

Tese apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências no Curso de Física, Área de Física Nuclear.

**Heitor Oliveira de Oliveira**

**RELACIONANDO ÍNDICES DE FRENAGEM DE  
JOVENS PULSARES À ESTRUTURA  
SUPERFLUIDA DE SEU NÚCLEO**

Tese aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:



Prof. Dra. Nadja Simão Magalhães

Orientadora

Prof. Dr. Pedro Teixeira Lacava

Pró-Reitor de Pós-Graduação

Campo Montenegro  
São José dos Campos, SP - Brasil  
2019

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)**  
**Divisão de Informação e Documentação**

Oliveira, Heitor Oliveira de  
Relacionando índices de frenagem de jovens pulsares à estrutura superfluida de seu núcleo /  
Heitor Oliveira de Oliveira.  
São José dos Campos, 2019.  
120f.

Tese de Doutorado – Curso de Física. Área de Física Nuclear – Instituto Tecnológico de  
Aeronáutica, 2019. Orientadora: Profa. Dra. Nadja Simão Magalhães.

1. Índice de Frenagem. 2. Pulsar. 3. Estrelas de Nêutrons. I. Centro Técnico Aeroespacial.  
Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Divisão de Física. II. Título.

## **REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA**

OLIVEIRA, Heitor Oliveira de. **Relacionando índices de frenagem de jovens pulsares à estrutura superfluida de seu núcleo**. 2019. 120f. Tese de Doutorado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

## **CESSÃO DE DIREITOS**

NOME DO AUTOR: Heitor Oliveira de Oliveira

TÍTULO DO TRABALHO: Relacionando índices de frenagem de jovens pulsares à estrutura superfluida de seu núcleo.

TIPO DO TRABALHO/ANO: Tese / 2019

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta tese e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese pode ser reproduzida sem a autorização do autor.

---

Heitor Oliveira de Oliveira  
Rua das Figueiras, 121  
12.227-074 – São José dos Campos–SP

# RELACIONANDO ÍNDICES DE FRENAGEM DE JOVENS PULSARES À ESTRUTURA SUPERFLUIDA DE SEU NÚCLEO

Heitor Oliveira de Oliveira

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr.	Manuel M. B. Malheiro de Oliveira	Presidente	-	ITA
Profa. Dra.	Nadja Simão Magalhães	Orientadora	-	ITA
Prof. Dr.	César Henrique Lenzi	Membro Interno	-	ITA
Dr.	Jorge Ernesto Horvath	Membro Externo	-	USP
Dr.	José Carlos Neves de Araújo	Membro Externo	-	INPE

À minha amada mãe Wany Oliveira que me inspira a lutar e ser justo, sem você eu não teria alcançado minhas maiores vitórias.

À minha amada esposa e companheira Aline Freitas de Oliveira, pelo amor e carinho sem os quais eu não teria condições de refletir sobre as minhas escolhas.

À minha amada irmã Hellen Oliveira, por me motivar através dos seus esforços e dedicação, você tem as maiores qualidades de nossa mãe.

Eu amo vocês.

# Agradecimentos

Agradeço a Deus pelas oportunidades e pela vida.

Agradeço a minha mãe Wany Oliveira, a minha esposa Aline Freitas e a minha irmã Hellen Oliveira por terem me apoiado incessantemente e que continuaram me apoiando durante todo o curso, acreditando na minha capacidade, me incentivando, compartilhando as alegrias dos meus sucessos e as tristezas de minhas frustrações. Agradeço por todo o cuidado, paciência e cumplicidade.

Ao meu amigo em especial Sr. Taciél Monteiro que pessoalmente me ajudou muito.

Agradeço a minha orientadora Nadja Magalhães por ter aceitado o desafio de me orientar, pela amizade, paciência e confiança depositada na realização deste trabalho.

Agradeço aos amigos que fiz na Cidade de São José dos Campos, em especial: João Matias, Ubirajara de Sá e Péricles Sant'Ana.

Agradeço aos amigos por terem tornado o convívio mais agradável e prazeroso em especial: Larissa Nascimento e Dalton Oliveira. A secretária Elenice Santana pelo carinho e paciência comigo.

Ao sr. Geovane Menezes e o sr. Jorge Soares por terem acreditado que eu poderia ser capaz de fazer muito mais, aos professores que tive até este momento.

Aos funcionários do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA).

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão da bolsa de estudos durante os anos do curso de doutorado.

*“ Ainda que, como espero (...) A vossa aceitação deixar-me-ia super contente, mas não definiria o que sou. A minha identidade é baseada com firmeza e alegria num fato de que eu sou filho da minha mãe.”*

— JAMES L. BROOKS, SPANGLISH, 2004.

# Resumo

Pulsares são estrelas que emitem radiação eletromagnética em intervalos de tempo bem definidos. A frequência de tais pulsos está diminuindo com o tempo, conforme quantificado pelo *índice de frenagem* ( $n$ ). No modelo canônico  $n = 3$  para todos os pulsares, mas os dados observacionais mostram que  $n \neq 3$ , indicando uma limitação do modelo. Neste trabalho apresentamos uma nova abordagem para estudar o decaimento da frequência de rotação de um pulsar, baseado em uma adaptação do modelo canônico. Consideramos o pulsar uma estrela que gira no vácuo e possui um forte campo magnético, mas, diferentemente do modelo canônico, nós admitimos que seu momento de inércia muda no tempo devido a uma variação da disposição de massa em seu interior, matematizada pela variação uniforme de um parâmetro de deslocamento no tempo. Nós descobrimos que o índice de frenagem é menor do que o valor canônico como uma consequência de um aumento no parâmetro de deslocamento da estrela, cuja variação é pequena o suficiente para permitir considerações físicas plausíveis que podem ser aplicadas a um modelo mais complexo de pulsares no futuro. Em particular, esta variação é da ordem de fluência dos vórtices de nêutrons em superfluidos rotativos. Quando aplicado aos dados do pulsar, nosso modelo forneceu valores para os índices de frenagem das estrelas próximos aos observacionais. A aplicação desta abordagem a um modelo estelar mais complexo, em que se pressupõe que os pulsares tenham interiores superfluidos, é o próximo passo para sondá-lo. Nossa hipótese é que a expansão lenta do parâmetro de deslocamento poderia imitar o movimento dos vórtices de nêutrons superfluidos do núcleo em modelos realistas. Essa contribuição não altera a irradiação da energia dipolar magnética, mas reduz a velocidade angular da estrela e, portanto, a frequência dos pulsos luminosos do pulsar, conforme se observa. Estendemos esta abordagem a outras propriedades do pulsar, fazendo análises preliminares de momento angular, idade e ângulo de inclinação.

# Abstract

Pulsars are stars that emit electromagnetic radiation in well-defined time intervals. The frequency of such pulses decreases with time as is quantified by the *braking index* ( $n$ ). In the canonical model  $n = 3$  for all pulsars, but observational data show that  $n \neq 3$ , indicating a limitation of the model. In this work we present a new approach to study the frequency decay of the rotation of a pulsar, based on an adaptation of the canonical one. We consider the pulsar a star that rotates in vacuum and has a strong magnetic field but, differently from the canonical model, we assume that its moment of inertia changes in time due to a variation of the mass distribution inside, mathematized by the uniform variation of a displacement parameter in time. We found that the braking index results smaller than the canonical value as a consequence of an increase in the star's displacement parameter, whose variation is small enough to allow plausible physical considerations that can be applied to a more complex model for pulsars in the future. In particular, this variation is of the order of neutron vortices' creep in rotating superfluids. When applied to pulsar data our model yielded values for the stars' braking indices close to the observational ones. The application of this approach to a more complex star model, where pulsars are assumed to have superfluid interiors, is the next step in probing it. We hypothesize that the slow expansion of the displacement parameter might mimic the motion of core superfluid neutron vortices in realistic models. This contribution does not alter the irradiation of the magnetic dipole energy, but reduces the angular velocity of the star and, therefore, the frequency of the pulsar pulses, as observed. We take this approach to other properties of the pulsar, making preliminary analysis of angular momentum, age, and inclination angle.

# Lista de Figuras

FIGURA 2.1 – Ilustração artística de um Pulsar, disponível em: “ <a href="http://vycanis-marjoris.blogspot.com.br/">http:// vycanis-marjoris.blogspot.com.br/</a> ” . . . . .	23
FIGURA 2.2 – Diagrama $P-\dot{P}$ , respectivamente, período e derivada do período (créditos da figura: Ghosh (2007)). . . . .	28
FIGURA 2.3 – Observações do “the Duck”, com a remanescente de supernova G5.4-1.2, PWN G5.27-0.90, e o pulsar B1757-24. Imagem em: (BLAZEK <i>et al.</i> , 2006). . . . .	31
FIGURA 3.1 – Diagrama massa-raio para estrelas de nêutrons. Créditos: (FRANZON, 2012). . . . .	42
FIGURA 3.2 – Diagrama de massas de estrelas de nêutrons observadas. Créditos: (LATTIMER; PRAKASH, 2011). . . . .	42
FIGURA 3.3 – A rotação de um superfluido não é uniforme, mas ocorre através de uma rede de vórtices quantizados, cujos núcleos (amarelo) são paralelos ao eixo de rotação. Setas pequenas indicam a circulação da velocidade do superfluido em torno de cada singularidade. O conjunto de vórtices gira rigidamente com o contêiner. Ilustração artística de um conjunto de vórtices, disponível em: (LOUNASMAA; THUNEBERG, 1999). . . . .	47
FIGURA 3.4 – (a) Representação esquemática de um conjunto de vórtices, onde a linha circular representa a circulação que contém a singularidade, e as regiões externas aos círculos são regiões que sofrem efeitos individuais dos vórtices (créditos: Hall (1960), (b) Imagem de duas linhas de vórtices, onde $a_0$ representa o raio do “buraco” (singularidade) no centro da linha, $r$ representa a distância na qual a linha de vórtice está contida, $\Omega_0$ é a velocidade angular de rotação do fluido (e que origina a circulação) e, $b$ é a distância entre as linhas de vórtices. . .	49

- FIGURA 4.1 – Gráfico do índice de frenagem,  $n$ , como uma função da variação temporal do parâmetro de deslocamento,  $\dot{R}$  ( $\text{cm s}^{-1}$ ), para os pulsares listados na tabela 4.1. Os pontos amarelos indicam os valores observacionais para  $n$ . . . . . 63
- FIGURA 4.2 – No gráfico,  $I/I'$  representa  $|I|/|\dot{I}|$ , é o momento de inércia pela sua derivada como função de  $\Omega/|\Omega'|^{-1}$ , que representa  $\Omega/\dot{\Omega}^{-1}$ , a velocidade angular de rotação dividida pelo módulo de sua derivada, os asteriscos representam estrelas no modelo da equação 4.39. A linha, triângulos e traço-traço-ponto representam respectivamente funções para índices de frenagens constantes de valores  $n = 1$ ,  $n = 2$  e  $n = 2, 9$ . . . . . 68
- FIGURA 4.3 – No gráfico,  $I/I'$  representa  $|I|/|\dot{I}|$ , é o momento de inércia pela sua derivada como função de  $\Omega/|\Omega'|^{-1}$ , que representa  $\Omega/\dot{\Omega}^{-1}$ , a velocidade angular de rotação dividida pelo módulo de sua derivada, os círculos representam estrelas no modelo da equação 4.40. As linhas representam a função para índice de frenagem constante de valores  $n = 1$ ,  $n = 2$  e  $n = 2, 9$ . . . . . 69
- FIGURA 4.4 – No gráfico,  $I/I'$  representa  $|I|/|\dot{I}|$ , é o momento de inércia pela sua derivada como função de  $\Omega/|\Omega'|^{-1}$ , que representa  $\Omega/\dot{\Omega}^{-1}$ , a velocidade angular de rotação dividida pelo módulo de sua derivada, os asteriscos representam estrelas no modelo da equação 4.39 e os círculos representam estrelas no modelo da equação 4.40. As linhas preta, azul e violeta púrpura representam respectivamente a função para índices de frenagens constantes de valores  $n = 1$ ,  $n = 2$  e  $n = 2, 9$ . Assim como, respectivamente triângulos e traço-traço-ponto representam  $n = 2$  e  $n = 2, 9$ . . . . . 70
- FIGURA 4.5 – Imagem da SNR CTB 80 (G69.0+2.7) e do pulsar B1951+32 a partir do VLA. (a) Podemos ver a casca da SNR G69.0+2.7, onde o sinal + representa a posição do pulsar e a linha indica a direção ao qual ele viajou com a elipse de 1 sigma ( $\sigma$ ) marcando o possível local de nascimento se o pulsar tem 107 mil anos, (b) A seta indica a direção de movimento medida do pulsar com o comprimento correspondendo a distância viajada ao longo de 100 anos. Imagem em: *Migliazzo et al. 2002* . . . . . 71
- FIGURA 4.6 – Gráfico do torque ( $\dot{L}$ ) como função do índice de frenagem ( $n$ ) usando os dados do pulsar J1734-3333. . . . . 74

# Lista de Tabelas

TABELA 2.1 – Velocidade angular ( $\Omega$ ) e suas primeira derivada ( $\dot{\Omega}$ ) e segunda derivada ( $\ddot{\Omega}$ ). . . . .	27
TABELA 3.1 – Fatores que afetam o índice de frenagem. . . . .	35
TABELA 3.2 – Algumas equações de estado (EoS) e a composição estelar a elas associada. . . . .	39
TABELA 4.1 – Parâmetro de Deslocamento no Tempo ( $\dot{R}$ ), campo magnético no polo de acordo com nosso modelo ( $B_P$ ), campo magnético no polo de acordo com o modelo canônico ( $B_P$ (canon.)), idade característica ( $\tau_c$ ) e momento de inércia após o tempo característico ter decorrido ( $I_{char}$ ). . . . .	62
TABELA 4.2 – Velocidade Angular ( $\Omega$ ) e suas derivadas no tempo para outros jovens pulsares. Os valores do índice de frenagem, $n_{obs}$ , que foram publicados. A idade dada pelo dipolo puro é $\tau_c$ , enquanto a faixa $n$ apresentada na última coluna é a previsão do nosso modelo. . . . .	64

# Lista de Símbolos

$\nabla$	Representa um operador diferencial vetorial.
$\oint_C$	Integral de linha ao longo de um caminho $C$ .
$M_\odot$	Representa uma massa solar.
$\hbar$	Abreviação conveniente da razão entre a constante de Planck ( $h$ ) por $2\pi$ .
$\hat{P}$	Operador momento linear.
$\hat{v}$	Operador velocidade.
$\alpha$	Ângulo de inclinação entre o eixo de rotação e o eixo do dipolo magnético.
$\dot{\alpha}$	Primeira derivada do ângulo de inclinação entre o eixo de rotação e o eixo do dipolo magnético em relação ao tempo.
$\epsilon$	Posição do vórtice no superfluido.
$\Theta$	Separação angular entre o pulsar e o seu suposto local de nascimento.
$\theta$	Fase condensada (ou coerente).
$\kappa_F$	Vetor de onda de Fermi.
$\kappa$	Circulação em torno do fluido ou quanta de circulação.
$\kappa_0$	Quantum da circulação em torno do par de nêutrons superfluidos.
$\lambda$	Fator de forma do pulsar.
$\mu$	Movimento próprio do pulsar.
$\rho$	Densidade de um fluido.
$\rho_s$	Densidade do superfluido de nêutrons.
$\varsigma$	Intervalos de tempo observacionais típicos.
$\tau_c$	Idade característica referente ao modelo canônico.
$\tau_P$	Idade de um pulsar para um arbitrário índice de frenagem constante sobre toda a vida do pulsar.
$\tau$	Idade do pulsar no modelo com superfluidez.
$\psi$	Função de onda do condensado.
$\Omega_{cr}$	Velocidade angular de rotação de valor crítico para a formação de vórtices no fluido.
$\Omega_c$	Velocidade angular da crosta do pulsar.
$\Omega_n$	Velocidade angular do núcleo do pulsar.
$\Omega$	Velocidade angular de rotação.

- 
- $\dot{\Omega}$  Primeira derivada da velocidade angular de rotação em relação ao tempo.
- $\ddot{\Omega}$  Segunda derivada da velocidade angular de rotação em relação ao tempo.

# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	17
1.1	Objetivos deste Trabalho . . . . .	20
1.2	Motivação da Pesquisa . . . . .	20
2	O MODELO CANÔNICO PARA A DESACELERAÇÃO DA ROTAÇÃO DE PULSARES . . . . .	22
2.1	A Descoberta do Primeiro Pulsar . . . . .	22
2.2	O Modelo de Farol . . . . .	23
2.3	O Índice de Frenagem no Modelo Canônico . . . . .	24
2.4	Distribuição de Pulsares no Plano $P - \dot{P}$ . . . . .	28
2.4.1	Idade com Base no Modelo para a Desaceleração da Rotação de um Dipolo Puro (Canônico) . . . . .	29
2.4.2	Uma Estimativa de Idade Independente de Mecanismos de Frenagem . . . . .	31
2.5	Uma Nota sobre a Teoria de <i>Glitches</i> . . . . .	32
2.6	O Cálculo do Campo Magnético . . . . .	33
3	ESTRUTURAS E PROCESSOS EM ESTRELAS DE NÊUTRONS . . . . .	35
3.1	Fatores que Afetam o Período de Pulsares . . . . .	35
3.2	Equações de Estado . . . . .	38
3.3	Mecanismo Físico . . . . .	43
3.3.1	Comentários sobre Vórtices em Materiais Supercondutores . . . . .	44
3.4	Movimento de Vórtices de Nêutrons . . . . .	45
3.5	Núcleo de uma Estrela de Nêutrons Rotacionando . . . . .	48
3.5.1	Energia de um Vórtice . . . . .	48

3.5.2	Velocidade Angular Crítica para a Formação de Vórtices . . . . .	50
3.5.3	Densidade de Vórtices por Unidade de Área . . . . .	51
3.5.4	Estado de Equilíbrio Termodinâmico com Núcleo de uma Estrela de Nêutrons em Rotação . . . . .	52
<b>3.6</b>	<b>Dinâmica da Rotação do Fluido no Interior de Estrelas de Nêutrons</b>	<b>55</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>58</b>
<b>4.1</b>	<b>O Parâmetro de Deslocamento e Índice de Frenagem . . . . .</b>	<b>58</b>
4.1.1	Previsão dos Índices de Frenagem dos Pulsares . . . . .	64
<b>4.2</b>	<b>Idade de Pulsares Associada ao Parâmetro de Deslocamento . . .</b>	<b>65</b>
4.2.1	Idade e o Caso do Pulsar B1757-24 . . . . .	67
4.2.2	Comparação do Modelo Modificado para Idade e Evolução Rotacional devido ao Desacoplamento do Superfluido . . . . .	67
4.2.3	Pulsar B1951+32 na Remanescente de Supernova CTB 80 . . . . .	70
<b>4.3</b>	<b>Conservação do Momento Angular Total e Dinâmica do Núcleo Superfluido . . . . .</b>	<b>72</b>
<b>4.4</b>	<b>Torque no Pulsar J1734-3333 . . . . .</b>	<b>73</b>
4.4.1	Pressão do Conjunto de Vórtices . . . . .	74
<b>4.5</b>	<b>O Modelo de Frenagem do Deslocamento Interno do Superfluido Considerando a Evolução do Ângulo de Inclinação . . . . .</b>	<b>75</b>
<b>5</b>	<b>DISCUSSÃO ACERCA DOS RESULTADOS . . . . .</b>	<b>77</b>
<b>5.1</b>	<b>Sobre a Força Centrífuga . . . . .</b>	<b>78</b>
<b>5.2</b>	<b>Idade de Pulsares a partir do Parâmetro de Deslocamento e Ín- dice de Frenagem . . . . .</b>	<b>78</b>
5.2.1	Da Comparação entre o Modelo de Desacoplamento do Superfluido e o Modelo que Mensura a Velocidade dos Deslocamentos de Massa Internos na Estrela . . . . .	79
<b>5.3</b>	<b>Comentários sobre Momento Angular no Pulsar J1734-3333 . . .</b>	<b>79</b>
<b>5.4</b>	<b>Pressão do Conjunto de Vórtices . . . . .</b>	<b>80</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>81</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>83</b>

---

APÊNDICE A – CAMPO MAGNÉTICO DE UM DIPOLO MAGNÉTICO	92
APÊNDICE B – CÁLCULO PARA A ENERGIA IRRADIADA . . . . .	101
APÊNDICE C – MODELO PROPOSTO . . . . .	103
APÊNDICE D – ESTADO DE EQUILÍBRIO TERMODINÂMICO OB- TIDO PELA MINIMIZAÇÃO DA ENERGIA LIVRE DO SISTEMA . .	112
ANEXO A – TRABALHOS PUBLICADOS . . . . .	114

# 1 Introdução

*“Em 30 anos esta é a primeira tese no Brasil onde este problema é abordado como foco.”  
(J. E. Horvath, 07/08/2019)*

As estrelas de nêutrons rotacionam rapidamente (com períodos de rotação em torno de 1,6 ms a 4,3 s (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008)) e possuem segundo o modelo canônico altos campos magnéticos (com campos magnéticos de superfície de cerca de  $10^{12}$  Gauss (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008)), por isso dizemos que são altamente magnetizadas. Se elas apresentam o dipolo magnético desalinhado em relação ao eixo de rotação então, elas irão emitir radiação magnética, sendo esta radiação gerada a partir de sua magnetosfera e direcionada a nós a cada volta da estrela devido justamente a este desalinhamento; este padrão de irradiação na estrela é semelhante a um farol que, emitindo luz, esteja em rotação (GOLD, 1968). Tais rotações são precisamente medidas a partir da detecção e cronometragem (em inglês: *timing*) dos pulsos eletromagnéticos que alcançam a Terra. A precisão destas medições em comprimentos de onda de rádio tem permitido aplicações da teoria de relatividade geral até a possibilidade de detecção de ondas gravitacionais (HELLINGS; DOWNS, 1983; LYNE *et al.*, 2004; JENET *et al.*, 2005), implicando que o estudo acerca da dinâmica da rotação destas estrelas conduz a avanços importantes. Entretanto, vale ressaltar que ainda não conhecemos bem os detalhes sobre o mecanismo de emissão.

A característica comum a estas estrelas foi observada logo após a sua descoberta, quando o decrescimento monotônico da frequência de rotação (a desaceleração da rotação) foi medida (COLE, 1969; DAVIES *et al.*, 1969). Isto conduziu ao modelo teórico em voga, no qual a perda de energia rotacional foi modelada como a radiação magnética que era produzida pela rotação da estrela (GUNN; OSTRICKER, 1969). Este modelo para explicar a frequência dos pulsos de estrelas de nêutrons será denominado de modelo canônico, que ao considerar um dipolo magnético preso a uma esfera sólida em rotação no vácuo e sem outros mecanismos de frenagem resulta em uma taxa de desaceleração na seguinte forma:  $\dot{\Omega} \propto -\Omega^3$ , a qual deveria permitir que em tais condições a medida de tal desaceleração deveria oferecer informações diretas na intensidade do dipolo magnético.

A emissão da radiação de pulsares em múltiplos comprimentos de onda a partir de

raios de rádio a raios gama implica que tais objetos não são tão simples. Neste contexto, a extensa emissão de comprimentos de onda indica que estas estrelas são cercadas por um plasma que pode acelerar as partículas até energias muito altas. Como resultado isto poderia remover momento angular da estrela de nêutrons implicando uma mudança na desaceleração provocada pela frenagem magnética (MANCHESTER *et al.*, 1985; HARDING *et al.*, 1999; KRAMER *et al.*, 2006).

Por muitas vezes a estrela é dividida em núcleo (região interior) e crosta (região exterior ao caroço denominado núcleo). Uma outra questão importante, relacionada ao interior, é a de que se espera que ele apresente uma quantidade significativa de matéria na forma de nêutrons superfluidos (BAYM *et al.*, 1969). Parte deste superfluido pode não estar acoplado à desaceleração observada na crosta externa, como sugerem as falhas (*glitches*), que produzem alteração na frequência de rotação destas estrelas, o que é observado, em geral, como eventos súbitos e aleatórios que promovem aceleração na velocidade orbital de pulsares (RADHAKRISHNAN; MANCHESTER, 1969; ESPINOZA *et al.*, 2011b). Sobre a dinâmica interna, estas alterações casuais no padrão de decaimento podem ser causadas pela transferência de momento angular das componentes do superfluido para a crosta (ANDERSON; ITOH, 1975).

O modelo canônico prevê uma desaceleração gradual da rotação da estrela, quantificada por uma grandeza conhecida como índice de frenagem (*braking index*), representada por “ $n$ ”. É esperado que o acoplamento e desacoplamento alterem o estado (*long-term*) que conduz à medida do índice de frenagem e com isso produzindo alterações no modelo de dipolo puro ou desvios na desaceleração dipolar “normal” (modelo canônico) (HO; ANDERSSON, 2012). Além disso, mudanças estruturais, como a evolução da direção do campo magnético de dipolo, interferem na esperada desaceleração de uma estrela de nêutrons de dipolo puro isolada no vácuo (por exemplo: (MIDDLEDITCH *et al.*, 2006; LYNE *et al.*, 2013). Para completar a sequência de condições importantes às quais as estrelas de nêutrons podem estar sujeitas e que possibilitem a compreensão de outros conteúdos da Física, encontra-se a emissão de ondas gravitacionais as quais contribuem na perda de energia e que, em limites superiores para pulsares isolados como os pulsares das Nebulosas de Caranguejo e de Vela, têm contribuições menores do que 10 por cento (AASI *et al.*, 2014).

A respeito do processo de desaceleração da rotação de pulsares, é normalmente admitida uma frenagem constante a partir do dipolo eletromagnético. Sobre isto, notemos que de todas as onze medidas de índice de frenagem de pulsares dez apresentam valores menores que 3, o que é um indicativo de que o modelo de frenagem magnético devido a um dipolo constante (modelo canônico) necessita de aprimoramentos e análises mais detalhadas.

A pequena quantia de dados disponíveis de índices de frenagem, apesar de limitar a compreensão da física destes objetos, é resultado das dificuldades na determinação do valor

da segunda derivada da frequência rotacional necessária para o cálculo de  $n$ . Vale ressaltar que os efeitos sobre a segunda derivada da frequência rotacional provenientes apenas da evolução rotacional são muito pequenos quando comparados com outros fenômenos que afetam a rotação de estrelas de nêutrons (ESPINOZA *et al.*, 2016), tais como as súbitas mudanças na rotação (*glitches*) e o ruído temporal (ou o tempo em que o processo de ruído nas fontes aparecem). Em geral, *glitches* geram aumentos na taxa de rotação seguidas por um período de relaxação desta, com uma desaceleração que conduz o pulsar a velocidade angular de rotação próxima à anterior ao *glitch*.

O método de observação de pulsares (*pulsar timing method*) (HOBBS *et al.*, 2010) permite que o tempo de chegada dos pulsos seja comparado com modelos que considerem parâmetros astrométricos (estudam posição, paralaxes e movimento próprio dos astros), orbitais e rotacionais. A medida de tempo que é incompatível com o método de observação empregado para um mesmo tempo de observação é conhecida por *timing residuals*, e a sua definição é a diferença entre o tempo de chegada previsto e o tempo de chegada dos pulsos de pulsares (basicamente, a sua tradução em português: um resíduo na cronometragem). Este termo pode ser facilmente confundido com o termo de uma das principais irregularidades (já mencionado): o *timing noise* (ruído temporal), observado em conjuntos de dados de pulsares, em geral explicados por processos randômicos (CORDES; HELFAND, 1980), tais como companheiros planetários não modelados (RICHARDS *et al.*, 1970) ou precessão livre (STAIRS *et al.*, 2000). Contudo, o fenômeno do ruído temporal é um fenômeno não explicado (VIVEKANAND, 2017), muito sobre o ruído temporal ainda não é explicado. Por exemplo, a sensibilidade de qualquer conjunto de observações de pulsares para radiação gravitacional é fortemente afetada por qualquer ruído temporal (SHANNON; CORDES, 2010) e, complementarmente, para Lyne (2010) a mudança na forma dos perfis de pulso está correlacionada a esta mudança na taxa de desaceleração das estrelas e sugerindo, assim, uma origem magnetosférica para o ruído temporal.

Temos abordado que há muita dificuldade na análise dos dados observados dos pulsares, nós sabemos que há uma diferença entre o tempo de chegada previsto e o tempo de chegada dos pulsos de pulsares, conhecido como: resíduo na cronometragem. Embora se possa comparar com certos modelos esta não é a única dificuldade. O que o leitor deve perceber é que além disto, existem outras dificuldades conhecidas, como: o ruído temporal e as súbitas mudanças na rotação as quais chamamos de falhas.

Clarificando a discussão iniciada há alguns parágrafos, para podermos detectar a segunda derivada da frequência angular associada à variação monotônica da frequência angular, em certo intervalo de tempo, a taxa desta frequência rotacional deve ser maior ou comparável à amplitude do ruído temporal. Ou seja, como a taxa da frequência rotacional de pulsares já é muito baixa, então a detecção da segunda derivada é uma tarefa quase impossível mesmo para grandes conjuntos de dados observacionais (ESPINOZA *et al.*,

2016). Além disso, a presença de *glitches* deve complicar ainda mais tal medida. Como é o caso das medidas de índice de frenagem atuais, os pulsares que apresentam os valores deste medidos são, em geral, novos já que a idade, no modelo canônico, tende a diminuir os valores para a segunda derivada da frequência orbital e, também, com exceção do pulsar na Nebulosa de Vela todos os outros apresentam uma atividade de *glitches* muito baixas ou nulas.

## 1.1 Objetivos deste Trabalho

O objetivo geral desta pesquisa é investigar o problema do índice de frenagem de pulsares, cujo valor teórico não corresponde aos valores obtidos observacionalmente. Os objetivos específicos são:

- Entender o processo do decaimento da velocidade angular;
- Compreender o índice de frenagem igual a 3, resultante do modelo canônico;
- Compreender as limitações deste modelo;
- Investigar a dinâmica do superfluido de nêutrons no núcleo dos pulsares.

## 1.2 Motivação da Pesquisa

O modelo para explicar a frequência dos pulsos de estrelas de nêutrons, que será denominado de modelo canônico, prevê uma desaceleração gradual da rotação da estrela, quantificada por uma grandeza conhecida como *braking index*, representada por  $n$ . Naquele modelo esta grandeza tem valor teórico igual a 3 (GLENDENNING, 2000), mas resultados derivados da observação são diferentes do previsto no modelo teórico e este não explica os valores observacionais para  $n$ . O modelo para pulsares aqui tratado é objeto de estudo da astrofísica nuclear, ciência que correlaciona a astrofísica e física nuclear, e é através dela que podemos responder como os sistemas planetários, estrelas e galáxias se formam e como eles evoluem. Ou seja, é de fundamental importância para a astrofísica nuclear a investigação da diferença entre valores teóricos e experimentais em um modelo de rotação de estrelas, estas que são objetos de estudos de sistemas físicos de enorme massa e sistemas a altas densidades de energia.

A partir disto, surgem questões que levam a pensar quais as condições a que os pulsares estão submetidos que podem modificar o valor predito pelo modelo canônico para o seu índice de frenagem e, conseqüentemente, percebemos que podemos propor uma forma alternativa para o cálculo do índice de frenagem. Faremos isto com o desenvolvimento

---

de um novo modelo a partir da variação do momento de inércia devido um parâmetro de deslocamento, que pode estar ligada diretamente à discrepância entre os valores previsto e observado.

# 2 O Modelo Canônico para a Desaceleração da Rotação de Pulsares

## 2.1 A Descoberta do Primeiro Pulsar

A carta intitulada “*Possible existence of the neutron*” é considerada a descoberta do nêutron (AMALDI, 1984) por Chadwick em 17 de fevereiro de 1932 (CHADWICK, 1932) esta que conduziu, teoricamente, para a possibilidade de que estrelas formadas por nêutrons fossem descritas. Ainda na mesma década, acreditava-se que tais estrelas poderiam ser originadas a partir de supernovas (BAADE; ZWICKY, 1934) e, ao final desta década, o primeiro trabalho sobre massa-raio por Oppenheimer & Volkoff (1939), sobre a premissa de uma possível fase consistindo de nêutrons, eles então estudaram o equilíbrio gravitacional destas massas no interior estelar.

Em Julho de 1967, Jocelyn Bell Burnell descobriu os primeiros pulsares. Jocelyn era membro de um grupo de radioastronomia da Universidade de Cambridge detectaram sinais usando um radiotelescópio primitivo formado por um enorme conjunto de postes e cabos espalhados por 4,5 hectares de terra. O radiotelescópio foi desenvolvido por Antony Hewish, líder do grupo, e seus, alunos, com objetivo de captar a cintilação das estrelas, particularmente de quasares. Os sinais observados não foram somente picos isolados, mas sim pulsos periódicos que, “mostra claramente a periodicidade regular e também a variação irregular características da amplitude do pulso.” (HEWISH *et al.*, 1968, p. 710).

Em 1974 os laureados pelo prêmio nobel de Física foram Martin Ryle pelas suas pesquisas pioneiras em radioastronomia e Antony Hewish pelo papel decisivo na descoberta do pulsar. Entretanto, Bell foi excluída do prêmio que visava premiar quem de fato teve papel decisivo na descoberta como ela que havia discutido que tais pulsos periódicos eram uma fonte e não falhas nos aparelhos.

“Pulsar” tornou-se o nome deste fenômeno de pulsos periódicos, uma abreviatura de estrelas pulsantes. Com a descoberta do Pulsar pelo grupo de Cambridge muitos outros

vieram a ser descobertos em 1968, quando mais de 100 trabalhos foram publicados sobre observações de pulsares e explicações sobre este tipo de objeto. Em especial destacam-se a simultânea descoberta do pulsar na nebulosa de Vela (que será resumidamente denominado pulsar de Vela) e duas fontes de emissão de pulsos de rádio próximas à nebulosa do Caranguejo, ambas em regiões de remanescentes de supernova (MANCHESTER; TAYLOR, 1977). Estes pulsares reforçaram a sugestão de Baade & Zwicky, de 1934, de que supernova é um processo em que podemos observar a transição de uma estrela comum em uma estrela de nêutron (BAADE; ZWICKY, 1934); após a explosão resta um núcleo muito denso que, com a sua contração, provoca reações inversas  $\beta$  que resultam na formação de nêutrons e neutrinos (PACINI, 1967).

Em 1968, Gold propõe que estas estrelas são estrelas de nêutrons que possuem fortes campos magnéticos e uma elevada velocidade de rotação e que o plasma em sua magnetosfera deve possuir velocidades relativísticas, onde observamos a radiação na forma de um farol rotativo (GOLD, 1968).

Na próxima seção apresentamos e comentamos um pouco sobre o modelo que descreve a possível estrutura macroscópica da emissão de energia e rotação dos pulsares.

## 2.2 O Modelo de Farol

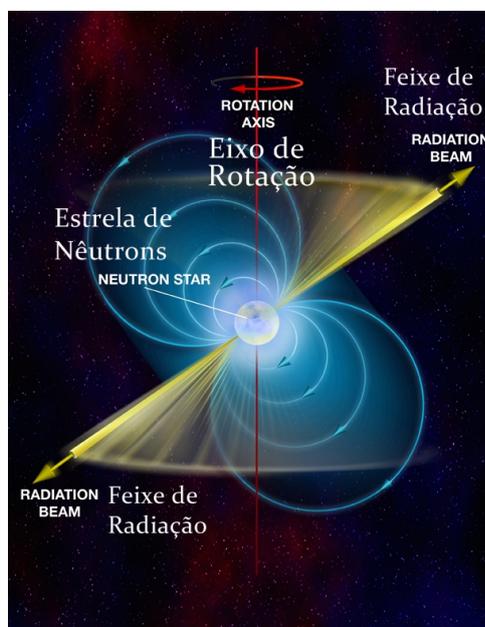


FIGURA 2.1 – Ilustração artística de um Pulsar, disponível em: “[http:// vycanismarjoris.blogspot.com.br/](http://vycanismarjoris.blogspot.com.br/)”.

Este modelo é aceito pela comunidade científica como forma de explicar o comportamento das estrelas de nêutrons. Supondo-se que as estrelas de nêutrons são remanescentes

do processo de geração de supernovas, então, teremos que, da compressão dos restos da explosão da estrela após o efeito de supernova, ocorrerá, também, um aumento de intensidade do campo magnético devido a energia armazenada no campo magnético se conservar, sua intensidade é ainda maior em seus pólos devido a uma maior densidade magnética. A atração gravitacional dos restos da estrela que passaram pelo processo de supernova conduz a um objeto extremamente compacto, de raio estimado em cerca de 10 km, que possui alta velocidade de rotação por causa da conservação de momento angular e também da diminuição do raio da nova estrela. Com o elevado campo magnético, partículas são aceleradas em direção aos pólos, onde emitem radiação formando um feixe em frequências de rádio. É importante ressaltar que existem pulsares que emitem radiação em frequências a partir das ondas de rádio até ondas de raio gama o que sugere um plasma em torno de tais estrelas (ESPINOZA *et al.*, 2016). Quando o feixe cruza a linha de visada entre o pulsar e a Terra a recepção deste, como dito anteriormente é na forma de pulsos (“*ticks*”). Entretanto, a intensidade do sinal varia de acordo com a fase de rotação da estrela, e sendo o período de repetição dos pulsos o período de rotação da estrela (NOVELLO *et al.*, 2010; FILHO; SARAIVA, 2000).

