_1(k, p) + \frac{\not{k}}{M}\phi_2(k, p) \right] \frac{(\not{p} + M)}{2M} \tag{3.8}$$

Multiplicando por $O_1(k)$ e calculando o Traço:

$$\begin{aligned}
 LHS_{O_1} &= Tr \left[\phi_1 \frac{(\not{p} + M)}{2M} + \phi_2 \frac{\not{k}}{M} \frac{\not{p} + M}{2M} \right] \\
 &= 2\phi_1(k, p) + \frac{2(k \cdot p)}{M^2} \phi_2(k, p)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Multiplicando por $O_2(k)$, temos:

$$\begin{aligned}
 LHS_{O_2} &= \left[\frac{\not{k}}{M}\phi_1(k, p) + \frac{k^2}{M^2}\phi_2(k, p) \right] \frac{(\not{p} + M)}{2M} \\
 &= 2\frac{k \cdot p}{M^2}\phi_1(k, p) + \frac{2k^2}{M^2}\phi_2(k, p)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Para o lado direito da equação de BS, temos:

$$\begin{aligned}
 RHS &= \frac{i}{(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon} i \frac{\not{p}/2 + \not{k} + m_f}{(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon} \times \\
 &\int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \left(-i \lambda_S \lambda_F \frac{\not{p} - \not{k} - \not{k}'}{(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon} \right) [O_1(k')\phi_1(k', p) + O_2(k')\phi_2(k', p)]U(p, s)
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Multiplicando por $O_1(k)$ e calculando o traço, temos:

$$\begin{aligned}
 RHS_{O_1(k)} &= \frac{i}{(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon} \frac{i(-i \lambda_S \lambda_F)}{(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon]} \times \\
 &Tr \left[(\not{p}/2 + \not{k} + m_f)(\not{p} - \not{k} - \not{k}') \left(\phi_1(k', p) + \frac{\not{k}'}{M}\phi_2(k', p) \right) \frac{\not{p} + M}{2M} \right],
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

onde o traço definido acima é dado por

$$\begin{aligned}
 & 2 \phi_1 \left[\frac{m_f}{M} (M^2 - k \cdot p - k' \cdot p) + \frac{M^2}{2} - k^2 + \frac{k \cdot p}{2} - k \cdot k' - \frac{p \cdot k'}{2} \right] \\
 & + \phi_2 \left[\frac{2m_f}{M} (p \cdot k' - k'^2 - k' \cdot k) + \frac{2}{M^2} [2(k \cdot p)(k' \cdot p) - k'^2(k \cdot p) - k^2(k' \cdot p)] \right. \\
 & \left. - 3(k \cdot k') - k'^2 + (k' \cdot p) \right]
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Multiplicando por $O_2(k)$ e calculando o traço, temos:

$$\begin{aligned}
 RHS_{O_2(k)} &= \frac{i}{(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon} \frac{i(-i \lambda_S \lambda_F)}{(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon]} \times \\
 & Tr \left[(\not{p}/2 + \not{k} + m_f)(\not{p} - \not{k} - \not{k}') \left(\phi_1(k', p) \frac{\not{k}}{M} + \frac{k \cdot k'}{M^2} \phi_2(k', p) \right) \frac{\not{p} + M}{2M} \right],
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

onde o traço da expressão acima :

$$\begin{aligned}
 & \phi_1 \left\{ \frac{2k \cdot p}{M^2} \left(\frac{M^2}{2} - k \cdot p - k^2 - p \cdot k' - k'^2 \right) + \frac{2m_f}{M} (p \cdot k - k^2 - k' \cdot k) + 3k^2 \right. \\
 & \left. + k \cdot k' - \frac{2k^2(k' \cdot p)}{M^2} \right\} \\
 & + \phi_2 \left\{ \frac{k^2}{M^2} [3p \cdot k' - 2k \cdot k' - 2k'^2] - \frac{2p \cdot k}{M^2} \left[k \cdot k' + \frac{k'^2}{2} \right] + k \cdot k' \right. \\
 & \left. + \frac{2m_f}{M^3} [2(k \cdot p)(k' \cdot p) - k'^2(k \cdot p) - k^2(k' \cdot p) - M^2(k \cdot k')] \right\}
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

A partir das equações escalares obtidas, é possível reescrever o sistema de equações em termos das componentes da amplitude de BS:

$$\begin{aligned}
 \phi_i(k, p) &= \frac{i}{(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon} \frac{i(-i \lambda_S \lambda_F)}{(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon]} \times \\
 & \sum_{j=1,2} C_{ij}^{(1)}(k, k', p) \phi_j(k', p),
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

onde definimos os coeficientes $C_{ij}^{(1)}(k, k', p)$ como

$$\begin{aligned}
 C_{1j}^{(1)}(k, k', p) &= \frac{M^2 k^2 \mathcal{T}_{1j} - (k \cdot p) \mathcal{T}_{2j}}{2 k^2 M^2 - (k \cdot p)^2}, \\
 C_{2j}^{(1)}(k, k', p) &= -\frac{M^2 (k \cdot p) \mathcal{T}_{1j} - M^2 \mathcal{T}_{2j}}{2 k^2 M^2 - (k \cdot p)^2},
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

com

$$\mathcal{T}_{ij}(k, k', p) = \text{Tr} \left[O_i(k) (\not{p}_f + m_f) \Gamma^v O_j(k') \frac{(\not{p} + M)}{2M} \right] \quad (3.18)$$

e $\Gamma^v = (\not{p} - \not{k} - \not{k}')$.

Dessa forma, a partir da Equação de BS para o estado ligado férmion-bóson no calibre de Feynman, Eq. (3.2), obtivemos um sistema de equações integrais escalares acopladas para as componentes da amplitude de BS.

3.1.1 Integração quadridimensional

Nessa seção iremos resolver a integração no loop de momento. A estratégia adotada é escrever as componentes da amplitude de BS com a representação integral de Nakanishi. Conseqüentemente, conheceremos a estrutura analítica do Kernel das equações integrais, possibilitando que saibamos a localização dos polos e, com isso, será possível realizar a integração quadridimensional utilizando o teorema de Cauchy.

Utilizando a Representação Integral de Nakanishi, as componentes da amplitude de BS são dadas por:

$$\phi_i(k, p) = \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \frac{g_i(\gamma', z')}{[k^2 + p \cdot k z' - \kappa^2 - \gamma' + i\epsilon]^3}, \quad (3.19)$$

onde $\kappa^2 = \bar{m}^2 - \frac{M^2}{4}$ e $\bar{m} = (m_f + m_s)/2$. Substituindo a Eq. (3.19) em (3.16), temos:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \frac{g_i(\gamma', z')}{[k^2 + z' p \cdot k - \kappa^2 - \gamma' + i\epsilon]^3} = \frac{i\lambda_S \lambda_F}{(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon} \\ & \times \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \sum_{j=1,2} C_{ij}^{(1)}(k, k', p) \frac{g_j(\gamma', z')}{[(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon]} \frac{1}{[k'^2 + z' p \cdot k' - \kappa^2 - \gamma' + i\epsilon]^3} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ficamos com uma integral quadridimensional no último termo do lado direito da equação. Para resolver esta integral, utilizamos a parametrização de Feynman:

$$\frac{1}{[AB]^n} = n \int_0^1 dv \frac{n^{n-1}}{[A + v(B - A)]^{n+1}}.$$

A integral de interesse é:

$$I_{ij}^{(1)} = \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \sum_{j=1,2} C_{ij}^{(1)}(k, k', p) \underbrace{\frac{1}{[(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon]}_A} \underbrace{\frac{g_j(\gamma', z')}{[k'^2 + p \cdot k' z' - \kappa^2 - \gamma' + i\epsilon]^3}}_B \quad (3.21)$$

Devido ao fato dos coeficientes $C_{ij}^{(1)}(k, k', p)$ não terem dependência em k' no denominador, não os utilizaremos na parametrização de Feynman, onde neste caso, $n = 3$. Portanto, temos:

$$I_{ij}^{(1)} = \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \int_0^1 \frac{C_{ij}^{(1)}(k, k', p) 3 v^2 dv}{[k'^2 - 2k' \cdot k + k^2 - \mu^2 + v(k' \cdot p z' - \kappa^2 - \gamma' + 2k' \cdot k - k^2 + \mu^2) + i\epsilon]^4} \quad (3.22)$$

Organizando os termos de forma mais conveniente, temos:

$$I_{ij}^{(1)} = \int_0^1 3 v^2 dv \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{C_{ij}^{(1)}(k, k', p)}{[k'^2 + k' \cdot (z' v p - 2(1 - v)k) + \mathcal{F}^{(1)}(k, p, \gamma') + i\epsilon]^4}, \quad (3.23)$$

onde

$$\mathcal{F}^{(1)}(k, p, \gamma') = (1 - v)(k^2 - \mu^2) - v(\gamma' + \kappa^2). \quad (3.24)$$

Para retirar o termo linear do quadrimomento do denominador, faremos a seguinte transformação de variáveis:

$$k' = \tilde{k} - \frac{z' v p - 2(1 - v)k}{2}. \quad (3.25)$$

Aplicando a mudança de variáveis, Eq. (3.25), na Eq. (3.23), temos:

$$I_{ij}^{(1)} = \int_0^1 3 v^2 dv \int \frac{d^4 \tilde{k}}{(2\pi)^4} \sum_{j=1,2} \frac{\tilde{C}_{ij}^{(1)}(k, \tilde{k}, p)}{[\tilde{k}^2 + f^{(1)}(k, p, \gamma', z') + i\epsilon]^4}, \quad (3.26)$$

onde

$$f^{(1)}(k, p, \gamma', z', v) = v(1 - v)(k^2 + k \cdot p z') - v \left(\kappa^2 + \frac{M^2}{4} z'^2 v + \gamma' \right) - (1 - v)\mu^2. \quad (3.27)$$

Para calcular a integral, iremos expandir os coeficientes $\tilde{C}_{ij}^{(1)}(k, \tilde{k}, p)$ em potências de \tilde{k} .

$$\tilde{C}_{ij}^{(1)}(k, \tilde{k}, p) = c_{ij}^{(0)}(k, p) + c_{ij}^{(1p)}(k, p) p \cdot \tilde{k} + c_{ij}^{(1k)}(k, p) k \cdot \tilde{k} + c_{ij}^{(2)}(k, p) \tilde{k}^2 \quad (3.28)$$

A integral quadridimensional nos termos lineares em \tilde{k} é zero. Assim, a integral será

composta por dois termos:

$$I_{ij}^{(1)} = \int_0^1 3v^2 dv \int \frac{d^4 \tilde{k}}{(2\pi)^4} \sum_{j=1,2} \frac{c_{ij}^{(0)}(k,p) + c_{ij}^{(2)}(k,p) \tilde{k}^2}{[\tilde{k}^2 + f^{(1)}(k,p,\gamma',z') + i\epsilon]^4}, \quad (3.29)$$

A seguir, apresentaremos o cálculo das integrais quadridimensionais separadamente.

• **Para $\mathcal{I}_0^{(1)}$**

$$\mathcal{I}_0^{(1)} = \int \frac{d^4 \tilde{k}}{(2\pi)^4} \frac{1}{[\tilde{k}^2 + v(1-v)(k^2 + k \cdot pz') - v \left(\kappa^2 + \frac{M^2}{4} z'^2 v + \gamma' \right) - (1-v)\mu^2 + i\epsilon]^4} \quad (3.30)$$

Essa integral é do tipo

$$I_0 = \int d^4 k \frac{1}{(k^2 + a^2 + i\epsilon)^n}, \quad (3.31)$$

onde a não depende de k . Note que o quadrimomento $k^2 = -(k^0)^2 + \vec{k}^2$. Isso significa que há um polo, o que dificulta essa integração. Uma maneira de contornar essa dificuldade é realizar rotação de Wick, que leva essa integral para o espaço Euclideano. Para isso, façamos:

$$k^0 \rightarrow i k_E^4, \quad \vec{k} \rightarrow \vec{k}_E, \quad d^4 k \rightarrow i d^4 k_E \quad (3.32)$$

$$I_0 = i \int d^4 k_E \frac{1}{\left((k_E^0)^2 + \vec{k}_E^2 + a^2 \right)^n} = i \int d^4 k_E \frac{1}{(k_E^2 + a^2)^n} \quad (3.33)$$

Utilizando coordenadas hiperesféricas, temos

$$d^4 k_E = dk_E^1 dk_E^2 dk_E^3 dk_E^4 = \rho^3 \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 d\rho d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 \quad (3.34)$$

Nesse sistema de coordenadas, a integral torna-se:

$$\begin{aligned} I_0 &= i \int d^4 k_E \frac{1}{(k_E^2 + a^2)^n} = i \int_0^\pi d\varphi_1 \sin^2 \varphi_1 \int_0^\pi d\varphi_2 \sin \varphi_2 \int_0^{2\pi} d\varphi_3 \int_0^\infty \frac{\rho^3 d\rho}{(\rho^2 + a^2)^n} \\ &= i \frac{\pi}{2} 2 \cdot 2 \pi \frac{1}{a^{2n-4}} \frac{1}{2(n-1)(n-2)} \\ &= i \pi^2 \frac{1}{a^{2n-4}} \frac{1}{(n-1)(n-2)} \end{aligned} \quad (3.35)$$

• **Para $\mathcal{I}_2^{(1)}$**

$$\mathcal{I}_2^{(1)} = \int \frac{d^4 \tilde{k}}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{k}^2}{[\tilde{k}^2 + v(1-v)(k^2 + k \cdot pz') - v \left(\kappa^2 + \frac{M^2}{4} z'^2 v + \gamma' \right) - (1-v)\mu^2 + i\epsilon]^4} \quad (3.36)$$

Essa integral é do tipo

$$I_2 = \int d^4k \frac{k^2}{(k^2 + a^2 + i\epsilon)^n} \quad (3.37)$$

onde a não depende de k . Após a rotação de Wick e com a utilização de coordenadas hiperesféricas, temos:

$$\begin{aligned} I_2 &= i \int_0^\pi d\varphi_1 \sin^2 \varphi_1 \int_0^\pi d\varphi_2 \sin \varphi_2 \int_0^{2\pi} d\varphi_3 \int_0^\infty \frac{\rho^5 d\rho}{(\rho^2 + a^2)^n} \\ &= i \frac{\pi}{2} 2 \times 2\pi \frac{a^6 (a^2)^{-n} \Gamma(n-3)}{\Gamma(n)} \\ &= 2i\pi^2 \frac{1}{a^{2n-6}} \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Combinando essas expressões, podemos escrever $I_{ij}^{(1)}$ como:

$$I_{ij}^{(1)} = \frac{i}{32\pi^2} \int_0^1 \frac{v^2 dv}{(f^{(1)}(k, p, \gamma', z', v) + i\epsilon)^2} \left(c_{ij}^{(0)}(k, p) + 2 f^{(1)}(k, p, \gamma', z', v) c_{ij}^{(2)}(k, p) \right). \quad (3.39)$$

Após a integração em d^4k , a equação de BS torna-se

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \frac{g_i(\gamma', z')}{[k^2 + z' p \cdot k - \kappa^2 - \gamma' + i\epsilon]^3} = \frac{i}{(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon} \frac{i(-i \lambda_S \lambda_F)}{(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon} \times \\ &\int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \int_0^1 v^2 dv \frac{i \pi^2}{[v(1-v)(k^2 + k \cdot pz') - v \left(\kappa^2 + \frac{M^2}{4} z'^2 v + \gamma' \right) - (1-v)\mu^2 + i\epsilon]^2} \times \\ &\sum_{j=1,2} g_j(\gamma', z') \left(\frac{1}{2} c_{ij}^{(0)}(k, p) + c_{ij}^{(2)}(k, p) f^{(1)}(k, p, \gamma', z', v) \right), \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde

$$f^{(1)}(k, p, \gamma', z', v) = v(1-v)(k^2 + k \cdot pz') - v \left(\kappa^2 + \frac{M^2}{4} z'^2 v + \gamma' \right) - (1-v)\mu^2. \quad (3.41)$$

3.1.2 Projeção na frente de luz

Nessa seção faremos a projeção da Equação de BS na frente de luz. Como discutido no capítulo 2, a projeção pode ser obtida realizando a integral na componente k^- do momento. Para isso, utilizaremos as coordenadas do cone de luz, discutido na sessão 2.4. Adicionalmente, ao longo de nosso trabalho consideraremos o referencial do centro de massa, isto é $p^\mu = (M, 0, 0, 0)$.

