

Tese apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Física Nuclear.

Samuel Isidoro dos Santos JR

TEORIAS ALTERNATIVAS À RELATIVIDADE GERAL APLICADAS A OBJETOS COMPACTOS

Tese aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:

Prof. Dr. Manuel Máximo Bastos Malheiro de Oliveira

Orientador

Prof. Dr. Pedro Henrique Ribeiro da Silva Moraes

Coorientador

Prof. Dr. Pedro Teixeira Lacava

Pró-Reitor de Pós-Graduação

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP - Brasil
2019

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Divisão de Informação e Documentação

Santos JR, Samuel Isidoro dos

TEORIAS ALTERNATIVAS À RELATIVIDADE GERAL APLICADAS A OBJETOS COMPACTOS / Samuel Isidoro dos Santos JR.

São José dos Campos, 2019.

66f.

Tese de Doutorado – Curso de Física. Área de Física Nuclear – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2019. Orientador: Prof. Dr. Manuel Máximo Bastos Malheiro de Oliveira. Coorientador: Prof. Dr. Pedro Henrique Ribeiro da Silva Moraes.

1. Modelos Alternativos de RG. 2. Objetos Compactos. 3. Estrelas de Nêutron. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Título.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SANTOS JR, Samuel Isidoro dos. **TEORIAS ALTERNATIVAS À RELATIVIDADE GERAL APLICADAS A OBJETOS COMPACTOS**. 2019. 66f. Tese de Doutorado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

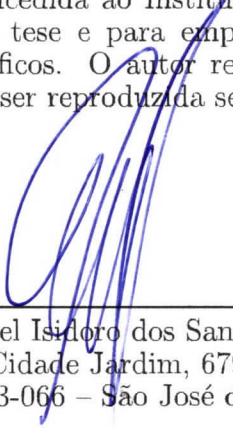
CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Samuel Isidoro dos Santos JR

TÍTULO DO TRABALHO: **TEORIAS ALTERNATIVAS À RELATIVIDADE GERAL APLICADAS A OBJETOS COMPACTOS**.

TIPO DO TRABALHO/ANO: Tese / 2019

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta tese e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese pode ser reproduzida sem a autorização do autor.



Samuel Isidoro dos Santos JR
Av. Cidade Jardim, 679
12.233-066 – São José dos Campos–SP

TEORIAS ALTERNATIVAS À RELATIVIDADE GERAL APLICADAS A OBJETOS COMPACTOS

Samuel Isidoro dos Santos JR

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rubens Marinho	Presidente	-	ITA
Prof. Dr. Manuel Máximo Bastos Malheiro de Oliveira	Orientador	-	ITA
Prof. Dr. Pedro Henrique Ribeiro da Silva Moraes	Coorientador	-	ITA
Prof. Dr. Wayne de Paula	Membro Interno	-	ITA
Prof. Dr. Jaziel Goulart Coelho	Membro Externo	-	UTFPR
Prof. Dr. José Carlos Neves de Araújo	Membro Externo	-	INPE

A todos que lerem.

Agradecimentos

Agradeço encarecidamente à Capes, em nome de todos os pagadores de impostos, pelo financiamento de minha pesquisa, ao Programa de Pós-Graduação em Física do ITA e ao ICRA.Net que me ajudou a participar do evento MGXIV e me fez ter uma importante experiência científica internacional. Agradeço toda a atenção dada na minha orientação pelo Prof^o. Manuel Máximo Bastos Malheiro de Oliveira e ao meu Coorientador, sempre presente, Pedro Henrique Ribeiro da Silva Moraes. Agradeço imensamente a colaboração do colega Geanderson Carvalho pelas valiosas discussões no campo da astrofísica. Finalmente, meu sincero agradecimento às pessoas importantes durante essa jornada: Meu pai, Samuel Isidoro dos Santos, minha mãe, Eveline Cardoso da Silva dos Santos, Ana Lucia Dencker, Lucas Alves de Souza, Elisa Assencio e Diego Augusto da Silva.

*"Sometimes science is a lot more art,
than science."*

— DR RICK SANCHEZ

Resumo

As soluções para a equação de Tolmann-Oppenheimer-Volkoff fornecem informações valiosas sobre as características macroscópicas previstas para objetos astrofísicos compactos dentro da teoria da Relatividade Geral de Einstein. Tais características são sensíveis à equação de estado considerada para a matéria nuclear, mas também à teoria gravitacional utilizada. O presente trabalho tem como principal propósito a obtenção de soluções da equação de equilíbrio hidrostático para estrelas relativísticas em teorias de gravitação alternativas à Relatividade Geral. Foi analisado em particular as teorias $f(R, T)$, $f(R, \mathcal{L}_m)$ e modelos de Brana. Estas teorias surgiam na literatura num contexto cosmológico, mas estamos agora aplicando elas num contexto astrofísico ao estudo de estrelas compactas, com intuito de dar conta de recentes observações astronômicas, como pulsares massivos de aproximadamente duas massas solares, que são dificilmente explicados via Relatividade Geral. Novas equações de equilíbrio hidrostático e resultados numéricos são apresentados. Mostramos que Estrelas de Nêutrons e de Quarks massivas são bem descritas nestas teorias alternativas da gravidade, em especial as Estrelas de Nêutrons, onde observou-se o valor de massa máxima mais sensível no caso conservado. Pela primeira vez na literatura, mostramos que a teoria $f(R, T)$ conservada pode ser desenvolvida e aplicada no contexto astrofísico, em particular no estudo de objetos compactos.

Abstract

The solutions for the Tolmann-Oppenheimer-Volkoff equation bring valuable informations about the predicted macroscopical features of compact astrophysical objects. Such features are sensitive to the equation of state considered for nuclear matter and the background gravitational theory. The present work in its main purpose is dedicated to obtain the solutions of the hydrostatic equilibrium equation for relativistic stars in alternative theories of gravity. We investigated in particular $f(R, T)$, $f(R, \mathcal{L})$ theories and Brane world models. Such theories rise in the literature in a cosmological context but now are applied in astrophysics to study compact objects in order to explain recent astrophysical observations of massive pulsars with two solar masses, that are difficult to describe in Einstein General Relativity. New hydrostatic equilibrium equations are obtained and numerical results presented. It is shown that is possible to describe very massive neutron and quarks stars within these alternative gravitational theories, specially in the neutron stars situation, where showed the maximum mass value more sensitive to the conservative case. For the first time in the literature, we have shown that the conserved $f(R, T)$ theory can be developed and applied in the astrophysical context, in particular in the study of compact objects.

Lista de Abreviaturas e Siglas

FIGURA 5.1 – Relação de massa-raio para o modelo conservativo de gravidade $f(R, T)$ com equação de estado linear $p = \omega\rho$ para o intervalo de densidade central entre $50-800 \text{ MeV}/\text{fm}^3$. Vários valores de λ foram testados e foi escolhido $\omega = 0.28$	45
FIGURA 5.2 – Massa versus densidade central de energia para o modelo conservativo da gravidade $f(R, T)$ com equação de estado linear $p = \omega\rho$ para vários valores de λ e com $\omega = 0.28$. No intervalo de densidade de energia central escolhido ($50 - 800 \text{ MeV}/\text{fm}^3$, $\lambda = -1.5 \times 10^{-4}$ é o valor no modelo onde não existe mais qualquer estrela estável. . . .	47
FIGURA 5.3 – Massa versus densidade central para o modelo linear de gravidade $f(R, T)$ não conservada, isto é, $f(R, T) = R + 2\chi T$. Alguns valores de χ e $\omega = 0.28$ foram utilizados.	47
FIGURA 5.4 – Relação de massa-raio de ENs no modelo conservativo de $f(R, T)$. Muitos valores de α são analisados, e $\Gamma = 5/3$	48
FIGURA 5.5 – Massa total versus densidade central de energia de ENs($\Gamma = 5/3$) para modelos conservadores de gravidade $f(R, T)$ usando vários valores de α . O ponto de massa máximo marca o critério de instabilidade.	48
FIGURA 5.6 – Relação massa-raio para o modelo de sacola do MIT na teoria de gravidade $f(R, T)$. Diversos valores de λ foram utilizados, com $\omega = 0.28$ e $B = 60 \text{ MeV}/\text{fm}^3$	50
FIGURA 5.7 – Relação massa versus densidade central para o modelo de sacola do MIT na teoria de gravidade $f(R, T)$. Diversos valores de λ foram utilizados, com $\omega = 0.28$ e $B = 60 \text{ MeV}/\text{fm}^3$	50
FIGURA 5.8 – Relação massa-raio em ENs. Os círculos magenta marcam os valores de massa máxima para cada curva.	51
FIGURA 5.9 – Relação massa-densidade central em ENs. Os círculos magenta marcam os valores de massa máxima para cada curva.	52

EN	Estrelas de Nêutrons
EQ	Estrelas de Quark
RG	Relatividade Geral
RS	Randall-Sundrum
SS	Sahni-Shtanov
TOV	Tolman-Oppenheimer-Volkof
Λ CDM	Lambda Cold Dark Matter

Lista de Símbolos

$G_{\mu\nu}$	Tensor de Einstein
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
$T_{\mu\nu}$	Tensor Energia-Momento
$\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu}$	Símbolo de Christoffel
κ	$8\pi\frac{G}{c^4}$
M_{\odot}	Massa Solar

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
2	AS EQUAÇÕES DE CAMPO DA RELATIVIDADE GERAL E A EQUAÇÃO DE TOLMAN-OPPENHEIMER-VOLKOFF	19
2.1	As Equações de Campo da Relatividade Geral	19
2.2	Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff	20
3	GRAVIDADE MODIFICADA	22
3.1	Gravidade $f(R)$	23
3.2	Gravidade $f(R, T)$	24
3.2.1	Cosmologia em gravidade $f(R, T)$ conservada	26
3.3	Gravidade $f(R, \mathcal{L}_m)$	28
3.4	Gravidade no Mundo Brana	29
3.4.1	Modelo de Sahni-Shtanov	31
4	TOV EM GRAVIDADE MODIFICADA	33
4.1	Equação de equilíbrio hidrostático na teoria de $f(R, T)$ conservada para diversas equações de estado	33
4.1.1	A equação de estado linear	33
4.1.2	A equação de estado politrópica	36
4.1.3	A equação de estado do modelo de sacola do MIT	37
4.2	Equação de equilíbrio hidrostático na teoria de $f(R, \mathcal{L}_m)$	38
4.3	Equação de equilíbrio hidrostático no Mundo Brana	39
4.3.1	Randall-Sundrum	39

4.3.2	Equação de equilíbrio hidrostático no modelo Sahni-Shtanov	41
4.3.3	Equação de equilíbrio hidrostático no modelo Randall-Sundrum com <i>Warp-factor</i>	43
5	RESULTADOS	45
5.1	Resultados para teoria de gravidade $f(R, T)$ conservada com equação de estado linear	45
5.1.1	Resultados para teoria de gravidade $f(R, T)$ conservada com equação de estado politrópica	48
5.1.2	Resultados para teoria de gravidade $f(R, T)$ conservada com equação de estado do modelo de sacola do MIT	49
5.2	Resultados numéricos para teoria de gravidade $f(R, \mathcal{L}_m)$	51
6	CONCLUSÕES	53
	REFERÊNCIAS	56

1 INTRODUÇÃO

A teoria da Relatividade Geral (RG), proposta por A. Einstein em 1915 (EINSTEIN, 1915) para explicar a força gravitacional, foi depois utilizada na descrição do universo em modelos cosmológicos. Aplicações desta teoria ocorrem para estrelas relativísticas, conhecidas como objetos compactos, foram também aplicadas ao estudo de Estrelas de Nêutrons (ENs) e pulsares. Na elaboração desta nova teoria, Einstein propôs uma relação entre geometria e matéria, interpretando a curvatura do espaço como sendo a força gravitacional que atrai os corpos massivos, e conseguindo assim explicar fenômenos gravitacionais que não eram bem entendidos na mecânica newtoniana como o avanço do periélio de Mercúrio e as lentes gravitacionais.

Para dar conta de um universo estático, o que acreditava-se à época ser o cenário cosmológico, Einstein inseriu em suas equações de campo um termo “anti-gravitacional”, nomeado “constante cosmológica”. Em 1929, a partir do levantamento espectroscópico de galáxias, E. Hubble inferiu que essas (não contidas no Grupo Local) se afastavam de nós, com uma velocidade proporcional à sua distância (HUBBLE, 1929). Em outras palavras, Hubble observou o fenômeno de expansão do universo. A constante cosmológica foi então descartada por Einstein.

No final do século passado, observações do brilho de supernovas do tipo Ia mostraram que o universo recente expande de maneira acelerada (RIESS *et al.*, 1998). Tal conclusão mostra-se altamente contra-intuitiva, uma vez que esperava-se que a gravidade entre os corpos deveria frear a expansão do universo. Os autores em (PERLMUTTER, 1999), mostraram que re-inserindo-se a constante cosmológica nas equações de campo da RG, o efeito de aceleração cósmica pode ser previsto, e para um dado valor dessa constante cosmológica, obtém-se um excelente acordo entre dados observacionais e previsões teóricas. Este modelo cosmológico chamado de Λ CDM é atualmente conhecido como modelo padrão para a evolução do universo.

A RG caracteriza-se também como ferramental necessário no estudo do equilíbrio hidrostático de objetos compactos astrofísicos. As hoje conhecidas como Equações de TOV (Tolman-Oppenheimer-Volkoff) (TOLMAN, 1939; OPPENHEIMER; G.M., 1939) (ou equações de equilíbrio hidrostático) foram obtidas a partir da substituição de uma métrica

estática com simetria esférica nas equações de campo da RG. Estas equacionam quantidades macroscópicas de estrelas, como massa e raio, com quantidades microscópicas, como sua equação de estado.

Nas últimas décadas, teorias alternativas à RG assumiram um importante papel para explicar certas observações cosmológicas e astrofísicas que no âmbito da RG, são difíceis de serem explicadas. Alguns exemplos são as questões sobre energia escura e a observação de pulsares massivos (WEINBERG, 1989; HINSHAW *et al.*, 2013; DEMOREST *et al.*, 2010; ANTONIADIS *et al.*, 2013).

Uma forma de obtermos informação da matéria sujeira a altas densidades dentro das ENs e EQs são os eventos astrofísicos conhecidos como γ -Ray Bursts (GRB). Recentemente, o evento GRB 170817A foi observado e, com ele, a primeira observação registrada de ondas gravitacionais. Isso só foi possível pela coalescências de duas ENs, de acordo com o estudo do espectro da radiação. Percebeu-se que esse fenômeno é um bom laboratório para entender a estrutura desses objetos compactos. Medidas astrofísicas de massas de ENs, seus raios, momentos de inercia e efeitos de maré tem potencial de oferecer informações sobre as equações de estado, como, por exemplo, se ela promove um objeto suave ou duro, e quão alta é a pressão em relação a densidade deste objeto.

O efeito da matéria mais proeminente durante a observação da espiral do sistema binário é a deformação por efeito de maré induzido pelo campo gravitacional da estrela companheira. Essa deformação causa a emissão de ondas gravitacionais e aceleração do decaimento em espiral. A deformação de cada EN devido a seu próprio giro também modifica a forma da onda e depende da equação de estado. A fusão das duas estrelas também são afetadas pela estrutura da matéria.

A compreensão do fenômeno de formação das Ondas Gravitacionais pode fornecer informações valiosas sobre as equações de estado. Em especial, na observação do GW170817, parâmetros importantes como os de força de maré foram obtidos (ABBOTT *et al.*, 2018). A deformabilidade simétrica de maré $\Lambda = (\Lambda_a + \Lambda_b)/2$ e a deformabilidade antissimétrica é $\Lambda = (\Lambda_a - \Lambda_b)/2$, se relacionam com a massa do sistema. Assim, podemos escolher coeficientes apropriados que vão ao encontro da observação da Onda Gravitacional para que tenhamos um conjunto de Equações de Estado apropriadas. Em especial os coeficientes Λ , associados a força de maré são utilizadas em equações de estado em modelos realísticos, obtendo assim parâmetros que vão ao encontro da forma de onda. Utilizando a equação de TOV para obter numericamente resultados que vão ao encontro das observações do GRB temos que a deformabilidade de maré de uma EN de $1.4 M_\odot$ nos fornece um coeficiente $\Lambda_{14} = 190_{-120}^{390}$. Como uma equação de estado suave prediz pequenos valores de deformabilidade de maré, ou seja, tais resultados favorecem os modelos “duros” que predizem grandes valores dessa deformabilidade e favorecem a existência de objetos compactos estáveis.

Existem centenas de modelos para matéria nuclear que tentam explicar massas de ENs que fogem do escopo da RG. Alguns deles são os modelos relativísticos de campo-médio (RMF). Eles são importantes pois mantem a covariância de Lorentz, inclusão automática do spin, mecanismos de saturação da matéria nuclear e causalidade. Em (DUTRA *et al.*, 2016), observou-se que esse modelo é funcional se levar em conta as condições de neutralidade de carga e equilíbrio químico. Dos mais de 500 modelos RMF, três possibilitaram resultados coerentes para massas acima do limite da RG.

Modelos realísticos, como o de Skyrme, também foram amplamente estudados para a melhor compreensão de ENs. Este também é um modelo não-relativístico muito importante na dinâmica hadrônica. Levando em conta que as condições de uma EN são difíceis de se estudar em laboratório, modelos que simulam um gás de Fermi, como os de Skyrme são boas aproximações para esses objetos compactos. Em (DUTRA *et al.*, 2014), 240 parametrizações desse modelos foram estudadas. Levando em conta a debilidade desse modelo em obter altas densidades no centro de objetos compactos (que é o caso das ENs), ele não se mostrou muito interessante para corroborar as novas observações astrofísicas, principalmente as que obtêm ENs com massas acima de $2M_{\odot}$.

As parametrizações hadrônicas de campo-médio em (DUTRA *et al.*, 2012) mostraram-se a melhor descrição para equações de estado relativísticas aplicadas a estudos de ENs. Em (DUTRA *et al.*, 2014; DUTRA *et al.*, 2012), observou-se a necessidade da inclusão do acoplamento híperon-méson para que a suavidade da equação de estado fosse superada, e assim obteve os altos valores de densidades necessários para a estrutura de uma ENs com mais de $2M_{\odot}$.

Atualmente, duas das mais populares teorias alternativas de gravidade são as teorias $f(R)$ (NOJIRI; ODINTSOV, 2011; SOTIRIOU; FARAONI, 2010; FELICE; TSUJIKAWA, 2010; CAPOZZIELLO; LAURENTIS, 2011) e os modelos de brana (ARKANI-HAMED *et al.*, 1998; RANDALL; SUNDRUM, 1999b; RANDALL; SUNDRUM, 1999a). Essas duas teorias alteram a ação de Einstein-Hilbert, adicionando novos termos e assim, podendo dar conta de problemas observacionais do modelo padrão, como os mencionados acima.