Mesmo que estes objetos sejam chamados de pulsares, ainda assim não são estrelas que pulsam, mas sim fontes contínuas de ondas de rádio possivelmente emitidas a partir dos pólos magnéticos por onde provêm os sinais que observamos, rotação após rotação sincronizada. Apesar do período de pulso ser extremamente estável, ele sempre aumenta muito lentamente, com exceções como nos casos de falhas momentâneas na periodicidade dos pulsos (em inglês: *glitches*) ou de aumento passageiro da frequência angular (em inglês: *spin-ups*) devido ao acréscimo de massa (LORIMER, 2008).

A descoberta de pulsares e a curiosidade por eles levou a análise e descoberta de mais pulsares; o pulsar B0531+21, da nebulosa do Caranguejo, teve um aumento de 36,5 ns em seu período, que apresenta um período entre pulsos de  $\sim 0,033$  s (LORIMER, 2008) e trouxe mais sustentação à teoria de que o período de pulsares aumentava.

Sobre o aumento do período de rotação veremos na próxima seção (2.3) a descrição teórica do índice de frenagem, fator adimensional responsável pela mensuração da intensidade da frenagem destas estrelas.

## 2.3 O Índice de Frenagem no Modelo Canônico

No modelo canônico (PACINI, 1967; GOLD, 1968), normalmente usado na literatura para explicar o decaimento da frequência de rotação de pulsares, considera-se que estes objetos são descritos basicamente como um dipolo magnético rotacionando, com velocidade angular  $\Omega$ . Numa esfera girante a energia cinética de rotação é igual a (SHAPIRO;

TEUKOLSKY, 2008),

$$E_{rot} = \frac{1}{2}I\Omega^2. \quad (2.1)$$

A derivada temporal desta energia 2.1 é, em geral, dada por,

$$\frac{dE_{rot}}{dt} = I\Omega\dot{\Omega} + \frac{1}{2}\Omega^2\dot{I},$$

cujo segundo termo, segundo o modelo canônico, é igual a zero porque se admite que o momento de inércia não varia. Logo, por esse modelo tem-se que,

$$\dot{E}_{rot} = I\Omega\dot{\Omega}. \quad (2.2)$$

Nos pulsares verifica-se que há diminuição de sua frequência angular de rotação ( $\Omega$ ), e que, geralmente, o seu eixo do dipolo magnético não está alinhado com o eixo de rotação, ou seja, encontra-se inclinado por um ângulo  $\alpha$  entre eles. A energia magnética irradiada por eles é admitidamente proveniente da energia de irradiação de um dipolo magnético em rotação (GRIFFITHS; COLLEGE, 1999)(SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008),

$$\dot{E}_{IM} = \frac{2}{3c^3}|\ddot{m}|^2, \quad (2.3)$$

com o momento de dipolo magnético sendo dado por (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008):

$$\vec{m} = \frac{B_P R^3}{2}(\cos \alpha \hat{k} + \sin \alpha \cos(\Omega t) \hat{i} + \sin \alpha \sin(\Omega t) \hat{j}), \quad (2.4)$$

onde  $B_P$  é o campo magnético nos polos. Notando-se da observação que  $\dot{\Omega}^2 \ll \Omega^4$ , então, a derivada da energia magnética tem a forma (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008),

$$\dot{E}_{IM} = \frac{2}{3c^3}m^2\Omega^4 \sin^2 \alpha. \quad (2.5)$$

Sendo o dipolo magnético dado por  $m = \frac{1}{2}B_P R^3$  (vide apêndice A: equação A.53), chegamos à expressão para a variação temporal da energia magnética,

$$\dot{E}_{IM} = \frac{1}{6c^3}B_P^2 R^6 \Omega^4 (\sin \alpha)^2, \quad (2.6)$$

onde  $B_P$  é a intensidade do campo magnético nos polos,  $R$  é o raio do pulsar, e  $c$  a velocidade da luz.

Definindo-se a constante positiva

$$k \equiv \frac{1}{6c^3} \frac{R^6}{I} (B_P \sin \alpha)^2$$

chega-se a uma expressão simplificada para a taxa de variação de energia irradiada pelo

dipolo no tempo,

$$\dot{E}_{IM} = kI\Omega^4. \quad (2.7)$$

Sendo a energia rotacional do pulsar irradiada pelo dipolo temos que a conservação da energia do pulsar em relação ao tempo no modelo canônico é na forma,

$$\dot{E}_{rot} + \dot{E}_{IM} = 0 \quad (2.8)$$

Substituindo-se os valores das derivadas temporais da energia cinética de rotação 2.2 e energia magnética 2.7 encontramos,

$$I\Omega\dot{\Omega} + kI\Omega^4 = 0, \quad (2.9)$$

que implica

$$\dot{\Omega} = -k\Omega^3. \quad (2.10)$$

A expressão na equação 2.10 apresenta o que havíamos argumentado sobre o aumento do período de rotação de pulsares, ou seja, o decaimento da velocidade angular de rotação. A conservação de energia levando em consideração o modelo de rotação de um dipolo magnético que irradia a sua energia rotacional demonstra que essa desaceleração cai com a terceira potência de sua velocidade angular. Se derivarmos a equação 2.10 obtemos,

$$\ddot{\Omega} = -3k\Omega^2\dot{\Omega}, \quad (2.11)$$

a qual podemos organizar e nela substituir  $-k\Omega^3$  por  $\dot{\Omega}$ , resultando

$$\ddot{\Omega} = 3 \frac{(-k\Omega^3)}{\Omega} \dot{\Omega}$$

ou

$$\ddot{\Omega} = 3 \frac{(\dot{\Omega})}{\Omega} \dot{\Omega}. \quad (2.12)$$

Então encontra-se que o produto de  $\ddot{\Omega}$  com  $\Omega$  dividido por  $\dot{\Omega}^2$  deve dar exatamente o valor igual a 3.

$$\frac{\ddot{\Omega}\Omega}{\dot{\Omega}^2} = 3. \quad (2.13)$$

Contudo, o valor 3 na equação 2.10 e na equação 2.13 representa um fator de intensidade de frenagem do pulsar chamado de índice de frenagem. Os observáveis  $\Omega$ ,  $\dot{\Omega}$  e  $\ddot{\Omega}$  são utilizados para o cálculo do índice de frenagem e obtidos observacionalmente, e, de acordo com o modelo canônico, deveriam resultar no valor 3.

Entretanto, os valores encontrados para o índice de frenagem de pulsares não correspondem ao valor esperado (ver: tabela 2.1). Os pulsares com o valor de índice de frenagem

calculados com baixo ruído temporal são: B0531+21 (pulsar do Caranguejo), B0833-45 (Pulsar de Vela), B0540-69, B1509-58, J1119-6127, J1846-0258 e J1734-3333. Eles serão abordados novamente no próximo capítulo.

TABELA 2.1 – Velocidade angular ( $\Omega$ ) e suas primeira derivada ( $\dot{\Omega}$ ) e segunda derivada ( $\ddot{\Omega}$ ).

Nome	$\Omega$ (rad s <sup>-1</sup> )	$\dot{\Omega}$ ( $\times 10^{-10}$ rad s <sup>-2</sup> )	$\ddot{\Omega}$ ( $\times 10^{-21}$ rad s <sup>-3</sup> )	$n$	Refs.
B 0531+21	188,162067	-23,7212	70,039	2,342(1)	1
B 0540-69	124,2480167310	-11,7666311	23,700	2,13(1)	2
B 0833-45	70,372	-0,96604	0,23	1,7	3
J 1119-6127	15,401361301	-1,517708	4,014	2,684(2) <sup>a</sup>	4
J1208-6238	14,26082068886	-1,05826013	2,07	2,598(1)	5
B 1509-58	41,54137543835	-4,2061975437	12,0546642	2,832(3)	6
J 1734-3333	5,37327178	-0,104742	0,018	0,9	7
J1833-1034	101,53223518813	-3,31445125	2,0087	1,857(1)	8
J 1846-0258	19,220520856	-4,179141	19,92	2,64(1) <sup>b</sup>	6,9,10

**Referências:** (1) (LYNE *et al.*, 2015); (2) (FERDMAN *et al.*, 2015); (3) (ESPINOZA *et al.*, 2016); (4) (WELTEVREDE *et al.*, 2011); (5) (CLARK *et al.*, 2016); (6) (LIVINGSTONE; KASPI, 2011); (7) (ESPINOZA *et al.*, 2011a); (8) (ROY *et al.*, 2012); (9) (LIVINGSTONE *et al.*, 2007); (10) (ARCHIBALD *et al.*, 2015).

Notas. Além dessas referências, informações sobre associações e a maioria dos parâmetros rotacionais foram extraídas do catálogo ATNF Pulsar (<http://www.atnf.csiro.au/research/pulsar/psrcat/>; Manchester *et al.* 2005). Incertezas ( $1\sigma$ ) no último dígito são mostradas entre parênteses.

<sup>a</sup> Uma possível redução de cerca de 15% é observada depois de uma grande *glitch* (ANTONOPOULOU *et al.*, 2015).

<sup>b</sup> O índice de frenagem diminuiu para  $n = 2,19$  depois de um grande *glitch* (ARCHIBALD *et al.*, 2015; LIVINGSTONE *et al.*, 2011).

Existem outros dois pulsares com índice de frenagem medidos: J1640-4631 com  $n = 3,15$  (ARCHIBALD *et al.*, 2016) e o J0537-6910 com  $n = -1,22(4)$  (ANTONOPOULOU *et al.*, 2017). O primeiro não foi usado como amostra, pois seus dados ainda são passíveis de confirmação, e o segundo por se tratar de um índice de frenagem negativo caberia uma análise mais detalhada sobre os fatores que afetam o seu período de rotação.

Podemos observar que o modelo canônico pode ser adaptado através da generalização da equação 2.10, que fica na forma da definição (GLENDENNING, 2000):

$$\dot{\Omega} = -k\Omega^n. \quad (2.14)$$

Consequentemente a equação 2.13 se torna,

$$\frac{\ddot{\Omega}\Omega}{\dot{\Omega}^2} = n. \quad (2.15)$$

Mesmo que generalizemos as equações podemos perceber que a equação 2.15 apenas faria sentido físico para um valor de  $n = 3$ . Ao mesmo tempo, a primeira equação vem a ser um modelo matemático (GLENDENNING, 2000) onde a desaceleração angular está relacionada à diminuição da velocidade angular elevada a um fator  $n$  que varia de pulsar para pulsar.

Isto representa uma fraqueza deste modelo. As deficiências deste modelo generalizado e do modelo canônico, ambos amplamente investigados na literatura, motivou a investigação que apresentaremos no próximo capítulo.

## 2.4 Distribuição de Pulsares no Plano $P - \dot{P}$

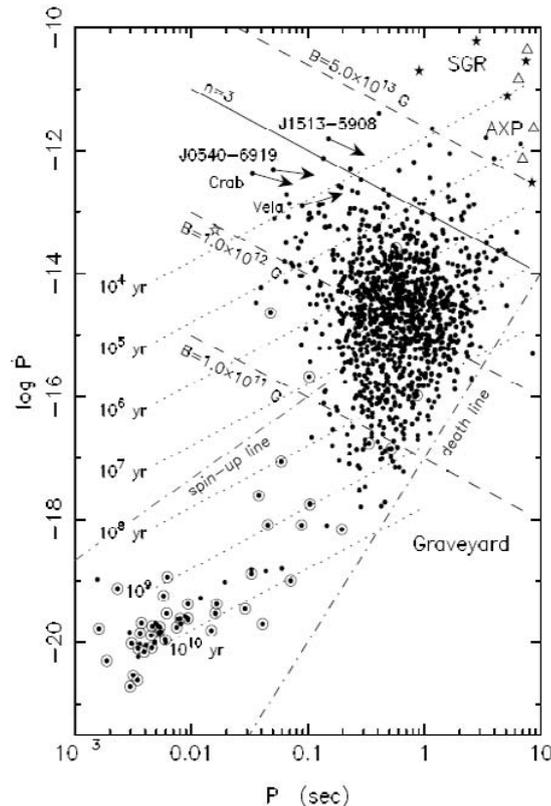


FIGURA 2.2 – Diagrama  $P-\dot{P}$ , respectivamente, período e derivada do período (créditos da figura: Ghosh (2007)).

A razão entre o período de rotação de pulsares e a sua derivada ( $P/\dot{P}$ ) tem dimensão de tempo e é relacionada a idade do pulsar, conhecida na literatura como idade característica,  $\tau$ . Na figura 2.2 temos o diagrama  $P-\dot{P}$  que organiza a população de pulsares a partir de seus períodos  $P$  e a taxa de variação deste período  $\dot{P}$  que são características observáveis com elevada precisão. Onde através desses parâmetros pode-se estimar a idade, intensidade do campo magnético e a taxa de emissão de energia rotacional de pulsares esta última detalhada na seção anterior. Além disso, o diagrama apresenta linhas tracejadas e constantes de: campo magnético e idade característica de pulsares; tem-se ainda no diagrama uma linha conhecida por “cemitério” onde é esperado que pulsares tenham sucumbido a contração gravitacional por não haver mais produção suficiente de energia através das reações nucleares no interior da estrela.

Podemos perceber que este diagrama também é capaz de fornecer uma visualização do ciclo de vida de um pulsar. Os pulsares mais jovens estão na parte superior do diagrama com altas saídas de energia e que são associados, frequentemente, a remanescente de supernovas a eles associados. Conforme envelhecem diminuem a produção de energia e passam a serem classificados cada vez mais a direita até então alcançarem a região abaixo da linha designada por cemitério. Já os pulsares de sistemas binários mesmo com altas idades têm períodos de rotação e derivadas do período altos devido a grande quantidade de massa envolvida seja pela presença de uma companheira ou entre outros casos o consumo da estrela companheira por parte do pulsar devido a sua elevada densidade e força gravitacional.

Na distribuição de pulsares no diagrama  $P-\dot{P}$  podemos perceber que algo muda com a idade de pulsares. Uma possibilidade é que campos magnéticos de pulsares mais velhos decaem em escalas de tempos de  $10^7$  anos (MANCHESTER; TAYLOR, 1977; SRINIVASAN *et al.*, 1990). É possível, em alguns casos, que isto leve os pulsares a ficarem a baixo da linha do cemitério.

### 2.4.1 Idade com Base no Modelo para a Desaceleração da Rotação de um Dipolo Puro (Canônico)

Se a estrela de nêutrons é considerada como um dipolo magnético preso a uma esfera sólida rotacionando no vácuo e sem outros mecanismos de frenagem, então, para calcularmos a idade de um pulsar considera-se o modelo canônico, como vimos anteriormente:

$$\dot{\Omega} = -k\Omega^3, \quad (2.16)$$

$k$  é uma constante positiva se a rotação da estrela é conduzida apenas por uma frenagem de um dipolo eletromagnético constante, e a equação acima é aquela que descreve o decaimento orbital de pulsares que irradiam a sua energia através de um dipolo inclinado em relação a rotação, e portanto  $n = 3$ . Em adicional,

$$\frac{d\Omega}{dt} = -k\Omega^3 \quad (2.17)$$

ao integrar a equação 2.17, é considerado os seguintes limites de integração: no tempo  $t = 0$ , a velocidade angular é, tal que,  $\Omega(t_0) = \Omega_0$  e seja um determinado tempo no qual  $t = \tau_c$  no contexto do modelo canônico é conhecido como a idade característica e seu uso deve ser tomado com cuidado por ser uma idade representativa e não real, e de modo que a velocidade angular seja  $\Omega$ , compatível com o tempo determinado  $t$ , assim, então:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0}^{\Omega} \frac{d\Omega}{\Omega^3} &= -k \int_{t_0}^{\tau_c} dt \\ \frac{\Omega^{-(3-1)}}{-(3-1)} \Big|_{\Omega_0}^{\Omega} &= -k(\tau_c - t_0). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Como resultado da integração:

$$\frac{1}{(3-1)\Omega^{3-1}} - \frac{1}{(3-1)\Omega_0^{3-1}} = k(\tau_c - t_0), \quad (2.19)$$

sendo comumente considerado que na formação da estrela de nêutrons ela apresenta uma velocidade angular inicial ( $\Omega_0$ ) muito maior do que a velocidade angular  $\Omega$ , ( $\Omega_0 \gg \Omega$ ), de modo que:

$$\frac{1}{(3-1)\Omega^{3-1}} = k(\tau_c - t_0) \quad (2.20)$$

da equação 2.17,  $k$  é igual a:

$$k = -\frac{\dot{\Omega}}{\Omega^3}, \quad (2.21)$$

no que a equação quando considerado que  $t_0$  é um tempo inicial no qual a idade do pulsar pode ser considerada zero ( $t_0 = 0$ ) em relação à idade atual:

$$\begin{aligned} \frac{\Omega^3}{(3-1)\dot{\Omega}\Omega^{3-1}} &= -(\tau_c - t_0), \\ \frac{\Omega}{(3-1)\dot{\Omega}} &= -(\tau_c - t_0), \\ \tau_c &= -\frac{\Omega}{2\dot{\Omega}}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

que em termos de período e derivada do período fica:

$$\tau_c = \frac{P}{2\dot{P}}. \quad (2.23)$$

De posse dessa expressão estimasse a idade dos pulsares a partir de observáveis que em geral são bem medidas ( $P$  e  $\dot{P}$ ). Por exemplo, para o pulsar da nebulosa de caranguejo (conhecido como: pulsar do caranguejo) que tem período igual a  $P = 0,0330847160$  s e derivada deste igual a  $\dot{P} = 4,22765 \times 10^{-13} \text{ ss}^{-1}$  encontra-se o valor de 1241 anos para a idade deste pulsar (catalogado como: B0531+21). Dada as datações, é acreditado que a nebulosa do caranguejo foi formada a partir de uma supernova observada pelos chineses em 1054 AD (do calendário gregoriano) (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008).

Para alguns autores (MANCHESTER *et al.*, 1985; ESPINOZA *et al.*, 2016) um cálculo mais

preciso da idade do pulsar ( $\tau_P$ ) é possível a partir da generalização da equação 2.14 se é conhecido o índice de frenagem real e a rotação inicial ( $\Omega_0$ ), para  $n \neq 1$ :

$$\tau_P = \frac{2\tau_c}{n-1} \left[ 1 - \left( \frac{\Omega}{\Omega_0} \right)^{n-1} \right], \quad (2.24)$$

para  $n = 1$ ,

$$\tau_P = 2\tau_c \ln \left( \frac{\Omega}{\Omega_0} \right). \quad (2.25)$$

Note que nestes cálculos, o índice de frenagem é considerado constante ao longo de toda a vida do pulsar.