Definindo o momento transverso $|\vec{k}_\perp|^2 = \gamma$ e a componente $k^+ = -z\frac{M}{2}$, os produtos escalares nas coordenadas da frente de luz são:

$$\begin{aligned} k^2 &= -z\frac{M}{2}k^- - \gamma, \\ k \cdot p &= \frac{M}{2} \left(-z\frac{M}{2} + k^- \right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Inicialmente, faremos a projeção na frente de luz do lado esquerdo da Equação de Bethe-Salpeter.

$$\mathcal{P}_i^{(1)}(\gamma, z) = \int \frac{dk^-}{2\pi} \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \frac{g_i(\gamma', z')}{[k^2 + p \cdot kz' - \kappa^2 - \gamma' + i\epsilon]^3}. \quad (3.43)$$

Substituindo as Eqs. (3.42) no denominador da Eq. (3.43), temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{LHS} &= [k^2 + p \cdot kz' - \kappa^2 - \gamma' + i\epsilon]^3 \\ &= \left[-z\frac{M}{2}k^- - \gamma + z'\frac{M}{2} \left(-z\frac{M}{2} + k^- \right) - \kappa^2 - \gamma' + i\epsilon \right]^3 \\ &= \left[k^- \frac{M}{2}(z' - z) - z z' \frac{M^2}{4} - \kappa^2 - \gamma - \gamma' + i\epsilon \right]^3. \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\mathcal{P}_i^{(1)}(\gamma, z) = \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \int \frac{dk^-}{2\pi} \frac{g_i(\gamma', z')}{[k^- M/2(z' - z) - (z z' M^2/4 + \kappa^2 + \gamma + \gamma') + i\epsilon]^3}. \quad (3.45)$$

Note que a integral em k^- da Eq. (3.45) é divergente no ponto $z' = z$. Para calculá-la, iremos utilizar o resultado obtido por Yan em (YAN S.J. CHANG, 1973).

$$\int \frac{dk^-}{2\pi} \frac{1}{[x k^- - y + i\epsilon]^3} = -\frac{i\delta(x)}{2y^2} \quad (3.46)$$

Então:

$$\mathcal{P}_i^{(1)}(\gamma, z) = -i \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \frac{g_i(\gamma', z') \delta\left(\frac{M}{2}(z' - z)\right)}{2[z z' M^2/4 + \kappa^2 + \gamma + \gamma']^2}. \quad (3.47)$$

Para resolver essa integral, utilizaremos a seguinte propriedade da delta de Dirac

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i}}, \quad (3.48)$$

onde x_i são os zeros da função $f(x)$. Assim:

$$\delta\left(\frac{M}{2}(z' - z)\right) = \frac{2}{M} \delta(z' - z)$$

Portanto:

$$\mathcal{P}_i^{(1)}(\gamma, z) = -\frac{i}{M} \int_0^\infty d\gamma' \frac{g_i(\gamma', z)}{[\gamma + \gamma' + \kappa^2 + z^2 M^2/4]^2} \quad (3.49)$$

Para calcular a integral em k^- do lado direito da equação (3.40) usaremos o teorema de Cauchy. Para isso, obteremos os polos:

Polo do propagador escalar

Substituindo as componentes do momento na frente de luz, podemos escrever o termo relativo ao propagador da partícula escalar como

$$\begin{aligned} \frac{i}{(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon} &= \frac{i}{(M^2/4 - p \cdot k + k^2) - m_s^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{i}{\frac{M^2}{4}(1+z) - \frac{Mk^-}{2}(1+z) - \gamma - m_s^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Dessa forma, podemos identificar a posição do primeiro polo a partir da equação a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{M^2}{4}(1+z) - \frac{Mk_s^-}{2}(1+z) - \gamma - m_s^2 + i\epsilon &= 0 \\ k_s^- &= \frac{M}{2} - \frac{2}{M(1+z)}(\gamma + m_s^2) + i\epsilon \end{aligned} \quad (3.51)$$

Note que: $(1-z) \geq 0$ e $M > 0$, temos que o polo k_1^- está acima do eixo real. Portanto, definimos:

$$k_u^- = \frac{M}{2} - \frac{2}{M(1+z)}(\gamma + m_s^2). \quad (3.52)$$

Com isso, podemos reescrever o propagador escalar como

$$\frac{i}{(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon} = \frac{-2}{M} \frac{1}{(1+z)} \frac{i}{k^- - k_u^- - i\epsilon} \quad (3.53)$$

Polo do propagador fermiônico

Substituindo as componentes do momento na frente de luz, podemos escrever o denominador relativo ao propagador da partícula fermiônica como

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon} &= \frac{1}{M^2/4 + p \cdot k + k^2 - m_f^2 + i\epsilon} \\
 &= \frac{1}{M^2/4 + \frac{M}{2}(-z\frac{M}{2} + k^-) - z\frac{M}{2}k^- - \gamma - m_f^2 + i\epsilon} \\
 &= \frac{1}{\frac{M^2}{4}(1-z) + \frac{Mk^-}{2}(1-z) - \gamma - m_f^2 + i\epsilon} \quad (3.54)
 \end{aligned}$$

Para encontrar a localização do segundo polo basta resolver a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
 \frac{M^2}{4}(1-z) + \frac{Mk_f^-}{2}(1-z) - \gamma - m_f^2 + i\epsilon &= 0 \\
 k_f^- &= -\frac{M}{2} + \frac{2}{M(1-z)}(\gamma + m_f^2) - i\epsilon \quad (3.55)
 \end{aligned}$$

Analogamente ao primeiro polo, temos que $(1+z) \geq 0$, portanto o polo k_2^- está abaixo do eixo real. Definimos:

$$k_d^- = -\frac{M}{2} + \frac{2}{M(1-z)}(\gamma + m_f^2). \quad (3.56)$$

Assim, podemos reescrever o denominador do propagador fermiônico como:

$$\frac{1}{(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon} = \frac{2}{M} \frac{1}{(1-z)} \frac{1}{k^- - k_d^- + i\epsilon}. \quad (3.57)$$

Polo Kernel de interação

Substituindo as componentes do momento na frente de luz, podemos escrever o denominador relativo ao Kernel de interação do sistema como

$$\begin{aligned}
 &\frac{i\pi^2}{[v(1-v)(k^2 + k \cdot pz') - v(\kappa^2 + \frac{M^2}{4}z'^2v + \gamma') - (1-v)\mu^2 + i\epsilon]^2} = \\
 &\frac{i\pi^2}{[v(1-v)(k^2 + k \cdot pz') - v(\kappa^2 + \frac{M^2}{4}z'^2v + \gamma') - (1-v)\mu^2 + i\epsilon]^2} \\
 &= \frac{i\pi^2}{[v(1-v)(\frac{Mk^-}{2}(z'-z) - \gamma - \frac{M^2}{4}zz') - v(\kappa^2 + \frac{M^2}{4}z'^2v + \gamma') - (1-v)\mu^2 + i\epsilon]^2} \quad (3.58)
 \end{aligned}$$

Para encontrar a localização do terceiro polo basta resolver a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
 & \left[v(1-v) \left(\frac{M k_3^-}{2} (z' - z) - \gamma - \frac{M^2}{4} z z' \right) - v \left(\kappa^2 + \frac{M^2}{4} z'^2 v + \gamma' \right) - (1-v)\mu^2 + i\epsilon \right] = 0 \\
 & \left[\frac{M k_3^-}{2} v(1-v)(z' - z) - v(1-v) \left(\gamma + \frac{M^2}{4} z z' \right) - v \left(\kappa^2 + \frac{M^2}{4} z'^2 v + \gamma' \right) - (1-v)\mu^2 + i\epsilon \right] = 0
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Definimos:

$$\begin{aligned}
 k_D &= \frac{M}{2} v(1-v)(z' - z), \\
 l_D^{(1)} &= -v(1-v) \left(\gamma + \frac{M^2}{4} z z' \right) - v \left(\kappa^2 + \frac{M^2}{4} z'^2 v + \gamma' \right) - (1-v)\mu^2.
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Utilizando os resultados acima, podemos escrever a Eq. (3.40) como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{ij}^{(1)}(\gamma, z, \gamma', z') &= \frac{i M^3}{4} \frac{16}{M^4} \int_0^1 v^2 dv \int \frac{dk^-}{2\pi} \frac{1}{(1-z)} \frac{1}{(1+z)} \frac{1}{[k^- - k_d^- + i\epsilon]} \times \\
 & \frac{1}{[k^- - k_u^- - i\epsilon]} \frac{1}{[k_D k^- + l_D^{(1)} + i\epsilon]^2} \left(\frac{c_{ij}^{(0)}(k, p) + 2 f^{(1)}(k, p, \gamma', z') c_{ij}^{(2)}(k, p)}{(k^-)^2 + z M k^- + M^2 z^2/4 + 4\gamma} \right),
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Para $z' > z$ o terceiro polo está abaixo do eixo real e, por isso, escolheremos fechar o contorno por cima. Para $z > z'$ o terceiro polo está acima do eixo real e, por isso, escolheremos fechar o contorno por baixo. Combinando ambas possibilidades, temos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{ij}^{(1)}(\gamma, z, \gamma', z') &= -\frac{4}{M} \frac{1}{(1-z^2)} \int_0^1 v^2 dv \times \\
 & \left(\frac{\theta(z' - z)}{[k_u^- - k_d^-]} \frac{1}{[k_D k_u^- + l_D^{(1)}]^2} \frac{c_{ij}^{(0)}(k, p) + 2 f^{(1)}(k, p, \gamma', z') c_{ij}^{(2)}(k, p)}{(k_u^-)^2 + z M k_u^- + M^2 z^2/4 + 4\gamma} \right. \\
 & \left. - \frac{\theta(z - z')}{[k_d^- - k_u^-]} \frac{1}{[k_D k_d^- + l_D^{(1)}]^2} \frac{c_{ij}^{(0)}(k, p) + 2 f^{(1)}(k, p, \gamma', z') c_{ij}^{(2)}(k, p)}{(k_d^-)^2 + z M k_d^- + M^2 z^2/4 + 4\gamma} \right)
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

Podemos simplificar essa equação, introduzindo as seguintes definições:

$$k_u^- - k_d^- = -\frac{4}{M(1-z^2)} D_0(\gamma, z), \tag{3.63}$$

onde

$$\begin{aligned}
 D_0(\gamma, z) &= \gamma + (1 - z^2)\kappa^2 + (\Delta - z\bar{m})^2 \\
 \Delta &= \frac{(m_s - m_f)}{2} \\
 \bar{m} &= \frac{m_f + m_s}{2} \\
 \kappa^2 &= \bar{m}^2 - \frac{M^2}{4}
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

$$k_D k_u^- + l_D^{(1)} = -\frac{1}{1+z} D_u^{(1)}(z', z, m_s^2, m_f^2), \tag{3.65}$$

onde

$$\begin{aligned}
 D_u^{(1)}(z', z, m_s^2, m_f^2) &= v(1-v)(z' - z) \left[\gamma - (1 - z^2) \frac{M^2}{4} + m_s^2 \right] + (1+z) \left[v(1-v) \left(\gamma + z^2 \frac{M^2}{4} \right) \right. \\
 &\quad \left. + v(\gamma' + \kappa^2) + v^2 z'^2 \frac{M^2}{4} + (1-v)\mu^2 \right]
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

$$k_D k_d^- + l_D^{(1)} = -\frac{1}{1-z} D_d^{(1)}(z', z, m_f^2, m_s^2), \tag{3.67}$$

onde

$$\begin{aligned}
 D_d^{(1)}(z', z, m_f^2, m_s^2) &= D_u^{(1)}(-z', -z, m_f^2, m_s^2) = v(1-v)(z - z') \left[\gamma - (1 - z^2) \frac{M^2}{4} + m_f^2 \right] \\
 &\quad + (1-z) \left[v(1-v) \left(\gamma + z^2 \frac{M^2}{4} \right) + v(\gamma' + \kappa^2) + v^2 z'^2 \frac{M^2}{4} + (1-v)\mu^2 \right].
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

Utilizando as definições acima, podemos escrever a equação de BS como um sistema acoplado de equações integrais escalares em termos das funções peso de Nakanishi:

$$\int_0^\infty d\gamma' \frac{g_i(\gamma', z)}{[\gamma + \gamma' + \kappa^2 + z^2 M^2/4]^2} = -\frac{\lambda_S \lambda_F}{16 \pi^2} \sum_{j=1,2} \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \mathcal{P}_{ij}^{(1)}(\gamma, z, \gamma', z') g_j(\gamma', z'),$$

onde

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{ij}^{(1)}(\gamma, z, \gamma', z') &= \int_0^1 v^2 dv \times \\
 &\left((1+z)^2 \frac{\theta(z'-z)}{D_0(\gamma, z)} \frac{1}{D_u(z', z, m_s^2)^2} \frac{c_{ij}^{(0)}(k_u^-) + 2f^{(1)}(k_u^-, \gamma', z') c_{ij}^{(2)}(k_u^-)}{(k_u^-)^2 + zMk_u^- + M^2z^2/4 + 4\gamma} \right. \\
 &\left. + \frac{(1-z)^2 \theta(z-z')}{D_0(\gamma, z)} \frac{1}{D_d(z', z, m_f^2)^2} \frac{c_{ij}^{(0)}(k_d^-) + 2f^{(1)}(k_d^-, \gamma', z') c_{ij}^{(2)}(k_d^-)}{(k_d^-)^2 + zMk_d^- + M^2z^2/4 + 4\gamma} \right).
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

Esse sistema de equações integrais acopladas é o mesmo encontrado em (NOGUEIRA, 2019). Os autores resolveram esse sistema numericamente e analisaram a formação do estado ligado para diferentes acoplamentos. No próximo capítulo mostraremos a extensão desse modelo para outros calibres covariantes.

4 Estado ligado férmion-bóson: calibre covariante arbitrário

Nesse capítulo iremos generalizar o modelo proposto por (NOGUEIRA, 2019). A ideia é resolver a Equação de BS do estado ligado $(1/2)^+$, constituído por um sistema férmion-bóson com interação vetorial, na aproximação de escada, para um calibre covariante arbitrário.

A equação de BS de nosso sistema é:

$$\Phi(k, p) = G_0(p/2 - k) S(p/2 + k) \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} iK(k, k', p) \Phi(k', p), \quad (4.1)$$

onde $\Phi(k, p)$ é a amplitude de BS, $G_0(q)$ é o propagador escalar, $S(q)$ é o propagador fermiônico e $iK(k, k', p)$ é o kernel de interação em um calibre arbitrário, dados por:

$$G_0(p/2 - k) = \frac{i}{(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon}, \quad (4.2)$$

$$S(p/2 + k) = i \frac{\not{p}/2 + \not{k} + m_f}{(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon}, \quad (4.3)$$

$$iK(k, k', p) = -i \lambda_S \lambda_F \gamma^\mu \frac{(p - k - k')^\nu}{(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - \frac{(1 - \zeta)(k - k')_\mu (k' - k)_\nu}{(k - k')^2 - \zeta \mu^2 + i\epsilon} \right). \quad (4.4)$$

É importante mencionar que na expressão acima foi utilizado o propagador do campo vetorial em um calibre covariante ζ . Essa informação aparece no Kernel de interação, dado pela Eq. (4.4). A utilização desse propagador propiciará generalização para um calibre covariante qualquer. Note que, para $\zeta = 1$ temos o calibre de Feynman e obtemos exatamente o caso discutido no capítulo 3. Para $\zeta = 0$ temos o calibre de Landau. Os outros calibres são definidos entre o de Feynman e o de Landau.

A amplitude de BS de um estado ligado $(1/2)^+$ será decomposta em uma base de

matrizes de Dirac consistente com o spin total do sistema:

$$\Phi(k, p) = [O_1(k)\phi_1(k, p) + O_2(k)\phi_2(k, p)]U(p, s), \quad (4.5)$$

onde $O_1(k) = \hat{1}$, $O_2(k) = \frac{\not{k}}{M}$ e $U(p, s) = \frac{\not{p} + M}{2M}$. Substituindo as Eqs (4.2), (4.3) e (4.4) em (4.1), temos:

$$\begin{aligned} [O_1(k)\phi_1(k, p) + O_2(k)\phi_2(k, p)]U(p, s) &= \frac{i}{(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon} i \frac{\not{p}/2 + \not{k} + m_f}{(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon} \times \\ &\int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \left(-i \lambda_S \lambda_F \gamma^\mu \frac{(p - k - k')^\nu}{(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - \frac{(1 - \zeta)(k' - k)_\mu (k - k')_\nu}{(k - k')^2 - \zeta\mu^2 + i\epsilon} \right) \right) \times \\ &[O_1(k')\phi_1(k', p) + O_2(k')\phi_2(k', p)]U(p, s) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Note que a Eq. (4.6) se assemelha a Eq. (3.7), diferenciando apenas pelo fator proporcional a $(1 - \zeta)$ no Kernel de interação. Portanto, iremos aproveitar os resultados obtidos tanto para o lado esquerdo da Eq. (3.7) como para os cálculos do calibre de Feynman para o lado direito. A amplitude de BS pode ser decomposta como:

$$\Phi(k, p) = \left[\hat{1}\phi_1(k, p) + \frac{\not{k}}{M}\phi_2(k, p) \right] \frac{(\not{p} + M)}{2M} \quad (4.7)$$

Multiplicando por $O_1(k)$ e calculando o Traço:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_1(k, p) &= Tr \left[\phi_1 \frac{(\not{p} + M)}{2M} + \phi_2 \frac{\not{k}}{M} \frac{\not{p} + M}{2M} \right] \\ &= 2\phi_1(k, p) + \frac{2(k \cdot p)}{M^2} \phi_2(k, p) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Multiplicando por $O_2(k)$, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_2(k, p) &= Tr \left[\frac{\not{k}}{M} \phi_1(k, p) \frac{(\not{p} + M)}{2M} + \frac{k^2}{M^2} \phi_2(k, p) \frac{(\not{p} + M)}{2M} \right] \\ &= 2 \frac{k \cdot p}{M^2} \phi_1(k, p) + \frac{2k^2}{M^2} \phi_2(k, p) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Iremos calcular o traço do lado direito da Equação de Bethe-Salpeter. Para isso, definiremos a seguinte quantidade:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(k, k', p) &= \frac{i}{(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon} i \frac{\not{p}/2 + \not{k} + m_f}{(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \times \\ &\left(-i \lambda_S \lambda_F \gamma^\mu \frac{(p - k - k')^\nu}{(k' - k)^2 - \mu^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - \frac{(1 - \xi)(k' - k)_\mu (k' - k)_\nu}{(k' - k)^2 - \xi\mu^2 + i\epsilon} \right) \right) \times \\ &[O_1(k')\phi_1(k', p) + O_2(k')\phi_2(k', p)]U(p, s) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Reescrevendo, multiplicando por $O_1(k)$ e calculando o traço (olhar Apêndice B), temos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_1(k, k', p) &= Tr[O_1(k) \mathcal{P}(k, k', p)] \\
 &= \frac{i}{(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon} \frac{i(-i \lambda_S \lambda_F)}{(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k' - k)^2 - \mu^2 + i\epsilon]} \times \\
 &\quad Tr \left[(\not{p}/2 + \not{k} + m_f) \gamma^\mu (p - k - k')^\nu \left(g_{\mu\nu} - \frac{(1 - \xi)(k' - k)_\mu (k' - k)_\nu}{(k' - k)^2 - \xi\mu^2 + i\epsilon} \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \left(\phi_1(k', p) + \frac{\not{k}'}{M} \phi_2(k', p) \right) \frac{\not{p} + M}{2M} \right] \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

Multiplicando por $O_2(k)$ e calculando o traço, temos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_2(k, k', p) &= Tr[O_2(k) \mathcal{P}(k, k', p)] \\
 &= \frac{i}{(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon} \frac{i(-i \lambda_S \lambda_F)}{(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k' - k)^2 - \mu^2 + i\epsilon]} \times \\
 &\quad Tr \left[\frac{\not{k}}{M} (\not{p}/2 + \not{k} + m_f) \gamma^\mu (p - k - k')^\nu \left(g_{\mu\nu} - \frac{(1 - \xi)(k' - k)_\mu (k' - k)_\nu}{(k' - k)^2 - \xi\mu^2 + i\epsilon} \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \left(\phi_1(k', p) + \frac{\not{k}'}{M} \phi_2(k', p) \right) \frac{\not{p} + M}{2M} \right] \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

Assim, o sistema acoplado de equações integrais para as componentes da amplitude de BS se torna:

$$\begin{aligned}
 \phi_i(k, p) &= \frac{i}{(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon} \frac{i(-i \lambda_S \lambda_F)}{(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k' - k)^2 - \mu^2 + i\epsilon]} \times \\
 &\quad \sum_{j=1,2} \frac{M^2}{2} \frac{C_{ij}(k, k', p) \phi_j(k', p)}{k^2 M^2 - (k \cdot p)^2}, \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

onde

$$C_{ij}(k, k', p) = C_{ij}^{(1)}(k, k', p) - \frac{(1 - \xi)}{(k' - k)^2 - \xi\mu^2 + i\epsilon} h(k, k', p) C_{ij}^{(2)}(k, k', p) \quad (4.14)$$

$$C_{1j}^{(\iota)}(k, k', p) = k^2 \mathcal{T}_{1j}^{(\iota)} - (k \cdot p) \mathcal{T}_{2j}^{(\iota)} \quad (4.15)$$

$$C_{2j}^{(\iota)}(k, k', p) = -(k \cdot p) \mathcal{T}_{1j}^{(\iota)} + M^2 \mathcal{T}_{2j}^{(\iota)} \quad (4.16)$$

$$\mathcal{T}_{ij}^{(\iota)} = Tr \left[O_i(k) (\not{p}_f + m_f) \Gamma^{(\iota)} O_j(k') \frac{\not{p} + M}{2M} \right]$$

$$\Gamma^{(1)} = \not{p} - \not{k} - \not{k}' \quad , \quad \Gamma^{(2)} = \not{k} - \not{k}' \quad , \quad h(k, k', p) = p \cdot k - k^2 - p \cdot k' + k'^2 \quad (4.17)$$

O próximo objetivo é resolver a integral quadridimensional. É importante mencionar que a representação integral de Nakanishi nos fornece a estrutura analítica em termos dos

momentos externos. Isso será fundamental para podermos realizar essas integrais, que discutiremos em mais detalhe na próxima sessão.