Tendo em vista a ineficiência das teorias $f(R)$ para alguns estudos na escala do sistema solar e também em escalas galácticas (ERICKCEK *et al.*, 2006; CHIBA; NAKAMURA, 2007; CAPOZZIELLO; FRANCAVIGLIA, 2007; DOLGOV; KAWASAKI, 2003; CHIBA, 2003; OLMO, 2005), foi incluído na ação um termo proporcional ao traço do tensor energia-momento T , levando à teoria $f(R, T)$ (HARKO *et al.*, 2011). A dependência em T na teoria é motivada pela possível existência de fluídos imperfeitos no universo, bem como pela consideração de efeitos quânticos. Tal teoria mostrou resultados satisfatórios dentro do sistema solar (SHABANI; FARHOUDI, 2014). Um estudo importante sobre a matéria escura também já foi elaborado nesta teoria (ZAREGONBADI *et al.*, 2016). Como será mostrado nas seções seguintes, o tensor energia-momento não é conservado nesta teoria, ou seja, $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} \neq 0$.

Em escalas cosmológicas, pode-se aceitar a ideia de que a variação do tensor energia-momento seja diferente de zero devido à criação de partículas ao longo da evolução do universo. Contudo, essa condição é peculiar quando se estudam objetos compactos, pois é fisicamente coerente supor que ocorra conservação de energia dentro destes objetos estelares em equilíbrio estático. Uma outra generalização da gravidade $f(R)$ foi proposta em (HARKO; LOBO, 2010) incluindo na teoria um acoplamento explícito de uma função arbitrária do escalar de Ricci com a densidade Lagrangiana de matéria, conhecida como teoria $f(R, \mathcal{L}_m)$. Como resultado do acoplamento, o movimento das partículas massivas é não-geodésico, e assim surge uma força extra, ortogonal à quadri-velocidade. As conexões com modelos MOND (WU *et al.*, 2014) e anomalia Pioneer foram explorados, em conjuntura com implicações astrofísicas e cosmológicas do acoplamento não-mínimo de matéria-geometria.

Teorias de brana também apresentam resultados satisfatórios na literatura e são a mais otimista alternativa como solução do problema da hierarquia¹ (ARKANI-HAMED *et al.*, 1998; RANDALL; SUNDRUM, 1999b; RANDALL; SUNDRUM, 1999a; SHTANOV; SAHNI, 2003). Ao buscarmos uma abordagem genérica, que possa contribuir em pequenas e grandes escalas de comprimento, trabalharemos com o modelo de brana de Sahni-Shtanov, que diferentemente dos modelos de Randall-Sundrum (RANDALL; SUNDRUM, 1999b; RANDALL; SUNDRUM, 1999a), considera a presença do escalar de Ricci na ação da brana (SHTANOV; SAHNI, 2003). É importante citar que muitas aplicações têm sido feitas a modelos de brana, como por exemplo a energia escura em modelos cosmológicos (CHIRDE; SHEKH, 2015; PÁL, 2008), sistemas de estrelas de nêutrons (ENs) como fonte de ondas gravitacionais (MORAES, 2014), perturbações e efeitos da tensão da brana (VIZNYUK *et al.*, 2014; GERGELY *et al.*, 2010; BOUHMADI-LÓPEZ; FERRERA, 2008), comparações com modelos usuais de cosmologia (ASTASHENOK *et al.*, 2013), buracos negros (BOUHMADI-LÓPEZ *et al.*, 2013), aceleração cósmica (NOZARI; ASAIYAN, 2011; SADJADI; VADOOD, 2008; MA; ZHANG, 2008), rotação de galáxias (VIZNYUK; SHTANOV, 2007) e comparações com dados de supernovas (NESSERIS S., 2004; WANG; MUKHERJEE, 2004; ALAM, 2002).

Nesta tese, será mostrado que objetos compactos como estrelas de nêutrons e de quarks, podem ser utilizados como um bom teste destas teorias alternativas da RG, comparando as propriedades de massa e raio destas estrelas, por exemplo, com dados observacionais.

O presente texto está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 serão apresentadas as TOV em RG, onde será introduzida essa teoria em sua forma mais simples. No Capítulo 3 serão introduzidos os modelos de gravidade modificada $f(R, T)$, $f(R, \mathcal{L}_m)$ e branas, explicando sua obtenção. No Capítulo 4, as equações de equilíbrio hidrostático tipo TOV

¹Na física teórica, o problema da hierarquia trata da discrepância entre a magnitude das forças fundamentais em relação a gravidade, tendo em vista que, por exemplo, a força fraca, é 10^{32} vezes maior que a gravidade.

em gravidades modificadas serão obtidas. No Capítulo 5 apresentamos os resultados obtidos para estrelas compactas nestas teorias. O Capítulo 6 está destinado a conclusões e perspectivas.

2 AS EQUAÇÕES DE CAMPO DA RELATIVIDADE GERAL E A EQUAÇÃO DE TOLMAN-OPPENHEIMER-VOLKOFF

2.1 As Equações de Campo da Relatividade Geral

Publicada em 1915, a teoria da Relatividade Geral (RG) (EINSTEIN, 1915), desde então, é utilizada para aplicação em astrofísica e cosmologia, como pode ser visto, por exemplo, em (SITTER, 1917; RANDALL; SUNDRUM, 1999a; SHTANOV; SAHNI, 2003; JÚNIOR; CARDOSO, 2016). Teorias como essas são derivadas da sua equação de campo

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

com a velocidade da luz c e a constante gravitacional newtoniana G sendo considerados iguais a 1, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}R$ sendo o tensor de Einstein, com $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico, $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ o escalar de Ricci, 8π a constante de acoplamento, $T_{\mu\nu}$ o tensor energia-momento onde os índices μ, ν e futuros índices genéricos assumem os valores 0, 1, 2 e 3 pois considera-se o espaço-tempo como uma entidade com 3+1 dimensões, sendo três delas espaciais e uma temporal. $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, dado pela contração do tensor de Riemann, tal que $R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}R_{\beta\mu\alpha\nu}$, com

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\mu}_{\nu\beta} - \partial_{\beta}\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\beta}\Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\alpha}\Gamma^{\mu}_{\lambda\beta}, \quad (2.2)$$

sendo que o símbolo de Christoffel $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}$ é dado por

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} = \frac{1}{2}g^{\mu\beta}(\partial_{\nu}g_{\beta\alpha} + \partial_{\alpha}g_{\beta\nu} - \partial_{\beta}g_{\nu\alpha}). \quad (2.3)$$

Para o caso do universo, ou mesmo uma estrela compacta, ser permeado por um fluido

perfeito, tem-se $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p)$, sendo ρ a densidade de energia e p a pressão do universo ou da estrela, respectivamente.

2.2 Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

A equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV), ou também conhecida como equação de equilíbrio hidrostático, é obtida a partir dos componentes 00 e 11 da eq.(2.1) para a métrica de um objeto com simetria esférica e estático,

$$ds^2 = e^{\Phi(r)} dt^2 - e^{\Psi(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.4)$$

onde $\Phi(r)$ e $\Psi(r)$ são os potenciais métricos. Logo, as componentes da equação de campo, apresentada na seção anterior, ficam na forma (TOLMAN, 1939; OPPENHEIMER; G.M., 1939)

$$\frac{e^{-\Psi}}{r^2}(-1 + e^{\Psi} + \Psi' r) = 8\pi\rho, \quad (2.5)$$

$$\frac{e^{-\Psi}}{r^2}(-1 + e^{\Psi} - \Phi' r) = -8\pi p. \quad (2.6)$$

Para a eq.(2.5), toma-se $e^{-\Psi} = 1 - 2m/r$, tal qual é conhecida como a relação de Schwarzschild, obtendo-se

$$\frac{2m}{r} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)' r = 8\pi\rho r^2. \quad (2.7)$$

Os apóstrofes (') denotam derivadas em relação à coordenada radial r . Simplificando a eq.(2.7) utilizando a regra da cadeia no cálculo das derivadas, obtemos uma relação entre a massa e o raio do objeto a ser estudado, referente à eq.(2.5) da componente 00 do tensor de Einstein, dada por

$$m' = 4\pi\rho r^2. \quad (2.8)$$

Agora, para obter a equação de TOV, através da componente 11 do tensor de Einstein em p' , conhecendo a eq.(2.6), começaremos isolando Φ' nesta equação, e fazendo as

substituições da relação de Schwarzschild, obtemos

$$-\Phi' = \frac{8\pi pr + \frac{2m}{r^2}}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}. \quad (2.9)$$

Sabemos que em RG a equação para a conservação do tensor energia-momento nos fornece

$$p' + (p + \rho)\frac{\Phi'}{2} = 0. \quad (2.10)$$

Substituindo Φ' , obtemos a equação de TOV

$$p' = -(p + \rho) \left[\frac{4\pi pr + \frac{m}{r^2}}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} \right], \quad (2.11)$$

onde m e p são respectivamente a massa gravitacional e a pressão da estrela, ambas definidas como funções do raio e da densidade de energia estelar ρ .

Para a compreensão da estrutura interna das estrelas, temos duas equações, (2.8) e (2.11), e três funções desconhecidas, que são $m(r)$, $\rho(r)$ e $p(r)$. Por essa razão, para resolver essas equações, nós precisamos de uma equação de estado $p(\rho)$ e condições de contorno apropriadas, que são escolhidas como

$$m(0) = 0, \quad p(0) = p_c, \quad m(R_e) = M, \quad p(R_e) = 0. \quad (2.12)$$

onde p_c é a pressão no centro da estrela, R_e o seu raio e M sua massa gravitacional total.

3 GRAVIDADE MODIFICADA

A RG, apresentada no capítulo anterior, funciona bem em escalas de comprimento do sistema solar. Nessas escalas, ela prevê um avanço no periélio dos planetas (D'INVERNO, 1992), efeito não previsto na mecânica newtoniana. Saindo dessa escala a teoria começa a apresentar algumas inconsistências e incompletudes. Em escalas galácticas, observa-se a necessidade da existência de algum elemento exótico, conhecido como matéria escura, para dar conta da curva de rotação das galáxias (RUBIN *et al.*, 1980; ERICKCEK *et al.*, 2006; CHIBA; NAKAMURA, 2007). Aumentando-se a escala de comprimento, a teoria não prevê ou explica o regime de expansão acelerada pelo qual o universo vem passando (RIESS *et al.*, 1998).

Cosmologicamente, a teoria padrão apresentada, com a inclusão da constante cosmológica, artifício matemático alocado na equação de campo que não surge naturalmente na sua obtenção, resolve a questão da aceleração cósmica, fazendo o papel da energia escura. Tem-se, via RG, o modelo cosmológico padrão, Λ -Cold Dark Matter (Λ CDM) (PERLMUTTER, 1999), teoria essa que vincula a constante cosmológica Λ à energia-escura, o que dá conta da expansão do universo, este em maior parte permeado por essa energia. Suas outras porções são preenchidas por matéria bariônica, presente nos corpos celestes, e por uma forma de matéria ainda desconhecida, chamada de matéria escura, não-termalizada, (ou seja, não pode ser observada termicamente, como a matéria bariônica) e com propriedade de interagir apenas através da força gravitacional. No entanto, este modelo apresenta o conhecido "problema da constante cosmológica", uma discrepância entre o valor da constante cosmológica quando comparada com a mesma obtida pela densidade de energia do vácuo da teoria quântica de campos da física de partículas (WEINBERG, 1972). A teoria também não fornece respostas sobre o problema da coincidência, que, tendo em vista o período extremamente curto em que vivemos na evolução do universo, observamos que a densidade de energia escura é da mesma ordem de grandeza da densidade de matéria. Por que esse período é exatamente agora, quando podemos observar? Outra questão que a teoria não engloba é a da hierarquia das forças naturais, que é a discrepância da ordem de intensidade da gravidade para com as outras forças.

Em contrapartida, os efeitos de planura nas curvas de rotação e aceleração cósmica do universo são absolutamente alcançáveis em teorias alternativas de gravidade. (NOZARI;

ASAIYAN, 2011; SADJADI; VADOOD, 2008; MA; ZHANG, 2008; VIZNYUK; SHTANOV, 2007)

Fora do escopo cosmológico, no contexto astrofísico observam-se outras questões em que a RG não possui uma resposta satisfatória, como uma certa dificuldade na previsão de ENs muito massivas observadas recentemente, ao exigir densidades muito elevadas no centro dessas estrelas (ARBAÑIL; MALHEIRO, 2016; DEMOREST *et al.*, 2010). O mesmo acontece para anãs brancas muito massivas conhecidas como anãs brancas super-Chandrasekhar (DAS; MUKHOPADHYAY, 2013; SCHWAB *et al.*, 2016; CHAMEL *et al.*, 2013), que para explicar as supernovas Ia super luminosas, necessitam possuir massas na ordem de 2 massas solares (M_{\odot}), bem acima da massa limite de Chandrasekhar de $1,4 M_{\odot}$.

Para resolver estas questões, uma boa alternativa são teorias de gravidade modificada, que podem resolver esses problemas a partir de termos extras na equação de campo. Essa é uma forma elegante não só de testar estas teorias num contexto astrofísico, como de resolver inconsistências da RG no tocante à dificuldade de obter ENs bem massivas sem a necessidade de invocar densidades estelares centrais hadrônicas muito elevadas, o que exigiria o surgimento de matéria de quarks desconfiados, cuja equação de estado sendo mais mole não permitiria atingir massas estelares tão altas.

Alguns modelos importantes de gravidade alternativa serão apresentados a seguir: a teoria $f(R)$ (FELICE; TSUJIKAWA, 2010; SOTIRIOU; FARAONI, 2010), a $f(R, T)$ (HARKO *et al.*, 2011), a $f(R, \mathcal{L}_m)$ (CAPOZZIELLO *et al.*, 2015) e a de modelos de brana (SHTANOV; SAHNI, 2003; RANDALL; SUNDRUM, 1999b; RANDALL; SUNDRUM, 1999a).

3.1 Gravidade $f(R)$

Nessa subseção, serão apresentadas propriedades da gravidade em $f(R)$. Nesta, o escalar de curvatura R na ação de Einstein-Hilbert (S_{EH}) escrita como

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2\kappa^2} + \mathcal{L}_m \right), \quad (3.1)$$

com o índice m representando (matéria) e κ^2 sendo $8\pi G/c^4$, é alterado por uma função apropriada do escalar de curvatura

$$S_{f(R)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{f(R)}{2\kappa^2} + \mathcal{L}_m \right). \quad (3.2)$$

Ao aplicar o princípio de mínima ação (WEINBERG, 1972) na eq.(3.2), obtemos a

equação de campo desta nova teoria

$$f_R(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu}\square]f_R(R) = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (3.3)$$

No qual os índices R indicam derivadas parciais em relação ao escalar de curvatura R . No limite em que a função $f(R)$ é igual ao escalar de curvatura R , essa equação retorna à forma das equações de campo de Einstein da RG apresentadas anteriormente.

Esta teoria $f(R)$ consegue, no âmbito cosmológico, explicar a aceleração cósmica (RIESS *et al.*, 1998; PERLMUTTER, 1999) sem a necessidade de energia escura (AMENDOLA *et al.*, 2007; SONG, 2008). Entretanto, ela não obtêm resultados relevantes quando aplicada em diversos problemas astrofísicos, como os de escala galáctica (RUBIN *et al.*, 1980; ERICKCEK *et al.*, 2006; CHIBA; NAKAMURA, 2007; HARKO *et al.*, 2011).

3.2 Gravidade $f(R, T)$

Motivado por estas questões que a teoria $f(R)$ não consegue resolver, foi proposta uma teoria generalizada, que inclui uma função em termos do traço do tensor energia-momento T , produzindo a teoria conhecida na literatura como $f(R, T)$ (HARKO *et al.*, 2011). Tendo em vista que o termo em T pode ter contribuições de efeitos quânticos (XU *et al.*, 2016), essa teoria pode ser um caminho para uma teoria de gravidade quântica. Esta teoria foi capaz de resolver os problemas de energia escura, ser bem testada dentro do sistema solar e explicar a aceleração cósmica (SHABANI; FARHOUDI, 2014).

Uma importante consequência das equações de campo na teoria $f(R, T)$ são os termos extras na porção material das equações, termos estes que causam a não-conservação do tensor energia-momento ($\nabla_\mu T^{\mu\nu} \neq 0$). Num contexto cosmológico, essa não-conservação pode ser interpretada como a criação ou destruição de matéria no universo.

No âmbito astrofísico, essa não-conservação não pode ser interpretada facilmente como na cosmologia. Equações de equilíbrio hidrostático (tipo TOV) que não conservam o tensor energia-momento, obrigam a teoria a considerar um mecanismo de criação e destruição da matéria dentro da estrela, o que é difícil de justificar. Buscando equações de equilíbrio hidrostático que permitam a conservação do tensor energia-momento, uma função $f(R, T)$ específica foi obtida por nós pela primeira vez, como mostraremos no próximo capítulo.

Nesta teoria $f(R, T)$ (HARKO *et al.*, 2011), a ação de Einstein-Hilbert possui uma função que dependa não somente de R , mas também do traço do tensor de energia-momento T

conforme

$$S_{f(R,T)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{f(R,T)}{2\kappa^2} + \mathcal{L}_m \right). \quad (3.4)$$

Como fizemos anteriormente, aplicando o princípio de mínima ação (WEINBERG, 1972) na ação acima, podemos obter as equações de campo da teoria $f(R,T)$. Para tanto, temos que o tensor energia-momento é dado por

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (3.5)$$

Assumindo que a densidade lagrangiana de matéria \mathcal{L}_m depende apenas dos componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e não de suas derivadas, obtemos

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m - 2\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}}. \quad (3.6)$$

Variando a ação dada na Eq.3.4 em relação aos componentes do tensor métrico $g^{\mu\nu}$ obtêm-se a relação

$$\delta S = \frac{1}{\kappa^2} \int \left[f_R(R,T)\delta R + f_T(R,T)\frac{\delta T}{\delta g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R,T)\delta g^{\mu\nu} + \kappa^2\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(-g)\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \sqrt{-g}d^4x. \quad (3.7)$$

Os termos f_T e f_R são derivadas da função $f(R,T)$ em relação a T e R , respectivamente. As definições do Escalar de Ricci R e do Simbolo de Christoffel $\Gamma_{\nu\alpha}^\mu$ foram mostradas no Capítulo 2.

Por fim, a variação da ação do campo gravitacional obtida, quando contraída com um diferencial $\delta g^{\mu\nu}$ é

$$\delta S = \frac{1}{\kappa^2} \int [f_R(R,T)R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + f_R(R,T)g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu} - f_R(R,T)\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} \quad (3.8)$$

$$+ f_T(R,T)\frac{\delta(g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta})}{\delta g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R,T)\delta g^{\mu\nu} + \kappa^2\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}] \sqrt{-g}d^4x. \quad (3.9)$$

Integrando o segundo e terceiro termos da eq.(3.8) e eliminando os termos $\square f_R(R,T)$ nós obtemos a equação de campo na teoria de gravidade $f(R,T)$.

$$\begin{aligned}
& f_R(R, T) \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{3} R g_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{6} f(R, T) g_{\mu\nu} \\
&= \kappa^2 \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} T g_{\mu\nu} \right) - f_T(R, T) \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} T g_{\mu\nu} \right) \\
&\quad - f_T(R, T) \left(\Theta_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \Theta g_{\mu\nu} \right) + \nabla_\mu \nabla_\nu f_R(R, T), \tag{3.10}
\end{aligned}$$

onde $\Theta_{\mu\nu} = -2T_{\mu\nu} - p g_{\mu\nu}$.