### 2.4.2 Uma Estimativa de Idade Independente de Mecanismos de Frenagem

Como a formação e evolução de pulsares ainda não é totalmente compreendida, uma restrição acerca destes processos pode ser fornecida por uma estimativa de idade independente dos mecanismos de frenagem. Então, tal estimativa é possível se supomos que o pulsar nasceu próximo ao centro de sua remanescente de supernova, na figura 2.3 o “X” representa o centro da remanescente de supernova G5.4-1.2, onde o pulsar B1757-24 nasceu, a posição atual deste pulsar é enfatizada pela imagem ampliada na figura.

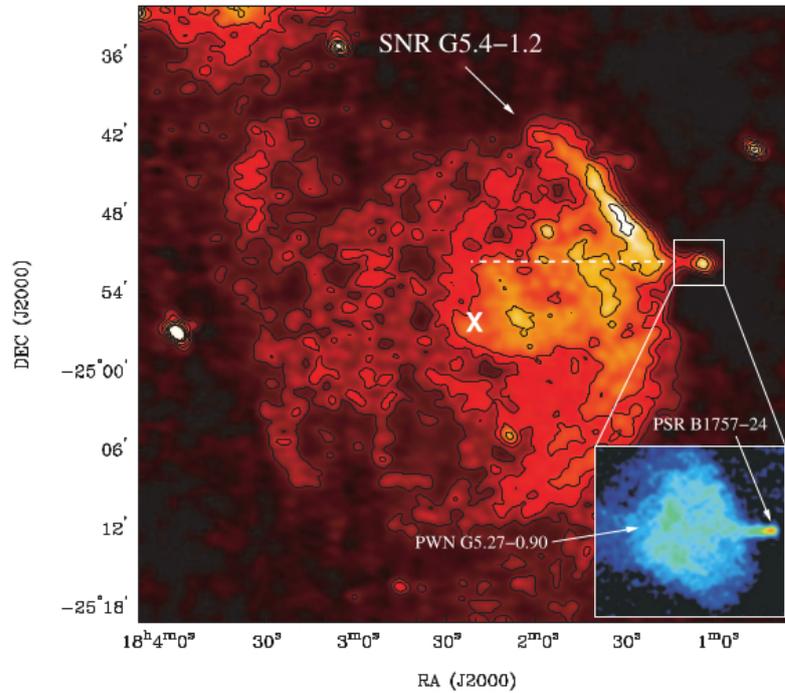


FIGURA 2.3 – Observações do “the Duck”, com a remanescente de supernova G5.4-1.2, PWN G5.27-0.90, e o pulsar B1757-24. Imagem em: (BLAZEK *et al.*, 2006).

Com isso, a idade do pulsar pode ser obtida pela razão entre a separação angular ( $\Theta$ ) entre o pulsar e o seu suposto local de nascimento, ou seja, a distância em que se encontra em relação ao centro da remanescente de supernova a qual o originou, e o movimento próprio ( $\mu$ ) (MIGLIAZZO *et al.*, 2002; BLAZEK *et al.*, 2006) que este pulsar apresenta, isto é, simirlamente, a uma velocidade de movimento em relação ao seu centro, conforme:

$$t_P = \frac{\Theta}{\mu}, \quad (2.26)$$

sendo o  $\Theta$  dado em miliarsegundo (mas) e  $\mu$  em miliarsegundo por ano (mas ano<sup>-1</sup>). Medir o movimento próprio pode ser difícil se o pulsar tiver “fortes” ruídos temporais pois pode afetar a observação da rotação do pulsar e parâmetros astrométricos que, a partir da análise temporal da rotação, auxília a observação do movimento próprio. Outro método para se encontrar o movimento próprio é a partir de observações interferométricas (FOSTER *et al.*, 1994).

A direção do movimento próprio pode confirmar ou refurtar a associação do pulsar com a sua suposta remanescente e junto com a magnitude do movimento próprio pode nos dar uma estimativa da idade do pulsar.

## 2.5 Uma Nota sobre a Teoria de *Glitches*

Nos pulsares sabe-se que ocorre o efeito mencionado na seção 2.2 chamado de *glitch* (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008), que é explicado como consequência de acomodações estruturais na superfície dos pulsares causadas por rupturas e reorganizações da crosta (chamadas, em inglês, de “*starquakes*”) pela ação entre o superfluido e o restante da estrela ou movimentos de vórtices no superfluido (ALLEN; HORVATH, 1997). Estes eventos tem sido atribuidos ao desacoplamento de alguns revestimentos internos ou uma mudança na ação do torque externo sobre a estrela, ocorrendo assim aumentos repentinos e passageiros na velocidade angular (os “*spin ups*”).

Estas irregularidades momentâneas produzem descontinuidades repentinas nos observáveis: frequência ( $f$ ) e taxa do decaimento da frequência ( $\dot{f}$ ) (ALLEN; HORVATH, 1997). Durante os *glitches* ocorre um aumento na rotação do pulsar muito rapidamente em que se considera que há uma conservação do momento angular da estrela, onde:

$$L = I\Omega, \quad (2.27)$$

é o momento angular, com  $I$  sendo o momento de inércia e  $\Omega$  a velocidade angular. Como,

nessa súbita modificação, não há variação do momento angular da estrela, resulta:

$$\frac{dL}{dt} = \left( \frac{d\Omega}{dt} \right) I + \Omega \left( \frac{dI}{dt} \right) = 0. \quad (2.28)$$

Considerando-se uma estrela com simetria esférica, tem-se o momento de inércia  $I = (2/5)MR^2$  e a sua variação temporal  $\dot{I} = 2(2/5)MR\dot{R}$ . Com isto podemos reescrever a equação 2.28, na forma:

$$\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = -2\frac{\dot{R}}{R}. \quad (2.29)$$

Admitindo-se, por simplicidade, a aproximação  $\dot{\Omega} = \Delta\Omega/\Delta t$  como sendo a derivada da velocidade angular. Com ela reescreve-se 2.29:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} \frac{1}{\Omega} &= -2 \frac{\Delta R}{\Delta t} \frac{1}{R} \\ \frac{\Delta\Omega}{\Omega} &= -2 \frac{\Delta R}{R}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde aplicou-se a mesma simplificação na derivada temporal do raio. Com esta expressão se fará a seguinte estimativa.

Em eventos de *glitch* para o pulsar do Caranguejo, o resultado médio da medida  $\Delta\Omega/\Omega$  é de aproximadamente  $\sim 2 \times 10^{-7}$  (LYNE, 1999) e, usando este resultado na última expressão, podemos encontrar um valor aproximado de variação de raio como consequência do *glitch*, de:  $\Delta R \sim -0,1$  cm.

## 2.6 O Cálculo do Campo Magnético

O modelo utilizado para cálculo de campo magnético de pulsares pressupõe esferas em rotação com dipolo magnético *perpendicular* ao eixo de rotação ( $\sin \alpha = 1$ ), ou seja, segue o modelo canônico com inclinação do dipolo magnético que permite máxima perda de energia por irradiação de dipolo. Usando a expressão da variação de energia rotacional ( $\dot{E}_{rot}$ ) em 2.2 e a da irradiação magnética ( $\dot{E}_{IM}$ ) em 2.6 na equação 2.8 que trata da taxa de variação da energia do sistema, temos:

$$I\Omega\dot{\Omega} + \frac{1}{6c^3}B_P^2R^6\Omega^4 = 0. \quad (2.31)$$

A velocidade angular do pulsar,  $\Omega$ , varia com o tempo, como mostra a tabela 2.1. Isto pode refletir no comportamento do campo magnético com tempo uma vez que este modelo

tem a seguinte expressão quando  $\sin \alpha = 1$  (GLENDENNING, 2000):

$$B_P = \sqrt{\frac{12c^3M}{5R^4}} \sqrt{\frac{-\dot{\Omega}}{\Omega^3}}. \quad (2.32)$$

Contudo desde que a velocidade angular e sua derivada variem muito lentamente com o tempo, para propósitos práticos  $B_P$  é normalmente considerado constante.

O campo magnético no polo é igual a  $B_P = 2B_E$ , sendo o  $B_E$  o campo magnético ao longo do equador. Para cálculo do campo magnético canônico de 2.32: utilizamos o raio inicial dos pulsares com o valor de  $R = 8 \times 10^5$  cm, massa constante e igual ao valor típico de  $M = 1,4M_\odot$  (com  $\odot$  sendo uma massa solar) e  $c$  a velocidade da luz no vácuo igual a  $3 \times 10^{10}$  cm/s. Este valor pode ser calculado a partir das observáveis: velocidade angular ( $\Omega$ ) e sua primeira derivada ( $\dot{\Omega}$ ) (ver: tabela 2.1).

# 3 Estruturas e Processos em Estrelas de Nêutrons

## 3.1 Fatores que Afetam o Período de Pulsares

Aparentemente, o processo de irradiação eletromagnética é responsável pela perda de energia rotacional e de momento angular dos pulsares e, conseqüentemente, pelo aumento no período de rotação. Segundo o modelo canônico, se o campo magnético de pulsares é estável e dipolar, então, espera-se que o seu índice de frenagem seja igual a três. Entretanto, existem variados modelos onde se sugere que certas grandezas modificariam o índice de frenagem de pulsares de acordo com a tabela 3.1 (MANCHESTER; TAYLOR, 1977).

Uma contribuição para o cálculo do índice de frenagem que tem sido considerada em tempos recentes refere-se aos ventos de partículas associados ao pulsar. Apesar desta contribuição implicar  $n=1$ , quando combinada com a contribuição devida ao dipolo magnético ( $n=3$ ) têm-se apresentado resultados interessantes (KOU; TONG, 2015).

Teorias que envolvem radiação gravitacional sugerem que nos primeiros anos de vida de um pulsar a radiação gravitacional deve ser o principal processo de perda de energia se a sua frequência de rotação for muito alta. “O fato de que os índices de frenagem observados são menores do que três demonstra que a radiação gravitacional já não é mais

TABELA 3.1 – Fatores que afetam o índice de frenagem.

	Efeito
Radiação de multipolo eletromagnético	$n \geq 5$
Radiação de quadrupolo gravitacional	$n = 5$
Alinhamento do campo do dipolo	$n > 3$
Decaimento do campo magnético	$n > 3$
Deformação radial de linhas de campo	$1 \leq n \leq 3$
Contra alinhamento do campo do dipolo	$n < 3$
Relaxação da forma de equilíbrio da estrela de nêutron	$n < 3$
Velocidade transversa	$n < 3$

dominante.” (MANCHESTER; TAYLOR, 1977, p. 188)

Os valores de índice de frenagem bem conhecidos, listados na tabela 2.1, são suficientes para mostrar que os modelos que conduzem a índices de frenagem maiores que três (radiação de multipolo magnético, radiação de quadrupolo gravitacional, alinhamento do campo de dipolo e decaimento do campo magnético) não são adequados para explicar o processo de perda de energia de rotação para estas estrelas de nêutrons.

Modelos magnetosféricos com estrutura de campos relacionados a deformação radial de linhas de campo funcionam apenas em condições de contorno razoáveis para o campo na superfície estelar, não sendo possível para atmosferas frias, e obtêm um valor de ângulo entre o dipolo magnético e o eixo de rotação muito maior do que se espera (HINATA; JACKSON, 1974).

Modelos de alinhamento e contra alinhamento do campo do dipolo estão relacionados com o tipo de campo magnético na crosta se tivermos o movimento do eixo magnético ao invés do eixo de rotação, o que pode determinar se o eixo do dipolo magnético irá alinhar ou não, embora um manto sólido tende a impedir o alinhamento, mas não indica ser favorável ao contra alinhamento. E quando há tendência de alinhamento o modelo prevê índices maiores que este valor, mas sabemos que os índices de frenagem observados são menores do que três. Além disto, tem-se que tais modelos são tratados como uma esfera perfeitamente condutora; para Goldreich (1970) é como se as estrelas de nêutrons fossem substituídas por esferas perfeitamente condutoras. Aquele autor discute que apenas estrelas de nêutrons rotacionando lentamente podem ter o alinhamento dos eixos de dipolo magnético e de rotação e que deste modo não poderiam ser pulsares. Outro ponto importante é que a rigidez da crosta controla a tendência de alinhamento. No modelo de Goldreich 1970 tem-se densidade e módulos de cisalhamento uniformes, livres de tensões elásticas. Além disso, se a estrela de nêutrons for muito massiva o seu manto será tão espesso que se pode desconsiderar efeitos do plasma da magnetosfera da estrela em rotação.

Notamos que a relaxação na forma de equilíbrio da estrela pode conduzir a índices de frenagem menores que 3. Este resultado, exposto na tabela 3.1, foi decorrente da variação dos eixos principais da esfera, transformando-a em um elipsoide. Entretanto, essa mudança de forma demanda condições especiais, restringindo sua aplicabilidade. Este modelo para a relaxação de equilíbrio de estrela de nêutrons é descrito pelas equações de rotação de corpo rígido de Euler. O momento de inércia de equilíbrio deste modelo deveria diminuir continuamente; entretanto, a rigidez da crosta tende a dificultar este processo e, assim, o aumento do período de rotação e do índice de frenagem que deveríamos observar são menores do que realmente deveriam ser (MANCHESTER; TAYLOR, 1977).

Nessa linha de consideração ponderou-se, e exploramos a influência da variação de um parâmetro de deslocamento do movimento interno da massa sobre o valor do índice de

frenagem considerando um modelo teórico. Tal abordagem, até onde se sabe, ainda não foi explorada na literatura. Decidiu-se investir na investigação dessa possibilidade, que será detalhada na seção 4.1.

Vários outros estudos continuam a ser desenvolvidos para modelar adequadamente o decaimento da rotação de pulsares, que ainda segue sem explicação consistente. Destacamos aqui as investigações de Magalhães e colaboradores (MAGALHAES *et al.*, 2012), onde uma função fenomenológica foi proposta na fórmula da conservação da energia, e de Allen & Horvarth (ALLEN; HORVATH, 1997), onde há um crescimento no ângulo entre o momento magnético e o eixo de rotação, como a causa da evolução do torque que tem sido relacionado aos eventos de *glitches* para índices de frenagem não canônicos. Enquanto que Magalhães *et al.* 2016 investigaram a possibilidade da ação de uma força efetiva sobre a estrela a qual varia com a primeira potência da velocidade tangencial da crosta do pulsar.

Muitas interpretações para a desaceleração da velocidade angular de rotação de pulsares são possíveis e, conseqüentemente, para a sua variação de energia de rotação. Neste contexto existem estudos que atribuem uma suposta emissão de ondas gravitacionais para pulsares com índices de frenagens medidos mesmo que menores que 3, desde que o campo magnético na superfície e o ângulo entre os eixos de dipolo magnético e de rotação sejam variáveis no tempo (ARAUJO *et al.*, 2016c), note que a frenagem através de irradiação de dipolo magnético implica em um índice de frenagem igual a 3, e para quase todos os pulsares os índices de frenagem medidos são menores que 3. Entretanto, a emissão de energia por ondas gravitacionais putativas é tomada e, também, é discutido a possibilidade de sua detecção em especial para o pulsar B0833-45 da nebulosa de Vela a partir de um ano de observações pelo detector de ondas gravitacionais aLIGO.

Com a detecção de ondas gravitacionais (ABBOTT *et al.*, 2016) juntamente com a medida do mais alto índice de frenagem, de  $n = 3,15$ , atribuído ao pulsar J1640-4631, estudos nessa direção foram elaborados, tal como o modelo que combina a frenagem por dipolo e por emissão de ondas gravitacionais (ARAUJO *et al.*, 2016a) e sua extensão que além de combinar estes dois mecanismos de frenagem atribuem ao dipolo magnético uma elipticidade magnética extremamente pequena, onde a correspondente amplitude da onda gravitacional neste modelo é tão menor quanto a amplitude obtida pelo mecanismo de radiação de quadrupolo gravitacional da tabela 3.1 que considera apenas a geração de ondas gravitacionais como a predominante perda de energia (ARAUJO *et al.*, 2016b), os autores notaram que para os pulsares com os índices de frenagem medidos inclusive o pulsar J1640-4631, os atuais observatórios avançados de detecção de ondas gravitacionais não seriam capazes de detectar ondas gravitacionais geradas por estes pulsares. Além disso, em recente estudo (LADISLAU, 2019) foi analisado a influência de combinações entre radiação de dipolo magnético, ondas gravitacionais, fricção de vácuo quântico (COELHO *et al.*, 2016) e vento de partículas na evolução do ângulo de inclinação magnética, na sua

velocidade angular e no índice de frenagem.

Além disso, é importante mencionar que alguns anos antes da observação da primeira fonte de ondas de rádio pulsantes já se estudava dois primeiros modelos: o oscilador magnético e o “*oblique rotator*” (em português: rotor oblíquo)<sup>1</sup>, um dos objetivos era a compreensão da variação periódica da intensidade do campo magnético observado para uma estrela (BABCOCK; COWLING, 1953). Estudos (COWLING, 1952) apontaram que o modelo mais viável era o do rotor oblíquo em vista de sérias dificuldades para atender o modelo concorrente. O que favoreceu a teoria do rotor oblíquo, dada a solução analítica disponível (DEUTSCH, 1955; GOLDREICH, 1970) para a magnetosfera no vácuo e que não considera os efeitos do plasma.

Recentemente observações do pulsar na nebulosa do caranguejo conduziram a estudos sobre a evolução da estrutura do campo magnético a partir da medida de um aumento no ângulo de inclinação entre o eixo magnético e o eixo de rotação do pulsar (LYNE *et al.*, 2013), assim como em trabalhos baseados no modelo do rotor oblíquo citado acima com a inclusão da evolução do ângulo de inclinação (PHILIPPOV *et al.*, 2014) onde o “pulsar oblíquo” tende a inclinar. E quando, isto é, relacionado ao modelo de frenagem de vento (KOU; TONG, 2015) onde o pulsar evolui do caso dominado por radiação magneto-dipolo para o caso dominado por vento de partículas o que afeta a desaceleração da rotação, e conseqüentemente o índice de frenagem que neste caso primeiro aumenta e depois diminui (TONG; KOU, 2017). Na seção 4.5 nós iniciamos descrevendo nosso modelo com base no parâmetro de deslocamento bem como presumimos que para pulsares o ângulo de inclinação do dipolo magnético pode estar variando com o tempo a uma taxa uniforme.