4.1 Integração quadridimensional

Nessa seção iremos resolver a integração no loop de momento. Escrevendo a amplitude de BS usando a Representação Integral de Nakanishi para cada componente da amplitude de Bethe-Salpeter $\phi_i(k, p)$, temos:

$$\phi_i(k, p) = \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^{\infty} d\gamma' \frac{g_i(\gamma', z')}{[k^2 + p \cdot kz' - \kappa^2 - \gamma' + i\epsilon]^3}, \quad (4.18)$$

onde $\kappa^2 = \bar{m}^2 - \frac{M^2}{4}$ e $\bar{m} = (m_f + m_s)/2$. Substituindo a equação (4.18) em (4.13), ficamos com:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^{\infty} d\gamma' \frac{g_i(\gamma', z')}{[k^2 + p \cdot kz' - \kappa^2 - \gamma' + i\epsilon]^3} = \\ & = \frac{M^2}{2} \frac{1}{k^2 M^2 - (k \cdot p)^2} \frac{i}{(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon} \frac{i(-i \lambda_S \lambda_F)}{(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k' - k)^2 - \mu^2 + i\epsilon]} \times \\ & \sum_{j=1,2} C_{ij}(k, k', p) \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^{\infty} d\gamma' \frac{g_j(\gamma', z')}{[k^2 + p \cdot kz' - \kappa^2 - \gamma' + i\epsilon]^3} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Reescrevendo:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^{\infty} d\gamma' \frac{g_i(\gamma', z')}{[k^2 + p \cdot kz' - \kappa^2 - \gamma' + i\epsilon]^3} = \frac{M^2}{2} \frac{1}{k^2 M^2 - (k \cdot p)^2} \times \\ & \frac{i}{(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon} \frac{i(-i \lambda_S \lambda_F)}{(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon} \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^{\infty} d\gamma' \sum_{j=1,2} g_j(\gamma', z') \times \\ & \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} C_{ij}(k, k', p) \frac{1}{[(k' - k)^2 - \mu^2 + i\epsilon]} \frac{1}{[k^2 + p \cdot kz' - \kappa^2 - \gamma' + i\epsilon]^3} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Usando a decomposição de $C_{ij}(k, k', p)$, podemos resolver a integral em duas partes. O resultado para $C_{ij}^{(1)}(k, k', p)$ foi obtido no capítulo anterior conforme abaixo (Eq. (3.39)):

$$I_{ij}^{(1)} = \frac{i}{32\pi^2} \int_0^1 \frac{v^2 dv}{(f^{(1)}(k, p, \gamma', z', v) + i\epsilon)^2} \left(c_{ij}^{(0)}(k, p) + 2 f^{(1)}(k, p, \gamma', z', v) c_{ij}^{(2)}(k, p) \right). \quad (4.21)$$

Faremos os cálculos para $C_{ij}^{(2)}(k, k', p)$ na próxima sessão.

4.1.1 Integral quadridimensional para $C_{ij}^{(2)}(k, k', p)$

Definindo a integral $I_{ij}^{(2)}$, faremos a integração no loop de momento.

$$I_{ij}^{(2)} = \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{p \cdot k - k^2 - p \cdot k' + k'^2}{[(k' - k)^2 - \xi \mu^2 + i\epsilon]} \frac{C_{ij}^{(2)}(k, k', p)}{[(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon]} \frac{1}{[k'^2 + p \cdot k' z' - \kappa^2 - \gamma' + i\epsilon]^3}. \quad (4.22)$$

Utilizando a parametrização de Feynman:

$$\frac{1}{A_1^{\alpha_1} \cdots A_n^{\alpha_n}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_n)} \int_0^1 du_1 \cdots \int_0^1 du_n \frac{\delta(1 - \sum_{k=1}^n u_k) u_1^{\alpha_1-1} \cdots u_n^{\alpha_n-1}}{(\sum_{k=1}^n u_k A_k)^{\sum_{k=1}^n \alpha_k}} \quad (4.23)$$

$$\frac{1}{A^3 B C} = 12 \int_0^1 dv \int_0^{1-v} du \frac{v^2}{(v(A - C) + u(B - C) + C)^5}, \quad (4.24)$$

$$A = k'^2 + p \cdot k' z' - \kappa^2 - \gamma' + i\epsilon,$$

$$B = (k' - k)^2 - \xi \mu^2 + i\epsilon,$$

$$C = (k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon. \quad (4.25)$$

Portanto, temos:

$$I_{ij}^{(2)} = 12 \int_0^1 dv \int_0^{1-v} du \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{v^2 (p \cdot k - k^2 - p \cdot k' + k'^2) C_{ij}^{(2)}(k, k', p)}{[k'^2 + k' \cdot (p z' v - 2(1-v)k) + \mathcal{F}^{(2)}(k, p, \gamma', z', \xi; u, v) + i\epsilon]^5}, \quad (4.26)$$

onde

$$\mathcal{F}^{(2)}(k, p, \gamma', z', \xi; u, v) = v(-k^2 - \kappa^2 - \gamma' + \mu^2) + u \mu^2 (1 - \xi) + k^2 - \mu^2. \quad (4.27)$$

Após a transformação de variáveis $k' = \tilde{k} - \frac{z' v p - 2(1-v)k}{2}$, temos

$$I_{ij}^{(2)} = 12 \int_0^1 dv v^2 \int_0^{1-v} du \int \frac{d^4 \tilde{k}}{(2\pi)^4} \frac{[\tilde{k}^2 + \tilde{k} \cdot \alpha(k, p, z'; v) + \beta(k, p, z'; v)] C_{ij}^{(2)}(k, \tilde{k}, p)}{[\tilde{k}^2 + f^{(2)}(k, p, \gamma', z'; u, v) + i\epsilon]^5}, \quad (4.28)$$

onde

$$f^{(2)}(k, p, \gamma', z'; u, v) = f^{(1)}(k, p, \gamma', z'; v) + \mu^2 (1 - \xi) u, \quad (4.29)$$

$$\alpha(k, p, z'; v) = -(1 + v z') p + 2(1 - v) k, \quad (4.30)$$

$$\beta(k, p, z'; v) = -v(2 - v) k^2 + v(1 - z'(1 - v)) k \cdot p + \frac{M^2}{4} z'^2 v^2 + \frac{M^2}{2} z' v. \quad (4.31)$$

Para calcular a integral, iremos expandir os coeficientes $\tilde{C}_{ij}^{(2)}(k, \tilde{k}, p)$ em potências de \tilde{k} .

$$\begin{aligned} & [\tilde{k}^2 + \tilde{k} \cdot \alpha(k, p, z'; v) + \beta(k, p, z'; v)] C_{ij}^{(2)}(k, \tilde{k}, p) = d_{ij}^{(0)}(k, p) + d_{ij}^{(1)}(k, p) (\tilde{k} \cdot p) + d_{ij}^{(2)}(k, p) \tilde{k}^2 \\ & + d_{ij}^{(3)}(k, p) (\tilde{k} \cdot p) (\tilde{k} \cdot k) + d_{ij}^{(4)}(k, p) \tilde{k}^4 + d_{ij}^{(5)}(k, p) (\tilde{k} \cdot p)^2 + d_{ij}^{(6)}(k, p) (\tilde{k} \cdot k)^2 + d_{ij}^{(7)}(\tilde{k} \cdot k) \end{aligned} \quad (4.32)$$

A integral quadridimensional nos termos lineares em \tilde{k} é zero. Portanto ficamos com:

$$I_{ij}^{(2)} = d_{ij}^{(0)}(k, p) I_1^{(2)} + d_{ij}^{(2)}(k, p) I_2^{(2)} + d_{ij}^{(3)}(k, p) I_3^{(2)} + d_{ij}^{(4)}(k, p) I_4^{(2)} + d_{ij}^{(5)}(k, p) I_5^{(2)} + d_{ij}^{(6)}(k, p) I_6^{(2)}, \quad (4.33)$$

onde

$$\begin{aligned}
 I_1^{(2)} &= \int \frac{d^4 \tilde{k}}{(2\pi)^4} \frac{1}{[\tilde{k}^2 + f^{(2)}(k, p, \gamma', z'; u, v) + i\epsilon]^5}, \\
 I_2^{(2)} &= \int \frac{d^4 \tilde{k}}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{k}^2}{[\tilde{k}^2 + f^{(2)}(k, p, \gamma', z') + i\epsilon]^5}, \\
 I_3^{(2)} &= \int \frac{d^4 \tilde{k}}{(2\pi)^4} \frac{(\tilde{k} \cdot p)(\tilde{k} \cdot k)}{[\tilde{k}^2 + f^{(2)}(k, p, \gamma', z') + i\epsilon]^5}, \\
 I_4^{(2)} &= \int \frac{d^4 \tilde{k}}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{k}^4}{[\tilde{k}^2 + f^{(2)}(k, p, \gamma', z') + i\epsilon]^5}, \\
 I_5^{(2)} &= \int \frac{d^4 \tilde{k}}{(2\pi)^4} \frac{(\tilde{k} \cdot p)^2}{[\tilde{k}^2 + f^{(2)}(k, p, \gamma', z') + i\epsilon]^5}, \\
 I_6^{(2)} &= \int \frac{d^4 \tilde{k}}{(2\pi)^4} \frac{(\tilde{k} \cdot k)^2}{[\tilde{k}^2 + f^{(2)}(k, p, \gamma', z') + i\epsilon]^5}.
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Faremos o cálculo separadamente para cada integral.

• **Para** $I_1^{(2)}$

$$I_1^{(2)} = \int \frac{d^4 \tilde{k}}{(2\pi)^4} \frac{1}{[\tilde{k}^2 + f^{(2)}(k, p, \gamma', z') + i\epsilon]^5} = \frac{i}{192 \pi^2} \frac{1}{(f^{(2)}(k, p, \gamma', z'; u, v) + i\epsilon)^3}$$

• **Para** $I_2^{(2)}$

$$I_2^{(2)} = \int \frac{d^4 \tilde{k}}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{k}^2}{[\tilde{k}^2 + f^{(2)}(k, p, \gamma', z') + i\epsilon]^5} = \frac{i}{192 \pi^2} \frac{1}{(f^{(2)}(k, p, \gamma', z'; u, v) + i\epsilon)^2}$$

• **Para** $I_3^{(2)}$ Essa integral é do tipo

$$I_4 = \int d^4 k \frac{(k \cdot p)(k \cdot q)}{(k^2 + a^2 + i\epsilon)^n}, \tag{4.36}$$

onde a não depende de k . Realizando a rotação de Wick e escrevendo em termos das

componentes do momento, temos:

$$\begin{aligned}
 I_4 &= i \int d^4 k_E \frac{k_E^i p^i k_E^j q^j}{(k_E^2 + a^2 + i\epsilon)^n} \\
 &= i p^i q^j \int d^4 k_E \frac{k_E^i k_E^j}{(k_E^2 + a^2 + i\epsilon)^n} \\
 &= i p^i q^j \frac{\delta^{ij}}{4} \int d^4 k_E \frac{k_E^2}{(k_E^2 + a^2 + i\epsilon)^n} \\
 &= \frac{i\pi^2}{2} \frac{p \cdot q}{a^{2n-6}} \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)}
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

. Assim, $I_3^{(2)}$ pode ser escrito como:

$$I_3^{(2)} = \int \frac{d^4 \tilde{k}}{(2\pi)^4} \frac{(\tilde{k} \cdot p)(\tilde{k} \cdot k)}{[\tilde{k}^2 + f^{(2)}(k, p, \gamma', z') + i\epsilon]^5} = \frac{i}{768 \pi^2} \frac{k \cdot p}{(f^{(2)}(k, p, \gamma', z'; u, v) + i\epsilon)^2} \tag{4.38}$$

• Para $I_4^{(2)}$

Essa integral é do tipo

$$I_4 = \int d^4 k \frac{k^4}{(k^2 + a^2 + i\epsilon)^n}, \tag{4.39}$$

onde a não depende de k . Após a rotação de Wick e utilizando coordenadas hipersféricas, temos

$$\begin{aligned}
 I_4 &= i \int_0^\pi d\varphi_1 \sin^2 \varphi_1 \int_0^\pi d\varphi_2 \sin \varphi_2 \int_0^{2\pi} d\varphi_3 \int_0^\infty \frac{\rho^7 d\rho}{(\rho^2 + a^2)^n} \\
 &= 3 i \pi^2 a^{8-2n} \frac{\Gamma(n-4)}{\Gamma(n)} \\
 &= \frac{3i\pi^2}{a^{2n-8}} \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}.
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Assim, $I_4^{(2)}$ pode ser escrito como:

$$I_4^{(2)} = \int \frac{d^4 \tilde{k}}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{k}^4}{[\tilde{k}^2 + f^{(2)}(k, p, \gamma', z') + i\epsilon]^5} = \frac{i}{128 \pi^2} \frac{1}{(f^{(2)}(k, p, \gamma', z'; u, v) + i\epsilon)}. \tag{4.41}$$

• Para $I_5^{(2)}$

Essa integral é do tipo

$$I_5 = \int d^4k \frac{(k \cdot p)^2}{(k^2 + a^2 + i\epsilon)^n} \quad (4.42)$$

onde a não depende de k . Fazendo a rotação de Wick e utilizando coordenadas hiperesféricas, temos:

$$\begin{aligned} I_5 &= i M^2 \int_0^\pi d\varphi_1 \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1^2 \int_0^\pi d\varphi_2 \sin \varphi_2 \int_0^{2\pi} d\varphi_3 \int_0^\infty \frac{\rho^5 d\rho}{(\rho^2 + a^2)^n} \\ &= i M^2 \pi^2 \frac{a^6 (a^2)^{-n} \Gamma(n-3)}{2 \Gamma(n)} \\ &= \frac{i \pi^2 M^2}{2 a^{2n-6}} \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Podemos escrever $I_5^{(2)}$ como:

$$I_5^{(2)} = \int \frac{d^4\tilde{k}}{(2\pi)^4} \frac{(\tilde{k} \cdot p)^2}{[\tilde{k}^2 + f^{(2)}(k, p, \gamma', z') + i\epsilon]^5} = \frac{i}{768 \pi^2} \frac{M^2}{(f^{(2)}(k, p, \gamma', z'; u, v) + i\epsilon)^2} \quad (4.44)$$

• **Para $I_6^{(2)}$** Essa integral é do tipo

$$I_6 = \int d^4k \frac{k \cdot k}{(k^2 + a^2 + i\epsilon)^n}, \quad (4.45)$$

onde a não depende de k . Após a rotação de Wick e utilizando coordenadas hiperesféricas, temos

$$\begin{aligned} I_6 &= i k^2 \int_0^\pi d\varphi_1 \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1^2 \int_0^\pi d\varphi_2 \sin \varphi_2 \int_0^{2\pi} d\varphi_3 \int_0^\infty \frac{\rho^5 d\rho}{(\rho^2 + a^2)^n} \\ &= i k^2 \pi^2 \frac{a^6 (a^2)^{-n} \Gamma(n-3)}{2 \Gamma(n)} \\ &= \frac{i \pi^2 k^2}{2 a^{2n-6}} \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Podemos escrever $I_6^{(2)}$ como:

$$I_6^{(2)} = \int \frac{d^4\tilde{k}}{(2\pi)^4} \frac{(\tilde{k} \cdot k)^2}{[\tilde{k}^2 + f^{(2)}(k, p, \gamma', z') + i\epsilon]^5} = \frac{i}{768 \pi^2} \frac{k^2}{(f^{(2)}(k, p, \gamma', z'; u, v) + i\epsilon)^2} \quad (4.47)$$

Utilizando os resultados que obtivemos para cada tipo de integral, podemos escrever $I_{ij}^{(2)}$ como:

$$I_{ij}^{(2)} = \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dv v^2 \int_0^{1-v} \frac{du}{[f^{(2)}(k, p, \gamma', z'; u, v) + i\epsilon]^3} \left[d_{ij}^{(0)}(k, p) + f^{(2)}(k, p, \gamma', z'; u, v) \left(d_{ij}^{(2)}(k, p) + \frac{1}{4}(k \cdot p) d_{ij}^{(3)}(k, p) + \frac{3}{2} f^{(2)}(k, p, \gamma', z'; u, v) d_{ij}^{(4)}(k, p) + \frac{M^2}{4} d_{ij}^{(5)}(k, p) + \frac{k^2}{4} d_{ij}^{(6)}(k, p) \right) \right]. \quad (4.48)$$

Após a integração no loop de momento, a equação de Beth-Salpeter, Eq.(4.20), torna-se

$$\int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \frac{g_i(\gamma', z')}{[k^2 + p \cdot kz' - \kappa^2 - \gamma' + i\epsilon]^3} = \frac{M^2}{2} \frac{i \lambda_S \lambda_F}{k^2 M^2 - (k \cdot p)^2} \frac{1}{(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon} \times \frac{1}{(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon} \sum_{j=1,2} \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \left(I_{ij}^{(1)} - (1 - \xi) I_{ij}^{(2)} \right) g_j(\gamma', z') \quad (4.49)$$

4.2 Projeção na frente de luz

Nessa seção faremos a projeção da equação de BS na frente de luz. Para isso, utilizaremos as coordenados do cone de luz, como mostrado no capítulo 2. Para fazer a projeção na frente de luz, devemos realizar a integração na componente k^- do quadrimomento. Dessa forma, a equação de Bethe-Salpeter projetada na frente de Luz é:

$$\int \frac{dk^-}{2\pi} \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \frac{g_i(\gamma', z')}{[k^2 + p \cdot kz' - \kappa^2 - \gamma' + i\epsilon]^3} = \frac{M^2}{2} \int \frac{dk^-}{2\pi} \frac{i \lambda_S \lambda_F}{k^2 M^2 - (k \cdot p)^2} \times \frac{1}{(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon} \sum_{j=1,2} \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \left(I_{ij}^{(1)} - (1 - \xi) I_{ij}^{(2)} \right) g_j(\gamma', z'), \quad (4.50)$$

Para o lado esquerdo da equação de Bethe-Salpeter a projeção na frente de luz foi calculada no capítulo anterior, como segue:

$$\mathcal{P}_i(\gamma, z) = -\frac{i}{M} \int_0^\infty d\gamma' \frac{g_i(\gamma', z)}{[\gamma + \gamma' + \kappa^2 + z^2 M^2/4]^2} \quad (4.51)$$

Na próxima sessão iremos estudar a projeção na frente de luz para o lado direito da Eq. (4.50).