Se aplicarmos a derivada covariante na eq.(3.10), conforme(HARKO *et al.*, 2011), obtemos

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \frac{f_T(R, T)}{\kappa^2 - f_T(R, T)} [(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}) \nabla^\mu \ln f_T(R, T) + \nabla^\mu \Theta_{\mu\nu}]. \tag{3.11}$$

Observa-se que a derivada do tensor energia-momento, diferentemente do teoria de Einstein, é não nulo. Este resultado pode significar a criação ou destruição de matéria e energia no universo. Num nível astrofísico, digamos, na construção na equação de TOV isso não pode ser interpretado facilmente, como já fizemos referência (HARKO *et al.*, 2014).

3.2.1 Cosmologia em gravidade $f(R, T)$ conservada

Um bom laboratório para o estudo da possibilidade de conservação na teoria $f(R, T)$ é no escopo cosmológico, onde ela foi melhor desenvolvida (ALVARENGA *et al.*, 2013) Levando em conta a necessidade de alocar uma constante cosmológica para explicar a expansão acelerada do universo na RG, mostrou-se interessante estudar a teoria $f(R, T)$ num contexto cosmológico. Esta é uma ideia coerente pois, nesta teoria, surgem termos extras associados a massa de forma natural ao alterar a lagrangiana da ação (3.4). Para começarmos essa análise, utilizaremos a métrica de tempo conforme Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW)

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dx^2), \tag{3.12}$$

onde $a(\eta)$ é o fator de escala no tempo conforme η . Então, a questão principal sobre a composição do Universo é dada através do tensor de energia-momento, que neste contexto, descreve o universo como um fluido perfeito, ou seja, $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p)$. Considerando a função $f(R, T) = f_1(R) + f_2(T)$, e substituindo (3.12) em (3.10), obtemos

as equações de Einstein generalizadas da forma

$$-3Hf'_{1R_0} + 3Hf'_{1R_0} - \frac{a^2}{2}f_{10} = -\kappa^2 a^2 \rho_0 + (1 + \omega)\rho_0 a^2 f_{2T_0} + \frac{a^2}{2}f_{20}, \quad (3.13)$$

$$f''_{1R_0} + Hf'_{1R_0} - (H' + 2H^2)f'_{1R_0} + \frac{a^2}{2}f'_{10} = -\kappa^2 a^2 \omega \rho_0 - \frac{a^2}{2}f'_{20}, \quad (3.14)$$

onde $H \equiv a'/a$ e o subscrito 0 é carregado para as quantidades não-perturbadas, com $f_{10} \equiv f_1(R_0)$, $f'_{1R_0} \equiv df_1(R_0)/dR_0$, $f_{20} \equiv f_2(T_0)$, $f'_{2T_0} \equiv df_2/dT_0$ e $c_2^2 = p_0/\rho_0$.

A equação da continuidade dado por

$$\nabla_\mu T_{0\nu}^\mu = \frac{1}{\kappa^2 - f_{2T_0}} \left[\delta_\nu^\mu \partial_\mu \left(\frac{1}{2}f_{20} + \omega\rho_0 f_{2T_0} \right) + T_{0\nu}^\mu \partial_\mu f_{2T_0} \right], \quad (3.15)$$

mostra explicitamente que o tensor energia-momento não é primariamente conservado na teoria $f(R, T)$. No entanto, para essa teoria, as partículas testes movem-se num campo gravitacional que não segue linhas geodésicas. A equação (3.15) para $\nu = 0$ se torna

$$\rho' + 3H\rho_0(1 + \omega) = \frac{1}{\kappa^2 - f_{2T_0}} [(1 + \omega)\rho_0 f'_{2T_0} + \omega\rho'_0 f_{2T_0}]. \quad (3.16)$$

Note que se f_2 for nulo (ou seja, teoria $f(R)$), ambos f'_{2T_0} e f_{2T_0} se anulam, e então a equação da continuidade nesse cenário torna-se

$$\rho'_0 + 3H(1 + \omega)\rho_0 = 0. \quad (3.17)$$

Contudo é possível encontrar uma solução não nula para f_2 que conserve o tensor energia-momento. Para isso basta igualar a zero a eq.(3.16), e integrando $f_2(T_0)$, obtemos

$$f_2(T_0) = \alpha T_0^{\frac{1+3\omega}{2(1+\omega)}} + \beta, \quad (3.18)$$

onde α e β são constantes de integração. No caso de uma equação de estado barotrópica ($\omega = 0$), isto é, poeira cósmica, a solução obtida em (3.18) será escrita neste caso como

$$f_2(T_0) = \alpha T_0^{1/2} + \beta. \quad (3.19)$$

Podemos notar que a função (3.18) que conserva o tensor energia-momento é uma lei de potência no traço T , que depende exclusivamente da equação de estado escolhida, onde ω é constante e igual ao quadrado da razão da velocidade do som no meio pela velocidade da luz no vácuo. Por exemplo, para o caso de um equação causal (“stiff matter”) onde $\omega = 1$, a função f_2 que conserva tensor energia-momento é uma função linear no traço T .

Neste caso, para esta equação de estado causal, apenas esta função linear em T fornece uma cosmologia na teoria de gravidade $f(R, T)$ conservada.

3.3 Gravidade $f(R, \mathcal{L}_m)$

Matematicamente, uma generalização da teoria da gravitação propõe substituir o escalar de Ricci na ação S_{EH} por uma função dele próprio e da densidade lagrangiana de matéria \mathcal{L}_m (BERTOLAMI *et al.*, 2007). As equações de campo gravitacional foram obtidas neste formalismo métrico, tal como as equações de movimento, que derivam da divergência do tensor energia-momento. Uma aplicação para a gravidade $f(R, \mathcal{L}_m)$ é um modelo covariante relativístico de interação da energia escura, baseado no princípio de mínima ação. Nesta teoria a constante cosmológica se torna uma função do tensor energia-momento.

É possível acoplar geometria e matéria na mesma ação. Uma discussão sobre essa questão foi apresentada em (CAPOZZIELLO *et al.*, 2015), onde a ação utilizada se torna

$$S = -\frac{\kappa}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\mathcal{L}_m^2}{R}. \quad (3.20)$$

Percebe-se que a dinâmica nessa teoria ocorre somente quando há presença de matéria, apresentando uma ligação mais profunda entre o espaço-tempo e a matéria. Esta não é uma observação trivial, levando em conta que não corresponde ao princípio de Mach (WEINBERG, 1989) proposto por Einstein na obtenção da RG. Testes para a viabilidade da teoria $f(R, \mathcal{L}_m)$ foram feitos, a partir de uma abordagem de sistemas dinâmicos (AZEVEDO; PÁRAMOS, 2016). Restrições associadas a condições de energia (AVELINO; AZEVEDO, 2018) e também à radiação CMB usando medição COBE-FIRAS (WU *et al.*, 2014; WANG; LIAO, 2012), foram estudadas. A maioria dos modelos $f(R, \mathcal{L}_m)$ não conservam o tensor energia-momento. O mecanismo responsável por esse comportamento está associado a produção de partículas induzidas por gravitação (HARKO *et al.*, 2015; HARKO, 2014). Uma das subteorias derivadas da $f(R, \mathcal{L}_m)$ é a já discutida teoria $f(R, T)$. Além dela, em (HARKO *et al.*, 2013) a teoria $f(R, \mathcal{L}_m)$ foi generalizada com a inserção de um campo escalar e um termo cinético, construído a partir de gradientes do campo escalar. Neste contexto, um modelo de acoplamento matéria-energia (GMC) foi proposto em (HARKO, 2008). Estes modelos têm mostrado bons resultados quando aplicados a problemas de origem gravitacional, como matéria escura e energia escura (ZAREGONBADI; FARHOUDI, 2016). Em busca de obtermos a equação de campo neste modelo, começaremos com a equação de Einstein-Hilbert, alterando seu termo do escalar de Ricci por uma função

$f(R, \mathcal{L}_m)$ genérica

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} f(R, \mathcal{L}_m). \quad (3.21)$$

Na qual κ^2 é igualado a 1 nestes desenvolvimentos. Se $f(R, \mathcal{L}_m) = \frac{R}{2} + \mathcal{L}_m$ retornamos a usual ação de Einstein-Hilbert para a RG já apresentada na seção 2.1. Considerando $f(R, \mathcal{L}_m) = f_1(R) + [1 + \sigma f_2(R)]\mathcal{L}_m$, com $f_1(R)$ e $f_2(R)$ sendo funções de R e o parâmetro σ associado a intensidade do acoplamento. Assumindo que $f_1(R) = f_2(R) = R$ e $\mathcal{L}_m = -p$ e aplicando o princípio variacional na eq.(3.21) da mesma forma que feito na eq.(3.7), obtemos

$$(1 - 2\sigma p)G_{\mu\nu} + \frac{1}{3}Rg_{\mu\nu} - \frac{\sigma p}{3}Rg_{\mu\nu} = (1 + \sigma R) \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}Tg_{\mu\nu} \right) - 2\sigma \nabla_\mu \nabla_\nu p. \quad (3.22)$$

A derivada covariante do tensor energia-momento na eq.(3.22) é

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = (-pg_{\mu\nu} - T_{\mu\nu})\nabla^\mu \ln(\sigma R). \quad (3.23)$$

Se o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ assumir a forma de um fluido perfeito, sendo $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p)$, com ρ sendo a densidade de matéria-energia, observamos que a eq.(3.23) será sempre igual a 0, determinando assim que o tensor energia-momento será sempre conservado independente da função escolhida para $f(R, \mathcal{L}_m)$.

3.4 Gravidade no Mundo Brana

O estudo das forças fundamentais do universo (gravitacional, eletromagnética, nuclear fraca e forte) costumava ser feito separadamente. Com o passar dos anos, esforços foram feitos para que houvesse uma descrição unificada dessas quatro forças, com o intuito de se entender melhor a origem do universo e, então, sua evolução. Duas dessas forças - eletromagnética e fraca - puderam ser unificadas nos notáveis trabalhos de Abdus Salam, Sheldon Glashow e Steven Weinberg (CASTRO *et al.*, 2014). Também existem trabalhos que buscam descrever conjuntamente o eletromagnetismo e a gravitação. Estes são os renomados modelos extra-dimensionais de Kaluza-Klein (KALUZA, 1921; KLEIN, 1926). Porém a unificação das quatro forças fundamentais ainda é um estudo em aberto.

Uma possibilidade de se obter tal unificação vem da Teoria M, (GAUNTLETT *et al.*, 2010; HOEK L. B., 1997), que assume a existência de cordas, objetos que assimilariam a mecânica quântica à RG. Mas, para que tal feito seja coerente, também é necessário

associar a existência de 7 dimensões extras juntamente com as 3+1 dimensões espaço-temporais.

Os modelos de brana (WITTEN, 1997; ARKANI-HAMED *et al.*, 2001; CASTRO *et al.*, 2014; RANDALL; SUNDRUM, 1999a; RANDALL; SUNDRUM, 1999b; SHTANOV; SAHNI, 2003), que surgem como um caso especial na Teoria M, utilizam a ideia de dimensões extras para resolver alguns problemas da física e cosmologia. Neles, supõe-se que o espaço quadridimensional observável é uma sub-variedade imersa em cinco dimensões. A gravidade, nesse estágio, utilizaria das cinco dimensões para se propagar, enquanto as outras três forças apenas teriam seu efeito na brana de 3+1 dimensões, de tal forma a resolver o problema da hierarquia das forças.

Começaremos a nossa análise estudando o modelo de brana de Randall-Sundrum (RS). Este modelo supõe que o universo observável está confinado em uma superfície de quatro dimensões que chamamos de brana e está dentro de um espaço anti-de Sitter de cinco dimensões chamado *bulk*. Neste contexto, a ação difere do usual da RG da forma

$$S = S_g + S_{vis} + S_{esc}, \quad (3.24)$$

$$S_g = \int d^4x \int d\phi \sqrt{-g_{\mu\nu}} [-\Lambda + 2M^3 R], \quad (3.25)$$

$$S_{vis} = \int d^4x \sqrt{-g_{vis}} [\mathcal{L}_{vis} - V_{vis}], \quad (3.26)$$

$$S_{esc} = \int d^4x \sqrt{-g_{esc}} [\mathcal{L}_{esc} - V_{esc}], \quad (3.27)$$

onde os subíndices g , vis e esc significam (gravidade), (visível) e (escondida), respectivamente. Os potenciais V são de origem cosmológica. Utilizando o princípio variacional, obtemos uma equação de campo da forma

$$G_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}^{ef}, \quad (3.28)$$

com

$$T_{\mu\nu}^{ef} = T_{\mu\nu} + \frac{6}{\lambda} S_{\mu\nu} - \frac{1}{\kappa^2} \xi_{\mu\nu}, \quad (3.29)$$

que são as equações de campo do modelo RS-II, sendo os tensores $S_{\mu\nu}$ e $\xi_{\mu\nu}$ descritos por

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{12} \rho^2 u_\mu u_\nu + \frac{1}{12} \rho (\rho + 2p) h_{\mu\nu}, \quad (3.30)$$

$$\xi_{\mu\nu} = -\frac{6}{\kappa^2\lambda} \left[\mathcal{U}u_\mu u_\nu \mathcal{P}r_\mu r_\nu + \left(\frac{\mathcal{U} - \mathcal{P}}{3} \right) h_{\mu\nu} \right], \quad (3.31)$$

onde \mathcal{U} e \mathcal{P} são respectivamente a densidade de energia e pressão não-locais. Estes são chamados assim pois estão originalmente associados com a dimensão extra do *bulk*. λ é a tensão da brana, u^μ é a quadrivelocidade e $h_{\mu\nu}$ é a projeção ortogonal a u^μ . O tensor energia-momento efetivo total explicita as mudanças na equação de Einstein. As correções do *bulk* são tanto locais quanto não-locais. As correções locais estão expostas em $S_{\mu\nu}$, que engloba as correções de matéria, enquanto as correções não-locais estão em $\xi_{\mu\nu}$. Este tensor transmite os graus de liberdade da gravidade não-local do *bulk* para a brana.

3.4.1 Modelo de Sahni-Shtanov

Uma das propostas de modelo de branas foi feita por V. Sahni e Y. Shtanov (SS) (SHTANOV; SAHNI, 2003). Tal modelo generaliza o modelo RS além de constantes cosmológicas do *bulk* e da brana, incluindo também o escalar de Ricci na ação da brana. Por essa razão, nos referimos a esse modelo como um modelo de brana generalizado. Tal consideração gera um modelo que lida com a aceleração do universo como um fenômeno transiente. Este permite a não-consideração do escalar de Ricci dentro da ação da brana. Porém, num âmbito astrofísico essa mesma grandeza se torna necessária. Existem uma série de discussões sobre como esse modelo prove respostas sobre energia escura, singularidade do Big Bang (SAHNI; SHTANOV, 2002), soluções cosmológicas para a homogeneidade e isotropia do universo (SHTANOV; VIZNYUK, 2005), o que corrobora a importância da teoria. Tem-se a ação nesta teoria da forma

$$S_{EH} = M_{Pl}^3 \int_{bulk} (R_5 - 2\Lambda_5) \sqrt{|-h_{AB}|} d^5x + \int_{brana} [m_{Pl}^2 R - 2(M_{Pl}^3 K + \lambda)] \sqrt{|-g_{\mu\nu}|} d^4x. \quad (3.32)$$

A primeira integração na eq.(3.32) é relacionada aos termos do *bulk* enquanto a segunda é relacionada aos termos da brana com M_{Pl} sendo a massa de Planck em cinco dimensões (5D), R_5 o escalar de Ricci 5D, Λ_5 a constante cosmológica do *bulk*, h_{AB} a métrica do *bulk* em 5D com A e B correndo de 0 a 4, m_{Pl} a massa de Planck usual em 4D, R o escalar de Ricci usual em 4D. K o traço do tensor simétrico de curvatura extrínseco¹ da brana como $K = K_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$ com $K_{\mu\nu} = g_\mu^\gamma \nabla_\gamma n_\nu$ e n^μ sendo o campo vetorial da unidade interna normal à brana tal que $g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu$, $g_{\mu\nu}$ é a métrica induzida da brana com μ, ν correndo de

¹Em gravitação canônica, a curvatura extrínseca $K_{\mu\nu}$ é uma variável dinâmica, em vez de $\dot{g}_{\mu\nu}$. O construtor $K_{\mu\nu}$ em gravitação canônica é o mesmo que no mundo brana.

0 a 3 e λ é a tensão da brana. Também temos que as barras presentes dentro das raízes quadradas denotam o determinante da quantidade encerrada por elas.

O termo na eq.(3.32) contendo o escalar de Ricci da brana acoplado com a massa de Planck em 4D é frequentemente negligenciado na literatura. Entretanto, isso pode ser qualitativamente essencial para a descrição de algum fenômeno no mundo brana e emerge como uma correção no âmbito quântico para a ação da matéria.

Na eq.(3.32) nós vemos que o *bulk* pode ser descrito por $G_{AB} + \Lambda_5 h_{AB} = 0$ (SHTANOV; SAHNI, 2003), com G_{AB} sendo o tensor de Einstein. Assim as equações de campo tem seu tensor de energia momento T_{AB} igual 0 em seus modelos cosmológicos, isto é, eles descrevem um espaço vazio. De fato, nos modelos de mundo brana, tão bem quanto em modelos de matéria induzida extra-dimensional (WESSON, 1992a; WESSON, 1992b; MORAES, 2014; MORAES, 2015; MORAES, 2016), matéria surge em 4D como uma manifestação puramente geométrica de um espaço em 5D.

De tal forma, as equações de campo nesse mundo brana ficam da forma

$$m_{Pl}^2 G_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + M_{Pl}^3 (K_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} K). \quad (3.33)$$

Aqui, temos que mencionar que essa equação de campo recupera a RG no caso de um limite onde a massa de Planck em 5D for nula. Nesse caso, nós temos que a tensão da brana funciona como a constante cosmológica usual.

A presença da constante cosmológica do *bulk* e a tensão da brana neste modelo em adição ao termo do escalar de Ricci da brana leva a abundância de novas características que distinguem esse modelo de outros modelos de mundo brana, tal qual os de Deffayet-Dvali-Gabadadze (DEFFAYET *et al.*, 2002). Como um exemplo, a equação de estado desse modelo, prevê um universo onde a razão entre a pressão e a densidade de energia escura pode ser < -1 . A aceleração do universo pode ser um fenômeno transiente, isto é, a expansão acelerada do universo ocorre durante a época presente mas reverte-se para um cenário de desaceleração devido a dominância da matéria. Tais propriedades contrastam com outras cosmologias de mundo brana, nas quais fogem do modelo padrão e são encontradas apenas no universo primordial (RANDALL; SUNDRUM, 1999b; RANDALL; SUNDRUM, 1999a; SHIROMIZU *et al.*, 2000; COPELAND *et al.*, 2001; CLINE *et al.*, 1999).