## 3.2 Equações de Estado

Nesta seção iremos apresentar alguns importantes modelos que diferem as vezes quanto a composição interna e, também, quando a composição interna é semelhante, diferem quanto a abordagem, mas, em geral, todos diferem quanto ao valor da massa máxima de uma estrela de nêutrons.

Equações de estado são equações que descrevem as propriedades de fluidos ou de mistura de fluidos, deste modo são aplicáveis para as estrelas de acordo com a suposta composição do fluido em seu interior. Em geral, tais equações relacionam duas ou mais funções de estado, como exemplo de funções de estado temos: pressão, volume, temperatura, energia interna e entropia. Listamos na tabela 3.2 modelos que descrevem o interior de estrelas de nêutrons a partir de hipóteses sobre a composição: prótons (p), nêutrons

---

<sup>1</sup>esferóide que neste contexto assume em geral a forma oblata na qual o eixo ao longo do equador é maior do que os eixos em direção aos pólos, ou também elipsóide de revolução, mas por definição o esferóide pode tanto assumir a forma prolata como esférica.

(n), híperons (H) e quarks (Q), e suas equações de estado. Há um modelo que considera os kaóns (GLEDENNING; SCHAFFNER-BIELICH, 1999), mas não o abordamos aqui.

TABELA 3.2 – Algumas equações de estado (EoS) e a composição estelar a elas associada.

EoS	Autores	Composição
PS	Pandharipande e Smith (1976)	$n\pi^0$
FP	Friedman e Pandharipande (1981)	np
MPA (1-2)	Muller, Prakash e Ainsworth (1987)	np
WFF (1-3)	Wiringa, Fiks e Fabrocine (1988)	np
PAL	Prakash, Ainsworth e Lattimer (1988)	np
GM	Glendenning e Moszowski (1991)	npH
PCL (1-2)	Prakash, Cooke e Lattimer (1995)	npHQ

Um dos primeiros trabalhos para estimar a massa máxima de estrelas de nêutrons utilizou uma equação de estado para um gás de nêutrons relativístico, resultando em um limite de massa de  $0,7 M_{\odot}$ , limite de Oppenheimer e Volkoff (OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939). Depois disso seguiu-se uma série de trabalhos resultando em muitos valores para o limite de massa destas estrelas até que no ano de 1974 considerando princípios extremos Rhoades e Ruffini seguindo: a teoria da relatividade de Einstein, o princípio de causalidade e o princípio de Le Chatelier, encontraram que o limite para a massa máxima de estrelas de nêutrons não poderia exceder a  $3,2 M_{\odot}$  (JR; RUFFINI, 1974).

Em trabalho Pandharipande e Smith (1975) analisaram a energia da matéria de nêutron em fase sólida para o interior de estrelas, tendo em vista, que o modelo utilizado, quando aplicado certo potencial e determinado método variacional, era notado que um sólido com condensados  $\pi^0$  era energeticamente favorecido a partir de acoplamentos fortes da matéria neutrônica e as estrelas de nêutrons calculadas por tal modelo eram estáveis com núcleos sólidos. A abordagem (PANDHARIPANDE; SMITH, 1975), era analisar a energia dada por uma configuração em camadas da matéria de nêutrons sólida com rotações paralelas e antiparalelas e da interação da parte central de dois corpos, sendo nêutron-nêutron podem favorecer a formação de sólidos com a excitação de nêutrons a partir de píons condensados,  $\pi^0$ .

Quando estudamos o trabalho de Friedman e Pandharipande (1981), verificamos que a equação de estado tem sido utilizada em modelos semirealísticos da interação de dois núcleons, ou em modelos fenomenológicos de matéria densa. Eles utilizaram certo método variacional na hamiltoniana nuclear de modo a viabilizar o ajuste de dados de espalhamento de ondas, além disso, eles obtiveram a densidade e compressibilidade da matéria nuclear e a energia do estado fundamental e tomaram certas suposições que permitiram

aplicar isto a equação de estado da matéria de nêutrons (FRIEDMAN; PANDHARIPANDE, 1981).

Nesse contexto tem se percebido que estrelas de nêutrons são bons exemplos para o uso de cálculos que envolvem a densidade de saturação da matéria nuclear, e Müther (1987) aplicaram os cálculos relativísticos de Brueckner-Hartree-Fock da matéria nuclear para a matéria de nêutron densa, com trocas de mésons  $\rho$  e  $\pi$  e dependência da assimetria entre próton e nêutron. Mesmo tendo utilizado os dados de espalhamento entre dois corpos, nêutron-nêutron como em Friedman e Pandharipande (1981), a diferença consiste na abordagem, pois utiliza modelos de troca de um boson para o estudo da energia da matéria nuclear e neutrônica em altas densidades via cálculo da estrutura de estrelas de nêutrons, com equação de estado para uma fração arbitrária de prótons.

Wiringa, Fiks e Fabrocini (1988) desenvolveram com base em cinco hamiltonianas, modelos os quais levam em consideração interações nucleon-nucleon, seguindo o quadro de trabalho, a partir de um variacional este trabalho tem a intenção de ser uma atualização do trabalho de Friedman e Pandharipande (1981), pois progressos na teoria de muitos corpos permitiram o cálculo da equação de estado da matéria densa para uma Hamiltoniana mais geral, como resultados a partir de modificações nos parâmetros que apresentam dependência na densidade no qual o cálculo variacional do modelo completo produziu a correção da energia de ligação e densidade e, ainda, um coerente módulo de compressão para a matéria nuclear simétrica, além disso notaram que um “amolecimento” na equação de estado da matéria de nêutron em regiões próximas a duas vezes a densidade da matéria nuclear poderia estar relacionado com a condensação do pión sem carga ( $\pi^0$ ) (WIRINGA *et al.*, 1988).

Em 1988, Prakash, Ainsworth e Lattimer com medidas mais precisas das componentes de massa do pulsar binário PSR 1913+16, atentaram em responder a questão sobre a dependência da estrutura da estrela de nêutrons na equação de estado e os parâmetros da matéria nuclear simétrica, para tal deve-se verificar se a maior parte da matéria de estrelas de nêutrons está próxima da densidade de saturação da matéria nuclear ( $\eta_0 \simeq 0,16 \text{ fm}^{-3}$ ) (PRAKASH *et al.*, 1988), pois ao considerar equações de estado consistentes com propriedades empíricas da matéria nuclear e causalidade, os cálculos da contribuição do potencial para a energia de simetria varia linearmente com a densidade o que para estes autores ajuda a resolver a questão em que o comportamento de equações de estado de altas densidades são mais importantes do que parâmetros de saturação na determinação da estrutura de estrelas de nêutrons quando verificado resultados do modelo sigma linear (PRAKASH; AINSWORTH, 1987), cálculos da equação Brueckner-Hartree-Fock relativística (MÜTHER *et al.*, 1987) e os modelos de pontecial (WIRINGA *et al.*, 1988) em que todos calculam valores para o módulo de compressão que tem diferido quanto a massa máxima em valores próximos a 200 MeV.

Em núcleons de estrelas de nêutrons também são possíveis a presença de híperons a partir de um modelo de interação de potencial de dois corpos (PANDHARIPANDE, 1971) é possível que híperons ocupem uma pequena porção do volume total a menos que conduzam pela conversão à matéria de quark (GLENDEENING; MOSZKOWSKI, 1991). Então em um modelo que admite núcleons e híperons a conversão de alguns núcleons para híperons ocorre através da interação fraca e diminuindo assim a pressão de Fermi exercida pelos bárions, então, a equação de estado é “amolecida” e a massa máxima de estrelas de nêutrons é reduzida onde Glendenning & Moszkowski (1991) obtiveram que a redução de massa dada por esta conversão é  $0,71 \pm 0,15 M_{\odot}$ , ou seja, negligenciar os híperons sempre conduz a valores maiores para massas máximas. Então, para conciliar modelos com híperons e núcleons é considerado a ligação do híperon  $\Lambda$  em matéria nuclear e níveis hipernucleares (GLENDEENING; MOSZKOWSKI, 1991).

Há também equações de estado que além dos núcleons levam em consideração híperons e quarks, a partir dos neutrinos presentes em uma estrela de nêutron, nesse contexto chamada de estrela *protonneutron*. Durante o colapso a estrela apresenta neutrinos presos a sua matéria, os quais escapam por difusão através da estrela e a resfriam por conta da troca de energia com a matéria até o seu escape, tudo isto acontece em um tempo da ordem de segundos, sendo a matéria deste tipo de estrela dependente da interação forte, e as lagrangeanas efetivas baseadas em cromodinâmica quântica para esta composição. O então, modelo de equação de estado tem resultado para altas densidades uma matéria rica em estranheza. Este tipo de transição de fase hádrons para quarks nestas estrelas tem resultado em densidades de bárions mais altas em comparação as estrelas de neutrinos livres, outro resultado é a possibilidade de fase mista de hádrons e quarks que ocorrem após a difusão dos neutrinos através da estrela (PRAKASH *et al.*, 1995). Então, estrelas de quarks apresentam massa maiores quando os neutrinos são considerados presos durante o colapso em comparação ao caso em que estivessem livres.

Comentamos brevemente algumas das principais equações de estado que levam em consideração a matéria de nêutron, próton, híperons e quarks para a descrição de processos e estrutura de estrelas de nêutrons. Outras derivações possíveis para os processos internos e estrutura tem ocorrido de acordo com os avanços teóricos e experimentais como por exemplo a física nuclear (MUELLER; SEROT, 1996; AKMAL; PANDHARIPANDE, 1997; GLENDEENING; SCHAFFNER-BIELICH, 1999) ou derivações de abordagem como assimetria (ENGVIK *et al.*, 1994) da matéria nuclear.

A seguir, na figura 3.1, temos um gráfico de massa versus o raio, onde as linhas horizontais são estrelas de nêutrons com massas medidas, note que a menor massa prevista para uma estrela de nêutrons é da ordem de  $1,4 M_{\odot}$  pelo modelo GS1.

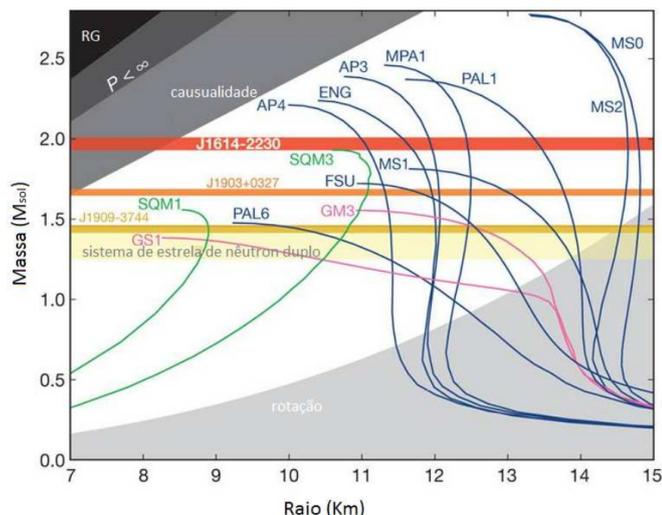


FIGURA 3.1 – Diagrama massa-raio para estrelas de nêutrons. Créditos: (FRANZON, 2012).

Na literatura (LATTIMER; PRAKASH, 2011) também podemos encontrar um diagrama referente a massas de estrelas de nêutrons observadas, conforme a figura 3.2.

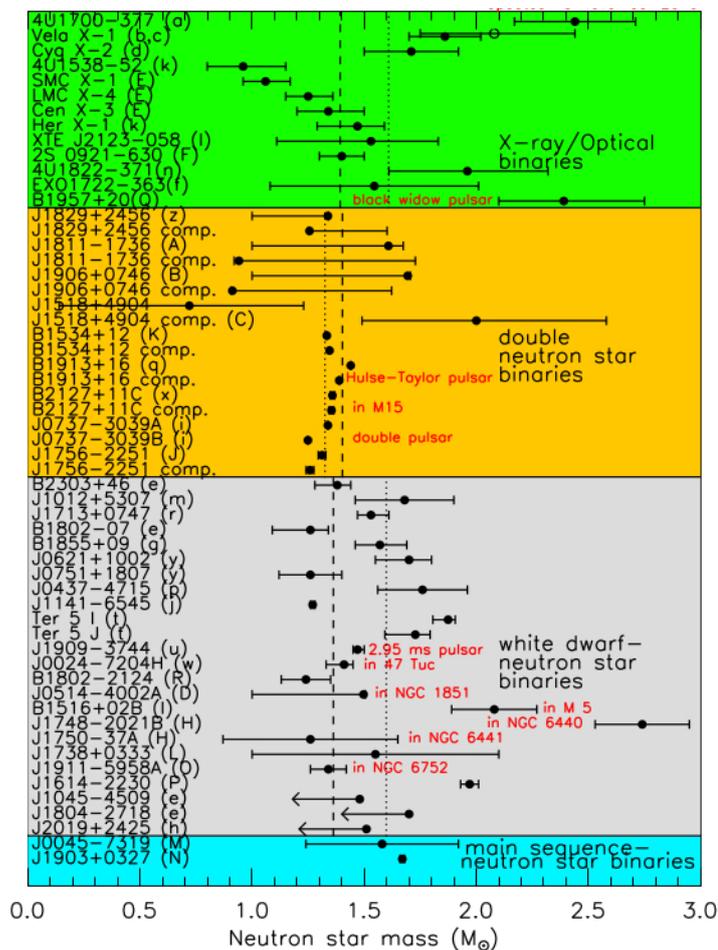


FIGURA 3.2 – Diagrama de massas de estrelas de nêutrons observadas. Créditos: (LATTIMER; PRAKASH, 2011).

### 3.3 Mecanismo Físico

Com a formação da estrela de nêutrons logo após a explosão da estrela progenitora (efeito de supernova) a matéria encontra-se em um estado normal por causa das temperaturas provenientes do colapso do núcleo. A estrela resfria rapidamente através da irradiação de neutrinos (MANCHESTER; TAYLOR, 1977) e quando esta temperatura ficar abaixo da temperatura crítica de paramento de Cooper os nêutrons formam um superfluido (MIGDAL, 1960) e os prótons um supercondutor (BAYM *et al.*, 1969). Os elétrons na estrela de nêutrons não são supercondutores porque estes formam um plasma altamente relativístico e degenerado e ainda, por serem, um sistema fracamente interagente enquanto que a força forte torna possível a existência de nêutrons superfluidos e prótons supercondutores (BAYM *et al.*, 1969; HO; ANDERSSON, 2012).

É esperado que a supercondutividade dos prótons causasse uma grande mudança no campo magnético, pois supercondutores abaixo da temperatura crítica tendem a expulsar o fluxo magnético (Efeito Meissner) de forma completa ou quase que completamente em regiões de supercondutores, entretanto, como Baym *et al.* (1969) tem observado, a alta condutividade elétrica de regiões não supercondutoras (região do estado normal) permitem a expulsão do fluxo do campo magnético de regiões macroscópica mas em um fator temporal correspondente a idade do universo, sendo assim, pode ser considerado que o fluxo magnético está ligado à matéria normal da estrela de nêutrons.

Agora da conclusão de Baym *et al.* (1969) sabemos que a expulsão do campo se dá de forma muito lenta de modo a não alterar este campo, então temos que considerar quais as possibilidades em que a matéria permite a penetração de fluxo magnético, até então, sabe-se que, somente existem duas maneiras de supercondutores permitirem a penetração de fluxo magnético. Ou, sendo o material misto, a entrada de fluxo magnético é quantizada e na forma de um conjunto periódico de vórtices, ou em estado intermediário onde o material apresenta finas camadas alternadas de supercondutores (com efeito Meissner completo) e material normal onde há fluxo magnético. O primeiro caso é favorável energeticamente sendo conhecidos por supercondutores do tipo II (ABRIKOSOV, 1957). E, sendo que tais regiões podem ser consideradas congeladas dada a temperatura da estrela em relação a matéria nuclear esperasse que haja menos efeitos sobre o campo magnético de pulsares (BAYM *et al.*, 1969).

O termo “regiões congeladas” vem no sentido que a nível nuclear as estrelas de nêutrons são muito frias o que possibilita o pareamento da matéria, dado que a energia de fermi dos nêutrons é:

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_n}, \quad (3.1)$$

sem tomar a massa de repouso (GHOSH, 2007) onde  $k_F$  é o vetor de onda de Fermi. E

sendo a energia de Fermi a maior energia do estado ocupado em um condensado fermiônico a uma dada temperatura. Tal temperatura é chamada de temperatura crítica, a qual é dada pela razão entre a energia de Fermi e a constante de Boltzmann:

$$T_c = \frac{E_F}{k_B}, \quad (3.2)$$

onde para a matéria de nêutron seria próximo de  $10^{12}$  K o que é muito maior do que o valor da temperatura interior das estrelas de nêutrons ( $10^6 - 10^8$  K) (SAULS, 1989), por este motivo é energeticamente favorável que existam nêutrons superfluidos em estrelas de nêutrons. Argumento semelhante é empregado também aos prótons que assim como os nêutrons podem estar emparelhados no núcleo considerado como um fluido, entretanto a crosta é, em geral, considerada sólida.

O superfluido de nêutrons apresenta uma quantidade suficiente de linhas de vórtices paralelas ao eixo de rotação de modo que em escala macroscópica os nêutrons podem ser observados com rotação semelhante a um corpo rígido e logo ter um momento de inércia dado pela teoria clássica (GINZBURG; KIRZHITS, 1964; BAYM *et al.*, 1969).

### 3.3.1 Comentários sobre Vórtices em Materiais Supercondutores

Em 1950 ainda não se havia estabelecido uma teoria satisfatória sobre supercondutividade (GINZBURG; LANDAU, 1950) (Ginzburg apenas recebeu o prêmio nobel em 2003 pelas contribuições em supercondutividade através da função  $\psi$  dos “elétrons supercondutores”). Neste período, tal teoria era baseada de forma fenomenológica e assim continuaria a ser. O que Ginzburg & Landau (1950) conseguiram foi construir uma teoria (ainda fenomenológica) a qual era livre de falhas (àquela época), tais como, as dificuldades em determinar: a tensão de superfície no contorno entre as fases normais e supercondutoras, e a descrição corretamente da destruição de supercondutividade por um campo magnético ou corrente, além de abranger o trabalho de London & London (1935) que explicava o experimento de Meissner. Tomemos nota de que, para um material supercondutor apresentar características supercondutoras ele deve apresentar temperaturas abaixo da temperatura considerada crítica para dado material. Em adicional, materiais supercondutores cessam sua atividade supercondutora quando são submetidos a um campo magnético externo maior do que o campo magnético considerado crítico.