4.2.1 Projção do lado direito da equação de Bethe-Salpeter

Faremos a projeção na frente de luz do lado direito da Equação de Bethe-Salpeter.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i(\gamma, z) = & -\lambda_S \lambda_F \frac{M^3}{2} \int \frac{dk^-}{2\pi} \frac{1}{k^2 M^2 - (k \cdot p)^2} \frac{1}{[(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon]} \frac{1}{[(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon]} \times \\ & \sum_{j=1,2} \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \left(I_{ij}^{(1)} - (1 - \xi) I_{ij}^{(2)} \right) g_j(\gamma', z'), \end{aligned} \quad (4.52)$$

A integral em k^- será realizada utilizando o teorema de Cauchy. Assim, é necessário identificar os polos da Eq.(4.52). Para nos auxiliar nesse cálculo, faremos a decomposição de $\mathcal{P}_i(\gamma, z)$ na soma de dois termos:

$$\mathcal{P}_i(\gamma, z) = -\frac{\lambda_S \lambda_F}{16\pi^2} \sum_{j=1,2} \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \left(\mathcal{P}_{ij}^{(1)}(\gamma, z, \gamma', z') - (1 - \xi) \mathcal{P}_{ij}^{(2)}(\gamma, z, \gamma', z') \right) g_j(\gamma', z'), \quad (4.53)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ij}^{(1)}(\gamma, z, \gamma', z') &= 8 \pi^2 M^3 \int \frac{dk^-}{2\pi} \frac{1}{k^2 M^2 - (k \cdot p)^2} \frac{1}{[(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon]} \frac{I_{ij}^{(1)}}{[(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon]} \\ &= \frac{i M^3}{4} \int_0^1 v^2 dv \int \frac{dk^-}{2\pi} \frac{1}{k^2 M^2 - (k \cdot p)^2} \frac{1}{[(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon]} \frac{1}{[(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon]} \times \\ & \quad \frac{1}{(f^{(1)}(k, p, \gamma', z') + i\epsilon)^2} \left(c_{ij}^{(0)}(k, p) + 2 f^{(1)}(k, p, \gamma', z') c_{ij}^{(2)}(k, p) \right) \end{aligned} \quad (4.54)$$

e

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{ij}^{(2)}(\gamma, z, \gamma', z') &= 8 \pi^2 M^3 \int \frac{dk^-}{2\pi} \frac{1}{k^2 M^2 - (k \cdot p)^2} \frac{1}{[(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon]} \frac{I_{ij}^{(2)}}{[(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon]} \\
 &= \frac{i M^3}{2} \int_0^1 dv v^2 \int_0^{1-v} du \int \frac{dk^-}{2\pi} \frac{1}{k^2 M^2 - (k \cdot p)^2} \frac{1}{[(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon]} \\
 &\quad \frac{1}{[(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon]} \frac{1}{[f^{(2)}(k, p, \gamma', z'; u, v) + i\epsilon]^3} \\
 &\quad \left[d_{ij}^{(0)}(k, p) + f^{(2)}(k, p, \gamma', z'; u, v) \left(d_{ij}^{(2)}(k, p) + \frac{1}{4}(k \cdot p) d_{ij}^{(3)}(k, p) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{3}{2} f^{(2)}(k, p, \gamma', z'; u, v) d_{ij}^{(4)}(k, p) + \frac{M^2}{4} d_{ij}^{(5)}(k, p) + \frac{k^2}{4} d_{ij}^{(6)}(k, p) \right) \right].
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

Polo do propagador escalar

Conforme resultado encontrado no capítulo anterior, podemos reescrever o propagador escalar como

$$\frac{i}{(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon} = \frac{-2}{M} \frac{1}{(1+z)} \frac{i}{k^- - k_u^- - i\epsilon} \tag{4.56}$$

Polo do propagador fermiônico

Da mesma forma, podemos reescrever o denominador do propagador fermiônico como:

$$\frac{1}{(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon} = \frac{2}{M} \frac{1}{(1-z)} \frac{1}{k^- - k_d^- + i\epsilon}. \tag{4.57}$$

Há um polo adicional relacionado ao Kernel de interação da Equação de Bethe-Salpeter. A localização desse polo será diferente para os termos $\mathcal{P}_i^{(1)}$ e $\mathcal{P}_i^{(2)}$. Assim, nas próximas seções analisaremos cada integral separadamente.

- Análise dos polos para o caso escalar $\mathcal{P}_{ij}^{(1)}$

Conforme estudado do capítulo anterior, o resultado para $\mathcal{P}_{ij}^{(1)}$ é:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{ij}^{(1)}(\gamma, z, \gamma', z') &= \int_0^1 v^2 dv \times \\
 &\quad \left((1+z)^2 \frac{\theta(z' - z)}{D_0(\gamma, z)} \frac{1}{D_u(z', z, m_s^2)^2} \frac{c_{ij}^{(0)}(k_u^-) + 2 f^{(1)}(k_u^-, \gamma', z') c_{ij}^{(2)}(k_u^-)}{(k_u^-)^2 + z M k_u^- + M^2 z^2/4 + 4\gamma} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(1-z)^2 \theta(z - z')}{D_0(\gamma, z)} \frac{1}{D_d(z', z, m_f^2)^2} \frac{c_{ij}^{(0)}(k_d^-) + 2 f^{(1)}(k_d^-, \gamma', z') c_{ij}^{(2)}(k_d^-)}{(k_d^-)^2 + z M k_d^- + M^2 z^2/4 + 4\gamma} \right)
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

- Análise dos pólos para $\mathcal{P}_i^{(2)}$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{ij}^{(2)}(\gamma, z, \gamma', z') &= \frac{i M^3}{2} \int_0^1 dv v^2 \int_0^{1-v} du \int \frac{dk^-}{2\pi} \frac{1}{k^2 M^2 - (k \cdot p)^2} \frac{1}{[(p/2 - k)^2 - m_s^2 + i\epsilon]} \\
 &\frac{1}{[(p/2 + k)^2 - m_f^2 + i\epsilon]} \frac{1}{[f^{(2)}(k, p, \gamma', z'; u, v) + i\epsilon]^3} \\
 &\left[d_{ij}^{(0)}(k, p) + f^{(2)}(k, p, \gamma', z'; u, v) \left(d_{ij}^{(2)}(k, p) + \frac{1}{4}(k \cdot p) d_{ij}^{(3)}(k, p) \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{3}{2} f^{(2)}(k, p, \gamma', z'; u, v) d_{ij}^{(4)}(k, p) + \frac{M^2}{4} d_{ij}^{(5)}(k, p) + \frac{k^2}{4} d_{ij}^{(6)}(k, p) \right) \right].
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

O polo do Kernel da interação relativo ao termo $\mathcal{P}_i^{(2)}$ são os zeros de $f^{(2)}(k, p, \gamma', z')$. Assim, utilizando coordenadas da frente de luz, temos:

$$\frac{1}{[f^{(2)}(k, p, \gamma', z') + i\epsilon]^3} = \frac{1}{[k_D k^- + l_D^{(2)} + i\epsilon]^3}, \tag{4.60}$$

onde

$$l_D^{(2)} = l_D^{(1)} + \mu^2(1 - \xi) u. \tag{4.61}$$

Para obter esse polo, temos:

$$k_D k_p^- + l_D^{(2)} + i\epsilon = 0, \tag{4.62}$$

Como anteriormente, temos que o sinal de k_D dependendo se $z' > z$ ou $z > z'$. Assim, o polo pode estar acima ou abaixo do eixo real. Isso introduzirá uma função de Heaviside na solução da integral.

Podemos reescrever a Eq. (4.59) como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{ij}^{(2)}(\gamma, z, \gamma', z') &= -2iM^2 \int_0^1 v^2 dv \int_0^{1-v} du \int \frac{dk^-}{2\pi} \frac{1}{(1-z)} \frac{1}{(1+z)} \frac{1}{[k^- - k_d^- + i\epsilon]} \times \\
 &\frac{1}{[k^- - k_u^- - i\epsilon]} \frac{1}{\left[k_D^{(2)} k^- + l_D^{(2)} + i\epsilon \right]^3} \frac{1}{(k^-)^2 + zMk^- + M^2 z^2/4 + 4\gamma} \times \\
 &\left[d_{ij}^{(0)}(k, p) + f^{(2)}(k, p, \gamma', z'; u, v) \left(d_{ij}^{(2)}(k, p) + \frac{1}{4} d_{ij}^{(3)}(k, p) \left(\frac{M}{2} k^- - \frac{zM^2}{4} \right) + \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{3}{2} d_{ij}^{(4)}(k, p) f^{(2)}(k, p, \gamma', z'; u, v) + \frac{1}{4} d_{ij}^{(5)}(k, p) M^2 + \frac{1}{4} d_{ij}^{(6)}(k, p) \left(-\frac{Mz}{2} k^- - \gamma \right) \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

Portanto a integral em k^- fica:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{ij}^{(2)}(\gamma, z, \gamma', z') &= -2 \int_0^1 v^2 dv \int_0^{1-v} du \\
 &\left[(1+z)^3 \frac{\theta(z'-z)}{D_0(\gamma, z)} \frac{1}{\left[D_u^{(2)}(z', z, m_s^2) \right]^3} \frac{1}{(k_u^-)^2 + zMk_u^- + M^2 z^2/4 + 4\gamma} \times \right. \\
 &\left(d_{ij}^{(0)}(k_u^-) + f^{(2)}(k_u^-, \gamma', z'; u, v) \left(d_{ij}^{(2)}(k_u^-) + \frac{1}{4} d_{ij}^{(3)}(k_u^-) \left(\frac{M}{2} k_u^- - \frac{zM^2}{4} \right) \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{3}{2} d_{ij}^{(4)}(k_u^-) f^{(2)}(k_u^-, \gamma', z'; u, v) + \frac{1}{4} d_{ij}^{(5)}(k_u^-) M^2 + \frac{1}{4} d_{ij}^{(6)}(k_u^-) \left(-\frac{Mz}{2} k_u^- - \gamma \right) \right) \right) \\
 &+ (1-z)^3 \frac{\theta(z-z')}{D_0(\gamma, z)} \frac{1}{\left[D_d^{(2)}(z', z, m_f^2) \right]^3} \frac{1}{(k_d^-)^2 + zMk_d^- + M^2 z^2/4 + 4\gamma} \times \\
 &\left(d_{ij}^{(0)}(k_d^-) + f^{(2)}(k_d^-, \gamma', z'; u, v) \left(d_{ij}^{(2)}(k_d^-) + \frac{1}{4} d_{ij}^{(3)}(k_d^-) \left(\frac{M}{2} k_d^- - \frac{zM^2}{4} \right) \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{3}{2} d_{ij}^{(4)}(k_d^-) f^{(2)}(k_d^-, \gamma', z'; u, v) + \frac{1}{4} d_{ij}^{(5)}(k_d^-) M^2 + \frac{1}{4} d_{ij}^{(6)}(k_d^-) \left(-\frac{Mz}{2} k_d^- - \gamma \right) \right) \right) \left. \right]
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

Finalmente, podemos escrever a equação de BS como um sistema acoplado de equações integrais escalares em termos das funções peso de Nakanishi:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty d\gamma' \frac{g_i(\gamma', z)}{[\gamma + \gamma' + \kappa^2 + z^2 M^2/4]^2} \\
 &= -\frac{\lambda_S \lambda_F}{16\pi^2} \sum_{j=1,2} \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \left(\mathcal{P}_{ij}^{(1)}(\gamma, z, \gamma', z') + (1-\zeta) \mathcal{P}_{ij}^{(2)}(\gamma, z, \gamma', z') \right) g_j(\gamma', z'),
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

onde $\mathcal{P}_{ij}^{(1)}(\gamma, z, \gamma', z')$ e $\mathcal{P}_{ij}^{(2)}(\gamma, z, \gamma', z')$ são dados em (4.58) e (4.64), respectivamente. Os

coeficientes relevantes para essa equação estão listados no apêndice C. No próximo capítulo iremos estudar esse sistema de equações integrais acopladas no limite ultravioleta.

5 Regime ultravioleta

Neste capítulo estudaremos o limite ultravioleta do estado ligado férmion-bóson, com interação vetorial na aproximação de escada, em diferentes calibres. Nesse limite, todas as escalas de massa são muito menores que o momento. Mais precisamente, consideraremos $\mu, M, m_s, m_f \ll \gamma$.

5.1 Equações integrais

Inicialmente, vamos lembrar que a lagrangiana considerada para descrever o sistema férmion-bóson é dada por:

$$\mathcal{L} = \lambda_F \bar{\psi} \not{Y} \psi - i\lambda_S \phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi V^\mu. \quad (5.1)$$

Analisando as dimensões dos campos fermiônico, escalar e vetorial, tem-se que as constantes de acoplamento λ_F e λ_S são adimensionais. Teorias com essa característica apresentam invariância conforme no limite ultravioleta. Motivados por essa propriedade, iremos resolver a equação de BS nesse limite. Os fatores que compõem o sistema de equações acopladas, Eq.(4.65), tornam-se:

$$\begin{aligned} D_0(\gamma, z) &\rightarrow \gamma \\ D_u^{(1)}(z', z, m_s^2, m_f^2) &\rightarrow \gamma v (1 - v) (1 + z') + \gamma' v (1 + z), \\ D_u^{(2)}(z', z, m_s^2, m_f^2) &\rightarrow \gamma v (1 - v) (1 + z') + \gamma' v (1 + z), \\ D_d^{(1)}(z', z, m_f^2, m_s^2) &\rightarrow \gamma v (1 - v) (1 - z') + \gamma' v (1 - z), \\ D_d^{(2)}(z', z, m_f^2, m_s^2) &\rightarrow \gamma v (1 - v) (1 - z') + \gamma' v (1 - z), \\ f^{(2)}(k_u^-, \gamma', z'; u, v) &\rightarrow -\gamma \frac{v(1-v)(1+z')}{1+z} - v\gamma', \\ f^{(2)}(k_d^-, \gamma', z'; u, v) &\rightarrow -\gamma \frac{v(1-v)(1-z')}{1-z} - v\gamma', \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\frac{M}{2} k_u^- - \frac{zM^2}{4} \rightarrow -\frac{\gamma}{1+z}, \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned}
\frac{M}{2} k_d^- - \frac{zM^2}{4} &\rightarrow \frac{\gamma}{1-z}, \\
-\frac{Mz}{2} k_u^- - \gamma &\rightarrow -\frac{\gamma}{1+z}, \\
-\frac{Mz}{2} k_d^- - \gamma &\rightarrow -\frac{\gamma}{1-z}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

É importante notar que, no limite ultravioleta, todos os coeficientes “21” são nulos (ver Apêndice D), o que leva a $\mathcal{P}_{21}^{(1)}(\gamma, z, \gamma', z') = \mathcal{P}_{21}^{(2)}(\gamma, z, \gamma', z') = 0$. Isso significa que a equação para a função peso de Nakanishi g_2 é desacoplada. A seguir, analisaremos a seguinte equação integral:

$$\int_0^\infty d\gamma' \frac{g_2(\gamma', z)}{[\gamma + \gamma']^2} = -\frac{\lambda_S \lambda_F}{16 \pi^2} \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \left(\mathcal{P}_{22}^{(1)}(\gamma, z) + (1 - \zeta) \mathcal{P}_{22}^{(2)}(\gamma, z) \right) g_2(\gamma', z'), \tag{5.5}$$

onde,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{22}^{(1)}(\gamma, z) &= -\int_0^1 v^2 dv \left[\frac{(1+z)^2 \theta(z'-z)}{\left[\gamma (\gamma v (1-v) (1+z') + \gamma' v (1+z)) \right]^2} \left(\gamma \frac{v(1-v)(1+z')}{2(1+z)} + \gamma' v \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1-z)^2 \theta(z-z')}{\left[\gamma (\gamma v (1-v) (1-z') + \gamma' v (1-z)) \right]^2} \left(\gamma \frac{(1-v)(4+v(1-z'))}{2(1-z)} + \gamma' v \right) \right] \tag{5.6}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{22}^{(2)}(\gamma, z) &= -2 \int_0^1 (1-v) dv \\
&\quad \left[\frac{(1+z)^3 \theta(z'-z)}{\left[\gamma [\gamma (1-v) (1+z') + \gamma' (1+z)] \right]^3} \times \right. \\
&\quad \left(\gamma^2 \frac{(1-v)(1+z')(1+v^2(1+z') - v(3+2z'))}{4(1+z)^2} + \gamma \gamma' \frac{(1-v(2+z'))}{4(1+z)} + \gamma'^2 \frac{3v}{4} \right) \\
&\quad + \frac{v(1-z)^3 \theta(z-z')}{\left[\gamma [\gamma (1-v) (1-z') + \gamma' (1-z)] \right]^3} \times \\
&\quad \left. \left(-\gamma^2 \frac{(1-v)(1-z')(1-v-z'(2-v))}{4(1-z)^2} - \gamma \gamma' \frac{(4-z')}{4(1-z)} + \gamma'^2 \frac{3}{4} \right) \right]. \tag{5.7}
\end{aligned}$$

Vamos analisar como essa equação se comporta sob uma transformação de escala no momento, isto é $\gamma \rightarrow \lambda \gamma$. Adicionalmente, como γ' é uma variável de integração, podemos fazer a transformação de variável $\gamma' \rightarrow \lambda \gamma'$. No lado esquerdo da Eq. (5.5) aparecerá um fator $1/\lambda$. Fazendo essa mesma transformação no lado direito, também aparecerá um fator global $1/\lambda$. Assim, conclui-se que a Eq. (5.5) não é alterada por esse tipo de transformação. Dizemos que esse sistema é invariante sob transformações de escala, o que é uma característica de sistemas com invariância conforme, o que era esperado pelo fato

das constantes de acoplamento escalares e vetoriais serem adimensionais.