4 TOV EM GRAVIDADE MODIFICADA

4.1 Equação de equilíbrio hidrostático na teoria de $f(R, T)$ conservada para diversas equações de estado

4.1.1 A equação de estado linear

Vamos obter nesta seção pela primeira vez a versão da teoria de $f(R, T)$ conservada, o que significa que vamos impor que $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$. Vamos escolher uma equação de estado linear na densidade de energia, ou seja, $p = \omega\rho$, onde ω é conhecido na literatura como c_s^2 , que é igual ao quadrado da velocidade do som (num sistema com velocidade da luz $c = 1$). Equações de estado com velocidade do som constantes representam bem a matéria de quarks no interior de estrelas estranhas e ou no caroço de estrelas híbridas. Além disto, na descrição de anãs brancas, a equação de estado da matéria no interior destas estrelas é a de um gás de elétrons imerso numa rede cristalina de íons. Esta equação de estado possui dois limites, o não relativísticos (onde a pressão é bem menor que a densidade de energia) e o ultra-relativísticos (onde a pressão é da ordem de grandeza do valor da densidade de energia, que são representados por relações lineares entre a pressão e a densidade de energia. Assim, a escolha de uma equação de estado linear tem bastante interesse para o estudo de estrelas compactas (ARBAÑIL; MALHEIRO, 2016).

Consideremos uma função $f(R, T)$ escrita como $f(R, T) = R + 2h(T)$, com $h(T)$ sendo uma função de T , tal que o regime da RG é recuperado quando $h(T) = 0$.

A derivada covariante de $T_{\mu\nu}$ na eq.(3.10) é então escrita como

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \frac{h_T(T)}{h_T(T) - (8\pi)^2} \left[(T_{\mu\nu} + pg_{\mu\nu})\nabla^\mu \ln h_T(T) + \nabla^\mu (2T_{\mu\nu} + pg_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^\mu T \right], \quad (4.1)$$

onde $h_T(T) \equiv dh(T)/dT$ e p é a pressão da estrela. Nesta seção escolheremos o sistema de unidades naturais ($G = c^4 = 1$)

Iremos escolher na equação acima o caso de $\nu = 1$, sendo $\rho = \rho(r)$ e $p = p(r)$, visto que no contexto astrofísico que estamos investigando de um objeto compacto estático, não temos variação no tempo. Esta condição é diferente da cosmologia onde apenas a dependência temporal é investigada pois o universo é considerado um sistema homogêneo e isotrópico. A métrica considerada é de simetria esférica e estática, ou seja, a apresentada na eq.(2.4).

Considerando o caso de $\nu = 1$ na eq.(4.1), obtemos

$$0 = \frac{h_T}{8\pi - h_T} \left[\frac{1}{2}T' + \rho(1 - 2\omega)(\ln h_T)' + \omega\rho' \right]. \quad (4.2)$$

Simplificando os termos nas equações acima e considerando um fluido perfeito dentro da estrela, o que nos permite escrever o traço do tensor energia-momento como $T = \rho - 3p$, obtemos

$$(\rho + p)(\ln h_T)' + \frac{1}{2}(\rho + 3p)' = 0. \quad (4.3)$$

Para encontrar $h(T)$, nós podemos integrar a expressão acima em relação ao traço T , levando em conta que $h_T = \frac{dh(T)}{dT}$, e assim obter a expressão de $h(T)$ abaixo

$$h(T) = \lambda T^{\frac{1}{2}\left(\frac{1-\omega}{1+\omega}\right)}, \quad (4.4)$$

onde λ é uma função de ω . Portanto, se substituirmos a eq.(4.4) na eq.(4.1) obtemos, por consequência, $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$. Assim, concluímos que a equação (4.4) é a expressão para a função $h(T)$ da teoria de $f(R, T)$ conservada correspondente a uma equação de estado linear na densidade de energia. Vale a pena salientar que esta função apresenta a mesma forma de lei de potências já obtida para versão conservada desta teoria aplicada no contexto cosmológico, e que para o caso $\omega = 0$ também apresenta o expoente $1/2$ obtido em (3.18). Contudo, $\omega = 0$ não é uma situação fisicamente possível dentro de uma estrela compacta onde a pressão só é nula na sua superfície. Porém, existem resultados relevantes para estrelas relativísticas quando ω assume determinados valores (OPPENHEIMER; G.M., 1939). Por exemplo, o caso $\omega = 1$, que indica uma estrela com a maior pressão possível (equação de estado causal) fornece uma função $f(T)$ que depende linearmente do traço do tensor energia-momento, neste caso também a mesma dependência linear em T obtida em cosmologia para esta equação de estado causal. Uma função $f(T)$ linear em T foi

utilizada recentemente na literatura para estudar estrelas compactas na teoria $f(R, T)$ não conservada (ARBAÑIL *et al.*, 2014)

Para obtermos a equação de equilíbrio hidrostático para a versão conservada da teoria de $f(R, T)$ com uma relação linear entre a pressão e a densidade de energia, substituímos a expressão obtida de $h(T)$ nas duas primeiras componentes da equação de campo

$$\frac{e^{-\Psi}}{r^2}(e^{\Psi} + \Psi' r - 1) = 8\pi\rho + \frac{1}{2}h(T), \quad (4.5)$$

$$\frac{e^{-\Psi}}{r^2}(1 - e^{\Psi} + \Phi' r) = 8\pi p - \frac{1}{2}h(T) - h_T(\rho)(p - \rho), \quad (4.6)$$

onde $h(T)$ é a integral da função $h_T(T)$ obtida em eq.(4.4). A equação de Schwarzschild que relaciona massa e raio $e^{-\Psi} = 1 - 2m/r$ é substituída na eq.(4.5), o que nos permite obter

$$\frac{m'}{r^2} = 4\pi\rho + \frac{1}{4}\lambda T^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-\omega}{1+\omega}\right). \quad (4.7)$$

Utilizando a expressão da quadri-divergência do tensor energia-momento com simetria esférica e estático

$$\nabla^{\mu}T_{\mu\nu} = -p' - (\rho + p)\frac{\Phi'}{2} = 0, \quad (4.8)$$

e substituindo nesta expressão a equação para a derivada radial da função métrica Φ' obtida da eq.(4.6), seguindo o mesmo procedimento utilizado quando obtivemos a equação TOV em RG no Capítulo 1, obtemos a equação de equilíbrio hidrostático da teoria de $f(R, T)$ conservada

$$p' = -\frac{\rho + p}{1 - \frac{2m}{r}} \left\{ \frac{m}{r^2} + \left[2\pi p \left(\frac{1-\omega}{1+\omega} \lambda T^{-\frac{1}{2}} \frac{1+3\omega}{1+\omega} + 2 \right) + \frac{\lambda}{4} \left(\frac{1-\omega}{1+\omega} \rho T^{-\frac{1}{2}} \frac{1+3\omega}{1+\omega} - T^{\frac{1}{2}} \frac{1-\omega}{1+\omega} \right) \right] r \right\}. \quad (4.9)$$

Se a constante λ que surgiu nessa teoria for igual a zero, voltamos a equação de TOV da RG. Temos alguns resultados relevantes quando ω assume determinados valores (OPPENHEIMER; G.M., 1939). Por exemplo, o caso $\omega = 1$, que indica uma estrela com a maior pressão possível (equação de estado causal) fornece uma função $f(T)$ que depende linearmente do traço do tensor energia-momento, a mesma dependência obtida em cosmologia

para esta equação de estado. Uma função $f(T)$ linear em T foi utilizada recentemente na literatura para estudar estrelas compactas na teoria $f(R, T)$ (ARBAÑIL *et al.*, 2014)

4.1.2 A equação de estado politrópica

Nesta seção, utilizando o mesmo procedimento feito para obter a eq.(4.4), vamos obter a teoria $f(R, T)$ conservada para uma equação de estado mais geral $p = kp^\Gamma$. Esta é conhecida como equação de estado politrópica, e tem sido aplicada para o estudo de ENs.

É importante ressaltar que estamos usando uma equação de estado politrópica na energia, o que é diferente da equação no caso linear ($p = \omega\rho$) que é uma equação na densidade do número de particular ou densidade de massa. É sabido que este arranjo geralmente é utilizado em estudo de anãs brancas ou cálculos envolvendo estrelas newtonianas, apenas aplicando a primeira lei da termodinâmica, esse arranjo sempre irá produzir uma relação linear entre pressão e densidade de energia ($\Gamma = 1$), o que não é uma boa aproximação para ENs nas quais a velocidade do som não é constante quando a densidade de energia muda dentro da estrela (LAI; XU, 2009).

Realizando os mesmos cálculos obtemos a expressão abaixo para a função h_T

$$h_T(\rho) = \alpha(\rho + kp^\Gamma)^{\frac{(1-3\Gamma)}{2(\Gamma-1)}} \rho^{\frac{\Gamma}{(\Gamma-1)}}. \quad (4.10)$$

Conseqüentemente, a função de $h(T)$ escrita como função da densidade de energia, para esta equação de estado politrópica, é dada pela integral

$$h(\rho) = \int \alpha(1 - 3k\Gamma\rho^{\Gamma-1})(\rho + kp^\Gamma)^{\frac{(1-3\Gamma)}{2(\Gamma-1)}} \rho^{\frac{\Gamma}{(\Gamma-1)}}. \quad (4.11)$$

Para solucionar essa integral foi necessário o uso de funções hipergeométricas

$$h(\rho) = \frac{1}{3\Gamma - 2} 2\alpha\rho^{\frac{\Gamma}{\Gamma-1}} \left(\frac{k + \rho^{1-\Gamma}}{k} \right)^{\frac{1-3\Gamma}{2-2\Gamma}} (k\rho^\Gamma + \rho)^{\frac{1-3\Gamma}{2(\Gamma-1)}} \left(3k(3\Gamma - 2)\rho^\Gamma F_1 \left(\frac{1-3\Gamma}{2-2\Gamma}, \frac{\Gamma}{2(\Gamma-1)}; \frac{\Gamma}{2(\Gamma-1)} + 1; -\frac{\rho^{1-\Gamma}}{k} \right) - \rho F_1 \left(\frac{1-3\Gamma}{2-2\Gamma}, \frac{2-3\Gamma}{2-2\Gamma}; \frac{4-5\Gamma}{2-2\Gamma}; -\frac{\rho^{1-\Gamma}}{k} \right) \right), \quad (4.12)$$

onde F_1 é a função hipergeométrica associada ao expoente Γ .

Realizando o mesmo procedimento da seção anterior, obtemos a equação de equilíbrio hidrostático na teoria conservada, neste caso de uma equação de estado politrópica, na

forma

$$p' = -(\rho + p) \frac{\left\{ \frac{m}{r^2} + \left[4\pi p - \frac{1}{4}h(\rho) - \frac{1}{2}h_T(p - \rho) \right] r \right\}}{1 - \frac{2m}{r}}. \quad (4.13)$$

Se $\alpha = 0$ na eq.(4.12) cancelamos as contribuições do traço do tensor energia-momento nas equações de campo, mostrando assim a equivalência com a RG.

4.1.3 A equação de estado do modelo de sacola do MIT

A equação de estado do modelo de sacola do MIT é usada para descrever estrelas de quarks estranhas formadas por um fluido composto por quarks *up*, *down* e *strange* livres que, a densidades baixas, estão confinados, devido a uma pressão constante B conhecida como a pressão da sacola. Neste modelo, a relação entre pressão e densidade de energia é linear, dada por $p = \omega(\rho - 4B)$, com ω constante (no caso de quarks sem massa $\omega = 1/3$). Realizando o mesmo procedimento da seção onde obtivemos a teoria de $f(R, T)$ conservada para uma equação de estado linear, mas nesta caso considerando a equação de estado do modelo MIT, obtemos $h_T(T)$ escrita como

$$h_T(T) = \lambda \frac{(1 + \omega)}{(1 - 3\omega)} \left[\frac{(T - 12B\omega)}{(1 - 3\omega)} (1 + \omega) - 4B\omega \right]^{-\frac{1}{2} \frac{(1+3\omega)}{(1+\omega)}} \quad (4.14)$$

e integrando a equação acima, obtemos a função $h(T)$ como

$$h(T) = \lambda \left[\frac{(T - 12B\omega)}{(1 - 3\omega)} (1 + \omega) - 4B\omega \right]^{\frac{(1-\omega)}{2(1+\omega)}}. \quad (4.15)$$

Utilizando do mesmo procedimento feito para a obtenção da eq.(4.9) nas seções anteriores, chegamos à equação de equilíbrio hidrostático na teoria $f(R, T)$ conservada para a equação de estado do modelo de sacola do MIT,

$$p' = -\frac{(\rho + p)}{1 - \frac{2m}{r}} \left\{ \frac{m}{r^2} + \left[4\pi p - \frac{1}{4} \lambda \left[(T - 12B\omega) \frac{(1 + \omega)}{(1 - 3\omega)} - 4B\omega \right]^{\frac{(1-\omega)}{2(1+\omega)}} - \frac{1}{2} \left(\lambda \frac{(1 + \omega)}{(1 - 3\omega)} \left[(T - 12B\omega) \frac{(1 + \omega)}{(1 - 3\omega)} - 4B\omega \right]^{-\frac{1}{2} \frac{(1+3\omega)}{(1+\omega)}} \right) (p - \rho) \right] r \right\}. \quad (4.16)$$

Se considerarmos o caso onde a pressão da sacola $B = 0$ obtemos os resultados anteriores do caso da eq.(4.9).

4.2 Equação de equilíbrio hidrostático na teoria de $f(R, \mathcal{L}_m)$

A equação de equilíbrio hidrostático na teoria $f(R, \mathcal{L}_m)$ é obtida da substituição da métrica de simetria esférica e estática (3.23) nas equações (3.22) e (3.23). Considerando como fizemos no capítulo anterior ao apresentar esta teoria, que $f(R, \mathcal{L}_m) = f_1(R) + [1 + \sigma f_2(R)]\mathcal{L}_m$, com $f_1(R)$ e $f_2(R)$ sendo funções de R e o parâmetro σ associado a intensidade do acoplamento, e assumindo que $f_1(R) = f_2(R) = R$ e $\mathcal{L}_m = -p$, podemos escrever as componentes 00 e 11 da equação de campo (3.22), respectivamente, como

$$\frac{(1 - 2\sigma p)}{r^2} \frac{d}{dr} (r - re^{-\Psi}) + (1 - \sigma p) \frac{R}{3} = (1 + \sigma R) \left(\frac{2}{3} \rho + p \right) + \sigma e^{-\Psi} \alpha' p', \quad (4.17)$$

$$\frac{e^{-\Psi}(1 - 2\sigma p)}{r^2} (1 - e^{\Psi} + \Phi' r) + (\sigma p - 1) \frac{R}{3} = (1 + \sigma R) \frac{1}{3} \rho - 2\sigma e^{-\Psi} \left(p'' - \frac{\Psi'}{2} p' \right). \quad (4.18)$$

Para a obtenção da equação de equilíbrio hidrostático, devemos levar em conta que o escalar de Ricci se tornou um grau de liberdade das equações de campo 00 e 11. Sendo assim, utilizamos o traço da equação de campo (3.22) para obter

$$R = -\frac{T(1 + \sigma R) - 6\sigma \square p}{(1 + 2\sigma p)}. \quad (4.19)$$

A conservação do tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ respeita a relação de conservação já apresentada

$$p' = -(\rho + p) \frac{\Phi'}{2}. \quad (4.20)$$

Esse sistema de equações diferenciais dados pela eq.(4.19) em conjunto com as eqs.(4.17) (4.18) e (4.20) devido ao termo \square podem ser resolvidas numericamente. Isso é possível pois temos cinco variáveis desconhecidas R, Φ, Ψ, ρ e p , mas novamente, podemos relacionar ρ e p com uma equação de estado. A massa estelar, nesta teoria, será calculada pela integral

$$M = \int_0^{R_*} 4\pi r^2 \rho(r) dr. \quad (4.21)$$

4.3 Equação de equilíbrio hidrostático no Mundo Brana

Para iniciar os estudos de obtenção de novas equações de equilíbrio hidrostático em teoria de gravidade alternativa em Mundo Brana, começaremos apresentando a teoria de Randall-Sundrum, essa já estudada e vastamente aplicada na literatura. Posteriormente obteremos as equações de equilíbrio hidrostático para duas teorias de Brana ainda não estudadas: Sahni-Shtanov e Randall-Sundrum com *warp factors*.

4.3.1 Randall-Sundrum

De acordo com (RANDALL; SUNDRUM, 1999b), nosso universo pode estar confinado numa hipersuperfície (4D) chamada brana, que, por sua vez, está envolta de um espaço multidimensional (5D) chamado *bulk*. Nesse contexto, somente a gravitação pode se propagar na dimensão extra. Neste cenário, as equações de campo induzidas na brana são derivadas via geometria desenvolvida em (RANDALL; SUNDRUM, 1999a). A ideia básica é projetar a curvatura 5D na brana e o resultado é a modificação das equações de Einstein usuais, com novos termos carregando correções do *bulk* na brana. As correções do *bulk* nas equações de Einstein na brana podem ser arranjadas num tensor energia-momento efetivo

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}^{ef}, \quad (4.22)$$

onde o tensor energia-momento nessa teoria é descrito como um termo efetivo correspondendo a soma de todos os termos extras que surgem nessa teoria

$$T_{\mu\nu}^{ef} = T_{\mu\nu} + \frac{6}{\lambda} S_{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi} \xi_{\mu\nu}, \quad (4.23)$$

onde λ é a tensão na brana, que corresponde a densidade de energia no vácuo na brana. A tensor-energia momento efetivo (4.23) mostra duas modificações em relação ao modelo usual da RG. As correções no *bulk* podem ser classificadas como correções locais e não-locais. As correções locais são carregadas pelo tensor $S_{\mu\nu}$, que são chamadas de correções materiais, enquanto as correções não-locais são carregadas via a projeção do tensor de Weyl $\xi_{\mu\nu}$, este associado com efeitos de maré causados pelo *bulk*. O tensor geométrico $\xi_{\mu\nu}$ transmite os graus de liberdade não-locais do *bulk* para a brana.

Para um fluido perfeito ou campo escalar minimamente acoplado, as expressões de $T_{\mu\nu}^{ef}$ e $S_{\mu\nu}^{ef}$ são dadas por (MAARTENS, 2000; MAARTENS; KOYAMA, 2010)

$$T_{\mu\nu}^{ef} = p u_{\mu} u_{\nu} + p h_{\mu\nu}, \quad (4.24)$$

$$S_{\mu\nu}^{ef} = \frac{1}{12}\rho^2 u_\mu u_\nu + \frac{1}{12}\rho(\rho + 2p)h_{\mu\nu}, \quad (4.25)$$

onde u^μ é a quadri-velocidade e $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$ é a projeção ortogonal para u^μ . Assumindo a simetria esférica e estática, a expressão para $\xi_{\mu\nu}$ se torna (SHIROMIZU *et al.*, 2000)

$$\xi_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi\lambda} \left[\mathcal{U}u_\mu u_\nu + \mathcal{P}r_\mu r_\nu + \frac{\mathcal{U} - \mathcal{P}}{3}h_{\mu\nu} \right], \quad (4.26)$$

onde r_μ é um vetor radial unitário, \mathcal{U} e \mathcal{P} são a densidade de energia não local e a densidade de pressão não-local na brana, respectivamente. Os termos \mathcal{U} e \mathcal{P} podem ser interpretados como uma densidade de energia e pressão. O nome “não-local” nos termos de Weyl são associados com o fato que eles têm uma origem extra-dimensional e são comumente referidos na literatura como “radiação escura” \mathcal{U} e “pressão escura” \mathcal{P} (OVALLE *et al.*, 2013). Para (4.26), nós vemos que $\xi_{\mu\nu} \rightarrow 0$ se $\lambda^{-1} \rightarrow 0$. Aplicando esse limite em (4.22) obtemos um princípio de equivalência à RG.