O modelo ao qual se fundamenta esta seção, predito por Abrikosov em 1957, é baseado na existência de vórtices em materiais supercondutores do segundo grupo (supercondutores tipo II) (ABRIKOSOV, 1957). Sendo o seu padrão de penetração do campo magnético semelhante a distribuição de superfluido em hélio II, o da criação de filamentos de vórtices,

sugerido por Onsager (1949) e Feynman (1955). Abrikosov em seu trabalho tem detalhado as condições que envolvem a formação de vórtices em supercondutores do segundo grupo, os quais são formados quando a intensidade de campo magnético externo ao material supercondutor alcança valores críticos ( $H_{c1}$ ), desde que, a partir de uma transição de fase de segunda ordem e, ainda, depende da energia livre por unidade de comprimento de um filamento (o vórtice). A transição de fase depende dos valores de  $\chi$  o qual determina a energia de superfície entre as fases normal-supercondutora, parâmetro este vindo da teoria de Ginzburg-Landau (conhecido como parâmetro Ginzburg-Landau, sendo que para valores muito pequenos a transição é considerada de primeira ordem e em caso contrário são de segunda ordem. Outro ponto introdutório, e de importância, é que para valores acima de um dado campo crítico de valor  $H_{c2}$  o supercondutor do segundo grupo passa a sofrer transição de fase de segunda ordem para o estado normal.

Em adicional, o parâmetro de Ginzburg-Landau, é importante para caracterização dos materiais supercondutores e é a razão entre a profundidade de penetração ( $\xi$ ) e a profundidade de penetração de London ( $\varpi$ ). Quando os valores de  $\chi$  são menores que  $1/\sqrt{2}$  então este parâmetro de entrada é aquele ao qual Ginzburg e Landau desenvolveram em sua teoria, entretanto quando considerado o caso em que os valores são maiores que  $1/2\sqrt{2}$ , temos os materiais do segundo grupo, os quais apresentam propriedades muito diferentes dos materiais do primeiro grupo.

Em outras palavras, para supercondutores do tipo II, quando o campo externo é aumentado até um valor crítico  $H_{c1}$  o material torna-se misto, em estado de vórtices, em que haverá uma quantidade de fluxo magnético penetrando o material e se este fluxo aumentar de modo a alcançar um valor  $H_{c2}$  o material torna-se normal, sem atividade supercondutora. Quando o transporte de campo magnético é feito na forma quantizada a estrutura é comumente chamada de flúxions.

O desenvolvimento da teoria fenomenológica introduzida por Ginzburg e Landau teve grande importância nas soluções de problemas de materiais supercondutores assim como para os avanços de estudos atrelados a estes. É de importância notarmos, que eles fizeram tudo isto mesmo antes da teoria BCS de supercondutividade ser desenvolvida, a qual Bardeen, Cooper e Schrieffer explicam o fenômeno da supercondutividade através da formação de pares, mas somente muitos anos depois foi que Gorkov demonstrou que a teoria de Ginzburg-Landau era um dos resultados da teoria BCS (GOR'KOV, 1959).

### 3.4 Movimento de Vórtices de Nêutrons

O objetivo desta seção é a análise do tipo de escoamento onde irá viabilizar o desenvolvimento das próximas seções. Como meio de caracterizarmos o tipo de escoamento de

um fluido é importante analisarmos a circulação. A circulação é definida como a integral de linha ao longo de um caminho  $C$  que cerca a circulação do vórtice, dada como (GHOSH, 2007; LANDAU; LIFSHITZ, 1980; NUSSENZVEIG, 2002):

$$\kappa = \oint_C \vec{v}_s \cdot d\vec{l}, \quad (3.3)$$

onde  $v_s$  é a velocidade do fluido e  $dl$  o elemento de linha ao longo de  $C$ . A equação 3.3 pode ser reescrita usando o teorema de Stokes, e ainda, considerando que o vórtice esteja “enclausurado” dentro desta circulação e que não há fluxo de vórtices através desta circulação, então do teorema de Stokes:

$$\kappa = \int_0^r (\vec{\nabla} \times \vec{v}_s) \cdot d\vec{S}, \quad (3.4)$$

a expressão da velocidade do superfluido pode ser encontrada a partir do ansatz de decomposição polar para a função de onda do condensado (CHARBONNEAU, 2007). A forma geral do par de Cooper pode ser descrita por uma função de onda do condensado da seguinte forma (SAULS, 1989; GHOSH, 2007):

$$\psi(\vec{R}) = |\psi| e^{i\theta(\vec{R})}, \quad (3.5)$$

$|\psi|$  é a amplitude, uma variável termodinâmica de estado, fixada por um funcional de energia livre que no equilíbrio tem seu valor mínimo.

Da teoria de Bardeen, Cooper e Schriffer (BCS), tomando convenientemente que a temperatura é tal que a amplitude é mínima ( $T \lesssim T_c$ ), conhecido como limite Ginzburg-Landau (para mais detalhes ver: (SAULS, 1989)).

Então, usando a função de onda e a seguinte correspondência:

$$\hat{v} = \frac{1}{m} \hat{P} = -\frac{i\hbar}{m} \vec{\nabla}, \quad (3.6)$$

sendo a ação do operador velocidade sobre a função de onda (em 3.5):

$$\hat{v}\psi = \frac{\hbar}{m} (\vec{\nabla}\theta)\psi, \quad (3.7)$$

ou seja, a velocidade do superfluido dada por (GHOSH, 2007)

$$\vec{v}_s = \frac{\hbar}{2m_n} \vec{\nabla}\theta, \quad (3.8)$$

com  $2m_n$  sendo a massa de um par de nêutrons, observe que, a velocidade de um superfluido,  $v_s$ , é o gradiente de um escalar dada em termos da fase condensada (coerente) de

$\theta$ . Um campo de velocidade descrita pelo gradiente de uma função é chamado de fluxo de potencial (caso da equação: 3.8), da equação acima é obtido de imediato que o fluxo de um superfluido é irrotacional:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v}_s = \frac{\hbar}{2m_n} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\theta) = 0, \quad (3.9)$$

significa que o condensado não poderá suportar uma circulação exceto em pontos de singularidades dentro do fluido (SAULS, 1989), ou seja, em uma configuração isolada de singularidades, conhecidas como linhas de vórtices, a circulação não necessita desaparecer como é o caso (GHOSH, 2007), como podemos ver na figura 3.3.

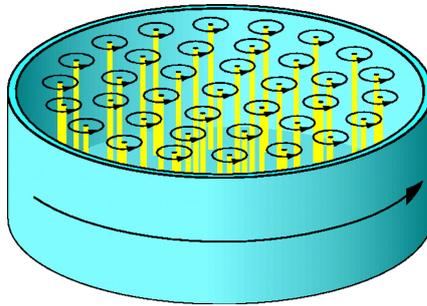


FIGURA 3.3 – A rotação de um superfluido não é uniforme, mas ocorre através de uma rede de vórtices quantizados, cujos núcleos (amarelo) são paralelos ao eixo de rotação. Setas pequenas indicam a circulação da velocidade do superfluido em torno de cada singularidade. O conjunto de vórtices gira rigidamente com o contêiner. Ilustração artística de um conjunto de vórtices, disponível em: (LOUNASMAA; THUNEBERG, 1999).

A circulação então pode ser quantizada se suposto que a função de onda  $\psi(x)$  tem um único valor, tal que o ângulo azimutal  $\theta$ , mude através de um múltiplo integral:  $n$  de  $2\pi$ , no caminho em torno da linha da circulação  $C$ , assim a circulação é quantizada, como:

$$\kappa = \oint_C \vec{v}_s \cdot d\vec{l} = \frac{\hbar}{2m_n} \oint_C \vec{\nabla}\theta \cdot d\vec{l} = 2\pi n \frac{\hbar}{2m_n}, \quad (3.10)$$

o número  $n$  é chamado de intensidade do vórtice (KLEINERT, 1989), e o quanta de circulação é dado por:

$$\kappa_0 = \frac{2\pi\hbar}{2m_n}, \quad (3.11)$$

a equação 3.3 pode ser reescrita como:

$$\kappa = n\kappa_0. \quad (3.12)$$

A partir da equação 3.12 podemos calcular a distribuição de velocidade do superfluido

que se movimenta ao redor do filamento de vórtice, tal que:

$$v_s = n \frac{\hbar}{2m_n} \frac{1}{r}, \quad (3.13)$$

$n$  é um múltiplo inteiro de  $2\pi$  tal como podemos obter de 3.8 e  $r$  é a distância a partir do filamento. Uma consideração, é que a rotação potencial da velocidade diminui com a distância  $r$  a partir do eixo de rotação do vórtice, o qual é o caso diferente em relação ao corpo rígido onde a velocidade aumenta proporcionalmente a tal distância, que relaciona o eixo de rotação e um ponto distante deste (LANDAU; LIFSHITZ, 1980).

### 3.5 Núcleo de uma Estrela de Nêutrons Rotacionando

Considere um líquido cercado por um recipiente em rotação, no caso macroscópico, para estrelas de nêutrons aqui tratadas o recipiente em rotação (crosta e campo magnético) é determinado pela energia livre proveniente da rotação ( $E_{rot}$ ), pois é nesta que esta a interação entre as partículas do líquido e o recipiente independente do tempo (SAULS, 1989). Então, a forma geral desta energia livre ( $F$ ) é (GHOSH, 2007; LANDAU; LIFSHITZ, 1980):

$$F = E_{rot} - \vec{L} \cdot \vec{\Omega}, \quad (3.14)$$

onde  $F$  é a energia livre do sistema sem rotação (não rotativo),  $\vec{L}$  é o momento angular do fluido, e  $\vec{\Omega}$  é a velocidade angular do recipiente, dada pela crosta. Veremos que com a minimização da equação 3.14 podemos encontrar uma velocidade angular de valor crítico ( $\Omega_{cr}$ ), o qual será abordado na seção 3.5.2.

Outro ponto, o caso no qual  $\Omega$  muda torna-se mais e mais favorável para um fluido carregar momento angular. A aparente contradição entre o superfluido carregar momento angular e ser um fluido potencial desaparece com a hipótese tratada na seção anterior a respeito das linhas de singularidade as quais permitem que o líquido execute movimento sobre estas e que o fluxo potencial é perdido apenas nestas linhas (LANDAU; LIFSHITZ, 1980). Lembrando que, fluxo potencial é o movimento de um corpo no qual a velocidade é dada pelo gradiente de um campo escalar (caso *irrotacional*).

#### 3.5.1 Energia de um Vórtice

Para calcularmos a energia de um único vórtice iniciaremos considerando o sistema como um todo, o caso hidrodinâmico de movimento de um fluido cercado por uma crosta que quando começa a rotacionar faz com que o superfluido rotacione juntamente com ela. A crosta, basicamente, realiza trabalho sobre o fluido inicialmente em repouso, da

seguinte forma:

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2, \quad (3.15)$$

de forma geral, para o fluido no interior das estrelas de nêutrons a equação de Bernoulli:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2, \quad (3.16)$$

pode satisfazer e simplificar o cálculo para a energia de um único vórtice, mas para isso considere a figura a seguir:

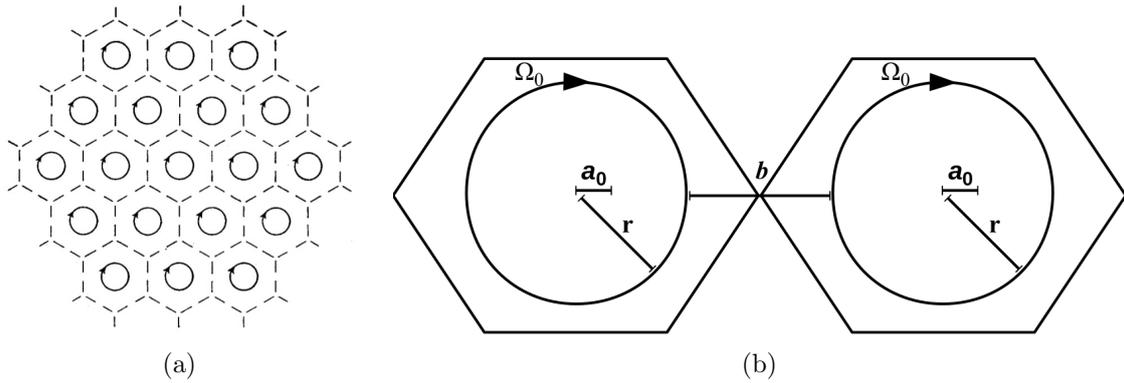


FIGURA 3.4 – (a) Representação esquemática de um conjunto de vórtices, onde a linha circular representa a circulação que contém a singularidade, e as regiões externas aos círculos são regiões que sofrem efeitos individuais dos vórtices (créditos: Hall (1960)), (b) Imagem de duas linhas de vórtices, onde  $a_0$  representa o raio do “buraco” (singularidade) no centro da linha,  $r$  representa a distância na qual a linha de vórtice está contida,  $\Omega_0$  é a velocidade angular de rotação do fluido (e que origina a circulação) e,  $b$  é a distância entre as linhas de vórtices.

Em termos de escala Hall (1960) utilizou os seguintes valores  $\omega_0 = 1 \text{ rad sec}^{-1}$  e  $\kappa_0 = 2\pi\hbar/2m_n$  e o que levaria as linhas de vórtices a terem cerca de 0,2 mm de diâmetro (lembre, o raio do núcleo:  $\sim 8 - 9 \text{ km}$ ).

Consideremos que o superfluido apresenta rotação,  $\Omega_0$ , que simula a rotação de corpo rígido e capaz de originar circulação. Agora retornemos para a equação de Bernoulli, da qual resulta a energia associada ao superfluido e, que, sendo o caso em que há rotação é aquele em que a pressão é maior do que a pressão no caso que não havia rotação do container ( $P_2 \gg P_1$ ) e da termodinâmica:  $P = -\partial E/\partial V$ , então (FEYNMAN, 1998; GHOSH, 2007; LANDAU; LIFSHITZ, 1980; SAULS, 1989) pode-se extrair a energia associada a um vórtice, ou seja, aquela que é dada em primeira aproximação pela energia cinética da rotação do superfluido:

$$\Delta E = \int \frac{1}{2}\rho_s v_s^2 dV, \quad (3.17)$$

onde a  $\rho_s$  é a densidade do superfluido de nêutrons, que basicamente é a densidade do condensado de nêutrons superfluidos. Para calcularmos a energia consideraremos um

único cilindro semelhante ao da figura 3.4, exceto que ele se estende até um raio de valor  $R$ , o raio no qual está contido o fluido, e um vórtice no superfluido está na origem e de raio  $x_i = \xi$ , tal que:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \int_{x_i}^R \rho_s v_s^2 dV, \quad (3.18)$$

considerando a distribuição de velocidade dada por 3.13 iremos obter que a expressão em 3.18 torna-se:

$$\Delta E = n^2 \frac{\rho_s l \kappa_0^2}{4\pi} \ln(R/\xi), \quad (3.19)$$

da simetria cilíndrica do recipiente que contém um vórtice segue que a altura do cilindro é dado por  $l$ , a integração em  $r$  é a distância do raio do cilindro “ $R$ ” e o valor  $\xi$  que é da ordem de distâncias atômicas, e que no caso macroscópico deixa de ser importante devido a integral ser logaritmicamente divergente, ou seja, o valor não depende da precisão de escolha de  $\xi$  (LANDAU; LIFSHITZ, 1980) devido a precisão logarítmica da equação que é consequência não somente da razão  $r/\xi$ , mas também do valor logarítmico ser grande.

É importante ressaltar que as linhas de vórtices de altas ordens de  $n$  são todas instáveis, porque com isso a energia aumenta quadraticamente com  $n$ , e é muito mais fácil que para altas ordens de  $n$  venham a decair em ordens unitárias de intensidade de vórtice. Entretanto estas linhas de vórtices ainda podem ser geradas, mas em um curto intervalo de tempo até decaírem em linhas mais estáveis, em  $n = 1$  (KLEINERT, 1989). Em adicional, o resultado em 3.19 também implica que a força entre vórtices é repulsiva (dado que:  $P = -\partial E/\partial V$ ) (CHARBONNEAU, 2007). Para fins de análise da equação 3.19, podemos extrair desta que quando  $n = 1$ , então temos a energia associada a um único vórtice.

### 3.5.2 Velocidade Angular Crítica para a Formação de Vórtices

Como na seção anterior, também iremos considerar o fluido com uma rotação que simule a rotação de corpo rígido capaz de originar circulação, então, o seu momento angular é dado por:

$$L = E_c \frac{2R}{v_s} \quad (3.20)$$

onde  $R$  é o raio do corpo o qual o fluido ocupa, com a energia cinética do fluido dado por:

$$E_c = \frac{1}{2} \rho_s V v_s^2, \quad (3.21)$$

com  $V$  sendo o volume ocupado pelo fluido em certo ponto onde a velocidade macroscópica do movimento é  $v_s = \kappa_0/2\pi R$ , segue que:

$$L = \frac{lR^2 \kappa_0 \rho_s}{2}, \quad (3.22)$$

ou simplesmente dado por:

$$L = \int \rho_s v_s r dV, \quad (3.23)$$

o qual resulta em igual resultado (CHARBONNEAU, 2007; LANDAU; LIFSHITZ, 1980). Agora podemos resolver a expressão em 3.14 a partir da substituição de 3.19 e de 3.22, do qual tem-se:

$$n^2 \frac{\rho_s l \kappa_0^2}{4\pi} \ln(R/\xi) = \left( \frac{l R^2 \kappa_0 \rho_s}{2} \right) \Omega_{cr}, \quad (3.24)$$

o resultado imediato, que se obtém disto, é o caso da velocidade de rotação necessária que a casca deve ter para que se possa formar linhas de vórtices no fluido, ou seja, elas são originadas quando a velocidade angular de rotação tem um valor crítico ( $\Omega_{cr}$ ):

$$\Omega_{cr} = n^2 \frac{\kappa_0}{2\pi R^2} \ln(R/\xi), \quad (3.25)$$

isto significa que se a rotação do contêiner for menor do que o valor dado pela equação 3.25, então não haverá formação de vórtices no fluido, ou seja, se considerarmos o problema de estrelas de nêutrons com núcleo e crosta, vimos que o fluido em seu núcleo rotacionará de acordo com a rotação da crosta (governado pela crosta)  $\Omega$ , entretanto a formação de vórtices exige uma quantidade mínima de rotação da crosta para tal, como podemos ver em 3.25, de outra forma significa que se:  $\Omega$  é menor que um valor limite  $\Omega_c$ , então não há formação de vórtices:  $n = 0$  (GHOSH, 2007), pois esta configuração de equilíbrio (com vórtices) apenas é obtida pela minimização da energia em 3.14. E, quando, a rotação da crosta é muito maior do que  $\Omega_{cr}$  então uma quantidade muito grande de vórtices são formados (CHARBONNEAU, 2007).