Levando em consideração que o sistema é invariante sob transformação de escala, espera-se que a solução em γ siga uma lei de potência (CLOS, 2015; PAULA *et al.*, 2020). Assim, vamos considerar o seguinte ansatz para a função peso de Nakanishi:

$$g_2(\gamma, z) = \gamma^r f_2(z). \quad (5.8)$$

Usando a expressão dada pela Eq. (5.8), podemos integrar o lado esquerdo da Eq. (5.5), obtendo:

$$\int_0^\infty d\gamma' \frac{\gamma'^r}{[\gamma + \gamma']^2} f(z) = \pi r \gamma^{r-1} \csc(\pi r) f(z), \quad (5.9)$$

com a restrição

$$0 < |r| < 1.$$

Fazendo a transformação $\gamma' \rightarrow \gamma y$ e definindo $\alpha = \frac{\lambda_S \lambda_F}{8\pi}$, a Eq. (5.5) torna-se:

$$f(z) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-1}^{+1} dz' (\mathcal{G}^{(1)}(z') + (1 - \zeta) \mathcal{G}^{(2)}(z')) f(z'), \quad (5.10)$$

onde o Kernel de interação foi decomposto em duas partes:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(1)}(z') &= \frac{1}{2|r|(1-|r|)} \left[\left(\frac{1+z}{1+z'} \right)^{|r|} \theta(z' - z) + \left(1 + \frac{4|r|}{(1-z')} \right) \left(\frac{1-z}{1-z'} \right)^{|r|} \theta(z - z') \right] \\ \mathcal{G}^{(2)}(z') &= \frac{1}{2|r|(1-|r|)} \left[\theta(z' - z) \left[\frac{1+z}{1+z'} \right]^{|r|} \left(\frac{-|r|^3 + 7|r|^2 - 11|r| + 3}{(2-|r|)(3-|r|)} + \frac{|r|(1-|r|)}{(2-|r|)(1+z')} \right) \right. \\ &\quad \left. + \theta(z - z') \left[\frac{1-z}{1-z'} \right]^{|r|} \left(\frac{-|r|^3 + 7|r|^2 - 11|r| + 3}{(2-|r|)(3-|r|)} - \frac{|r|(1-2|r|)}{(2-|r|)(1-z')} \right) \right], \quad (5.11) \end{aligned}$$

onde $-1 < r < 0$.

Finalmente, a equação de BS que descreve a formação do estado ligado férmion-bóson no limite ultravioleta torna-se uma equação integral de uma variável, dada pela Eq. (5.10). Na próxima seção discutiremos as soluções dessa equação para diferentes calibres e diferentes comportamentos assintóticos do momento em termos da potência r .

5.2 Método numérico

Para resolver a Eq. (5.10), foi feita uma expansão da função $f(z)$ em uma base de splines (PRESS WILLIAM H.; TEUKOLSKY, 1997). Além disso, a integral foi discretizado utilizando pontos de Gauss. Com isso, foi definida uma matriz dos coeficientes dessa

expansão, de tal forma que a solução da equação integral foi mapeada em um cálculo de autovalores e autovetores de matrizes. Para implementar esse algoritmo, foi utilizado o Fortran90.

5.2.1 Análise da convergência

Inicialmente, fizemos um estudo da convergência de nosso método numérico. A estratégia foi resolver a Eq. (5.10) no calibre de Feynman, com um valor fixo de r ($|r| = 0.25$), para diferentes números de pontos de Gauss (NGauss). O painel da esquerda da Fig. 5.1 mostra que os autovalores convergem na quarta casa decimal para 200 pontos de Gauss. Para complementar essa análise, apresentamos os valores de α na tabela 5.1. Além de

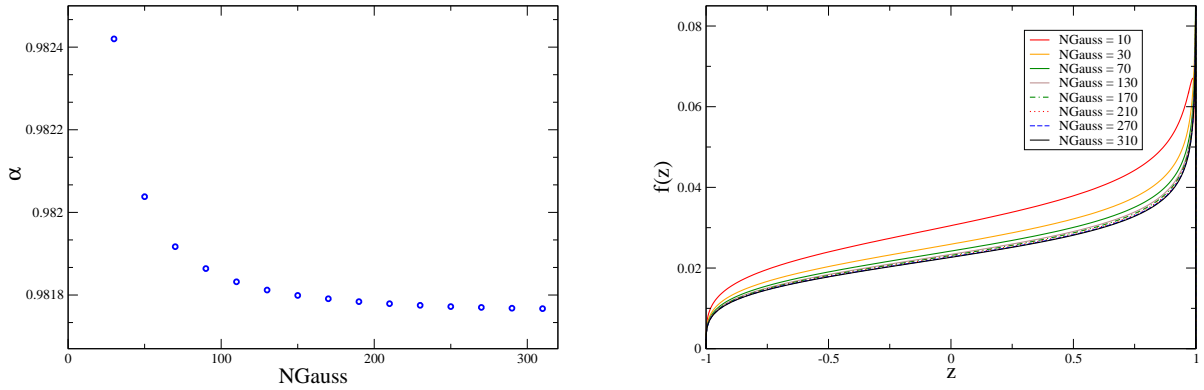


FIGURA 5.1 – Painel da esquerda: autovalores da equação de BS no limite ultravioleta, no calibre de Feynman e $|r| = 0.25$, para diferentes números de pontos de Gauss. Painel da direita: autofunções da Eq. (5.10) no calibre de Feynman e $|r| = 0.25$, para diferentes números de pontos de Gauss.

verificar a convergência dos autovalores, é importante certificar-se que as autofunções $f(z)$ também convergem. No painel da direita da Fig. 5.1 estão as autofunções no calibre de Feynman, com $|r| = 0.25$ para diferentes números de pontos de Gauss. A figura mostra que as autofunções convergem para 200 pontos de Gauss. A partir dessa análise, utilizamos 200 pontos de Gauss para obter maior parte das soluções apresentadas ao longo dessa seção. Apenas para determinação das constantes de acoplamento críticas (α_c) foram utilizados 300 pontos de Gauss, a fim de se obter uma precisão ainda maior para esses valores.

5.3 Efeito do calibre na formação do estado ligado

Nessa seção iremos discutir em mais detalhes o efeito do calibre no comportamento dos autovalores e autofunções da equação integral proveniente da equação de BS.

NGauss	α
010	9.85682×10^{-1}
030	9.82420×10^{-1}
050	9.82038×10^{-1}
070	9.81917×10^{-1}
090	9.81864×10^{-1}
110	9.81832×10^{-1}
130	9.81812×10^{-1}
150	9.81799×10^{-1}
170	9.81791×10^{-1}
190	9.81784×10^{-1}
210	9.81779×10^{-1}
230	9.81775×10^{-1}
250	9.81772×10^{-1}
270	9.81770×10^{-1}
290	9.81768×10^{-1}
310	9.81767×10^{-1}

TABELA 5.1 – Análise da convergência da constante de acoplamento.

5.3.1 Autovalores em diferentes calibres

Resolvemos a Eq. (5.10) para um conjunto de valores de r e em diferentes calibres ζ . Na Fig. 5.2 mostramos que é possível usar uma função suave para interpolar os resultados numéricos encontrados. Com essa interpolação, no painel da esquerda da Fig. 5.3 mostramos como os autovalores α se comportam em função de r para os calibres de Feynman, Landau e $\zeta = 0.5$. Nossos cálculos mostram que o valor máximo dessa curva aumenta à medida que o calibre varia entre o de Feynman ($\zeta = 1$) e o de Landau ($\zeta = 0$).

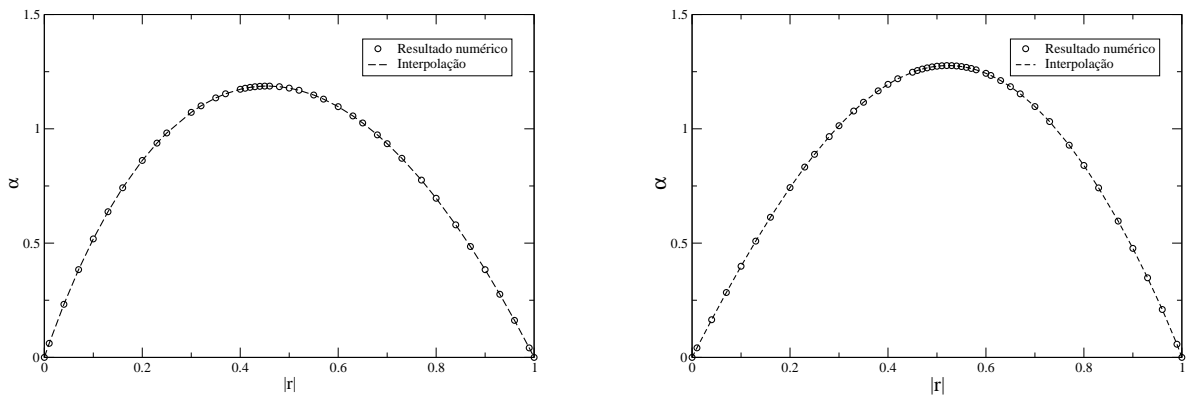


FIGURA 5.2 – Comparação entre os resultados dos cálculos numéricos para os autovalores da equação de BS no limite ultravioleta em função da potência $|r|$ e suas interpolações. Painel da esquerda: calibre de Feynman. Painel da direita: calibre de Landau.

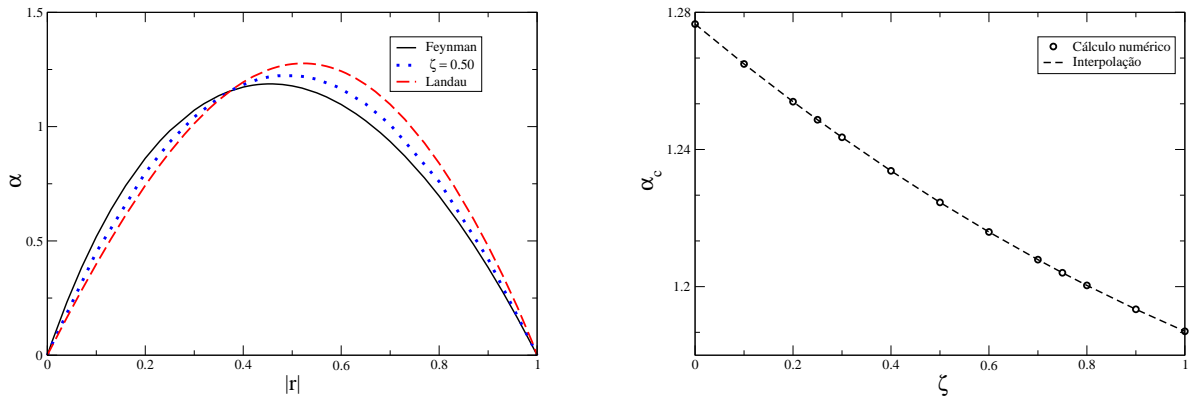


FIGURA 5.3 – Paineis da esquerda: autovalores da equação de BS no limite ultravioleta, para os calibres de Feynman, Landau e $\zeta = 0.5$ em função da potência $|r|$. Paineis da direita: autovalores críticos da equação de BS no limite ultravioleta em função do calibre.

Podemos interpretar essa mudança em termos dos graus de liberdade do campo de calibre. No calibre de Landau só há graus de liberdade transversos, diferentemente do calibre de Feynman, onde também há os graus de liberdade longitudinais. Esse fato levaria a um kernel menos intenso, o que aumentaria o autovalor máximo, consistente com o apresentado na Fig. 5.3. Podemos reparar também que a primeira vista as curvas da Fig. 5.3 estão se cruzando, porém, ao fazer um estudo detalhado, quando nos aproximamos deste ponto notamos que as curvas nunca se cruzam.

Para um determinado calibre, o valor máximo do autovalor da Eq.(5.10) é chamado de α_c e está relacionado a constante de acoplamento crítica do sistema. Para acoplamentos mais intensos que o valor crítico, não há formação de um estado ligado para o sistema férmion-bóson. No painel da direita da Fig. 5.3 são apresentados os valores do acoplamento crítico para diferentes calibres. Note que o calibre de Landau apresenta o maior valor para α_c .

Complementando nossa análise dos autovalores da Eq.(5.10), na Fig. 5.4 apresentamos seus valores em função do calibre para diferentes valores de r . Como o comportamento de α em termos de r é aproximadamente parabólico, separamos os resultados em dois gráficos, um para $0 < |r| \leq 0.5$ e outro para $0.5 \leq |r| < 1$. Note que os autovalores se aproximam de zero à medida que r se aproxima dos extremos 0 e 1. Isso é esperado uma vez que, nesses limites, o Kernel da Eq.(5.10) diverge. Assim, o autovalor deve tender a zero para compensar tal comportamento.

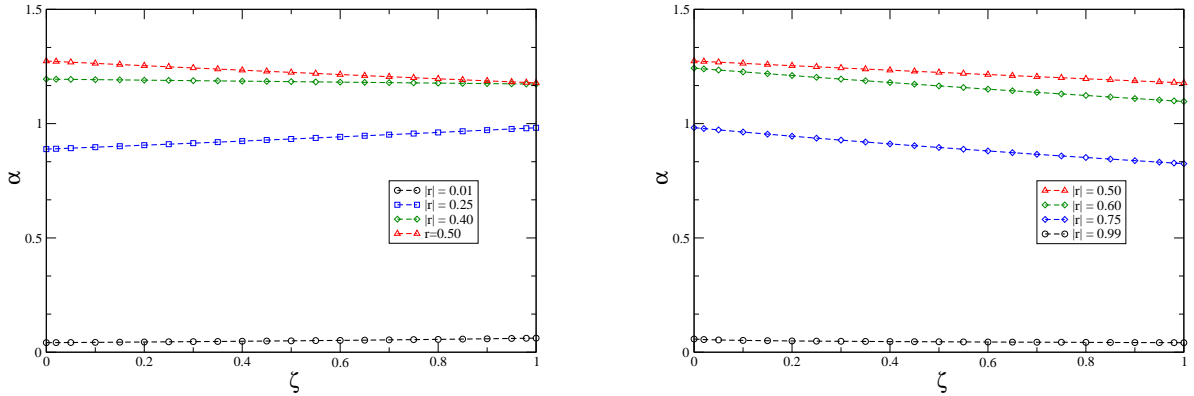


FIGURA 5.4 – Autovalores da equação de BS no limite ultravioleta em função do calibre para diferentes potências r . Painel da esquerda: $0 < |r| \leq 0.5$. Painel da direita: $0.5 \leq |r| < 1$.

5.3.2 Autofunções em diferentes calibres

Para analisar as autofunções da Eq. (5.10), que estão relacionadas à amplitude de BS, iremos definir a fração de momento que o férmion carrega em relação ao momento total do estado ligado como ξ :

$$\xi = \frac{k^+ + p^+/2}{p^+} \quad (5.12)$$

Usando a definição $k^+ = -z\frac{M}{2}$ e considerando que, no C.M, $p^+ = M$, podemos relacionar z com a fração de momento ξ , como:

$$\xi = \frac{1 - z}{2}. \quad (5.13)$$

Na Fig. 5.5 apresentamos as autofunções em termos da fração de momento ξ para diferentes calibres. Analisando o painel da esquerda da Fig. 5.5, nota-se que a escolha do calibre não modifica a forma geral da curva. Em todos os calibres há um pico acentuado para $\xi \sim 10^{-5}$, o que significa que o bóson contribui mais significativamente ao momento do estado ligado. O painel da direita da Fig. 5.5 mostra que o comportamento assintótico para $\xi \rightarrow 0$ é bem comportado e, para todos os calibres covariantes, a autofunção vai a zero monotonicamente.

Adicionalmente, na Fig. 5.6 apresentamos, para o mesmo conjunto de dados, a autofunção em termos de ξ em um gráfico logarítmico. Nesse gráfico é possível identificar o surgimento do pico da autofunção próximo à fração de momento zero. Para $|r| = 0.25$, o pico para o calibre de Feynman é o mais acentuado e o de Landau atinge o menor valor. É importante mencionar que, para outros valores de r , a relação da intensidade do pico entre os calibre de Feynman e Landau se invertem. Na Fig. 5.7 são mostradas as autofunções para diferentes potências r . No painel da esquerda, considerou-se o calibre de Feynman

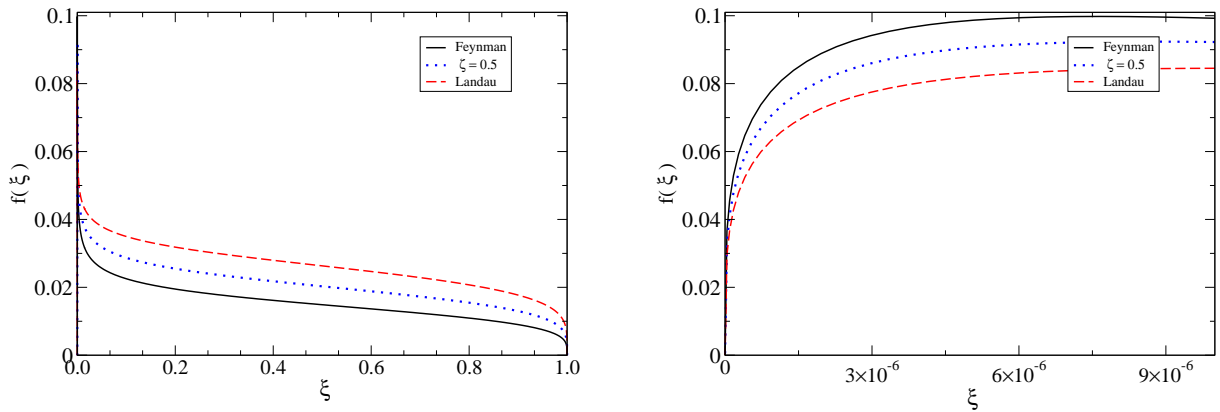


FIGURA 5.5 – Autofunções da equação de BS no limite ultravioleta para $|r| = 0.25$, no calibre de Feynman, Landau e $\zeta = 0.5$. No painel da esquerda é apresentado o comportamento em todo intervalo da fração de momento ξ . No painel da direita é mostrado o comportamento assintótico para $\xi \rightarrow 0$.

e, no da direita, o de Landau. Percebe-se que, dependendo do valor de r , o pico pode ser mais acentuado em um calibre ou no outro. O maior valor do pico da autofunção é obtido para $|r| \rightarrow 1$ e, nesse caso, o pico no calibre de Landau é mais localizado e intenso. Outro limite interessante é $|r| \rightarrow 0$, onde os nossos resultados mostram que a autofunção tende a uma função degrau.