Resolvendo a equação de Einstein para a brana, nós obtemos as equações de equilíbrio hidrostático na teoria de Randall-Sundrum

$$m' = 4\pi r^2 \rho_{eff}, \quad (4.27)$$

$$p' = -(p + \rho) \left[\frac{4\pi(p_{eff} + \frac{4\mathcal{P}}{(8\pi)^2\lambda})r + \frac{m}{r^2}}{(1 - \frac{2m}{r})} \right], \quad (4.28)$$

$$\frac{d\mathcal{U}}{dr} + (4\mathcal{U} + 2\mathcal{P}) \left[\frac{4\pi(p_{ef} + \frac{4\mathcal{P}}{(8\pi)^2\lambda})r + \frac{m}{r^2}}{(1 - \frac{2m}{r})} \right] = -2(4\pi)^2(\rho + p)\frac{d\rho}{dp} - 2\frac{d\mathcal{P}}{dr} - \frac{6}{r}\mathcal{P}, \quad (4.29)$$

na qual, por conveniência, nomeamos determinados agrupamentos de termos como densidade e pressão efetivas, respectivamente, ρ_{ef} e p_{ef}

$$\rho_{ef} = \rho + \frac{\rho^2}{2\lambda} + \frac{6}{8\pi^2\lambda} \quad (4.30)$$

$$p_{ef} = p + \frac{p\rho}{\lambda} + \frac{\rho^2}{2\lambda} + \frac{2}{8\pi^2\lambda}\mathcal{U}. \quad (4.31)$$

Para satisfazer esse sistema de equações, nós precisamos de uma equação de estado $p = p(\rho)$ e adicionalmente uma equação de estado do tipo $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Assumimos que os termos de Weyl (densidade de energia não-local e pressão não-local da brana) obedecem

uma relação simples $\mathcal{P} = \omega\mathcal{U}$, assim, temos

$$\frac{d\mathcal{U}}{dr} = -\frac{2}{1+2\omega} \left[(4\pi)^2(\rho+p) \frac{d\rho}{dr} + A \right] \quad (4.32)$$

onde $A = \frac{3\omega}{r}\mathcal{U} + (2+\omega)\mathcal{U} \left[\frac{4\pi(p_{ef} + \frac{4\mathcal{P}}{8\pi^2\lambda})r + \frac{m}{r^2}}{(1-\frac{2m}{r})} \right]$.

4.3.2 Equação de equilíbrio hidrostático no modelo Sahni-Shtanov

Para construir a equação de equilíbrio hidrostático neste modelo de brana, vamos primeiramente lidar com os aspectos geométricos do objeto em estudo. Vamos desenvolver a configuração de equilíbrio de ENs e EQs, que pode ser descrita geometricamente por uma métrica esférica e estática dada pela eq.(2.4). Como citado anteriormente, nesse formalismo, nós trabalhamos com a métrica induzida $g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu$, e nossa equação de campo é dada por (SHTANOV; SAHNI, 2003)

$$m_{Pl}^2 G_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + M_{Pl}^3 (K_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} K), \quad (4.33)$$

recordando que $K_{\mu\nu} = \nabla_\mu n_\nu$.

É proposto para $K_{\mu\nu}$, em (SHIROMIZU *et al.*, 2000), uma forma deste tensor na qual não fica explícito o valor de n_μ , dada por

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\kappa_5^2 \left(S_{\mu\nu} - \frac{1}{3}h_{\mu\nu}S \right). \quad (4.34)$$

Usando o tensor $S_{\mu\nu} = -\lambda h_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}$, no qual λ é a constante de energia do vácuo e $\tau_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento dentro da brana. para obtenção de estrelas em modelos de branas (SHIROMIZU *et al.*, 2000) e sabendo que $K = K_{\mu\nu}h^{\mu\nu}$, obtemos uma relação entre os escalares K e S

$$K = \frac{\kappa_5 S}{6}. \quad (4.35)$$

Assim, a nossa equação de campo (4.33) na teoria de Sahni-Shtanov pode ser escrita como

$$m_{Pl}^2 G_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + M_{Pl}^3 \left(-\frac{\kappa_5^2 S_{\mu\nu}}{2} \right), \quad (4.36)$$

De acordo com (SHABANI; FARHOUDI, 2014) o tensor de contribuições locais $S_{\mu\nu}$ é

representado da forma

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{12}\rho^2 u_\mu u_\nu + \frac{1}{12}\rho(\rho + 2p)h_{\mu\nu}. \quad (4.37)$$

As contrações referentes ao vetor normal à brana, as quadri-velocidades e o tensor métrico que serão utilizados na obtenção da equação de equilíbrio hidrostático são

$$u_0 u_0 h^{00} = 1, \quad h_{00} h^{00} = 0, \quad (4.38)$$

$$u_1 u_1 h^{11} = 0, \quad h_{11} h^{11} = 1. \quad (4.39)$$

De tal forma que o segundo termo do lado direito da eq.(4.36) ficam, para as componentes 00 e 11, respectivamente

$$M_{Pl}^3 \left(-\frac{\kappa_5^2 S_{00}}{2} \right) = \frac{\rho^2}{2\lambda}, \quad (4.40)$$

$$M_{Pl}^3 \left(-\frac{\kappa_5^2 S_{11}}{2} \right) = \frac{p\rho}{\lambda} + \frac{\rho^2}{2\lambda}. \quad (4.41)$$

Logo, as componentes da equação de campo 00 e 11 da eq.(4.33), levando em conta uma métrica esférica e estática tal qual eq.(2.4) podem ser expressas como

$$\frac{e^{-\Psi}}{r^2}(-1 + e^\Psi + \Psi'r) = 8\pi \left(\rho + \frac{\rho^2}{2\eta} \right), \quad (4.42)$$

$$\frac{e^{-\Psi}}{r^2}(-1 + e^\Psi - \Phi'r) = -8\pi \left(p + \frac{p\rho}{\eta} + \frac{\rho^2}{2\eta} \right). \quad (4.43)$$

Na qual os termos compostos pelas constantes M_{Pl}^3 e κ_5^2 foram reduzidos a nova constante η . Tendo em vista que estas equações são praticamente as mesmas equações de campo obtidas no modelo Randall-Sundrum, a menos da ação da força de maré do *bulk*, nossas equações de equilíbrio hidrostático são obtidas de forma semelhante à seção 2.2, sendo escritas no modelo Sahni-Shtanov como

$$m' = 4\pi G r^2 \rho_{ef}, \quad (4.44)$$

$$p' = -(p + \rho) \left[\frac{4\pi G p_{ef} r + \frac{m}{r^2}}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} \right], \quad (4.45)$$

Sendo $p_{ef} = p + \frac{p\rho}{\eta} + \frac{\rho^2}{2\eta}$ e $\rho_{ef} = \rho + \frac{\rho^2}{2\eta}$. Observa-se que, se tendermos a tensão da brana η a infinito, obtemos novamente as equações TOV da RG do Capítulo 2.

4.3.3 Equação de equilíbrio hidrostático no modelo Randall-Sundrum com *Warp-factor*

As teorias de mundo brana tentam explicar, entre várias incompletudes da RG, o problema da hierarquia (ARKANI-HAMED *et al.*, 1998). Podemos controlar a forma dessa deformação causada pela dimensão extra, *bulk*, na brana, por um *warp-factor*, que age nos potenciais métricos desta (CHINAGLIA *et al.*, 2018). Assim, temos o termo $I(r)$ que será acoplado nos coeficientes da métrica da forma

$$ds^2 = -I(r)e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin(\theta)^2 d\phi^2 + I(r)e^v dt^2. \quad (4.46)$$

Como este termo $I(r)$ age apenas nos coeficientes dr^2 e dt^2 . As equações 11 e 44 da equação de campo podem ser escritas como

$$G_{11} = \frac{I(r)r \left(\frac{d}{dr}v\right) + \left(\frac{dI}{dr}\right)r - I(r)^2 e^\lambda + I(r)}{I(r)r^2}. \quad (4.47)$$

$$G_{44} = \frac{\left(\left(\frac{dI}{dr} + \left(\frac{d\lambda}{dr}\right)I(r)\right)r + e^\lambda I(r)^2 - I(r)\right) e^{v-\lambda}}{I(r)r^2}. \quad (4.48)$$

Ao isolarmos as componentes do Tensor de Einstein G_{rr} G_{tt} e em eq.(4.47) e eq.(4.48) teremos, respectivamente

$$G_{11} = G_{rr} + \frac{1}{r}[\ln(I(r))]', \quad (4.49)$$

$$G_{44} = G_{tt} + \frac{1}{r}[\ln(I(r))]', \quad (4.50)$$

Se a nossa função $I(r)$ for, por exemplo, $I(r) = e^{\alpha r}$, como utilizada em (CHINAGLIA *et al.*, 2016) as equações (4.49) e (4.50) ficam da forma

$$G_{11} = G_{rr} + \frac{\alpha}{r}, \quad (4.51)$$

$$G_{44} = G_{tt} + \frac{\alpha}{r}. \quad (4.52)$$

Com isso, utilizando os mesmos procedimentos para a construção da equação de equilíbrio hidrostático em eq.(4.9) obtemos uma nova equação de equilíbrio hidrostático no modelo Randall-Sundrum com *warp-factor*

$$p' = -(p + \rho) \left[\frac{4\pi(p_{eff} + \frac{4\omega}{8\pi\lambda}\mathcal{U})r + \frac{m}{r^2}}{(1 - \frac{2m}{r})} \right], \quad (4.53)$$

onde $\mathcal{P} = \omega\mathcal{U}$ de acordo com (CASTRO *et al.*, 2014). A pressão efetiva p_{eff} depende explicitamente de uma função genérica associada a $I(r)$ na forma

$$p_{eff} = p \left(1 + \frac{\alpha}{r} \right). \quad (4.54)$$

Se $I(r) = 0$ voltamos à equação TOV da teoria de Einstein da RG.

5 RESULTADOS

5.1 Resultados para teoria de gravidade $f(R, T)$ conservada com equação de estado linear

Apresentamos agora os resultados que obtivemos para a estrutura das estrelas compactas, os diagramas massas x raios e massas x densidade central obtidos pelas equações de equilíbrio hidrostático apresentadas no capítulo anterior para diversas teorias alternativas da gravidade.

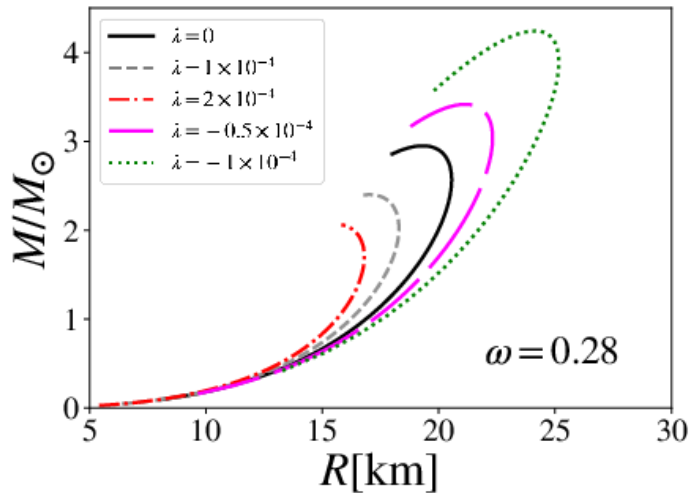


FIGURA 5.1 – Relação de massa-raio para o modelo conservativo de gravidade $f(R, T)$ com equação de estado linear $p = \omega\rho$ para o intervalo de densidade central entre $50 - 800 \text{ MeV}/\text{fm}^3$. Vários valores de λ foram testados e foi escolhido $\omega = 0.28$.

A Fig.5.1 acima foi obtida utilizando as eq.s (4.7) e (4.9) resolvida numericamente através do método de Runge-Kutta de 4ª ordem para $\omega = 0.28$ pois este valor é conhecido na literatura no estudo de EQs no modelo de sacola do MIT. As condições de contorno na gravidade $f(R, T)$ irão ser as mesmas que na RG, isto é,

$$m(0) = 0, \quad p(0) = p_c, \quad m(R_e) = M, \quad p(R_e) = 0. \quad (5.1)$$

A superfície da estrela $r = R_e$ é atingida quando a pressão se anula, ou seja, $p(R_e) = 0$. Usando diferentes valores de densidade de energia central, é possível construir uma relação massa-raio, entre outras relações que iremos analisar com detalhes à frente. Em particular, usamos o intervalo $50 - 800 \text{ Mev/fm}^3$ para energia central.

A Fig.5.1 mostra o comportamento da massa em relação ao raio total da estrela, onde cinco valores de λ foram usados e $\omega = 0.28$ em referência ao modelo de sacola do MIT (FARHI; JAFFE, 1984; WITTEN, 1984). É importante levar em conta que o modelo NJL (NAMBU; JONA-LASINIO, 1961) que descreve as equações de estado para Estrelas de Quarks é linear com a densidade de energia quando envolve apenas os quarks up e down. Quando a interação vetorial entre os quarks não está presente, $p = 0.27\rho$ é um bom ajuste para a equação de estado, um valor bem próximo do valor de ω utilizado em (LOBATO *et al.*, 2016; CARVALHO *et al.*, 2017). Para este valor de ω a função do traço do tensor energia momento na teoria $f(R, T)$ conservada é $h(T) = \lambda T^{0.28}$.

Nota-se na Fig.5.1 que se aumentarmos o valor de λ , menor e menos massiva será a estrela obtida. Tal comportamento pode ser entendido como uma consequência de um aumento da força gravitacional possibilitado nesta teoria, como acontece no caso da RG em comparação com a gravidade Newtoniana (CARVALHO *et al.*, 2018). Em contrapartida, nos casos onde $\lambda < 0$ observamos o aumento na massa total e no raio total da estrela quando $|\lambda|$ aumenta. Além do mais, as relações massa-raio apresentam curvas com efeito anti-horário (comportamento matemático que ilustra, nas curvas, uma região onde não existem estrelas estáveis), com a diminuição de λ , tornando-se as estrelas instáveis massivas mas com raios pequenos. Este efeito também foi verificado para ENs (CAPOZZIELLO *et al.*, 2016). Ressaltamos a importância do aumento da massa: esse limite superior é relevante ao considerarmos as recentes observações astronômicas, onde observa-se ENs cada vez mais massivas, com massas em torno de $2 M_\odot$ (HARRY; HINDERER, 2018; RADICE *et al.*, 2018).

Na Fig.5.2 mostramos a relação da massa com a densidade de energia central para o modelo conservado na teoria $f(R, T)$ com equação de estado linear $p = \omega\rho$, onde vários valores de λ foram testados para $\omega = 0.28$. Para valores de λ maiores que -1.5×10^{-4} nós observamos que a massa inicialmente cresce com a densidade central até que ela atinge um valor máximo. Depois desse ponto, a massa decresce com o aumento da densidade central.

Do critério de estabilidade $\partial M / \partial \rho_c > 0$, concluímos que os pontos máximos de massa marcam o início da instabilidade em cada uma das curvas da Fig. 5.2. Entretanto, o valor de $\lambda = -1.5 \times 10^{-4}$ não produz qualquer estrela estável no intervalo de energia considerado ($50 - 800 \text{ Mev/fm}^3$), visto que a relação massa-densidade não respeita o critério de estabilidade, então, configuramos um limite inferior para λ e um valor de massa máxima estável perto de $6M_\odot$.

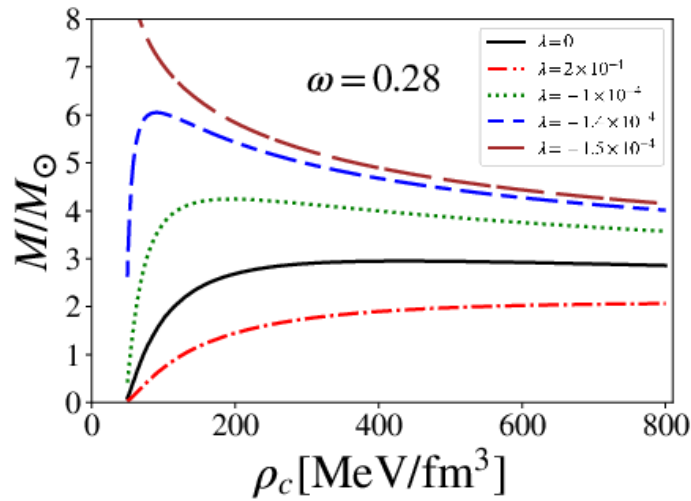


FIGURA 5.2 – Massa versus densidade central de energia para o modelo conservativo da gravidade $f(R, T)$ com equação de estado linear $p = \omega\rho$ para vários valores de λ e com $\omega = 0.28$. No intervalo de densidade de energia central escolhido ($50 - 800 \text{ MeV/fm}^3$), $\lambda = -1.5 \times 10^{-4}$ é o valor no modelo onde não existe mais qualquer estrela estável.

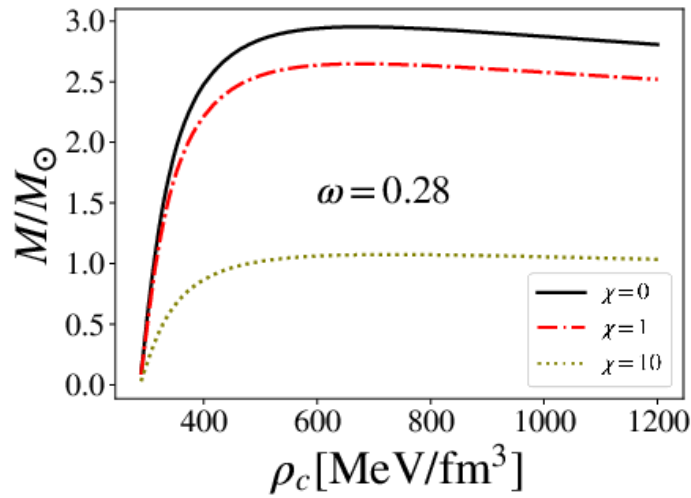


FIGURA 5.3 – Massa versus densidade central para o modelo linear de gravidade $f(R, T)$ não conservada, isto é, $f(R, T) = R + 2\chi T$. Alguns valores de χ e $\omega = 0.28$ foram utilizados.

Na Fig.5.3 consideramos a mesma equação de estado com $\omega = 0.28$, agora com uma função linear para $f(R, T)$, da forma $f(R, T) = R + 2\chi T$ com χ sendo um parâmetro livre, como o discutido em (DAS; MUKHOPADHYAY, 2013).