### 3.5.3 Densidade de Vórtices por Unidade de Área

A quantização da circulação tem levado a quantização da energia de um vórtice (ver: seção 3.5.1). Notamos também que, altos valores de rotação da crosta ( $\Omega$ ) originam os vórtices, isto tem facilitado a minimização da equação 3.14 para uma certa (grande) quantidade de vórtices, tais ponderações expressas nas seções anteriores permitem que o movimento mimetize a rotação de um corpo rígido (CHARBONNEAU, 2007), sendo assim, a vorticidade de um corpo (cilíndrico) de raio  $R$  é:  $\nabla \times \vec{v}_s = 2\Omega \hat{z}$  para uma rotação uniforme sobre o eixo de rotação (eixo  $z$ ), ou seja:  $\vec{v}_s = \Omega \hat{z} \times \vec{R}$  (GHOSH, 2007), da circulação dada pelo teorema de Stokes:

$$\kappa = \int_0^R (\vec{\nabla} \times \vec{v}_s) \cdot d\vec{S} = 2\Omega \int dS = 2\pi R^2 \Omega, \quad (3.26)$$

a circulação de uma rede de vórtices também pode ser calculada, como (CHARBONNEAU, 2007):

$$2\pi R^2\Omega = N_v\kappa_0, \quad (3.27)$$

ou seja, multiplicando-se o número de vórtices  $N_v$  pela sua circulação  $\kappa_0$ , logo das duas equações acima (3.26 e 3.27) obtemos a equação de Onsager-Feynman para a densidade de vórtices por unidade de área:

$$n_v = \frac{2\Omega}{\kappa_0}, \quad (3.28)$$

onde:

$$n_v = \frac{N_v}{\pi R^2}, \quad (3.29)$$

é a densidade de vórtice a qual mimetiza o momento angular de um corpo rígido rotacionando.

Agora considere que as linhas de vórtices estão contidas em um suposto pacote uniforme tal que a velocidade angular  $\Omega_0$  simule a rotação de um corpo rígido, onde não é necessariamente igual a  $\Omega$  (HALL, 1960). E com isso, podemos escrever que a linha estará contida dentro de um raio ( $r$ ), como segue:

$$r^2 = \frac{N_v\kappa_0}{2\pi\Omega_0}, \quad (3.30)$$

escrevemos nesta forma para os cálculos da seção a seguir, pois viabilizará para a energia de  $N_v$  vórtices, dado que a energia em 3.19 é resultado para um vórtice e que na próxima seção encontraremos a energia para  $N_v$  e com as correções de efeitos de bordas quando considerado  $N_v$  vórtices.

### 3.5.4 Estado de Equilíbrio Termodinâmico com Núcleo de uma Estrela de Nêutrons em Rotação

Em resumo, ao longo das seções anteriores, temos que, para encontrarmos a energia de um vórtice consideramos o trabalho realizado pela crosta sobre o fluido, encontramos na sequência, a isto, a velocidade angular crítica que o container (casca/crosta) deveria rotacionar para produzir um vórtice. Além disso, apresentamos o cálculo para a densidade de vórtices por área e comentamos que o aparecimento de mais de um vórtice produzirá efeitos de borda e (que apresentaremos nesta seção) generalizamos o caso de um contensor de raio  $R$  para  $r$ , o qual irá relacionar os  $N_v$  que podem estar dispostos dentro do reservatório  $R$  ao contrário daquele único representado no cálculo da energia para um vórtice dentro do raio  $R$ . Na figura 3.4 está representado as singularidade, os efeitos sobre o entorno da circunferência onde está contido o vórtice serão agora considerados de acordo com a quantia  $N_v$  de vórtices, mais ainda, o cálculo da energia e momento angular carregado

pelo fluido de 3.14 que trata da energia cinética para cada fluido separadamente levará essa quantia de  $N_v$  em consideração dado por 3.30.

Para um fluido envolto por uma casca, o estado de equilíbrio termodinâmico é obtido pela minimização da energia livre do sistema (HALL, 1960; LANDAU; LIFSHITZ, 1980), sendo  $\Omega$  a velocidade angular com a qual a casca rotaciona, ou seja, temos de encontrar o resultado que minimiza a equação 3.14, para o sistema cujo a rotação da crosta de estrelas de nêutrons no seu interior é na forma da rotação de superfluido onde há formação de uma grande quantia de vórtices, a energia total deste superfluido e o momento angular são (HALL, 1960):

$$E = \frac{\rho_s \pi}{4} r^4 \Omega_0^2 + \frac{\rho_s N_v \kappa_0^2}{4\pi} \ln(b/a_0) + \frac{\rho_s N_v^2 \kappa_0^2}{4\pi} \ln(R/r), \quad (3.31)$$

$$L = \frac{\rho_s \pi}{2} r^4 \Omega_0 + \frac{\rho_s \kappa_0}{4} r^2 + \frac{\rho_s N_v \kappa_0}{2} (R^2 - r^2), \quad (3.32)$$

estes cálculos foram resolvidos por Hall (1960) como prova da solução de linhas de vórtices de Feynman serem mais favoráveis do que as “camadas” de vórtices de Landau para o átomo  ${}^4\text{He}$  (CHARBONNEAU, 2007) (nota, a energia: é a energia por comprimento  $l$  de vórtices, ou  $N_v$  vórtices como na expressão acima).

O primeiro termo nas equações acima é a contribuição da rotação de um corpo rígido dentro do raio  $r$  que mimetiza a estrutura (de linha) de vórtices com  $\Omega_0$  não sendo necessariamente a rotação da crosta, ou seja, este termo leva em conta o movimento macroscópico do conjunto de vórtices, onde  $\rho_s$  representa a densidade do superfluido.

O segundo termo é a correção para os movimentos de borda (redemoinhos provocados pela rotação dos vórtices) (HALL, 1960), isto é, os efeitos individuais dos vórtices (CHARBONNEAU, 2007), sendo  $b$  da ordem do espaçamento entre as linhas de vórtices (semelhante a,  $r$  da expressão 3.30, mas sem vórtice, i.e., efeitos que o vórtice provoca sem levar em consideração a região que contém a singularidade, pois parte de  $a_0$  até  $b$ ),  $a_0$  é o raio da singularidade (outras vezes chamado de raio do “buraco”),  $N_v$  representa o número de vórtices e  $\kappa_0$  o quanta de circulação.

Enfim, o terceiro termo é a contribuição do fluxo irrotacional fora do raio  $r$ , ou seja, é a contribuição do superfluido onde há presença de vórtices, onde  $R$  é o raio do contensor que envolve o núcleo (a crosta) da estrela com velocidade  $\Omega$ .

Considerando as expressões: 3.30, 3.31 e 3.32 na equação 3.14 da energia livre, e derivando com relação a  $\Omega_0$  para minimizarmos a energia livre do sistema com relação a rotação  $\Omega_0$  dos vórtices (para detalhes, vide apêndice D: equação D.5), chegamos a:

$$\frac{\partial F}{\partial \Omega_0} = \rho_s N_v \frac{(N_v - 1)}{8\pi \Omega_0} \kappa_0^2 \left( 1 - \frac{\Omega}{\Omega_0} \right) = 0, \quad (3.33)$$

verificamos que o estado mínimo de energia livre é alcançado apenas se o número de vórtices  $N_v$  é igual a 1, ou quando a velocidade angular do superfluido for igual a velocidade angular de rotação do recipiente, no caso de uma estrela de nêutrons seria a própria crosta, então, no equilíbrio ( $\Omega_0 = \Omega$ ), i.e., é o caso em que as linhas de vórtices rodam com o recipiente que as contém. De fato, Hall (1960) afirma que o caso do equilíbrio pode não ser considerado dada as aproximações feitas, contudo, afirma que cálculos exatos de energia livre produzidos, na época, tem demonstrado que para até dois quanta de circulação e com até seis linhas de vórtices no entanto é encontrado que no estado de menor energia a linha sempre rotaciona exatamente na mesma velocidade que a do recipiente.

Agora, considerando a seguinte configuração:  $\Omega_0 = \Omega$  de equilíbrio, iremos tomar os mesmos procedimentos anteriores, minimizando a equação de energia livre em relação ao número de vórtices ( $N_v$ ) para verificarmos se há uma correção do número de vórtices muito grande, como resultado, encontramos:

$$\frac{\partial F}{\partial N_v} = \frac{\rho_s \kappa_0^2}{4\pi} \left( N_v + \ln \left( \frac{1}{\Omega^{\frac{1}{2}} a_0} \right) + 2N_v \ln \left( \sqrt{\frac{2\pi\Omega R^2}{N_v \kappa_0}} \right) - \frac{1}{2} - \frac{2\pi\Omega R^2}{\kappa_0} \right) = 0, \quad (3.34)$$

simplificando:

$$N_v = \frac{2\pi\Omega R^2}{\kappa_0} - \ln \left( \frac{1}{\Omega^{\frac{1}{2}} a_0} \right) + \frac{1}{2} - 2N_v \ln \left( \sqrt{\frac{2\pi\Omega R^2}{N_v \kappa_0}} \right), \quad (3.35)$$

com excessão do primeiro termo do lado direito se desconsiderarmos os outros termos deste mesmo lado, temos que o número de vórtices que preencheria o container de raio  $R$  é o mesmo da equação 3.27, é como se fosse a correção de ordem zero:  $N_v^{(0)}$ , se esta equação for utilizada na equação acima 3.35 (CHARBONNEAU, 2007), então podemos encontrar a correção de primeira ordem como sendo:

$$N_v^{(1)} = N_v^{(0)} - \ln \left( \frac{1}{\Omega^{\frac{1}{2}} a_0} \right) + \frac{1}{2}, \quad (3.36)$$

o número de vórtices é corrigido pelo logaritmo da distância entre vórtices, a razão física para isto é que na região de simetria cilíndrica (adotada para contornar as linhas de vórtices), ilustrado na figura 3.4 pela circunferência que define um sentido de rotação, então, próximo a estas linhas de vórtices há contribuição para o campo de velocidade e isto diminui as linhas de vórtices reais que são necessárias para simular a rotação de corpo rígido (HALL, 1960), e ainda, quanto maior for a rotação da crosta menor será esta correção.

A energia do conjunto de vórtices é encontrada considerando-se a aproximação de primeira ordem, pois nos conduz a configuração equivalente de  $r = R$  e, ainda, no equilíbrio

também temos que:  $\Omega_0 = \Omega$ , então a mínima energia livre ( $F_{min}$ ) de um conjunto de vórtices é:

$$F_{min} = -\frac{1}{4}\rho_s\pi R^4\Omega^2 + \frac{1}{2}\rho_s\kappa_0 R^2\Omega \left[ \ln\left(\frac{1}{\Omega^{\frac{1}{2}}a_0}\right) - \frac{1}{2} \right], \quad (3.37)$$

utilizaremos este resultado da literatura na seção de resultados, pois com ele iremos encontrar a pressão da rede de vórtices sobre a crosta da estrela de nêutrons.

### 3.6 Dinâmica da Rotação do Fluido no Interior de Estrelas de Nêutrons

Das estrelas de nêutrons a região da crosta externa e a magnetosfera são observadas diretamente sendo que as informações pertinentes ao seu interior vem das súbitas mudanças na rotação da crosta. Mais especificamente de *glitches*, mudanças súbitas: na rotação da crosta ( $\Omega$ ), a derivada temporal desta ( $\dot{\Omega}$ ) e a relaxação (desaceleração) destas quantidades. Estes acontecimentos e o desenvolvimento das teorias e experimentos sobre matéria emparelhada têm conduzido ao modelo da dinâmica interior de estrelas de nêutrons tratadas nas seções anteriores e o qual será desenvolvido neste item com enfoque sobre torque.

Para Alpar 1989 estes eventos não são causados pela mudança do torque magnético externo, pois correlacionado a estas mudanças súbitas deveriam estar: mudanças repentinas na forma do pulso, espectro ou polarização do sinal eletromagnético recebido (ALPAR; PINES, 1989).

Apontou-se neste trabalho que, pulsares apresentam ruídos temporais nas suas frequências de pulsos o que dificulta a medida mais clara de suas segundas derivadas temporais para as frequências dos pulsos ( $\ddot{f}$ ,  $\ddot{\Omega}$ ,  $\ddot{P}$  e conseqüentemente:  $n$ , o índice de frenagem) (CORDES; DOWNS, 1985). Alguns tipos de ruídos segundo Cheng (1987) podem ser originados ou envolver respostas do interior como efeitos cumulativos não resolvidos na crosta, entretanto o ruído temporal não carrega informações detalhadas sobre *glitch* e a relaxação pós o *glitch*.

É necessário notar que nesta seção não temos objetivo de seguir o modelo específico que visa explicar os efeitos de *glitches* alcançados seguindo certas considerações sobre a dinâmica da rotação entre núcleo e crosta, mas temos como objetivo tratar de forma geral partindo-se da minimização da energia livre onde o núcleo rotaciona com velocidade angular semelhante ao da crosta:  $\Omega_0 = \Omega$ .

Como temos visto, esta condição para a estrutura é obtida, também, no caso em que

a circulação contida em uma área  $\pi R^2$  de raio  $R$  o que resultou em:

$$n_v k_0 = 2\Omega, \quad (3.38)$$

lembramos que os vórtices carregam momento angular, e sendo o torque externo do dipolo tal que (ALLEN; HORVATH, 1997):  $I_c \dot{\Omega}_c + I_s \dot{\Omega}_s = \tau_{ext}$ , as alterações na rotação da crosta ( $\Omega_c$ ) são rapidamente sentidas pelo superfluido de modo que  $\Omega_s = \Omega_c$  implica em  $\dot{\Omega}_c = \dot{\Omega}_s$  (o índice “s”, nas seções anteriores foi tratado pelo índice “0” em acordo com as referências citadas nesta seção foi mantido o índice “s”), ou seja, o torque externo sobre a crosta age rapidamente sobre o núcleo então é suficiente que possamos reescrever o torque externo de forma geral com o momento de inércia total sendo:  $I = I_c + I_s$ , tal que:  $\tau_{ext} = I \dot{\Omega}$ , é aquele proveniente do dipolo magnético, e, retomando, de forma geral para o momento angular de uma esfera, temos:  $L = I\Omega$  e com derivada em relação ao tempo:  $\dot{L} = I\dot{\Omega} + \Omega\dot{I}$ , sendo o primeiro termo proveniente do torque externo e o segundo é um torque interno o qual é de certa forma um torque “induzido” devido as taxas de decaimento da crosta que promovém sensíveis mudanças na dinâmica do interior das estrelas de nêutrons (isto tornar-se-á mais claro a seguir).

Tais ponderamentos são necessários para o caminho ao qual estamos conduzindo o leitor. Muitos autores têm utilizado as seguintes igualdades (ALPAR *et al.*, 1984; ALPAR; PINES, 1989; GHOSH, 2007):

$$\int_0^R (\vec{\nabla} \times \vec{v}_s) \cdot d\vec{S} = \kappa_0 \int_0^R 2\pi r' n_v dr',$$

combinada com a lei de conservação de vórtices (em mecânica dos fluidos associada a equação da conservação de massa) (GHOSH, 2007; GOBBI *et al.*, 2006):

$$\frac{\partial n_v}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_v v_R \hat{r}) = 0,$$

que combinadas resultam na quantidade necessária da rotação da componente superfluida:

$$\dot{\Omega}_s = -\frac{\kappa_0 n_v v_R}{R}, \quad (3.39)$$

sendo  $v_R$  a velocidade radial do fluxo dos vórtices superfluidos,  $n_v$  a densidade de vórtices e  $\dot{\Omega}$  a frenagem a qual o superfluido está submetido em nossas considerações equivalente a frenagem sobre a crosta ( $\dot{\Omega}_s \equiv \dot{\Omega}$ ).

Muito semelhante a este resultado é considerarmos a conservação de momento angular, onde:

$$\Omega = -\dot{\Omega} \frac{(\lambda M R^2)}{\lambda M R 2 \dot{R}} = -\frac{\dot{\Omega} R}{2 \dot{R}}, \quad (3.40)$$

onde  $\lambda$  é o parâmetro de forma do objeto, no caso da esfera é igual a 2/5, como vem

sendo tratado em grande parte deste trabalho e o  $\dot{R}$  é diferente de nossa suposição inicial de variação do raio global da estrela, mas agora é fácil relacioná-lo a taxa na qual se transmite os vórtices superfluidos do núcleo para a crosta interna no sítios de *pinning*, que são regiões não homogêneas da crosta onde são fixados tais vórtices, logo reescrevemos a equação 3.38 como:

$$n_v \kappa_0 = -\frac{\dot{\Omega} R}{v_R} \Rightarrow \dot{\Omega} = -\frac{\kappa_0 n_v v_R}{R}, \quad (3.41)$$

é apropriado que ao aplicarmos a conservação de vórtices obtenha-se o mesmo resultado que para a conservação de momento angular, em outras palavras, não há mais instabilidade na variação do número de vórtices que antes eram aniquilados na crosta (no sentido que partem do núcleo para a crosta podendo ser fixados nas deformações da crosta interna) ou que basicamente a estrela encontrou um ponto que limita uma maior adição na taxa de destruição de vórtices em um certo intervalo de tempo definida pelo conjunto de observáveis que caracterizam a rotação da crosta externa.

Como Alpar (1989) já havia citado cada modelo físico para o decaimento de rotação de superfluido é em geral um modelo para  $v_R$ . Importante é, calcularmos neste momento a variação do número de vórtices, a partir da equação 3.38, o número total de vórtices que está presente em toda a área  $\pi R^2$  é:

$$N_v = \frac{2\pi}{(\hbar/2m_n)} (\Omega R^2), \quad (3.42)$$

a variação do número de vórtices em relação ao tempo em muitos casos não considera a taxa com que o vórtice se movimenta, i.e.:  $\dot{R} = v_R$ , não produzindo o segundo termo do lado esquerdo da equação:

$$\dot{N}_v = \frac{2\pi}{(\hbar/2m_n)} (\dot{\Omega} R^2 + 2R\Omega\dot{R}), \quad (3.43)$$

e quando substituimos 3.40 em 3.43, temos:  $\dot{N}_v = 0$ , o equivalente a questão quando a transferência de momento angular é igual a necessária para sustentar aquela que é constantemente requerida pelo torque do dipolo magnético, então, não há mudança no número de vórtices no interior da estrela, i.e., eles são criados na medida com que forem aniquilados (ou fixados na crosta interna), os efeitos no momento angular do núcleo são negligenciados haja vista que este apresenta uma quantidade muito maior do que a variação transferida, é comum dizer que o núcleo funciona como um reservatório de momento angular (LINK *et al.*, 1999).