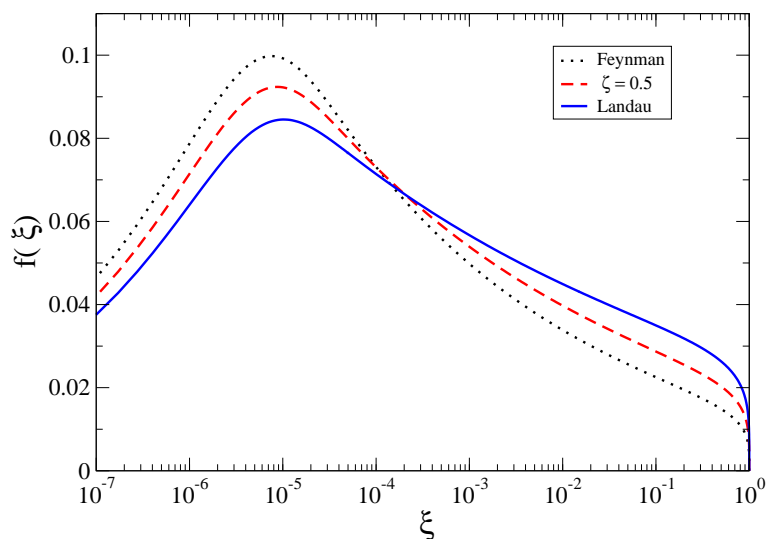


FIGURA 5.6 – Autofunções da equação de BS no limite ultravioleta para $|r| = 0.25$, no calibre de Feynman, Landau e $\zeta = 0.5$.

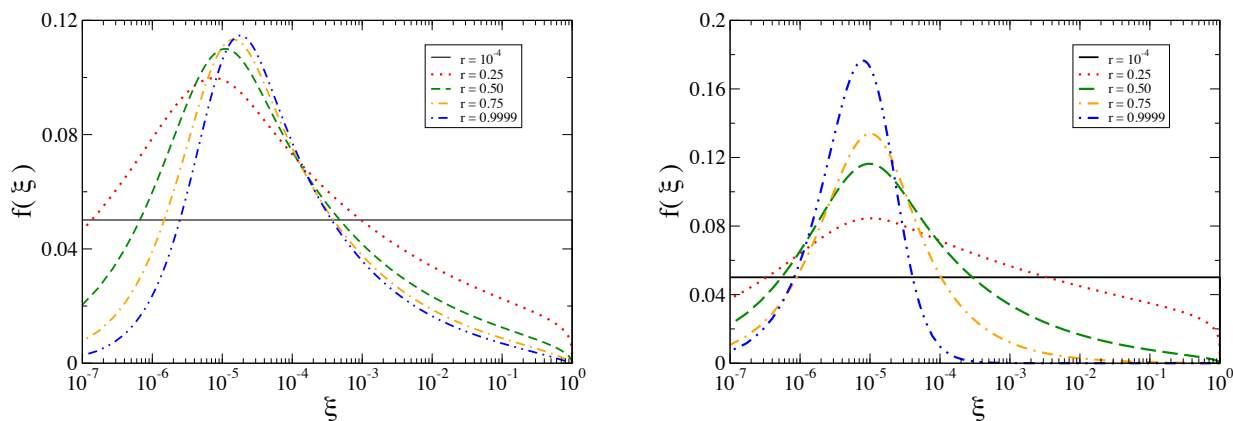


FIGURA 5.7 – Autofunções da equação de BS no limite ultravioleta para diferentes potências $|r|$. No painel da esquerda foi utilizado o calibre de Feynman. No painel da direita foi considerado o calibre de Landau.

6 Conclusão

Nesta dissertação foi estudado o efeito do calibre na formação do estado ligado férmion-bóson. Tal configuração, em princípio, pode modelar um próton constituído por um par quark-diquark ligado. Consideramos que a interação entre a partícula escalar e a fermiônica se dá pela troca de um bóson vetorial que, nesse contexto, desempenha o papel do glúon, na aproximação de escada. Utilizamos propagadores livres para a partícula fermiônica e para os bósons escalar e vetorial. Os vértices de interação férmion-vetor e escalar-vetor foram considerados puntiformes.

Utilizamos a representação integral de Nakanishi para descrever as componentes da amplitude de Bethe-Salpeter. Isso possibilitou que conhecêssemos a estrutura analítica do Kernel da equação de Bethe-Salpeter e, com isso, foi possível identificar a localização dos polos e efetuar a integração no loop de momentos. Ressaltamos que esse passo foi fundamental para podermos resolver o problema do estado ligado no espaço de Minkowski.

Após a integração no quadrimomento, projetamos a equação de BS na frente de luz. Tal procedimento torna o sistema de equações integrais mais simples para ser resolvido numericamente.

Como as constantes de acoplamento escalares e fermiônicas são adimensionais, era esperado que o sistema apresentasse invariância conforme para altas energias. Motivados por esse fato, analisamos o limite ultravioleta da equação de BS. Mostramos que, de fato, o sistema apresenta invariância de escala, que é uma propriedade da invariância conforme. Uma vez que o sistema apresenta a simetria de escala, o comportamento em γ deve seguir uma lei de potência. Mostramos que o sistema desacopla e, por fim, obtemos uma equação integral de uma variável.

Resolvemos a equação integral em diferentes calibres e para um conjunto de valores da potência r . Mostramos que, para os calibres covariantes, o sistema sempre apresenta um valor máximo para as constantes de acoplamento (α_c). Isso significa que, para acoplamentos maiores que esse valor, o sistema não forma um estado ligado.

Nossa análise mostrou que o valor do acoplamento crítico varia com a escolha do calibre. O valor máximo foi obtido no calibre de Landau e o mínimo no calibre de Feynman. Intuitivamente, podemos sugerir que esse fenômeno está relacionado ao fato de só haver

graus de liberdade transversos no calibre de Landau, ao passo que no calibre de Feynman também há os graus de liberdade longitudinais. Dessa forma, o kernel do calibre de Landau seria menos intenso e levaria a um valor crítico mais elevado.

Mostramos que a forma geral das autofunções não depende do particular calibre considerado. Em todos os casos analisados, para ξ muito pequeno ($\sim 10^{-5}$) temos um aumento significativo da autofunção, o que indica que a partícula escalar carrega uma fração de momento muito maior que a fermiônica. Por outro lado, é importante frisar que o comportamento assintótico para $\xi \rightarrow 0$ é bem comportado.

Estudamos também o efeito da potência r na forma da autofunção. De maneira geral, indo de $r \approx 0$ para $r \approx 1$, temos que a autofunção perde uniformidade e vai se concentrando para formar um pico cada vez mais intenso. O valor máximo atingido pela autofunção foi para o calibre de Landau.

Uma vez analisado o limite ultravioleta, o próximo passo é estudar o efeito do calibre para todas as regiões de momento. Para isso, devemos resolver numericamente a Eq. (4.65). Uma vez que tenhamos obtido as funções peso de Nakanishi, devemos normalizar apropriadamente e reconstruir a amplitude de BS.

A partir da amplitude de BS, podemos calcular o fator de forma eletromagnético do próton e, com isso, fixar os parâmetros do modelo. Com isso, poderemos investigar a estrutura interna do próton utilizando um modelo dinâmico definido no espaço de Minkowski. Como exemplo, podemos citar o cálculo das funções de distribuições partônicas (PDFs) e distribuições de momento transversas (TMDs), que, atualmente, são objetos de intensa investigação (LORCÉ; PASQUINI, 2013; YDREFORS; FREDERICO, 2021). Tal estudo está em linha com o objetivo de grandes laboratórios de física de partículas como JLAB (RADYUSHKIN, 2017) e CERN (ADOLPH, 2015) em se obter um imageamento 3D dos hádrons (PAULA *et al.*, 2021; YDREFORS *et al.*, 2021).

Referências

- ADOLPH, c. e. a. Hadron transverse momentum distributions in muon. **Eur. Phys. J. C**, v. 73, p. 2531, 2015.
- ALEXANDROU, P. d. F. C.; LUCINI, B. Evidence for diquarks in lattice qcd. **Phys. Rev. Lett.**, v. 97, n. 222002, 2006.
- BABICH N. GARRON, C. H. J. H. L. L. R.; REBBI, C. Diquark correlations in baryons on the lattice with overlap quarks. **Phys. Rev. D**, v. 76, n. 074021, 2007.
- BARABANOV M. A. BEDOLLA, W. K. B. G. D. C. C. C. Y. C. E. C. M. D. G. E. M. Y.; ENT, t. R. Diquark correlations in hadron physics: Origin, impact and evidence. **Prog. Part. Nucl. Phys.**, v. 116, n. 103835, 2021.
- BETHE, E. S. H. A relativistic equation for bound-state problems. **Physical Review D**, v. 84, n. 1232, 1951.
- BI H. CAI, Y. C. M. G. Z. L. H. X. Q. Y.; YANG, Y. B. Diquark mass differences from unquenched lattice qcd. **Chin. Phys. C**, v. 40, n. 073106, 2016.
- BREIDENBACH J. I. FRIEDMAN, H. W. K. E. D. B. D. H. C. H. D. J. D. L. W. M. M.; TAYLOR, R. E. Observed Behavior of Highly Inelastic Electron-Proton Scattering. **Phys. Rev. Lett**, v. 23, p. 935, 1969.
- CARLSON, C. E. The proton radius puzzle. **Prog. Part. Nucl. Phys.**, v. 82, n. 59-77, 2015.
- CLOS, F. F. **On the Scale Invariance of certain Complex Systems**. Thesis (Doutorado) — Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, 2015.
- DEGRAND, Z. L. T.; SCHAEFER, S. Diquark effects in light baryon correlators from lattice qcd. **Phys. Rev. D**, v. 77, n. 034505, 2008.
- DIRAC, P. A. M. Forms of relativistic dynamics. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 21, p. 392–399, Jul 1949. Available at: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.21.392>.
- EICHMANN H. SANCHIS-ALEPUZ, R. W. R. A. G.; FISCHER, C. S. Baryons as relativistic three-quark bound states. **Prog. Part. Nucl. Phys.**, v. 91, n. 1-100, 2016.

- FEYNMAN, R. P. Space-time approach to quantum electrodynamics. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 76, p. 769–789, Sep 1949. Available at: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.76.769>.
- GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories. **Phys. Rev. Lett.**, v. 30, p. 1343, 1973.
- HOOFT, G. 't; VELTMAN. Regularization and renormalization of gauge fields. **Phys. Rev. D**, v. 44, p. 189–213, 1972.
- LATTES H. MUIRHEAD, G. P. S. O. C. F. P. C. M. G. Processes Involving Charged Mesons. **Nature**, v. 1, n. 159, p. 694–697, 1947.
- LORCÉ, C.; PASQUINI, B. Structure analysis of the generalized correlator of quark and gluon for a spin-1/2 target. **JHEP**, v. 09, p. 138, 2013.
- NAKANISHI, N. Integral representation for the forward scattering amplitude. **Phys. Rev.**, v. 4, n. 2571, 1971.
- NOGUEIRA, J. H. A. . e. a. Solving the bethe-salpeter equation in minkowski space for a fermion-scalar system. **Physical Review D**, v. 100, n. 016021, 2019.
- PAULA, W. de; DELFINO; FREDERICO, T. A.; TOMIO, L. Limit cycles in the spectra of mass imbalanced many-boson system. **J. Phys. B:**, v. 53, p. 205301, 2020.
- PAULA, W. de; YDREFORS, E.; NOGUEIRA, J. H. A.; FREDERICO, T.; SALMÉ, G. Observing the Minkowskian dynamics of the pion on the null-plane. **Phys. Rev. D**, v. 103, n. 1, p. 014002, 2021.
- PESKIN MICHAEL E.; SCHROEDER, D. V. **An Introduction To Quantum Field Theory**. Colorado: Westview Press, 2007.
- POLITZER, H. D. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? **Phys. Rev. Lett.**, v. 30, p. 1346, 1973.
- PRESS WILLIAM H.; TEUKOLSKY, S. A. V. W. T. F. B. P. **Numerical Recipes in Fortran 77**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- RADYUSHKIN, A. Target mass effects in parton quasi-distributions. **Physics Letters B**, v. 770, p. 514–522, 2017. ISSN 0370-2693. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269317303878>.
- YAN S.J. CHANG, R. G. R. T. Quantum field theories in the infinite-momentum frame. iv. scattering matrix of vector and dirac fields and perturbation theory. **Physical Review D**, v. 7, n. 1780, 1973.
- YDREFORS, E.; FREDERICO, T. Proton image and momentum distributions from light-front dynamics. **Phys. Rev. D**, v. 104, n. 11, p. 114012, 2021.
- YDREFORS, E.; PAULA, W. de; NOGUEIRA, J. H. A.; FREDERICO, T.; SALMÉ, G. Pion electromagnetic form factor with Minkowskian dynamics. **Phys. Lett. B**, v. 820, p. 136494, 2021.
- ZUBER JEAN-BERNARD; ITZYKSON, C. **Quantum Field Theory**. [S.l.]: Dover Publications, 2006.

Apêndice A - Derivada funcional e funcional gerador

A.1 Demonstração

Definimos a derivada do funcional como:

$$\frac{\delta J(y)}{\delta J(x)} = \delta^{(4)}(x - y) \quad \text{ou} \quad \frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^4y J(y)\phi(y) = \phi(x), \quad (\text{A.1})$$

que é a generalização da derivada comum

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \quad (\text{A.2})$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j x_j k_j = k_i \quad (\text{A.3})$$

O objeto básico para esse formalismo é o funcional gerador das funções de correlação $Z[J]$. Para a teoria escalar, temos:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left(i \int d^4x (\mathcal{L} + J(x)\phi(x)) \right), \quad (\text{A.4})$$

onde $J(x)\phi(x)$ é o termo de fonte.

Podemos obter as funções de correlação a partir de derivadas funcionais do Funcional Gerador.

$$\begin{aligned} -i \frac{\partial Z}{\partial J(x_1)} &= \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \exp \left(i \int d^4x (\mathcal{L} + J(x)\phi(x)) \right) \\ -i \frac{1}{Z(0)} \frac{\partial Z}{\partial J(x_1)} \Big|_{J=0} &= \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp(iS[\phi]) \phi(x_1)}{\int \mathcal{D}\phi \exp(iS[\phi])} = \langle \Omega | \phi_H(x_1) | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Generalizando,

$$(-i)^n \frac{1}{Z(0)} \frac{\partial^n Z}{\partial J(x_1) \dots \partial J(x_n)} \Big|_{J=0} = \langle \Omega T \{ \phi_H(x_1) \dots \phi_H(x_n) \} | \Omega \rangle, \quad (\text{A.6})$$

onde T é o operador *time ordering* a Eq. (A.6) é a função de n-pontos.

A.2 Teoria livre

Seja o expoente do funcional gerador

$$\begin{aligned} \int d^4x [\mathcal{L}_0(\phi) + J(\phi)] &= \int d^4x \left(\frac{1}{2} \phi (-\partial^2 - m^2 + i\epsilon) \phi + J\phi \right) \\ \phi'(x) &\equiv \phi(x) - i \int d^4y D_F(x-y) J(y), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

onde $D_F(x-y)$ é a função de Green do Operador Klein-Gordon.

$$\begin{aligned} \int d^4x [\mathcal{L}_0(\phi) + J(\phi)] &= \int d^4x \left(\frac{1}{2} \phi' (-\partial^2 - m^2 + i\epsilon) \phi + J\phi' \right) \\ &\quad - \int d^4x d^4y \frac{1}{2} J(x) [-iD_F(x-y)] J(y) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

O funcional gerador fica:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D} \phi' \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_0(\phi') \right] \exp \left[-i \int d^4x \int d^4y \frac{1}{2} J(x) [-iD_F(x-y)] J(y) \right] \\ Z[J] &= Z_0 \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y J(x) D_F(x-y) J(y) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Portanto nossa função de dois pontos fica:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle &= \frac{1}{Z_0} \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \right) Z[J] \Big|_{J=0} \\ &= -\frac{\partial}{\partial J(x_1)} \frac{\partial}{\partial J(x_2)} \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y J(x) D_F(x-y) J(y) \right] \Big|_{J=0} \\ &= -\frac{\partial}{\partial J(x_1)} \left[-\frac{1}{2} \int d^4y D_F(x_2-y) - \frac{1}{2} \int d^4x J(x) D_F(x-x_2) \right] \frac{Z[J]}{Z_0} \Big|_{J=0} \\ &= D_F(x_1-x_2) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

para $J=0$ muitos termos vão se anular.

Apêndice B - Cálculo dos traços

Coeficiências \mathcal{T}_{ij} , $T_{ij}^{(1)}$ e $T_{ij}^{(2)}$.

Para o Traço temos:

$$\begin{aligned}
 Tr_1 &= Tr \left[\gamma^\mu (\not{p}/2 + \not{k} + m_f)(p - k - k')^\nu \left(g_{\mu\nu} - \frac{(1 - \xi)(k' - k)_\mu(k' - k)_\nu}{(k' - k)^2 - \xi\mu^2 + i\epsilon} \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \left(\phi_1(k', p) + \frac{\not{k}'}{M}\phi_2(k', p) \right) \frac{\not{p} + M}{2M} \right] \\
 Tr_1 &= Tr \left[(\not{p}/2 + \not{k} + m_f)(\not{p} - \not{k} - \not{k}') \left(\phi_1(k', p) + \frac{\not{k}'}{M}\phi_2(k', p) \right) \frac{\not{p} + M}{2M} \right] \\
 &\quad - \frac{(1 - \xi)(p \cdot k - k^2 - p \cdot k' + k'^2)}{(k' - k)^2 - \xi\mu^2 + i\epsilon} Tr \left[(\not{k} - \not{k}')(\not{p}/2 + \not{k} + m_f) \left(\phi_1(k', p) + \frac{\not{k}'}{M}\phi_2(k', p) \right) \frac{\not{p} + M}{2M} \right] \\
 Tr_1 &= \phi_1 \mathcal{T}_{11} + \phi_2 \mathcal{T}_{12} \tag{B.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{11} &= 2 \left[\frac{m_f}{M} [M^2 - (k \cdot p) - (k' \cdot p)] + \frac{M^2}{2} - k^2 - (k \cdot k') + \frac{(k \cdot p)}{2} - \frac{(k' \cdot p)}{2} \right] \\
 &\quad - 2h(k, k', p) \left[k^2 - (k \cdot k') + \frac{(k \cdot p)}{2} - \frac{(k' \cdot p)}{2} - \frac{m_f}{M} [(k \cdot p) - (k' \cdot p)] \right] \tag{B.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{12} &= - \left[3(k \cdot k') + k'^2 + \frac{2(k \cdot p)}{M^2} [k'^2 - 2(k' \cdot p)] + 2(k' \cdot p) \left(\frac{k^2}{M^2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{2m_f}{M} [(k \cdot k') - (k' \cdot p) + k'^2] \right] \\
 &\quad - 2h(k, k', p) \left[-k'^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{(k \cdot p)}{M^2} \right) + \frac{(k \cdot k')}{2} + \frac{k^2}{M^2} (k' \cdot p) + \frac{m_f}{M} [(k \cdot k') - k'^2] \right] \tag{B.3}
 \end{aligned}$$

multiplicando por $O(k)_2$ Para o Traço temos:

$$Tr_2 = Tr \left[\gamma^\mu (\not{p}/2 + \not{k} + m_f)(p - k - k')^\nu \left(g_{\mu\nu} - \frac{(1 - \xi)(k' - k)_\mu(k' - k)_\nu}{(k' - k)^2 - \xi\mu^2 + i\epsilon} \right) \left(\phi_1 \frac{\not{k}}{M} + \frac{\not{k} \not{k}'}{M M} \phi_2 \right) \frac{\not{p} + M}{2M} \right] \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}
 Tr_2 &= Tr \left[(\not{p}/2 + \not{k} + m_f)(\not{p} - \not{k} - \not{k}') \left(\phi_1 \frac{\not{k}}{M} + \frac{\not{k}}{M} \frac{\not{k}'}{M} \phi_2 \right) \frac{\not{p} + M}{2M} \right] \\
 &- \frac{(1 - \xi)(p \cdot k - k^2 - p \cdot k' + k'^2)}{(k' - k)^2 - \xi \mu^2 + i\epsilon} Tr \left[(\not{k} - \not{k}')(\not{p}/2 + \not{k} + m_f) \left(\phi_1 \frac{\not{k}}{M} + \frac{\not{k}}{M} \frac{\not{k}'}{M} \phi_2 \right) \frac{\not{p} + M}{2M} \right] \\
 Tr_2 &= \phi_1 \mathcal{T}_{21} + \phi_2 \mathcal{T}_{22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{21} &= 2 \left[k^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{(k' \cdot p)}{M^2} \right) + \frac{(k \cdot k')}{2} + \frac{(k \cdot p)}{M^2} \left(\frac{M^2}{2} - k^2 - (k \cdot p) - (k' \cdot p) \right) \right. \\
 &+ \left. \frac{m_f}{M} [(k \cdot p) - k^2 - (k \cdot k')] \right] + 2 h(k, k', p) \left[k^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{(k' \cdot p)}{M^2} \right) - \frac{(k \cdot k')}{2} \right. \\
 &+ \left. \frac{(k \cdot p)}{M^2} [(k' \cdot p) - k^2 - (k \cdot p)] - \frac{m_f}{M} [k^2 + (k \cdot k')] \right] \quad (B.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{22} &= - \left[\frac{2}{M^2} k^2 \left((k \cdot k') + k'^2 - \frac{3}{2}(k' \cdot p) \right) + \frac{2}{M^2} (k \cdot p) \left((k \cdot k') + \frac{k'^2}{2} \right) - (k \cdot k') \right. \\
 &+ \left. \frac{2m_f}{M^3} [(k \cdot p)k'^2 + k^2(k' \cdot p) - 2(k \cdot p)(k' \cdot p) + M^2(k \cdot k')] \right] \\
 &- h(k, k', p) \left[\frac{2k^2}{M^2} \left((k \cdot k') - k'^2 - \frac{(k' \cdot p)}{2} \right) - \frac{2(k \cdot p)}{M^2} \left(\frac{(k'^2)}{2} + (k \cdot k') \right) \right. \\
 &+ \left. \frac{2m_f}{M^3} [k^2(k' \cdot p) - (k \cdot p)k'^2] \right] \quad (B.6)
 \end{aligned}$$