5.1.1 Resultados para teoria de gravidade $f(R, T)$ conservada com equação de estado politrópica

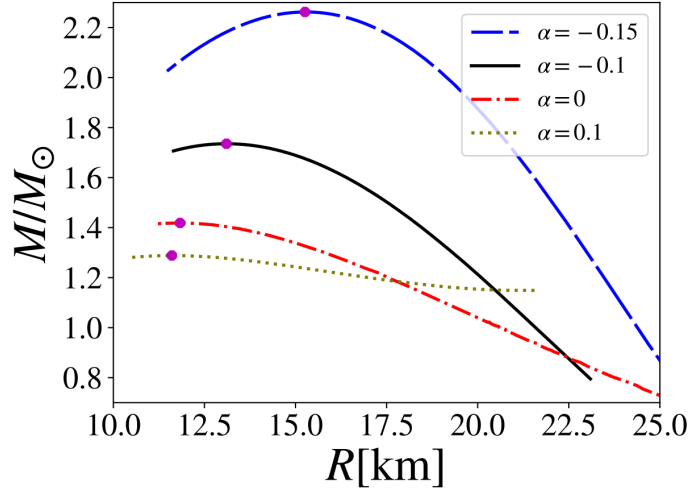


FIGURA 5.4 – Relação de massa-raio de ENs no modelo conservativo de $f(R, T)$. Muitos valores de α são analisados, e $\Gamma = 5/3$.

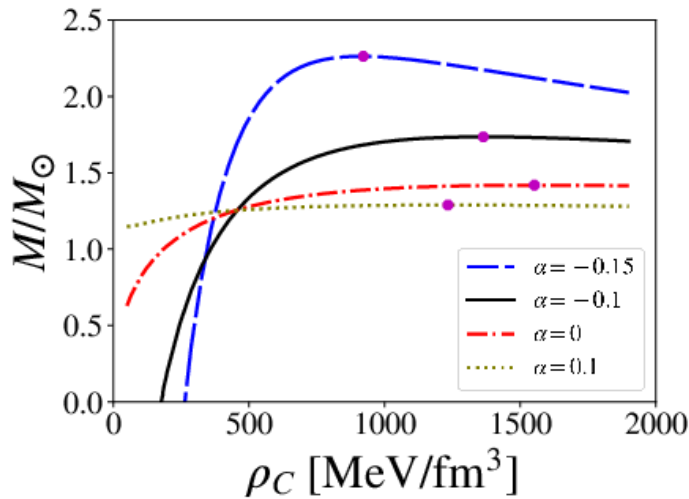


FIGURA 5.5 – Massa total versus densidade central de energia de ENs ($\Gamma = 5/3$) para modelos conservadores de gravidade $f(R, T)$ usando vários valores de α . O ponto de massa máxima marca o critério de instabilidade.

A Fig.5.4 mostra o comportamento da massa total com o raio total da estrela de nêutrons, onde uma série de valores de α são usados. O expoente $\Gamma = 5/3$ foi usado em referência ao trabalho de R.F. Tooper (TOOPER, 1964) e como discutido na seção 3, está associado a condições do comportamento esperado de uma EN num regime de gás de Fermi. A equação de estado utilizada foi $p = k\rho^{5/3}$ com k sendo o parâmetro da equação de

estado com valor de $k = 1.475 \times 10^{-3} (fm^3/MeV)^{2/3}$. Os valores da constante α escolhidos foram expostos nas figuras. O valor da constante k é o mesmo de trabalhos anteriores utilizados para estudar ENs (RAY *et al.*, 2003) e também do trabalho recentemente aceito fruto desta tese (SANTOS *et al.*, 2019). É importante ressaltar que $\alpha = 0$ corresponde aos resultados encontrados na RG.

Na Fig.5.4 podemos notar que quanto maior forem os valores de α , menor e menos massiva será a estrela. Novamente, tal comportamento pode estar associado ao aumento da força gravitacional que as teorias alternativas de gravidade possibilitam. Por outro lado, para os casos onde $\alpha < 0$ observamos o crescimento da massa e do raio total para ENs quando $|\alpha|$ cresce.

Na Fig.5.5 mostramos o diagrama massa em função da energia central de uma estrela de nêutrons para o modelo conservativo de $f(R, T)$ com equação de estado politrópica, onde vários valores de α são analisados. Para todos os valores de α observamos que a massa cresce com a densidade central até que chega a um valor máximo. Depois desse ponto, a massa decresce com o crescimento da densidade central, tornando-se instável caminhando para se tornar um buraco negro.

Do critério regular de estabilidade $\partial M/\partial \rho_c > 0$ concluímos que o ponto de massa máximo caracteriza a instabilidade nas curvas da Fig.5.5. Adicionalmente, o valor de $\alpha = -0.15$ produz uma massa máxima para as ENs de aproximadamente $M \approx 2.2M_\odot$, de acordo com as recentes observações de ENs bem massiva.

Vale a pena salientar que, com a equação de estado utilizada que na teoria da RG de Einstein produz uma massa máxima baixa em torno de $1.4 M_\odot$ é possível obter nesta teoria $f(R, T)$ conservada estrelas bem massivas. Este resultado nos permite concluir que sem conhecer a teoria correta da gravitação é impossível determinar a equação de estado da matéria nuclear a altas densidades através de dados observacionais de massas de ENs, de quarks e pulsares.

5.1.2 Resultados para teoria de gravidade $f(R, T)$ conservada com equação de estado do modelo de sacola do MIT

Para o modelo de sacola do MIT, o parâmetro da equação de estado considerado é $\omega = 0.28$, que equivale a um gás de Fermi com uma massa para o quark estranho de $250 \text{ MeV}/fm^3$, e com uma constante da sacola $B = 60 \text{ MeV}/fm^3$ (CHODOS *et al.*, 1974). Para essa escolha de parâmetros, a função $h(T)$ será considerada como mostrado em (4.15). A relação massa-raio é mostrada na Fig. 5.6. Os valores considerados para λ são $\lambda = 10^{-3}$, $\lambda = -10^{-3}$ e $\lambda = 0$, este último correspondendo aos resultados da RG. Como pode ser visto na figura, os valores positivos de λ tendem a reduzir a massa da estrela, isto pode ser

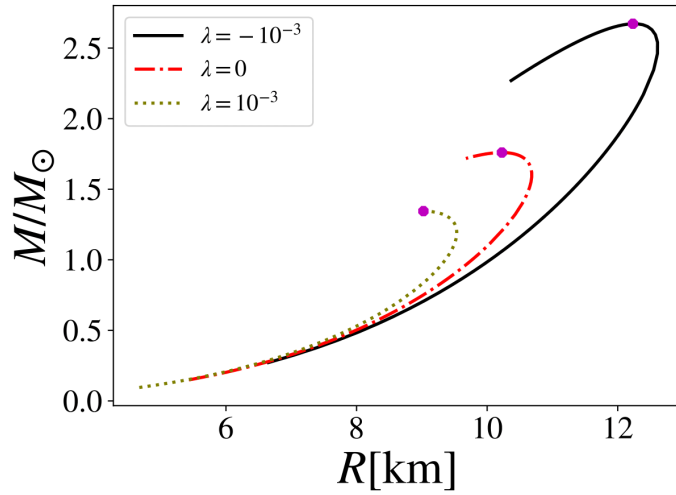


FIGURA 5.6 – Relação massa-raio para o modelo de sacola do MIT na teoria de gravidade $f(R, T)$. Diversos valores de λ foram utilizados, com $\omega = 0.28$ e $B = 60 \text{ MeV}/\text{fm}^3$.

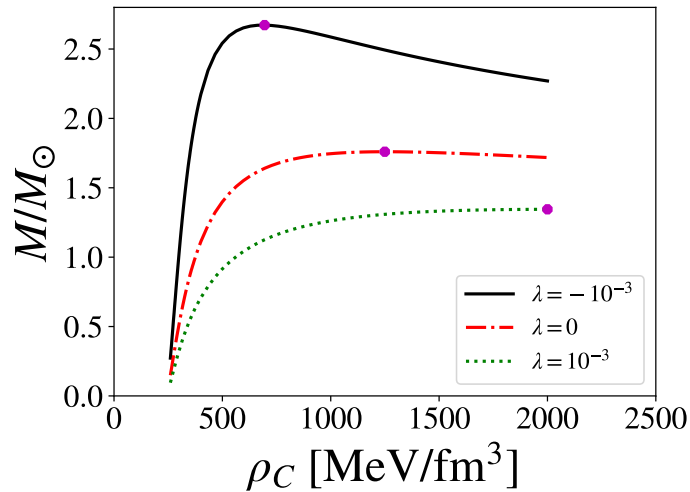


FIGURA 5.7 – Relação massa versus densidade central para o modelo de sacola do MIT na teoria de gravidade $f(R, T)$. Diversos valores de λ foram utilizados, com $\omega = 0.28$ e $B = 60 \text{ MeV}/\text{fm}^3$.

entendido como um aumento da força gravitacional em comparação a RG, quando $\lambda = 0$. O comportamento oposto encontrado para valores negativos de λ , onde estrelas maiores e mais massivas são encontradas, pode ser entendido como um campo gravitacional fraco. É importante observar que assumindo valores negativos de λ obtêm-se valores grandes para a massa máxima. Por exemplo, o valor de massa máxima para $\lambda = -10^{-3}$ é $M_{\text{max}} \approx 2.6M_{\odot}$, entretanto, para o caso de $\lambda = 0$ a massa máxima é $\sim 2M_{\odot}$, que indica um aumento de cerca de 30% da predição teórica da teoria $f(R, T)$ conservada em relação à RG.

Considerando o pulsar massivo recentemente observado (BRODERICK *et al.*, 2016) com massa de $M = 2.2M_{\odot}$ que extrapola o valor esperado pela RG, uma teoria de gravitação

que produza um aumento de massa grande é um importante resultado. Este pulsar massivo, PSR J2215+5135, pode também provar o limite mínimo para λ como sendo -10^{-3} , isto é, o valor de λ que fornece $2.3M_{\odot}$ como o ponto de massa máxima.

5.2 Resultados numéricos para teoria de gravidade

$$f(R, \mathcal{L}_m)$$

Na Fig.5.8 apresentamos a relação massa-raio para ENs na teoria de gravidade $f(R, \mathcal{L}_m) = R + \sigma R \mathcal{L}_m$ (modelo GMC) para diferentes valores de σ , que é o parâmetro de acoplamento. Os valores considerados para faixa de pressão central são de $30\text{MeV}/\text{fm}^3$ à $2000\text{MeV}/\text{fm}^3$ e os círculos magentas na figura marcam as massas máximas para cada valor de σ . Por essa figura podemos ver que os raios da ENs vão de 8 a 18 km, que está de acordo com os valores esperados para ENs observadas. Por outro lado, as massas das ENs nesta teoria são largamente afetadas, chegando a alcançar valores de $\sim 2.6M_{\odot}$. Está claro que o comportamento da curva massa-raio está associado com o valor de σ . Para $\sigma \geq 15$ nós começamos a ver a mudança na concavidade das curvas para raios pequenos. Devido a esse efeito, nas curvas para $\sigma = 20$ e $\sigma = 18$ a massa não diminui com a redução do raio da estrela, isto é, dM/dR é sempre negativo.

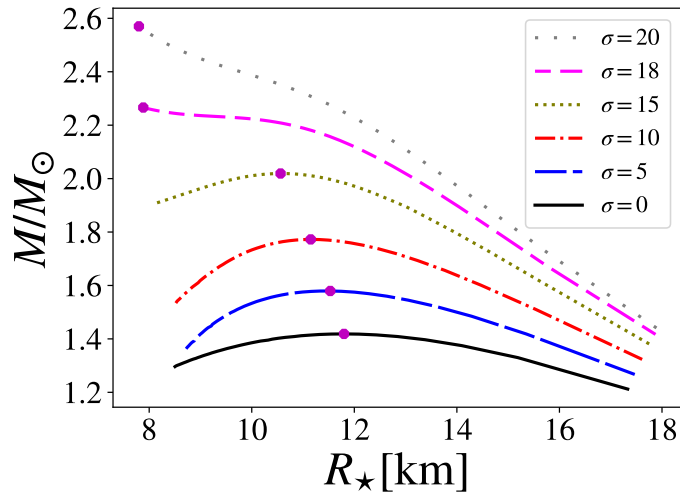


FIGURA 5.8 – Relação massa-raio em ENs. Os círculos magenta marcam os valores de massa máxima para cada curva.

Um comportamento similar é apresentado na figura de massa por densidade central (Fig.5.9), onde a massa não diminui com o aumento da densidade central de energia. É importante citar que esse comportamento, a princípio, não representa uma instabilidade nas ENs e, conseqüentemente, uma massa-máxima estável não pode ser definida somente por meios de configurações de equilíbrio. Nesse sentido, o modelo GMC pode prever

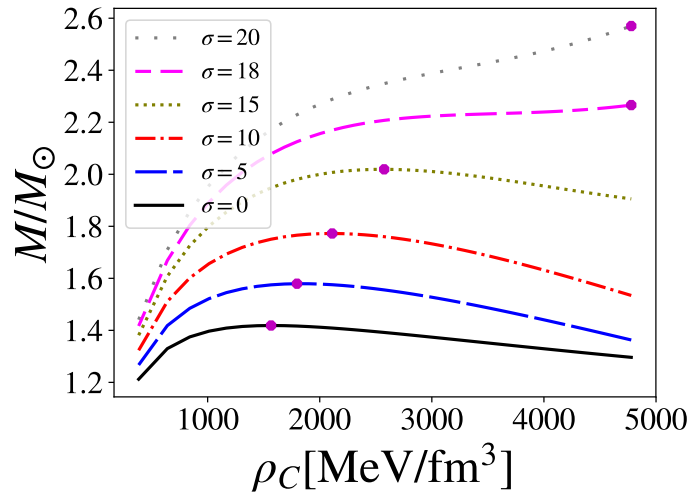


FIGURA 5.9 – Relação massa-densidade central em ENs. Os círculos magenta marcam os valores de massa máxima para cada curva.

massas altas de ENs, como o pulsar PSR J2215+5135, por exemplo, com uma equação de estado simples e suave. Aquelas estrelas também apresentam raios pequenos, como 8 km. Uma combinação de massas altas e raios pequenos pode ultrapassar o limite de Buchdal (DADHICH; CHAKRABORTY, 2017) ($GM/c^2R < 4/9$) e também o limite de Raio de Schwarzschild para a estrela se tornar um buraco negro, indicando que o raio de Schwarzschild e o limite de Buchdal são mudados no modelo GMC. Nós deixamos claro que para estabelecer um limite de massa máxima com o modelo GMC é necessário um estudo para a oscilação de raios (FRIEDMAN *et al.*, 1988)-(ARBAÑIL; MALHEIRO, 2015).

De qualquer maneira, o limite máximo para o parâmetro σ deste modelo GMC pode ser estabelecido de observações, como a do pulsar PSR J2215+5135. Considerando a extensão da pressão central, o valor que descreve a massa do pulsar é $\sigma = 18$. A massa máxima para $\sigma = 20$ é $M_{\max} = 2.57M_\odot$, que representa um aumento considerável de $\sim 80\%$ com respeito ao ponto de massa máximo da RG.

6 CONCLUSÕES

Modelos alternativos da gravidade que surgiram na literatura na cosmologia, são aplicados nesta tese no contexto astrofísico com o propósito de tentar resolver problemas da RG em relação a observações astronômicas recentes de pulsares muito massivos. Esta tese apresentou diferentes teorias da gravitação e as utilizou para obter soluções de equilíbrio hidrostático, para compreensão do comportamento macroscópico de objetos compactos.

Nesta tese, pela primeira vez na literatura foi feita uma abordagem conservativa dentro da teoria $f(R, T)$ para objetos compactos. Em cosmologia esta abordagem já foi feita em (CAPOZZIELLO *et al.*, 2015). Para as equações de equilíbrio hidrostático em $f(R, T)$ na sua versão conservada no caso da equação de estado Politrópica, em particular para $\alpha < 0$, o diagrama massa \times raio mostrou ENs com raios maiores que o usual. Em trabalhos feitos anteriormente para Estrelas de Nêutrons em gravidade $f(R, T)$ não-conservativa, massas maiores que as obtidas pela RG são alcançadas com uma densidade de energia central mais baixa.

Na Seção 4.1, trabalhamos com a teoria de gravidade alternativa $f(R, T)$. A dependência em T na teoria é devido a consideração de efeitos quânticos ou possibilidade de fluidos imperfeitos no universo. Entre outras objeções, a teoria de gravidade $f(R, T)$ prediz a não-conservação do tensor energia-momento, a menos que este seja imposto por algum arranjo particular. Trabalhos anteriores que usaram esta teoria da gravidade e a aplicaram ao estudo de estrelas compactas sempre tiveram este problema, de como justificar dentro de um objeto compacto a energia não se conservar, e explicar de onde viria essa fonte de energia.

Neste trabalho nós derivamos uma função $h(T)$ que conserva o tensor energia-momento considerado e utilizamos equações de estado características de estrelas compactas como a $p = \omega\rho$, $p = k\rho^\Gamma$, com k sendo um parâmetro livre e a $p = \omega(\rho - 4B)$ utilizada com frequência no estudo de Estrelas de Quarks Estranhas. Pela primeira vez na literatura essas equações de equilíbrio hidrostático foram derivadas e os resultados apresentados de massa, raio e densidade centrais foram calculados, apresentando estrelas mais massivas e mais compactas em comparação com os resultados obtidos anteriormente na versão de $f(R, T)$ não conservada.

Na Seção 4.3 também foram obtidas as equações de equilíbrio hidrostático de Estrelas de Nêutrons na teoria alternativa de $f(R, \mathcal{L}_m)$, que é um modelo de acoplamento não-mínimo de matéria (modelo GMC), e tem a vantagem de preservar a conservação do tensor energia-momento. A principal motivação para tanto foram as recentes observações de pulsares massivos que, no escopo da RG, sua existência permanece difícil de explicar. Equações de equilíbrio hidrostático foram obtidas para modelos de brana Sahni-Shtanov e RS-Warp factor na Seção 4.4. A motivação para estes modelos de branas vai ao encontro da impossibilidade do modelo gravitacional padrão explicar a hierarquia das forças fundamentais da natureza. Estes resultados também foram obtidos pela primeira vez na literatura.

No Capítulo 5 uma série de resultados numéricos foram analisados. Na Seção 5.1 as equações obtidas demonstravam o comportamento de Estrelas de Quarks Estranhas. Esta observação foi feita na faixa de densidade de energia central de $50 - 800 \text{ MeV/fm}^3$. Conclui-se que para valores negativos de λ , maiores e mais massivas essas estrelas ficavam. Se os valores de λ forem positivos, a estrela ficará menor e menos massiva de acordo com o aumento deste parâmetro. Na Subseção 5.1.2 a curva foi feita para a equação de estado do modelo de sacola do MIT na faixa de densidade central de $60 - 250 \text{ MeV/fm}^3$, $\omega = 0.28$ e $B = 60 \text{ MeV/fm}^3$. Nela percebemos que quanto menor o valor do parâmetro livre λ maior serão os valores de massa e raio das EQs, e se $\lambda = 0$ obtemos os resultados da RG. Os valores de massa máxima obtidas para $\lambda = 10^{-3}$ de $2.6M_\odot$ vão ao encontro de novos resultados observacionais de pulsares bem massivos, que nesta descrição seriam compostos apenas de matéria de quarks estranha.