Em particular obtemos:

$$\begin{aligned}
 T_{11}^{(1)} &= 2 \left[\frac{m_f}{M} [M^2 - (k \cdot p) - (k' \cdot p)] + \frac{M^2}{2} - k^2 - (k \cdot k') + \frac{(k \cdot p)}{2} - \frac{(k' \cdot p)}{2} \right] \\
 T_{12}^{(1)} &= - \left[3(k \cdot k') + k'^2 + \frac{2(k \cdot p)}{M^2} [k'^2 - 2(k' \cdot p)] + 2(k' \cdot p) \left(\frac{k^2}{M^2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{2m_f}{M} [(k \cdot k') - (k' \cdot p) + k'^2] \right] \\
 T_{21}^{(1)} &= 2 \left[k^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{(k' \cdot p)}{M^2} \right) + \frac{(k \cdot k')}{2} + \frac{(k \cdot p)}{M^2} \left(\frac{M^2}{2} - k^2 - (k \cdot p) - (k' \cdot p) \right) \right. \\
 &+ \left. \frac{m_f}{M} [(k \cdot p) - k^2 - (k \cdot k')] \right] \\
 T_{22}^{(1)} &= - \left[\frac{2}{M^2} k^2 \left((k \cdot k') + k'^2 - \frac{3}{2}(k' \cdot p) \right) + \frac{2}{M^2} (k \cdot p) \left((k \cdot k') + \frac{k'^2}{2} \right) - (k \cdot k') \right. \\
 &+ \left. \frac{2m_f}{M^3} [(k \cdot p)k'^2 + k^2(k' \cdot p) - 2(k \cdot p)(k' \cdot p) + M^2(k \cdot k')] \right] \quad (B.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{11}^{(2)} &= 2k^2 - 2k' \cdot k + \left(1 + 2\frac{m_f}{M}\right) (k \cdot p - k' \cdot p) \\
T_{12}^{(2)} &= \left(1 + 2\frac{m_f}{M}\right) k' \cdot k - (M^2 + 2Mm_f + 2k \cdot p) \frac{(k')^2}{M^2} + \frac{2}{M^2} k^2 k' \cdot p \\
T_{21}^{(2)} &= \left(1 - 2\frac{m_f}{M}\right) k' \cdot k + \frac{2}{M^2} k \cdot p (k \cdot p - k' \cdot p) - \frac{k^2}{M^2} (M^2 - 2Mm_f - 2k \cdot p + 2k' \cdot p) \\
T_{22}^{(2)} &= \frac{k \cdot p}{M^2} \left(2k' \cdot k - \left(1 + 2\frac{m_f}{M}\right) (k')^2\right) + \frac{k^2}{M^2} \left(2k' \cdot k - 2(k')^2 - \left(1 - 2\frac{m_f}{M}\right) k' \cdot p\right)
\end{aligned}$$

Apêndice C - Coeficientes para equação de BS em um calibre covariante arbitrário

Nesse apêndice estão listados os coeficientes que aparecem na equação de BS para uma calibre covariante arbitrário, Eq. (4.65).

$$f^{(2)}(k_u^-, \gamma', z'; u, v) = -\gamma \frac{v(1-v)(1+z')}{1+z} - v(\gamma' + \kappa^2) + \frac{M^2 v}{4} (-z(1+z')(1-v) + z'(1-v-vz')) - m_s^2 \frac{v(1-v)(z'-z)}{1+z} - \mu^2(1-u-v+\xi u) \quad (\text{C.1})$$

$$f^{(2)}(k_d^-, \gamma', z'; u, v) = -\gamma \frac{v(1-v)(1-z')}{1-z} - v(\gamma' + \kappa^2) + \frac{M^2 v}{4} (z(1-z')(1-v) - z'(1-v+vz')) - m_f^2 \frac{v(1-v)(z-z')}{1-z} - \mu^2(1-u-v+\xi u) \quad (\text{C.2})$$

Definindo

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{ij}^{(a)}(k^-) &= \frac{c_{ij}^{(a)}(k^-)}{(k^-)^2 + z M k^- + M^2 z^2/4 + 4\gamma}, \\ \tilde{d}_{ij}^{(a)}(k^-) &= \frac{d_{ij}^{(a)}(k^-)}{(k^-)^2 + z M k^- + M^2 z^2/4 + 4\gamma}, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

temos:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{11}^{(0)}(k_u^-) &= v^2 \left[\gamma \frac{1}{(1+z)^2} + m_s^2 \frac{1-z}{2(1+z)^2} - \frac{M m_f z'}{4(1+z)} - \frac{M^2 ((1-z) + (z'-z))}{8(1+z)} \right] \times \\ &\left[\gamma(1-v)(1+z') + m_s^2 ((1-v)(z'-z) - (1+z)) + \frac{M^2}{4} (1+z)(1+z')((1+z) + v(z'-z)) \right] \\ \tilde{d}_{11}^{(2)}(k_u^-) &= \gamma \frac{v}{1+z} + m_s^2 \frac{v(1-z)}{2(1+z)} - \frac{1}{4} M m_f z' v - \frac{M^2 v}{8} ((1-z) + (z'-z)) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

• Coeficientes para $k^- = k_u^-$:

$$d_{11}^{(0)} = -\frac{v^2}{32(1+z)^2} [-4 m_s^2(-1+z) + M^2(1+z)(-1+2z-z') - 2 m_f M(1+z)z' + 8\gamma] \times \\ [M^2(1+z)(1+z')(-1+(-1+v)z-vz') - 4 m_s^2(-1+(-2+v)z+z'-vz') \\ + 4(-1+v)(1+z')\gamma] \quad (C.5)$$

$$d_{12}^{(0)} = \frac{v^2}{64(1+z)^2} \left[M(1+z)(1+z')(-1+(-1+v)z-vz') - 4 \frac{m_s^2}{M}(-1+(-2+v)z+z'-vz') \right. \\ \left. + \frac{4}{M}(-1+v)(1+z')\gamma \right] [2 m_f M(1+z)(z' - (1+z')(z-vz+ vz')) + M^2(1+z)(-vz'(1+z') \\ + M z(-1+v+z'+vz')) + 8 \frac{m_f}{M}(-1+v)(m_s^2(-z+z') + \gamma + z'\gamma) + 4 (m_s^2(vz' - z(-1+v+z')) \\ + (-1+v+z'+vz')\gamma)] \quad (C.6)$$

$$d_{21}^{(0)} = -\frac{1}{(16(1+z))} [(Mv^2(2m_f + M(-1+z'))(-M^2(1+z)(1+z')(-1+(-1+v)z-vz') \\ + 4m_s^2(-1+(-2+v)z+z'-vz') - 4(-1+v)(1+z')\gamma)] \quad (C.7)$$

$$d_{22}^{(0)} = \frac{v^2}{32(1+z)^2} \left[\frac{1}{M^2}(1+z)(1+z')(-1+(-1+v)z-vz') - 4 m_s^2(-1+(-2+v)z+z'-vz') \right. \\ \left. + 4(-1+v)(1+z')\gamma \right] [-2 m_f M(1+z)z' + (1+z)(2z' - (1+z')(z-vz+ vz')) \\ + 4(-1+v)(m_s^2(-z+z') + \gamma + z'\gamma)] \quad (C.8)$$

$$d_{11}^{(2)} = \frac{v(-4m_s^2(-1+z) + M^2(1+z)(-1+2z-z') - 2Mm_f(1+z)z' + 8\gamma)}{8(1+z)} \quad (C.9)$$

$$d_{12}^{(2)} = \frac{v}{(16(1+z))} [4 m_s^2 (-1+z' - 2vz' + z(-3+2v+z')) - 2 m_f M(1+z)(-1-2(1+z') \times \\ (z-vz+ vz')) - M^2(1+z)(2z(-1+v+vz') - (1+z')(1+2vz')) - 8 (-1+v+vz')\gamma \\ + \frac{8 m_f}{M} (m_s^2(-1-3z+2vz+2z'-2vz') - 2(-1+v)(1+z')\gamma)] \quad (C.10)$$

$$d_{21}^{(2)} = -\frac{M v}{4}(2m_f + M(-1+z')) \quad (C.11)$$

$$\begin{aligned}
 d_{22}^{(2)} = & -\frac{v}{(8(1+z))} [(-2 m_f M(1+z)z' + 4 m_s^2(1 + (3-2v)z + 2(-1+v)z') \\
 & + M^2(1+z)(-1+z' - 2(1+z')(z-vz+ vz')) + 8(-1+v)(1+z')\gamma]
 \end{aligned} \tag{C.12}$$

$$\begin{aligned}
 d_{11}^{(3)} = & \frac{1}{2(M^4(1+z)^4 - 8M^2(1+z)^2(m_s^2 - \gamma) + 16(m_s^2 + \gamma)^2)} [4M^3 m_f(1+z)^2(z(3+v(-2+z')) - vz') \\
 & - M^4(1+z)^2((-3+2v)(1+z(-1+2z)) + 2v(-1+3z)z') + 16(-3+2v)(m_s^2(-1+z) - 2\gamma) \times \\
 & (m_s^2 + \gamma) + 4M^2(1+z)(m_s^2((-3+2v)(2+(-2+z)z) + 2v(-1+2z)z') \\
 & + (-3+12z+v(2-8z-6z'))\gamma) + 16M m_f(1+z)(m_s^2(-3z+2vz+vz') \\
 & + (3+v(-2+z'))\gamma)]
 \end{aligned} \tag{C.13}$$

$$\begin{aligned}
 d_{12}^{(3)} = & \frac{1}{4(M^4(1+z)^4 - 8M^2(1+z)^2(m_s^2 - \gamma) + 16(m_s^2 + \gamma)^2)} [2M^3 m_f(1+z)^2(1+(5-2z)z \\
 & + 4v^2(1+z)^2 z' - 2v(1+3z+(3+z(4+3z))z')) + M^4(1+z)^2(1+z(-1+10z) \\
 & + 4v^2(1+z)^2 z' - 2v(1+z+2z'+7zz'+z^2(4+z')) + 32\frac{m_f}{M}(m_s^2 + \gamma)(m_s^2(1+3z+4v^2 z' \\
 & - 2v(1+z+3z')) + 2(-1+v(-3+2v)z')\gamma) - 4M^2(1+z)(m_s^2(2+z(-4+15z) \\
 & + 2v(-2+z^2(-5+z') + 4(-1+v)z' + 4(-2+v)zz')) + \gamma + 2(v-10z+8vz \\
 & + v(7+2z-4v(1+z))z')\gamma) - 8M m_f(1+z)(m_s^2(2+(8-3z)z + 2v(-2+z(-4+z-4z') - 6z') \\
 & + 8v^2(1+z)z') + (-5+6v+4z+4v(2+3z-2v(1+z))z')\gamma) + 16(m_s^4(1-3z+6z^2+4v^2 z' \\
 & - 2v(1+2z'+z(-1+2z+z'))) + m_s^2(5-15z+2v(-3+5z-(3-4v+z)z'))\gamma + 2(5+2v^2 z' \\
 & - v(4+z'))\gamma^2)]
 \end{aligned} \tag{C.14}$$

$$\begin{aligned}
 d_{21}^{(3)} = & \frac{1}{M^4(1+z)^4 - 8M^2(1+z)^2(m_s^2 - \gamma) + 16(m_s^2 + \gamma)^2} [M(1+z)(2M^2 m_f(1+z)(3-3z \\
 & + 2v(-1+z+2z')) + M^3(1+z)(-3+9z+2v(1-3z+(-3+z)z')) + 8m_f(-3+2v)(m_s^2 + \gamma) \\
 & + 4M(m_s^2(3-6z+2v(-1+2z+z')) + (9+2v(-3+z'))\gamma)]
 \end{aligned} \tag{C.15}$$

$$\begin{aligned}
 d_{22}^{(3)} = & \frac{1}{(2(M^4(1+z)^4 - 8M^2(1+z)^2(m_s^2 - \gamma) + 16(m_s^2 + \gamma)^2))} [-4M^3m_f(1+z)^2(z(3+v(-2+z')) \\
 & -vz') + M^4(1+z)^2(1+11z-2(v+5vz+z^2)+2v(-4-3z(1+z)+2v(1+z)^2)z') \\
 & -16Mm_f(1+z)(m_s^2((-3+2v)z+ vz') + (3+v(-2+z'))\gamma) + 16(m_s^2 + \gamma)(m_s^2(1+3z+4v^2z' \\
 & -2v(1+z+3z')) + 2(-1+v(-3+2v)z')\gamma) - 4M^2(1+z)(m_s^2(2+(14-3z)z+2v(-2+z(-6 \\
 & +z-4z')-7z') + 8v^2(1+z)z') + (-11+4z+2v(5+(3+6z-4v(1+z))z'))\gamma)] \quad (C.16)
 \end{aligned}$$

$$d_{12}^{(4)} = \frac{M+2m_f}{4M} \quad (C.17)$$

$$d_{22}^{(4)} = \frac{1}{2} \quad (C.18)$$

$$\begin{aligned}
 d_{11}^{(5)} = & -\frac{1}{(2M^4(1+z)^4 - 16M^2(1+z)^2(m_s^2 - \gamma) + 32(m_s^2 + \gamma)^2)} [(1+vz')(4M^3m_fz(1+z)^2 \\
 & +M^4(1+z+z^2+3z^3+2z^4) - 16Mm_f(1+z)(m_s^2z - \gamma) - 16(m_s^2(-1+z) - 2\gamma)(m_s^2 + \gamma) \\
 & -4M^2(1+z)(m_s^2(2+(-2+z)z) + \gamma - 4z\gamma))] \quad (C.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{12}^{(5)} = & \frac{(1+vz')}{(4(M^4(1+z)^4 - 8M^2(1+z)^2(m_s^2 - \gamma) + 16(m_s^2 + \gamma)^2))} [(2M^3m_f(1+z)^2((-1+z)z \\
 & +v(1+z)^2z') + M^4(1+z)^2(z-3z^2+v(1+z)^2z') - 32\frac{m_f}{M}(m_s^2 + \gamma)(m_s^2(z-vz') \\
 & -(1+vz')\gamma) + 4M^2(1+z)(m_s^2(z(-2+5z) - 2v(1+z)z') + (1-6z+2v(1+z)z')\gamma) \\
 & +8Mm_f(1+z)(-m_s^2((-2+z)z+2v(1+z)z') + (-1+2z+2v(1+z)z')\gamma) \\
 & +16(m_s^4(z-2z^2+vz') + m_s^2(-1+5z+2vz')\gamma + (-3+vz')\gamma^2))] \quad (C.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{21}^{(5)} = & -\frac{M(1+z)(1+vz')}{(M^4(1+z)^4 - 8M^2(1+z)^2(m_s^2 - \gamma) + 16(m_s^2 + \gamma)^2)} [(M^3(1+z)(-1+3z) \\
 & -2M^2m_f(-1+z^2) - 8m_f(m_s^2 + \gamma) + 4M(m_s^2(1-2z) + 3\gamma))] \quad (C.21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{22}^{(5)} = & \frac{(1 + vz')}{(2(M^4(1+z)^4 - 8M^2(1+z)^2(m_s^2 - \gamma) + 16(m_s^2 + \gamma)^2))} [(4M^3 m_f z(1+z)^2 \\
 & + M^4(1+z)^2((-3+z)z + v(1+z)^2 z') - 16M m_f(1+z)(m_s^2 z - \gamma) \\
 & - 16(m_s^2 + \gamma)(m_s^2(z - vz') - (1 + vz')\gamma) - 4M^2(1+z)(m_s^2((-4+z)z + 2v(1+z)z') \\
 & + 3\gamma - 2(z + v(1+z)z')\gamma)] \quad (C.22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{11}^{(6)} = & -\frac{2M(-1+v)(1+z)}{(M^4(1+z)^4 - 8M^2(1+z)^2(m_s^2 - \gamma) + 16(m_s^2 + \gamma)^2)} [(M^3(1+z)(-1+3z) \\
 & - 2M^2 m_f(-1+z^2) - 8m_f(m_s^2 + \gamma) + 4M(m_s^2(1-2z) + 3\gamma)] \quad (C.23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{12}^{(6)} = & \frac{(-1+v)}{(M^4(1+z)^4 - 8M^2(1+z)^2(m_s^2 - \gamma) + 16(m_s^2 + \gamma)^2)} [(M^4(1+z)^2((-3+z)z + v(1+z)^2) \\
 & + 2M^3 m_f(1+z)^2(-1-z^2 + v(1+z)^2) + 32\frac{m_f}{M}(-1+v)(m_s^2 + \gamma)^2 + 16(m_s^2 + \gamma)(m_s^2(v-z) \\
 & + \gamma + v\gamma) + 16M m_f(1+z)(-m_s^2(-1+v + vz) + (v + (-1+v)z)\gamma) \\
 & + 4M^2(1+z)(-m_s^2((-4+z)z + 2v(1+z)) - 3\gamma + 2(v+z + vz)\gamma)] \quad (C.24)
 \end{aligned}$$

$$d_{21}^{(6)} = \frac{4M^2(-1+v)(1+z)[M(4m_f + M(-3+z))(1+z) + 4(m_s^2 + \gamma)]}{M^4(1+z)^4 - 8M^2(1+z)^2(m_s^2 - \gamma) + 16(m_s^2 + \gamma)^2} \quad (C.25)$$

$$\begin{aligned}
 d_{22}^{(6)} = & \frac{2(-1+v)}{(M^4(1+z)^4 - 8M^2(1+z)^2(m_s^2 - \gamma) + 16(m_s^2 + \gamma)^2)} [(-2M^3 m_f(-1+z)(1+z)^2 \\
 & + M^4(1+z)^2(-2+z - z^2 + v(1+z)^2) - 8M m_f(1+z)(m_s^2 + \gamma) + 16(-1+v)(m_s^2 + \gamma)^2 \\
 & + 4M^2(1+z)(m_s^2(3 - 2v(1+z)) + \gamma + 2(v + (-1+v)z)\gamma)] \quad (C.26)
 \end{aligned}$$

• Coeficiêntes em $k^- = k_d^-$:

$$d_{11}^{(0)} = -\frac{(M + 2m_f)v^2(2m_f + M(-1 + z'))}{32(-1 + z)} [(4m_f^2(-1 + (-2 + v)z + z' - vz') - M^2(-1 + z) \times (1 + z(3 - v + (-1 + v)z') + z'(-3 + v - vz')) + 4(-3 + v + z' - vz')\gamma)] \quad (C.27)$$

$$d_{12}^{(0)} = \frac{(M + 2m_f)v^2}{(64(-1 + z)^2)} \left[-4\frac{m_f^2}{M}(-1 + (-2 + v)z + z' - vz') + M(-1 + z)(1 + z(3 - v + (-1 + v)z') + z'(-3 + v - vz')) + \frac{4}{M}(3 - v + (-1 + v)z')\gamma \right] [-2m_f(-1 + z)z' + M(-1 + z)(-1 + z') \times ((-1 + v)z - vz') + 4(-1 + v)(m_f^2(-z + z') + (-1 + z')\gamma)] \quad (C.28)$$

$$d_{21}^{(0)} = -\frac{Mv^2}{16(-1 + z)} \{ [2m_f + M(-1 + z')] [4m_f^2(-1 + (-2 + v)z + z' - vz') - M^2(-1 + z) \times (1 + z(3 - v + (-1 + v)z') + z'(-3 + v - vz')) + 4(-3 + v + z' - vz')\gamma] \} \quad (C.29)$$

$$d_{22}^{(0)} = \frac{v^2}{32(-1 + z)^2} [-4m_f^2(-1 + (-2 + v)z + z' - vz') + M^2(-1 + z)(1 + z(3 - v + (-1 + v)z') + z'(-3 + v - vz')) + 4(3 - v + (-1 + v)z')\gamma] [-2Mm_f(-1 + z)z' + M^2(-1 + z)(-1 + z') \times ((-1 + v)z - vz') - 4(-1 + v)(m_f^2(z - z') + \gamma - z'\gamma)] \quad (C.30)$$

$$d_{11}^{(2)} = -\frac{v}{8}(M + 2m_f)(2m_f + M(-1 + z')) \quad (C.31)$$

$$d_{12}^{(2)} = -\frac{v(M + 2m_f)}{16M(-1 + z)} (-2Mm_f(-1 + z)z' + 4m_f^2(1 + (3 - 2v)z + 2(-1 + v)z') + M^2(-1 + z)(1 + 2z(2 - v + (-1 + v)z') + z'(-3 + 2v - 2vz')) + 8(2 + v(-1 + z') - z')\gamma) \quad (C.32)$$

$$d_{21}^{(2)} = -\frac{Mv}{4}[2m_f + M(-1 + z')] \quad (C.33)$$

$$d_{22}^{(2)} = \frac{1}{(8(-1 + z))} [v(2Mm_f(-1 + z)z' + 4m_f^2(-1 - 3z + 2vz + 2z' - 2vz')) - M^2(-1 + z)(1 + 2z(2 - v + (-1 + v)z') + z'(-3 + 2v - 2vz')) + 8(-2 + v + z' - vz')\gamma] \quad (C.34)$$

$$d_{11}^{(3)} = \frac{(M + 2m_f)(-1 + z)((M + 2m_f)(-3 + 2v) + 2Mvz')}{2(M + 2m_f - Mz)^2 + 8\gamma} \quad (\text{C.35})$$

$$\begin{aligned} d_{12}^{(3)} = & \frac{(M + 2m_f)}{(4M((M + 2m_f - Mz)^2 + 4\gamma))} (-4Mm_f(-1 + z)(1 - 2v + v(-5 + 4v)z') \\ & + 4m_f^2(1 + 3z + 4v^2z' - 2v(1 + z + 3z')) + M^2(-1 + z)(-1 + 4z \\ & + 2v(1 - 2z + (2 + 2v(-1 + z) - 3z)z')) + 8(2 + v(-2 + (-3 + 2v)z'))\gamma) \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

$$d_{21}^{(3)} = \frac{M(-1 + z)((M + 2m_f)(-3 + 2v) + 2Mvz')}{(M + 2m_f - Mz)^2 + 4\gamma} \quad (\text{C.37})$$

$$\begin{aligned} d_{22}^{(3)} = & \frac{1}{(2(M + 2m_f - Mz)^2 + 8\gamma)} [-4Mm_f(-1 + z)(1 - 2v + v(-5 + 4v)z') \\ & + 4m_f^2(1 + 3z + 4v^2z' - 2v(1 + z + 3z')) + M^2(-1 + z)(-1 + 4z + 2v(1 - 2z \\ & + (2 + 2v(-1 + z) - 3z)z')) + 8(2 + v(-2 + (-3 + 2v)z'))\gamma] \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

$$d_{12}^{(4)} = \frac{(M + 2m_f)}{4M} \quad (\text{C.39})$$

$$d_{22}^{(4)} = \frac{1}{2} \quad (\text{C.40})$$

$$d_{11}^{(5)} = \frac{(M + 2m_f)^2(-1 + z)(1 + vz')}{2(M + 2m_f - Mz)^2 + 8\gamma} \quad (\text{C.41})$$

$$\begin{aligned} d_{12}^{(5)} = & \frac{(M + 2m_f)(1 + vz')}{4((M + 2m_f - Mz)^2 + 4\gamma)} [(-4m_f v(-1 + z)z' - 4\frac{m_f^2}{M}(z - vz') \\ & + M(-1 + z)(-z + v(-1 + z)z') + \frac{4}{M}(-1 + vz')\gamma)] \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

$$d_{21}^{(5)} = \frac{M(M + 2m_f)(-1 + z)(1 + vz')}{(M + 2m_f - Mz)^2 + 4\gamma} \quad (\text{C.43})$$

$$\begin{aligned} d_{22}^{(5)} = & \frac{1}{2(M + 2m_f - Mz)^2 + 8\gamma} [((1 + vz')(-4Mm_f v(-1 + z)z' - 4m_f^2(z - vz') \\ & + M^2(-1 + z)(-z + v(-1 + z)z') + 4(-1 + vz')\gamma)] \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

$$d_{11}^{(6)} = \frac{(2M(M + 2m_f)(-1 + v)(-1 + z))}{((M + 2m_f - Mz)^2 + 4\gamma)} \quad (\text{C.45})$$

$$d_{12}^{(6)} = \frac{1}{(M((M + 2m_f - Mz)^2 + 4\gamma))} [(M + 2m_f)(-1 + v)(M^2(v(-1 + z) - z)(-1 + z) + 2Mm_f(-1 - 2v(-1 + z) + z) + 4(-1 + v)(m_f^2 + \gamma))] \quad (\text{C.46})$$

$$d_{21}^{(6)} = \frac{(4M^2(-1 + v)(-1 + z))}{(M + 2m_f - Mz)^2 + 4\gamma} \quad (\text{C.47})$$

$$d_{22}^{(6)} = \frac{1}{(M + 2m_f - Mz)^2 + 4\gamma} [2(-1 + v)(M^2(v(-1 + z) - z)(-1 + z) + 2Mm_f(-1 - 2v(-1 + z) + z) + 4(-1 + v)(m_f^2 + \gamma))] \quad (\text{C.48})$$

Apêndice D - Coeficientes para equação de BS no limite ultravioleta

Nesse apêndice estão listados os coeficientes da equação de BS no limite ultravioleta, ou seja, o limite ultravioleta da Eq. (4.65).

$$f^{(2)}(k_u^-, \gamma', z'; u, v) = -\gamma \frac{v(1-v)(1+z')}{1+z} - v\gamma' \quad (\text{D.1})$$

$$f^{(2)}(k_d^-, \gamma', z'; u, v) = -\gamma \frac{v(1-v)(1-z')}{1-z} - v\gamma' \quad (\text{D.2})$$

Definindo

$$\tilde{c}_{ij}^{(a)}(k^-) = \frac{c_{ij}^{(a)}(k^-)}{(k^-)^2 + z M k^- + M^2 z^2/4 + 4\gamma}, \quad (\text{D.3})$$

temos:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{11}^{(0)}(k_u^-) &= -\gamma \frac{2-v}{1+z} \\ \tilde{c}_{11}^{(2)}(k_u^-) &= 0 \\ \tilde{c}_{12}^{(0)}(k_u^-) &= -\gamma \frac{4-v((5-v)+(3-v)z')}{4(1+z)} \\ \tilde{c}_{12}^{(2)}(k_u^-) &= \frac{1}{4} \\ \tilde{c}_{21}^{(0)}(k_u^-) &= \tilde{c}_{21}^{(2)}(k_u^-) = 0 \\ \tilde{c}_{22}^{(0)}(k_u^-) &= \gamma \frac{v(1-v)(1+z')}{2(1+z)} \\ \tilde{c}_{22}^{(2)}(k_u^-) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}_{11}^{(0)}(k_d^-) &= \tilde{c}_{11}^{(2)}(k_d^-) = 0 \\
 \tilde{c}_{12}^{(0)}(k_d^-) &= -\gamma \frac{(1-v)(4-v(1-z'))}{4(1-z)} \\
 \tilde{c}_{12}^{(2)}(k_d^-) &= \frac{1}{4} \\
 \tilde{c}_{21}^{(0)}(k_d^-) &= \tilde{c}_{21}^{(2)}(k_d^-) = 0 \\
 \tilde{c}_{22}^{(0)}(k_d^-) &= -\gamma \frac{(1-v)(4-v(1-z'))}{2(1-z)} \\
 \tilde{c}_{22}^{(2)}(k_d^-) &= \frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{D.5}$$

Definindo

$$\tilde{d}_{ij}^{(a)}(k^-) = \frac{d_{ij}^{(a)}(k^-)}{(k^-)^2 + z M k^- + M^2 z^2 / 4 + 4\gamma}, \tag{D.6}$$

temos:

$$\begin{aligned}
 \tilde{d}_{11}^{(0)}(k_u^-) &= v^2 \gamma^2 \frac{1}{(1+z)^2} (1-v)(1+z') \\
 \tilde{d}_{11}^{(2)}(k_u^-) &= \gamma \frac{v}{1+z} \\
 \tilde{d}_{11}^{(3)}(k_u^-) &= 3 - 2v \\
 \tilde{d}_{11}^{(4)}(k_u^-) &= 0 \\
 \tilde{d}_{11}^{(5)}(k_u^-) &= -(1+z'v) \\
 \tilde{d}_{11}^{(6)}(k_u^-) &= 0 \\
 \tilde{d}_{12}^{(0)}(k_u^-) &= -\frac{v^2(1-v)(1+z')}{4(1+z)^2} (z'(1+v) - (1-v)) \\
 \tilde{d}_{12}^{(2)}(k_u^-) &= \gamma \frac{v(1-v(1+z'))}{2(1+z)} \\
 \tilde{d}_{12}^{(3)}(k_u^-) &= \frac{1}{2} (5 + 2v^2 z' - v(4+z')) \\
 \tilde{d}_{12}^{(4)}(k_u^-) &= \frac{1}{4} \\
 \tilde{d}_{12}^{(5)}(k_u^-) &= -\frac{1}{4} (3 - z'v)(1+z'v) \\
 \tilde{d}_{12}^{(6)}(k_u^-) &= -(1-v^2) \\
 \tilde{d}_{21}^{(0)}(k_u^-) &= \tilde{d}_{21}^{(2)}(k_u^-) = \tilde{d}_{21}^{(3)}(k_u^-) = \tilde{d}_{21}^{(4)}(k_u^-) = \tilde{d}_{21}^{(5)}(k_u^-) = \tilde{d}_{21}^{(6)}(k_u^-) = 0
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{d}_{22}^{(0)}(k_u^-) &= \gamma^2 \frac{v^2(1-v)^2(1+z')^2}{2(1+z)^2} \\
 \tilde{d}_{22}^{(2)}(k_u^-) &= \gamma \frac{v(1-v)(1+z')}{1+z} \\
 \tilde{d}_{22}^{(3)}(k_u^-) &= -1 - v(3-2v)z' \\
 \tilde{d}_{22}^{(4)}(k_u^-) &= \frac{1}{2} \\
 \tilde{d}_{22}^{(5)}(k_u^-) &= \frac{1}{2}(1+z'v)^2 \\
 \tilde{d}_{22}^{(6)}(k_u^-) &= 2(1-v)^2 \\
 \tilde{d}_{11}^{(0)}(k_d^-) &= \tilde{d}_{11}^{(2)}(k_d^-) = \tilde{d}_{11}^{(3)}(k_d^-) = \tilde{d}_{11}^{(4)}(k_d^-) = \tilde{d}_{11}^{(5)}(k_d^-) = \tilde{d}_{11}^{(6)}(k_d^-) = 0 \\
 \tilde{d}_{12}^{(0)}(k_d^-) &= \gamma^2 \frac{v^2(1-v)(1-z')}{4(1-z)^2} (3-z'-v(1-z')) \\
 \tilde{d}_{12}^{(2)}(k_d^-) &= \gamma v \frac{2-v-z'(1-v)}{2(1-z)} \\
 \tilde{d}_{12}^{(3)}(k_d^-) &= 1 + v^2 z' - \frac{1}{2}v(2+3z') \\
 \tilde{d}_{12}^{(4)}(k_d^-) &= \frac{1}{4} \\
 \tilde{d}_{12}^{(5)}(k_d^-) &= -\frac{1}{4}(1-v^2 z'^2) \\
 \tilde{d}_{12}^{(6)}(k_d^-) &= (1-v)^2 \\
 \tilde{d}_{21}^{(0)}(k_d^-) &= \tilde{d}_{21}^{(2)}(k_d^-) = \tilde{d}_{21}^{(3)}(k_d^-) = \tilde{d}_{21}^{(4)}(k_d^-) = \tilde{d}_{21}^{(5)}(k_d^-) = \tilde{d}_{21}^{(6)}(k_d^-) = 0 \\
 \tilde{d}_{22}^{(0)}(k_d^-) &= \gamma^2 \frac{v^2(1-v)(1-z')}{2(1-z)^2} (3-z'-v(1-z')) \\
 \tilde{d}_{22}^{(2)}(k_d^-) &= \gamma \frac{v(2-v-z'(1-v))}{1-z} \\
 \tilde{d}_{22}^{(3)}(k_d^-) &= 2-v(2+(3-2v)z') \\
 \tilde{d}_{22}^{(4)}(k_d^-) &= \frac{1}{2} \\
 \tilde{d}_{22}^{(5)}(k_d^-) &= -\frac{1}{2}(1-v^2 z'^2) \\
 \tilde{d}_{22}^{(6)}(k_d^-) &= 2(1-v)^2
 \end{aligned} \tag{D.8}$$

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO <p style="text-align: center;">DM</p>	2. DATA <p style="text-align: center;">25 de agosto de 2022</p>	3. REGISTRO N° <p style="text-align: center;">DCTA/ITA/DM-093/2022</p>	4. N° DE PÁGINAS <p style="text-align: center;">83</p>
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: <p>Estado ligado férmion-bóson em diferentes calibres.</p>			
6. AUTOR(ES): <p>Aline Camargo Noronha</p>			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): <p>Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA</p>			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: <p>Estado ligado, Equação de Bethe-Salpeter, Espaço de Minkowski.</p>			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: <p>Equação de Bethe-Salpeter; Férmio; Teoria de calibre; Espaço de Minkowski; Bósons; Física nuclear; Física.</p>			
10. APRESENTAÇÃO: <p style="text-align: right;">X Nacional Internacional</p> <p>ITA, São José dos Campos. Curso de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Física Nuclear. Orientador: Prof. Dr. Wayne Leonardo Silva de Paula. Defesa em 05/08/2022. Publicada em 2022.</p>			
11. RESUMO: <p>Nesta dissertação estudamos o estado ligado $(1/2)^+$ em diferentes calibres covariantes. O sistema analisado é constituído por um par férmion-bóson com interação vetorial na aproximação de escada, com propagadores livres e vértices pontuais. Tal modelo pode ser utilizado para descrever o próton, constituído por um par quark-diquark (ALEXANDROU; LUCINI, 2006). Para descrever a formação do estado ligado, resolvemos a equação de Bethe-Salpeter (BETHE, 1951) no espaço de Minkowski. Para isso, utilizamos a representação integral de Nakanishi (NAKANISHI, 1971) para as componentes da amplitude de Bethe-Salpeter. Realizamos a projeção da equação de Bethe-Salpeter na frente de luz e obtivemos um sistema de equações integrais acopladas para as funções peso de Nakanishi para diferentes calibres. Estudamos esse sistema no limite ultravioleta e mostramos que ele apresenta invariância de escala. Mostramos que a constante de acoplamento crítica aumenta, à medida que se muda do calibre de Feynman para o de Landau. Por fim, estudamos como a estrutura da autofunção varia com o calibre e com o comportamento assintótico do momento transversal.</p>			
12. GRAU DE SIGILO: <p style="text-align: center;">(X) OSTENSIVO () RESERVADO () SECRETO</p>			