Na Subseção 5.1.1 obtivemos resultados para a teoria $f(R, T)$ conservada com a equação politrópica $p = k\rho^\Gamma$. Escolhendo o valor $\Gamma = 5/3$ importante na literatura, mostramos que a estrutura dos objetos compactos sofrem desvios substanciais em comparação com os resultados da RG, e que estes valores dependem da escolha do parâmetro livre α . Para valores negativos de α encontramos estrelas maiores e mais massivas mediante ao aumento modular do parâmetro. O contrário ocorre quando α é positivo. Um limite mínimo de -0.15 é observado para essa teoria para α em conjuntura com o critério regular de estabilidade.

Na Seção 5.2 curvas foram obtidas para ENs na teoria de gravidade $f(R, \mathcal{L}_m)$. Os valores de pressão central vão de 30MeV/fm^3 a 2000MeV/fm^3 . Nesta faixa, para o parâmetro livre $\sigma > 15$ começamos a ver uma mudança na concavidade das curvas para pequenos raios. Massas máximas de até $2.6M_\odot$ são obtidas. Pulsares observados como PSR J2215+5135, J1614-2230 e J0348+0432 que estão na faixa de $\sim 2M_\odot$ são facilmente explicados, mesmo que seja necessária um fraco acoplamento para tanto ($\sigma \sim 15$).

Por mais que equações de equilíbrio hidrostático para as teorias de brana tenham sido obtidas no Capítulo 4, não foi possível criar curvas associadas a elas. Isso se deve a

dificuldade técnica de implementá-las. Contudo, esforços nesta direção continuam sendo realizados para em breve conseguirmos obter soluções numéricas. Porém, observou-se que sua estrutura matemática se assemelhava as obtidas em $f(R, T)$ e $f(R, \mathcal{L}_m)$, o que demonstra que essas teorias que implicam na existência de dimensões extras alteram a estrutura de objetos compactos de forma semelhante aquelas teorias que apenas modificam os termos da ação de Einstein-Hilbert em 3+1 dimensões.

De maneira intuitiva, a força gravitacional, quando modificada, acaba alterando a dinâmica de objetos compactos. Embora boa parte dessas teorias tenha levado em conta, inicialmente, características cosmológicas do universo, percebemos que seu efeito é significativo num contexto astrofísico também, nestes objetos que não reagiriam necessariamente a mudanças de larga escala, como as que necessitam ocorrer para a mudança de parâmetros cosmológicos. Devido à necessidade de comparação com observações astronômicas, novas tecnologias de telescópios como WFIRST serão muito bem vindas.

Enfatizamos que, pela primeira vez na literatura, foram obtidas equações de equilíbrio hidrostático para estrelas compactas em teorias alternativas $f(R, T)$ na sua versão conservada, como também na teoria $f(R, \mathcal{L})$ e em teorias de brana. Em resumo, na teoria $f(R, T)$ conservada foram obtidos resultados exigindo a conservação do tensor energia-momento. Nesta versão da teoria, mostramos que ela permite a existência de equações tipo-TOV novas e que foram aplicadas a estrelas compactas de nêutrons e de quarks. Estas foram obtidas para um grande conjunto de equações de estado, e os resultados foram publicados em (SANTOS *et al.*, 2019). Resultados expressivos foram obtidos na teoria $f(R, \mathcal{L})$ e estão expostos em (CARVALHO *et al.*,). No caso de equações de estado lineares entre a pressão e a densidade de energia e utilizando a versão conservada da teoria estudamos estrelas de quarks compostas de matéria estranha, levando também em consideração o modelo de sacola do MIT. Resultados deste estudo estão compilados num artigo que está na eminência de ser submetido (CARVALHO S.I. DOS SANTOS JR.; MALHEIRO, 2019).

Referências

ABBOTT, B.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADAMS, T.; ADDESSO, P.; ADHIKARI, R.; ADYA, V.; AFFELDT, C.; AGARWAL, B.; AGATHOS, M.; AGATSUMA, K.; AGGARWAL, N.; AGUIAR, O.; AIELLO, L.; AIN, A.; AJITH, P.; ALLEN, B.; ALLEN, G.; ALLOCCA, A.; ALOY, M.; ALTIN, P.; AMATO, A.; ANANYEVA, A.; ANDERSON, S.; ANDERSON, W.; ANGELOVA, S.; ANTIER, S.; APPERT, S.; ARAI, K.; ARAYA, M.; AREEDA, J.; ARÈNE, M.; ARNAUD, N.; ARUN, K.; ASCENZI, S.; ASHTON, G.; AST, M.; ASTON, S.; ASTONE, P.; ATALLAH, D.; AUBIN, F.; AUFMUTH, P.; AULBERT, C.; AULTONEAL, K.; AUSTIN, C.; AVILA-ALVAREZ, A.; BABAK, S.; BACON, P.; BADARACCO, F.; BADER, M.; BAE, S.; BAKER, P.; BALDACCINI, F.; BALLARDIN, G.; BALLMER, S.; BANAGIRI, S.; BARAYOGA, J.; BARCLAY, S.; BARISH, B.; BARKER, D.; BARKETT, K.; BARNUM, S.; BARONE, F.; BARR, B.; BARSOTTI, L.; BARSUGLIA, M.; BARTA, D.; BARTLETT, J.; BARTOS, I.; BASSIRI, R.; BASTI, A.; BATCH, J.; BAWAJ, M.; BAYLEY, J.; BAZZAN, M.; BÉCSY, B.; BEER, C.; BEJGER, M.; BELAHCENE, I.; BELL, A.; BENIWAL, D.; BENSCH, M.; BERGER, B.; BERGMANN, G.; BERNUZZI, S.; BERO, J.; BERRY, C.; BERSANETTI, D.; BERTOLINI, A.; BETZWIESER, J.; BHANDARE, R.; BILENKO, I.; BILGILI, S.; BILLINGSLEY, G.; BILLMAN, C.; BIRCH, J.; BIRNEY, R.; BIRNHOLTZ, O.; BISCANS, S.; BISCOVEANU, S.; BISHT, A.; BITOSSI, M.; BIZOUARD, M.; BLACKBURN, J.; BLACKMAN, J.; BLAIR, C.; BLAIR, D.; BLAIR, R.; BLOEMEN, S.; BOCK, O.; BODE, N.; BOER, M.; BOETZEL, Y.; BOGAERT, G.; BOHE, A.; BONDU, F.; BONILLA, E.; BONNAND, R.; BOOKER, P.; BOOM, B.; BOOTH, C.; BORK, R.; BOSCHI, V.; BOSE, S.; BOSSIE, K.; BOSSILKOV, V.; BOSVELD, J.; BOUFFANAIS, Y.; BOZZI, A.; BRADASCHIA, C.; BRADY, P.; BRAMLEY, A.; BRANCHESI, M.; BRAU, J.; BRIANT, T.; BRIGHENTI, F.; BRILLET, A.; BRINKMANN, M.; BRISSON, V.; BROCKILL, P.; BROOKS, A.; BROWN, D.; BRUNETT, S.; BUCHANAN, C.; BUIKEMA, A.; BULIK, T.; BULTEN, H.; BUONANNO, A.; BUSKULIC, D.; BUY, C.; BYER, R.; CABERO, M.; CADONATI, L.; CAGNOLI, G.; CAHILLANE, C.; BUSTILLO, J. C.; CALLISTER, T.; CALLONI, E.; CAMP, J.; CANEPA, M.; CANIZARES, P.; CANNON, K.; CAO, H.; CAO, J.; CAPANO, C.; CAPOCASA, E.; CARBOGNANI, F.; CARIDE, S.; CARNEY, M.; CARULLO, G.; DIAZ, J. C.; CASENTINI, C.; CAUDILL, S.; CAVAGLIÀ, M.; CAVALIER, F.; CAVALIERI, R.; CELLA, G.; CEPEDA, C.; CERDÁ-DURÁN, P.; CERRETANI, G.; CESARINI, E.; CHAIBI, O.; CHAMBERLIN, S.; CHAN, M.; CHAO, S.; CHARLTON, P.; CHASE, E.; CHASSANDE-MOTTIN, E.; CHATTERJEE, D.; CHATZIIOANNOU, K.; CHEESEBORO, B.; CHEN, H.; CHEN, X.; CHEN, Y.; CHENG, H.-P.; CHIA, H.; CHINCARINI, A.; CHIUMMO, A.;

CHMIEL, T.; CHO, H.; CHO, M.; CHOW, J.; CHRISTENSEN, N.; CHU, Q.; CHUA, A.; CHUA, S.; CHUNG, K.; CHUNG, S.; CIANI, G.; CIOBANU, A.; CIOLFI, R.; CIPRIANO, F.; CIRELLI, C.; CIRONE, A.; CLARA, F.; CLARK, J.; CLEARWATER, P.; CLEVA, F.; COCCHIERI, C.; COCCIA, E.; COHADON, P.-F.; COHEN, D.; COLLA, A.; COLLETTE, C.; COLLINS, C.; COMINSKY, L.; CONSTANCIO, M.; CONTI, L.; COOPER, S.; CORBAN, P.; CORBITT, T.; CORDERO-CARRIÓN, I.; CORLEY, K.; CORNISH, N.; CORSI, A.; CORTESE, S.; COSTA, C.; COTESTA, R.; COUGHLIN, M.; COUGHLIN, S.; COULON, J.-P.; COUNTRYMAN, S.; COUVARES, P.; COVAS, P.; COWAN, E.; COWARD, D.; COWART, M.; COYNE, D.; COYNE, R.; CREIGHTON, J.; CREIGHTON, T.; CRIFE, J.; CROWDER, S.; CULLEN, T.; CUMMING, A.; CUNNINGHAM, L.; CUOCO, E.; CANTON, T. D.; DÁLYA, G.; DANILISHIN, S.; D'ANTONIO, S.; DANZMANN, K.; DASGUPTA, A.; COSTA, C. D. S.; DATTILO, V.; DAVE, I.; DAVIER, M.; DAVIS, D.; DAW, E.; DAY, B.; DEBRA, D.; DEENADAYALAN, M.; DEGALLAIX, J.; LAURENTIS, M. D.; DELÉGLISE, S.; POZZO, W. D.; DEMOS, N.; DENKER, T.; DENT, T.; PIETRI, R. D.; DERBY, J.; DERGACHEV, V.; ROSA, R. D.; ROSSI, C. D.; DESALVO, R.; VARONA, O. de; DHURANDHAR, S.; DÍAZ, M.; DIETRICH, T.; FIORE, L. D.; GIOVANNI, M. D.; GIROLAMO, T. D.; LIETO, A. D.; DING, B.; PACE, S. D.; PALMA, I. D.; RENZO, F. D.; DMITRIEV, A.; DOCTOR, Z.; DOLIQUE, V.; DONOVAN, F.; DOOLEY, K.; DORAVARI, S.; DORRINGTON, I.; ÁLVAREZ, M. D.; DOWNES, T.; DRAGO, M.; DREISSIGACKER, C.; DRIGGERS, J.; DU, Z.; DUPEJ, P.; DWYER, S.; EASTER, P.; EDO, T.; EDWARDS, M.; EFFLER, A.; EGGENSTEIN, H.-B.; EHRENS, P.; EICHHOLZ, J.; EIKENBERRY, S.; EISENMANN, M.; EISENSTEIN, R.; ESSICK, R.; ESTELLES, H.; ESTEVEZ, D.; ETIENNE, Z.; ETZEL, T.; EVANS, M.; EVANS, T.; FAFONE, V.; FAIR, H.; FAIRHURST, S.; FAN, X.; FARINON, S.; FARR, B.; FARR, W.; FAUCHON-JONES, E.; FAVATA, M.; FAYS, M.; FEE, C.; FEHRMANN, H.; FEICHT, J.; FEJER, M.; FENG, F.; FERNANDEZ-GALIANA, A.; FERRANTE, I.; FERREIRA, E.; FERRINI, F.; FIDECARO, F.; FIORI, I.; FIORUCCI, D.; FISHBACH, M.; FISHER, R.; FISHNER, J.; FITZ-AXEN, M.; FLAMINIO, R.; FLETCHER, M.; FONG, H.; FONT, J.; FORSYTH, P.; FORSYTH, S.; FOURNIER, J.-D.; FRASCA, S.; FRASCONI, F.; FREI, Z.; FREISE, A.; FREY, R.; FREY, V.; FRITSCHER, P.; FROLOV, V.; FULDA, P.; FYFFE, M.; GABBARD, H.; GADRE, B.; GAEBEL, S.; GAIR, J.; GAMMAITONI, L.; GANIJA, M.; GAONKAR, S.; GARCIA, A.; GARCÍA-QUIRÓS, C.; GARUFI, F.; GATELEY, B.; GA. GW170817: Measurements of neutron star radii and equation of state. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 121, n. 16, oct 2018.

ALAM, M. Dark matter properties and halo central densities. **Astrophysical Journal**, 2002.

ALVARENGA, F. G.; CRUZ-DOMBRIZ, A. de la; HOUNDJO, M. J. S.; RODRIGUES, M. E.; SÁEZ-GÓMEZ, D. Dynamics of scalar perturbations in gravity. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 87, n. 10, may 2013.

AMENDOLA, L.; CAMPOS, G. C.; ROSENFELD, R. Consequences of dark matter-dark energy interaction on cosmological parameters derived from type Ia supernova data. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 75, n. 8, apr 2007.

ANTONIADIS, J.; FREIRE, P. C. C.; WEX, N.; TAURIS, T. M.; LYNCH, R. S.; KERKWIJK, M. H. van; KRAMER, M.; BASSA, C.; DHILLON, V. S.; DRIEBE, T.; HESSELS, J. W. T.; KASPI, V. M.; KONDRATIEV, V. I.; LANGER, N.; MARSH, T. R.; MCLAUGHLIN, M. A.; PENNUCCI, T. T.; RANSOM, S. M.; STAIRS, I. H.; LEEUWEN, J. van; VERBIEST, J. P. W.; WHELAN, D. G. A massive pulsar in a compact relativistic binary. **Science**, American Association for the Advancement of Science (AAAS), v. 340, n. 6131, p. 1233232–1233232, apr 2013.

ARBAÑIL, J. D.; LEMOS, J. P.; ZANCHIN, V. T. Incompressible relativistic spheres: Electrically charged stars, compactness bounds, and quasiblack hole configurations. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 89, n. 10, may 2014.

ARBAÑIL, J. D.; MALHEIRO, M. Equilibrium and stability of charged strange quark stars. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 92, n. 8, oct 2015.

ARBAÑIL, J. D.; MALHEIRO, M. Radial stability of anisotropic strange quark stars. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2016, n. 11, p. 012–012, nov 2016.

ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G.; MARCH-RUSSELL, J. Neutrino masses from large extra dimensions. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 65, n. 2, dec 2001.

ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 429, n. 3-4, p. 263–272, jun 1998.

ASTASHENOK, A. V.; ELIZALDE, E.; HARO, J. de; ODINTSOV, S. D.; YUROV, A. V. Brane cosmology from observational surveys and its comparison with standard FRW cosmology. **Astrophysics and Space Science**, Springer Nature, v. 347, n. 1, p. 1–13, may 2013.

AVELINO, P.; AZEVEDO, R. Perfect fluid lagrangian and its cosmological implications in theories of gravity with nonminimally coupled matter fields. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 97, n. 6, mar 2018.

AZEVEDO, R.; PÁRAMOS, J. Dynamical analysis of generalized $f(r,l)$ theories. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 94, n. 6, sep 2016.

BERTOLAMI, O.; BOHMER, C. G.; HARKO, T.; LOBO, F. S. N. Extra force $f(r)$ modified theories of gravity. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 75, n. 10, may 2007.

BOUHMADE-LÓPEZ, M.; CHEN, P.; HUANG, Y.-C.; LIN, Y.-H. Slow-roll inflation preceded by a topological defect phase à la Chaplygin gas. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 87, n. 10, may 2013.

BOUHMADE-LÓPEZ, M.; FERRERA, A. Crossing the cosmological constant line in a dilatonic brane-world model with and without curvature corrections. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2008, n. 10, p. 011, oct 2008.

BRODERICK, J. W.; FENDER, R. P.; BRETON, R. P.; STEWART, A. J.; ROWLINSON, A.; SWINBANK, J. D.; HESSELS, J. W. T.; STALEY, T. D.; HORST, A. J. van der; BELL, M. E.; CARBONE, D.; CENDES, Y.; CORBEL, S.; EISLOFFEL, J.; FALCKE, H.; GRIESSMEIER, J.-M.; HASSALL, T. E.; JONKER, P.; KRAMER, M.; KUNIYOSHI, M.; LAW, C. J.; MARKOFF, S.; MOLENAAR, G. J.; PIETKA, M.; SCHEERS, L. H. A.; SERYLAK, M.; STAPPERS, B. W.; VEEN, S. ter; LEEUWEN, J. van; WIJERS, R. A. M. J.; WIJNANDS, R.; WISE, M. W.; ZARKA, P.

Low-radio-frequency eclipses of the redback pulsar j2215 observed in the image plane with LOFAR. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press (OUP), v. 459, n. 3, p. 2681–2689, apr 2016.

CAPOZZIELLO, S.; FRANCAVIGLIA, M. Extended theories of gravity and their cosmological and astrophysical applications. **General Relativity and Gravitation**, Springer Nature, v. 40, n. 2-3, p. 357–420, dec 2007.

CAPOZZIELLO, S.; LAURENTIS, M. D. Extended theories of gravity. **Physics Reports**, Elsevier BV, v. 509, n. 4-5, p. 167–321, dec 2011.

CAPOZZIELLO, S.; LAURENTIS, M. D.; FARINELLI, R.; ODINTSOV, S. D. Mass-radius relation for neutron stars in $f(r)$ gravity. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 93, n. 2, jan 2016.

CAPOZZIELLO, S.; LOBO, F. S.; MIMOSO, J. P. Generalized energy conditions in extended theories of gravity. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 91, n. 12, jun 2015.

CARVALHO, G. A.; ARBAÑIL, J. D. V.; MARINHO, R. M.; MALHEIRO, M. White dwarfs with a surface electrical charge distribution: equilibrium and stability. **The European Physical Journal C**, Springer Nature, v. 78, n. 5, may 2018.

CARVALHO, G. A.; LOBATO, R. V.; MORAES, P. H. R. S.; ARBAÑIL, J. D. V.; OTONIEL, E.; MARINHO, R. M.; MALHEIRO, M. Stellar equilibrium configurations of white dwarfs in the $f(r, t)$ gravity. **The European Physical Journal C**, Springer Nature, v. 77, n. 12, dec 2017.

CARVALHO, G. A.; MORAES, P. H. R. S.; JR., S. I. dos S.; GONÇALVES, B. S.; MALHEIRO, M. Hydrostatic equilibrium configurations of neutron stars in a non-minimal geometry-matter coupling theory of gravity.

CARVALHO S.I. DOS SANTOS JR., P. M. G.; MALHEIRO, M. Strange stars in energy-momentum-conserved $f(r, t)$ gravity. 2019.

CASTRO, L. B.; ALLOY, M. D.; MENEZES, D. P. Mass radius relation of compact stars in the braneworld. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2014, n. 08, p. 047–047, aug 2014.

CHAMEL, N.; FANTINA, A. F.; DAVIS, P. J. Stability of super-chandrasekhar magnetic white dwarfs. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 88, n. 8, oct 2013.

CHIBA, T. $1/r$ gravity and scalar-tensor gravity. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 575, n. 1-2, p. 1–3, nov 2003.

- CHIBA, T.; NAKAMURA, T. A null test of the cosmological constant. **Progress of Theoretical Physics**, Oxford University Press (OUP), v. 118, n. 4, p. 815–819, oct 2007.
- CHINAGLIA, M.; BERNARDINI, A. E.; ROCHA, R. da. Braneworld scenarios from deformed defect chains. **International Journal of Theoretical Physics**, Springer Nature, v. 55, n. 10, p. 4605–4619, jun 2016.
- CHINAGLIA, M.; CRUZ, W.; CORREA, R.; PAULA, W. de; MORAES, P. Configurational entropy as a tool to select a physical thick brane model. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 779, p. 16–23, apr 2018.
- CHIRDE, V. R.; SHEKH, S. H. Dark energy cosmological model in a modified theory of gravity. **Astrophysics**, Springer Nature, v. 58, n. 1, p. 106–119, mar 2015.
- CHODOS, A.; JAFFE, R. L.; JOHNSON, K.; THORN, C. B.; WEISSKOPF, V. F. New extended model of hadrons. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 9, n. 12, p. 3471–3495, jun 1974.
- CLINE, J. M.; GROJEAN, C.; SERVANT, G. Cosmological expansion in the presence of an extra dimension. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 83, n. 21, p. 4245–4248, nov 1999.
- COPELAND, E. J.; LIDDLE, A. R.; LIDSEY, J. E. Steep inflation: Ending braneworld inflation by gravitational particle production. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 64, n. 2, jun 2001.
- DADHICH, N.; CHAKRABORTY, S. Buchdahl compactness limit for a pure lovelock static fluid star. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 95, n. 6, mar 2017.
- DAS, U.; MUKHOPADHYAY, B. New mass limit for white dwarfs: Super-chandrasekhar type ia supernova as a new standard candle. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 110, n. 7, feb 2013.
- DEFFAYET, C.; DVALI, G.; GABADADZE, G. Accelerated universe from gravity leaking to extra dimensions. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 65, n. 4, jan 2002.
- DEMOREST, P. B.; PENNUCCI, T.; RANSOM, S. M.; ROBERTS, M. S. E.; HESSELS, J. W. T. A two-solar-mass neutron star measured using shapiro delay. **Nature**, Springer Nature, v. 467, n. 7319, p. 1081–1083, oct 2010.
- D'INVERNO, R. **Introducing Einstein's Relativity**. Oxford University Press, 1992. ISBN 0198596863. Disponível em: <http://www.ebook.de/de/product/3242195-/ray_d_inverno_introducing_einstein_s_relativity.html>.
- DOLGOV, A.; KAWASAKI, M. Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion? **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 573, p. 1–4, oct 2003.

- DUTRA, M.; LOURENÇO, O.; AVANCINI, S. S.; CARLSON, B. V.; DELFINO, A.; MENEZES, D. P.; PROVIDÊNCIA, C.; TYPEL, S.; STONE, J. R. Relativistic mean-field hadronic models under nuclear matter constraints. **Physical Review C**, American Physical Society (APS), v. 90, n. 5, nov 2014.
- DUTRA, M.; LOURENÇO, O.; MARTINS, J. S. S.; DELFINO, A.; STONE, J. R.; STEVENSON, P. D. Skyrme interaction and nuclear matter constraints. **Physical Review C**, American Physical Society (APS), v. 85, n. 3, mar 2012.
- DUTRA, M.; LOURENÇO, O.; MENEZES, D. P. Stellar properties and nuclear matter constraints. **Physical Review C**, American Physical Society (APS), v. 93, n. 2, feb 2016.
- EINSTEIN, A. Die feldgleichungen der gravitation. In: **Albert Einstein: Akademie-Vorträge**. [S.l.]: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 1915. p. 88–92.
- ERICKCEK, A. L.; KAMIONKOWSKI, M.; BENSON, A. J. Supermassive black hole merger rates: uncertainties from halo merger theory. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press (OUP), v. 371, n. 4, p. 1992–2000, oct 2006.
- FARHI, E.; JAFFE, R. L. Strange matter. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 30, n. 11, p. 2379–2390, dec 1984.
- FELICE, A. D.; TSUJIKAWA, S. $f(r)$ theories. **Living Reviews in Relativity**, Springer Nature, v. 13, n. 1, jun 2010.
- FRIEDMAN, J. L.; IPSEY, J. R.; SORKIN, R. D. Turning-point method for axisymmetric stability of rotating relativistic stars. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 325, p. 722, feb 1988.
- GAUNTLETT, J. P.; SONNER, J.; WISEMAN, T. Quantum criticality and holographic superconductors in m-theory. **Journal of High Energy Physics**, Springer Nature, v. 2010, n. 2, feb 2010.
- GERGELY, L. Á.; BIERMANN, P. L.; CARAMETE, L. I. Supermassive black hole spin-flip during the inspiral. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 27, n. 19, p. 194009, sep 2010.
- HARKO, T. Modified gravity with arbitrary coupling between matter and geometry. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 669, n. 5, p. 376–379, nov 2008.
- HARKO, T. Thermodynamic interpretation of the generalized gravity models with geometry-matter coupling. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 90, n. 4, aug 2014.
- HARKO, T.; LOBO, F. S.; OTALORA, G.; SARIDAKIS, E. N. $f(r,t)$ gravity and cosmology. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2014, n. 12, p. 021–021, dec 2014.
- HARKO, T.; LOBO, F. S. N. $f(r,l m)$ gravity. **The European Physical Journal C**, Springer Nature, v. 70, n. 1-2, p. 373–379, oct 2010.

- HARKO, T.; LOBO, F. S. N.; MIMOSO, J. P.; PAVÓN, D. Gravitational induced particle production through a nonminimal curvature–matter coupling. **The European Physical Journal C**, Springer Nature, v. 75, n. 8, aug 2015.
- HARKO, T.; LOBO, F. S. N.; MINAZZOLI, O. Extended $f(r,lm)$ gravity with generalized scalar field and kinetic term dependences. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 87, n. 4, feb 2013.
- HARKO, T.; LOBO, F. S. N.; NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. $f(r,t)$ gravity. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 84, n. 2, jul 2011.
- HARRY, I.; HINDERER, T. Observing and measuring the neutron-star equation-of-state in spinning binary neutron star systems. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 35, n. 14, p. 145010, jun 2018.
- HINSHAW, G.; LARSON, D.; KOMATSU, E.; SPERGEL, D. N.; BENNETT, C. L.; DUNKLEY, J.; NOLTA, M. R.; HALPERN, M.; HILL, R. S.; ODEGARD, N.; PAGE, L.; SMITH, K. M.; WEILAND, J. L.; GOLD, B.; JAROSIK, N.; KOGUT, A.; LIMON, M.; MEYER, S. S.; TUCKER, G. S.; WOLLACK, E.; WRIGHT, E. L. NINE-YEAR WILKINSON MICROWAVE ANISOTROPY PROBE (WMAP) OBSERVATIONS: COSMOLOGICAL PARAMETER RESULTS. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, IOP Publishing, v. 208, n. 2, p. 19, sep 2013.
- HOEK L. B., G. M. A. T. van den. New theoretical yields of intermediate mass stars. **Astronomy and Astrophysics Supplement Series**, 1997.
- HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, Proceedings of the National Academy of Sciences, v. 15, n. 3, p. 168–173, mar 1929.
- JÚNIOR, S. I. S.; CARDOSO, J. G. Wave equations for classical two-component proca fields in curved spacetimes with torsionless affinities. **Brazilian Journal of Physics**, Springer Nature, v. 46, n. 5, p. 534–540, aug 2016.
- KALUZA, T. Zum unitatsproblem in der physik. **Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Klasse**, 1921.
- KLEIN, W. Zusammensetzung der pansengase. **Zeitschrift fur Tierzuchtung und Zuchtungsbiologie einschließlich Tierernahrung**, Wiley-Blackwell, v. 6, n. 1, p. 55–58, jan 1926.
- LAI, X.; XU, R. A polytropic model of quark stars. **Astroparticle Physics**, Elsevier BV, v. 31, n. 2, p. 128–134, mar 2009.
- LOBATO, R. V.; MALHEIRO, M.; COELHO, J. G. Magnetars and white dwarf pulsars. **International Journal of Modern Physics D**, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 25, n. 09, p. 1641025, aug 2016.
- MA, Y.-Z.; ZHANG, X. Possible theoretical limits on holographic quintessence from weak gravity conjecture. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 661, n. 4, p. 239–245, mar 2008.

- MAARTENS, R. Cosmological dynamics on the brane. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 62, n. 8, sep 2000.
- MAARTENS, R.; KOYAMA, K. Brane-world gravity. **Living Reviews in Relativity**, Springer Nature, v. 13, n. 1, sep 2010.
- MORAES, P. Cosmology from induced matter model applied to 5d $f(r, t)$ theory. **Astrophys. Space Sci.**, 2014.
- MORAES, P. Cosmological solutions from induced matter model applied to 5d $f(r, t)$ gravity and the shrinking of the extra coordinate. **Eur. Phys. J. C**, 2015.
- MORAES, P. Cosmic acceleration from varying masses in five dimensions. **Int. J. Mod. Phys. D**, 2016.
- NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. i. **Physical Review**, American Physical Society (APS), v. 122, n. 1, p. 345–358, apr 1961.
- NESSERIS S., P. L. Comparison of cosmological models using recent supernova data. **Physical Review D: Particles and Fields**, 2004.
- NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Unified cosmic history in modified gravity: From theory to lorentz non-invariant models. **Physics Reports**, Elsevier BV, v. 505, n. 2-4, p. 59–144, aug 2011.
- NOZARI, K.; ASAIYAN, A. Black hole solutions in the warped DGP braneworld. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 28, n. 12, p. 125017, may 2011.
- OLMO, G. J. The gravity lagrangian according to solar system experiments. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 95, n. 26, dec 2005.
- OPPENHEIMER, J.; G.M., V. On massive neutron cores. **S. Rev. Mod. Phys.**, 1939.
- OVALLE, J.; LINARES, F.; PASQUA, A.; SOTOMAYOR, A. The role of exterior weyl fluids on compact stellar structures in randall–sundrum gravity. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 30, n. 17, p. 175019, aug 2013.
- PÁL, A. Properties of analytic transit light-curve models. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press (OUP), v. 390, n. 1, p. 281–288, oct 2008.
- PERLMUTTER, S. Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae. **Astrophysical Journal**, 1999.
- RADICE, D.; PEREGO, A.; ZAPPA, F.; BERNUZZI, S. GW170817: Joint constraint on the neutron star equation of state from multimessenger observations. **The Astrophysical Journal**, American Astronomical Society, v. 852, n. 2, p. L29, jan 2018.
- RANDALL, L.; SUNDRUM, R. An alternative to compactification. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 83, n. 23, p. 4690–4693, dec 1999.

- RANDALL, L.; SUNDRUM, R. Large mass hierarchy from a small extra dimension. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 83, n. 17, p. 3370–3373, oct 1999.
- RAY, S.; ESPÍNDOLA, A. L.; MALHEIRO, M.; LEMOS, J. P. S.; ZANCHIN, V. T. Electrically charged compact stars and formation of charged black holes. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 68, n. 8, oct 2003.
- RIESS, A. G.; FILIPPENKO, A. V.; CHALLIS, P.; CLOCCHIATTI, A.; DIERCKS, A.; GARNAVICH, P. M.; GILLILAND, R. L.; HOGAN, C. J.; JHA, S.; KIRSHNER, R. P.; LEIBUNDGUT, B.; PHILLIPS, M. M.; REISS, D.; SCHMIDT, B. P.; SCHOMMER, R. A.; SMITH, R. C.; SPYROMILIO, J.; STUBBS, C.; SUNTZEFF, N. B.; TONRY, J. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 116, n. 3, p. 1009–1038, sep 1998.
- RUBIN, V. C.; THONNARD, N.; K., J. F. W. Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 $/r = 4\text{kpc}/$ to UGC 2885 $/r = 122\text{kpc}/$. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 238, p. 471, jun 1980.
- SADJADI, H. M.; VADOOD, N. Notes on an interacting holographic dark energy model in a closed universe. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2008, n. 08, p. 036, aug 2008.
- SAHNI, V.; SHTANOV, Y. NEW VISTAS IN BRANEWORLD COSMOLOGY. **International Journal of Modern Physics D**, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 11, n. 10, p. 1515–1521, dec 2002.
- SANTOS, S. I. dos; CARVALHO, G. A.; MORAES, P. H. R. S.; LENZI, C. H.; MALHEIRO, M. A conservative energy-momentum tensor in the $f(r,t)$ gravity and its implications for the phenomenology of neutron stars. **The European Physical Journal Plus**, Springer Science and Business Media LLC, v. 134, n. 8, aug 2019.
- SCHWAB, J.; QUATAERT, E.; KASEN, D. The evolution and fate of super-chandrasekhar mass white dwarf merger remnants. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press (OUP), v. 463, n. 4, p. 3461–3475, sep 2016.
- SHABANI, H.; FARHOUDI, M. Cosmological and solar system consequences of $f(r,t)$ gravity models. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 90, n. 4, aug 2014.
- SHIROMIZU, T.; MAEDA, K. ichi; SASAKI, M. The einstein equations on the 3-brane world. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 62, n. 2, jun 2000.
- SHTANOV, Y.; SAHNI, V. Bouncing braneworlds. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 557, n. 1-2, p. 1–6, mar 2003.
- SHTANOV, Y.; VIZNYUK, A. Linearized gravity on the randall–sundrum two-brane background with curvature terms in the action for the branes. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 22, n. 6, p. 987–1005, feb 2005.

- SITTER, W. de. On the curvature of space. **Proc. Kon. Ned. Acad. Wet**, 1917.
- SONG, Y.-S. Large scale structure formation of the normal branch in the DGP brane world model. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 77, n. 12, jun 2008.
- SOTIRIOU, T. P.; FARAONI, V. $f(r)$ theories of gravity. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society (APS), v. 82, n. 1, p. 451–497, mar 2010.
- TOLMAN, R. C. Static solutions of einstein's field equations for spheres of fluid. **Physical Review**, American Physical Society (APS), v. 55, n. 4, p. 364–373, feb 1939.
- TOOPER, R. F. General relativistic polytropic fluid spheres. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 140, p. 434, aug 1964.
- VIZNYUK, A.; SHTANOV, Y. Spherically symmetric problem on the brane and galactic rotation curves. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 76, n. 6, sep 2007.
- VIZNYUK, A.; SHTANOV, Y.; SAHNI, V. No-boundary proposal for braneworld perturbations. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 89, n. 8, apr 2014.
- WANG, J.; LIAO, K. Energy conditions in $f(r, l_m)$ gravity. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 29, n. 21, p. 215016, oct 2012.
- WANG, Y.; MUKHERJEE, P. Model-independent constraints on dark energy density from flux-averaging analysis of type ia supernova data. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 606, n. 2, p. 654–663, may 2004.
- WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology**. John Wiley & Sons Inc, 1972. ISBN 0471925675. Disponível em: <http://www.ebook.de/de/product/3597676-/steven_weinberg_gravitation_and_cosmology.html>.
- WEINBERG, S. The cosmological constant problem. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society (APS), v. 61, n. 1, p. 1–23, jan 1989.
- WESSON, P. The properties of matter in kaluza-klein cosmology. **Mod. Phys. Lett. A**, 1992.
- WESSON, P. The properties of matter in kaluza-klein cosmology. **Astrophys. J.**, 1992.
- WITTEN, E. Cosmic separation of phases. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 30, n. 2, p. 272–285, jul 1984.
- WITTEN, E. Five-brane effective action in m-theory. **Journal of Geometry and Physics**, Elsevier BV, v. 22, n. 2, p. 103–133, may 1997.
- WU, Y.-B.; ZHAO, Y.-Y.; LU, J.-W.; ZHANG, X.; ZHANG, C.-Y.; QIAO, J.-W. Five-dimensional generalized $f(r)$ gravity with curvature–matter coupling. **The European Physical Journal C**, Springer Nature, v. 74, n. 4, apr 2014.

XU, M.-X.; HARKO, T.; LIANG, S.-D. Quantum cosmology of $f(r, t)$ gravity. **The European Physical Journal C**, Springer Nature, v. 76, n. 8, aug 2016.

ZAREGONBADI, R.; FARHOUDI, M. Cosmic acceleration from matter–curvature coupling. **General Relativity and Gravitation**, Springer Nature, v. 48, n. 10, sep 2016.

ZAREGONBADI, R.; FARHOUDI, M.; RIAZI, N. Dark matter from $f(r,t)$ gravity. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 94, n. 8, oct 2016.

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO TD	2. DATA 25 de julho de 2019	3. DOCUMENTO Nº DCTA/ITA/DM-018/2015	4. Nº DE PÁGINAS 66
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: TEORIAS ALTERNATIVAS À RELATIVIDADE GERAL APLICADAS A OBJETOS COMPACTOS			
6. AUTOR(ES): Samuel Isidoro dos Santos JR			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: Modelos Alternativos na RG; Objetos Compactos; Estrelas de Nêutrons			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Modelos Alternativos na RG; Objetos Compactos; Estrelas de Nêutrons			
10. APRESENTAÇÃO: <input checked="" type="checkbox"/> Nacional <input type="checkbox"/> Internacional ITA, São José dos Campos. Curso de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Física Nuclear. Orientador: Prof. Dr. Manuel Máximo Bastos Malheiro de Oliveira. Coorientador: Prof. Dr. Pedro Henrique Ribeiro da Silva Moraes. Defesa em 25/07/2019. Publicada em xx/xx/2019.			
11. RESUMO: As soluções para a equação de Tolmann-Oppenheimer-Volkoff fornecem informações valiosas sobre as características macroscópicas previstas para objetos astrofísicos compactos dentro da teoria da Relatividade Geral de Einstein. Tais características são sensíveis à equação de estado considerada para a matéria nuclear, mas também à teoria gravitacional utilizada. O presente trabalho tem como principal propósito a obtenção de soluções da equação de equilíbrio hidrostático para estrelas relativísticas em teorias de gravitação alternativas à Relatividade Geral. Foi analisado em particular as teorias $f(R, T)$, $f(R, \mathcal{L}_m)$ e modelos de Brana. Estas teorias surgiam na literatura num contexto cosmológico, mas estamos agora aplicando elas num contexto astrofísico ao estudo de estrelas compactas, com intuito de dar conta de recentes observações astronômicas, como pulsares massivos de aproximadamente duas massas solares, que são dificilmente explicados via Relatividade Geral. Novas equações de equilíbrio hidrostático e resultados numéricos são apresentados. Mostramos que Estrelas de Nêutrons e de Quarks massivas são bem descritas nestas teorias alternativas da gravidade, em especial as Estrelas de Nêutrons, onde observou-se o valor de massa máxima mais sensível no caso conservado. Pela primeira vez na literatura, mostramos que a teoria $f(R, T)$ conservada pode ser desenvolvida e aplicada no contexto astrofísico, em particular no estudo de objetos compactos.			
12. GRAU DE SIGILO: <input checked="" type="checkbox"/> OSTENSIVO <input type="checkbox"/> RESERVADO <input type="checkbox"/> SECRETO			