## 4 Resultados

*“Expressões pequenas... Eu achei lindo isso.”  
(M. M. B. Malheiro de Oliveira, 07/08/2019)*

### 4.1 O Parâmetro de Deslocamento e Índice de Fre- nagem

Como expusemos na seção 3.1, consideraremos a existência de uma variação no tempo de um conveniente parâmetro de deslocamento.

Como no modelo canônico, nós assumimos que o pulsar muda sua energia rotacional ( $E_{rot}$ ) na forma de irradiação de dipolo eletromagnético ( $E_{IM}$ ) de acordo com a equação 2.8. Contudo, diferentemente daquele modelo nós iremos considerar que o pulsar consiste de uma crosta fina e sólida com momento de inércia constante  $I_c$ , com a constante  $\lambda$  sendo relacionada a forma do pulsar, por exemplo, para uma esfera  $\lambda = 2/5$ , e um grande caroço com massa total constante ( $M_n$ ), feita basicamente de nêutrons superfluidos, cujo momento de inércia será dado por

$$I_n(t) = \lambda M_n R^2(t). \quad (4.1)$$

Nesta expressão  $R$  é um parâmetro de deslocamento que resume em seu comportamento matemático todos os fatores físicos que influenciam o momento de inércia além da massa total do caroço. Nós assumimos que o momento de inércia do caroço pode mudar com o tempo, mas não devido a mudança em sua massa total ( $M_n$ ) ou raio físico ( $R_n$ ); ao invés disso, qualquer mudança em  $I_n$  deveria ser devido a deslocamentos internos de massa que são quantificados por  $R(t)$ .

É natural esperar que o parâmetro de deslocamento esteja próximo de  $R_n$ , portanto, executamos uma expansão de Taylor desse parâmetro da seguinte maneira:

$$R(t) = R_n + \dot{R}(t_0) \cdot (t - t_0) + \ddot{R}(t_0) \frac{(t - t_0)^2}{2} + \dots + \frac{(t - t_0)^n}{n!} \frac{d^n}{dt^n} R(t_0) + g_n(t), \quad (4.2)$$

onde  $t_0$  é um instante no tempo que nós escolheremos igual a zero. E,  $g_n(t)$  é um função de  $t$  tal que:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g_n(t)}{(t - t_0)^n} = 0. \quad (4.3)$$

Nós assumiremos que esta expressão pode ser truncada depois de seu segundo termo devido a altos derivados de  $R$  insignificantes:

$$R(t) \approx R_n + t\dot{R}. \quad (4.4)$$

Como uma aproximação de primeira ordem, assumiremos que a primeira derivada no tempo do parâmetro de deslocamento ( $\dot{R}$ ) é constante. Este número, com unidades de velocidade, é esperado variar de pulsar para pulsar, pois este informa sobre a dinâmica interna da estrela.

Note que quando  $\dot{R} = 0$  equação (4.4) resulta  $R = R_n$  e a equação (4.1) resulta no momento de inércia usual de um sólido como esperado. Por outro lado, um  $\dot{R}$  diferente de zero na equação (4.4) não significa uma mudança no valor do raio físico do núcleo; indica a presença de deslocamentos internos de massa que alteram o momento de inércia do núcleo, como explicado acima.

Vimos que, da variação da energia do sistema que irradia sua energia rotacional ( $E_{rot}$ ) na forma de irradiação eletromagnética ( $\dot{E}_{IM}$ ) de dipolo decorre:

$$\dot{E}_{rot} = -\dot{E}_{IM}, \quad (4.5)$$

onde a energia rotacional tem a forma:

$$E_{rot} = \frac{I \cdot \Omega^2}{2}. \quad (4.6)$$

Derivando a energia rotacional 4.6 com relação ao tempo, em vista das suposições dos resultados do nosso modelo, resulta em:

$$\dot{E}_{rot} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (I_c \Omega_c^2 + I_n \Omega_n^2). \quad (4.7)$$

Como quaisquer mudanças na velocidade angular da crosta,  $\Omega_c$ , são rapidamente transmitidas para o núcleo, na prática, a velocidade angular do último,  $\Omega_n$ , será considerado igual a  $\Omega_c \equiv \Omega$ . Portanto a equação 4.7 torna-se

$$\dot{E}_{rot} = \frac{1}{2} \left[ (I_c + I_n) \cdot 2\Omega\dot{\Omega} + \dot{I}_n \Omega^2 \right]. \quad (4.8)$$

Como se espera que o momento de inércia da crosta fina seja muito menor do que o momento de inércia do núcleo grande e pesado, nós nos aproximamos de  $I_c + I_n \approx I_n$ .

Similarmente consideramos  $M_n$  praticamente igual à massa total do pulsar,  $M$ . Usando estas aproximações na equação 4.8 junto com a derivada temporal da definição 4.1 nós encontramos

$$\dot{E}_{rot} = I_n \Omega \dot{\Omega} + \lambda M R \dot{R} \Omega^2, \quad (4.9)$$

a qual usando a definição em 4.1, torna-se

$$\dot{E}_{rot} = \lambda M R^2 \Omega^2 \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} + \frac{\dot{R}}{R} \right). \quad (4.10)$$

Nós admitiremos ainda que, para a duração dos intervalos de tempo observacionais típicos,  $\varsigma$ , a condição  $\varsigma \dot{R} \ll R_n$  mantém tal que a equação 4.4 produz o seguinte valor típico para  $R$ :

$$R = R_n \left( 1 + \varsigma \frac{\dot{R}}{R_n} \right) \Rightarrow R \approx R_n. \quad (4.11)$$

Portanto, para tempos típicos de observação, a equação 4.10 assume a forma

$$\dot{E}_{rot} = \lambda M R^2 \Omega^2 \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} + \frac{\dot{R}}{R_n} \right). \quad (4.12)$$

Finalmente, assumindo um núcleo que ocupa a grande maioria do volume do pulsar, temos  $R_n \approx R_0$  e a expressão para a energia de rotação torna-se

$$\dot{E}_{rot} = \lambda M R^2 \Omega^2 \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} + \frac{\dot{R}}{R_0} \right). \quad (4.13)$$

A variação temporal da energia irradiada pelo dipolo magnético de pulsares é igual a:

$$\dot{E}_{IM} = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\vec{m}}|^2, \quad (4.14)$$

com  $\vec{m}$  sendo o vetor momento de dipolo magnético (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008)

$$\vec{m} = \frac{1}{2} B_P \cdot R_0^3 (\cos \alpha \hat{k} + \sin \alpha \cos \Omega t \hat{i} + \sin \alpha \sin \Omega t \hat{j}). \quad (4.15)$$

Admitindo-se a dependência temporal indicada acima (equação 4.15) e que  $\dot{B}_P = 0$ , encontra-se a seguinte expressão para a irradiação de energia magnética no tempo (conforme equação C.16):

$$\dot{E}_{IM} = \frac{\sin^2 \alpha B_P^2 R_0^6 \Omega^4 + 24 \sin^2 \alpha B_P^2 R_0^4 \dot{R}^2 \Omega^2 + 36 B_P^2 R_0^2 \dot{R}^4}{6c^3}. \quad (4.16)$$

A equação 4.5 assume a forma:

$$(R\dot{\Omega} + \dot{R}\Omega)\lambda R\Omega M = -\frac{\text{sen}^2 \alpha B_P^2 R^6 \Omega^4 + 24 \text{sen}^2 \alpha B_P^2 R^4 \dot{R}^2 \Omega^2 + 36 B_P^2 R^2 \dot{R}^4}{6c^3}. \quad (4.17)$$

Solucionando-se a equação acima para a variação da velocidade angular no tempo ( $\dot{\Omega}$ ), feito isso deriva-se esta equação resultante com relação ao tempo, obtendo  $\ddot{\Omega}$ . Em seguida multiplicamos o resultado pela velocidade angular ( $\Omega$ ) e dividimos pelo quadrado da variação desta velocidade angular no tempo ( $\dot{\Omega}^2$ ), para obter  $n$  através de sua definição. Admitiremos, ainda, que  $\ddot{R}^2 \ll \dot{R}^4$ , ou seja, a variação de  $\ddot{R}$  é muito menor que  $\dot{R}$ , implicando que não há variação do parâmetro de deslocamento de modo acelerado. Obtemos, assim, a equação para o índice de frenagem segundo o modelo proposto em que o momento de inércia varia com o tempo através de um parâmetro de deslocamento, conforme segue no Apêndice C, dada por C.32:

$$n = \frac{(3 \text{sen}^2 \alpha B_P^2 R^5 \Omega^2)}{(12\lambda c^3 \dot{R} M + \text{sen}^2 \alpha B_P^2 R^5 \Omega^2)}. \quad (4.18)$$

Este é o principal resultado desta investigação, que será ainda elaborado na sequência.

Solucionando a equação 4.18 para  $\dot{R}$  teremos a expressão que descreve o comportamento do parâmetro de deslocamento:

$$\dot{R} = -\frac{\text{sen}^2 \alpha B_P^2 (n-3) R^5 \Omega^2}{12\lambda c^3 n M} \quad (4.19)$$

Na tabela 2.1 seguem os valores de velocidade angular ( $\Omega$ ), derivada da velocidade angular ( $\dot{\Omega}$ ), e índice de frenagem ( $n$ ) observacionais que usaremos.

É estimado neste trabalho que a crosta de um pulsar é fina, com o núcleo ocupando aproximadamente 80% de seu raio, permitindo para  $1.4 M_\odot$  (onde  $M_\odot$  representa uma massa solar) estrelas com equações físicas de estado. Portanto, considerando um raio total de aproximadamente 10 km e o raio do núcleo é  $R_n \approx 8$  km. Nós iremos estimar os valores desta taxa de variação usando os seguintes valores aplicados para os pulsares obtidos na tabela 2.1: raio inicial,  $R = 8 \times 10^5$  cm; velocidade da luz no vácuo,  $c = 3 \times 10^{10}$  cms<sup>-1</sup>, massa,  $M = 1,4M_\odot$ .

$$\dot{R} \sim 10^{-7} - 10^{-6} \text{ cm s}^{-1}. \quad (4.20)$$

Como esperávamos, os valores para o parâmetro de deslocamento do pulsar ao longo do tempo são pequenos.

Como para o campo magnético, é comum adotarmos os valores típicos de  $B_P = 10^{12}$ G. Contudo, nós iremos verificar se o parâmetro de deslocamento deveria mudar o campo magnético significativamente no presente cenário. Para isto nós isolamos o campo mag-

nético na equação 4.17, obtendo a expressão:

$$B_P = \frac{\sqrt{6}c\sqrt{-\lambda c\Omega\dot{\Omega}M - \frac{\lambda c\dot{R}\Omega^2 M}{R}}}{\sqrt{\sin^2(\alpha)R^4\Omega^4 + 24\sin^2(\alpha)R^2(\dot{R})^2\Omega^2 + 36(\dot{R})^4}}. \quad (4.21)$$

Na equação acima, o segundo e terceiro termo na raiz quadrada do denominador são desprezíveis quando comparados ao primeiro termo. Portanto, a expressão para o campo magnético com o parâmetro de deslocamento é aproximada por:

$$B_P = \sqrt{\frac{6\lambda c^3 M}{R^4 \sin^2(\alpha)}} \sqrt{\frac{-\dot{\Omega}}{\Omega^3} - \frac{\dot{R}}{R\Omega^2}}. \quad (4.22)$$

Nesta expressão, quando  $\dot{R} = 0$  e  $\sin \alpha = 1$  a expressão canônica 2.32 é recuperada. O segundo termo da raiz quadrada desta equação, a qual tem a contribuição do parâmetro de deslocamento com o tempo, será desprezível quando

$$|\dot{R}| \ll \frac{|\dot{\Omega}|}{\Omega} R. \quad (4.23)$$

Nós encontraremos em que medida esta relação é satisfeita depois de estimarmos  $\dot{R}$  com o uso dos índices de frenagem a partir da tabela 2.1 e as equações 4.19 e 4.22 assim como apresentamos uma comparação com os campos canônicos (ver: tabela 4.1).

TABELA 4.1 – Parâmetro de Deslocamento no Tempo ( $\dot{R}$ ), campo magnético no polo de acordo com nosso modelo ( $B_P$ ), campo magnético no polo de acordo com o modelo canônico ( $B_P$  (canon.)), idade característica ( $\tau_c$ ) e momento de inércia após o tempo característico ter decorrido ( $I_{char}$ ).

Pulsar	$\dot{R}$ (cm s <sup>-1</sup> )	$\frac{-\dot{\Omega}}{\Omega} R$ (cm s <sup>-1</sup> )	$B_P$ (G)	$B_P$ (canon.) (G)	$\tau_c$ (k anos)	$I_{char}$ (M <sub>⊙</sub> km <sup>2</sup> )
B0531+21	$1,2 \times 10^{-6}$	$1,0 \times 10^{-5}$	$1,1 \times 10^{13}$	$1,2 \times 10^{13}$	1,26	63,4
B0540-69	$1,3 \times 10^{-6}$	$7,6 \times 10^{-6}$	$1,4 \times 10^{13}$	$1,6 \times 10^{13}$	1,67	65,8
B0833-45	$3,0 \times 10^{-7}$	$1,1 \times 10^{-6}$	$9,0 \times 10^{12}$	$1,1 \times 10^{13}$	11,5	72,5
J1119-6127	$4,4 \times 10^{-7}$	$7,9 \times 10^{-6}$	$1,2 \times 10^{14}$	$1,3 \times 10^{14}$	1,61	59,2
J1208-6238	$3,8 \times 10^{-7}$	$6,0 \times 10^{-6}$	$1,2 \times 10^{14}$	$1,2 \times 10^{14}$	2,14	59,6
B1509-58	$2,4 \times 10^{-7}$	$8,1 \times 10^{-6}$	$4,8 \times 10^{13}$	$4,8 \times 10^{13}$	1,57	57,6
J1734-3333	$8,6 \times 10^{-7}$	$1,6 \times 10^{-6}$	$1,1 \times 10^{14}$	$1,6 \times 10^{14}$	8,13	92,1
J1833-1034	$6,1 \times 10^{-7}$	$2,6 \times 10^{-6}$	$9,8 \times 10^{12}$	$1,1 \times 10^{13}$	4,86	69,8
J1846-0258	$2,7 \times 10^{-6}$	$1,7 \times 10^{-5}$	$1,4 \times 10^{14}$	$1,5 \times 10^{14}$	0,73	65,1

Substituindo (4.22) na equação (4.18) obtemos (OLIVEIRA *et al.*, 2018):

$$n = \frac{3R\dot{\Omega} + 3\dot{R}\Omega}{R\dot{\Omega} - \dot{R}\Omega}. \quad (4.24)$$

A partir da equação 4.24 podemos graficar a figura 4.1 que será utilizada em comentários a seguir sobre os nossos resultados. Na figura 4.1 a variação de  $n$  com  $\dot{R}$  é mostrado para os pulsares listados na tabela 2.1. A equação 4.24 pode ser invertida, obtendo uma

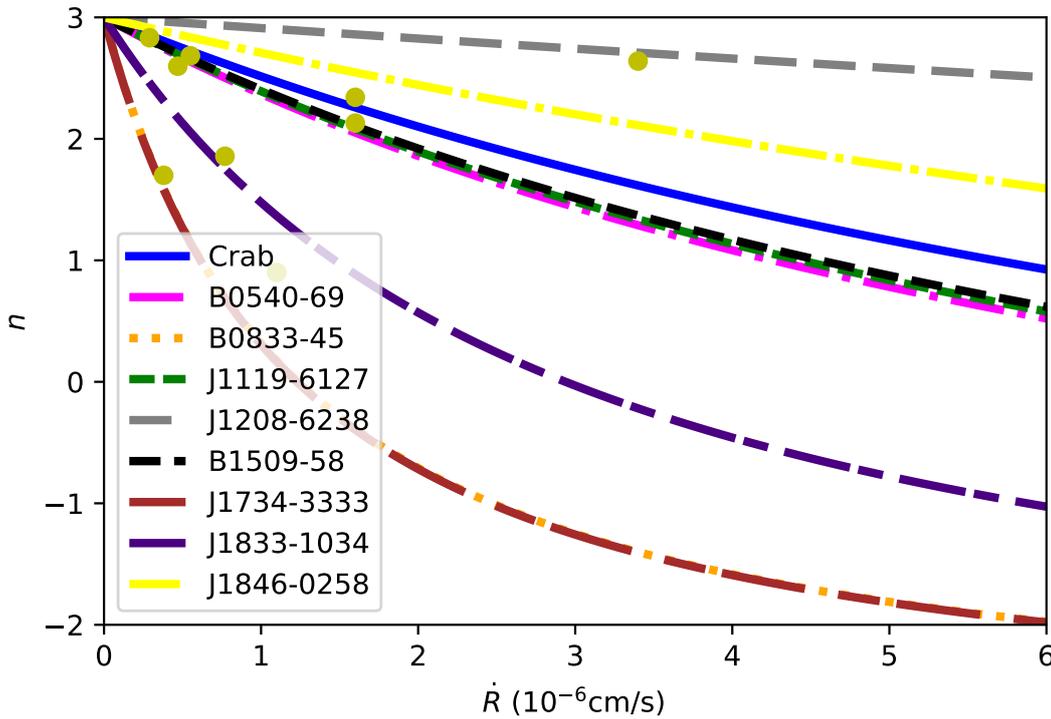


FIGURA 4.1 – Gráfico do índice de frenagem,  $n$ , como uma função da variação temporal do parâmetro de deslocamento,  $\dot{R}$  ( $\text{cm s}^{-1}$ ), para os pulsares listados na tabela 4.1. Os pontos amarelos indicam os valores observacionais para  $n$ .

expressão para a variação no tempo do parâmetro de deslocamento:

$$\dot{R} = \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} R \frac{n-3}{n+3}. \quad (4.25)$$

Tais valores foram utilizados para construir a tabela 4.1. Os valores positivos para  $\dot{R}$  na tabela 4.1 indicam que estes pulsares têm parâmetros de deslocamento que estão *aumentando* com o tempo, ou seja, os momentos de inércia dos núcleos dessas estrelas estão aumentando lentamente. Como ilustração desse aumento, calculamos o momento de inércia após o tempo característico,  $\tau_c$ , ter decorrido para nossa amostra de pulsares ( $I_c$  na

tabela 4.1), onde (LORIMER; KRAMER, 2005)

$$\tau_c \equiv -\frac{\Omega}{2\dot{\Omega}}. \quad (4.26)$$

Este tempo é normalmente usado como uma estimativa da idade do pulsar (o *spin down age*). Usando a definição acima para a idade característica na equação para o índice de frenagem (em 4.25), nós obtemos

$$\dot{R} = \frac{R}{2\tau_c} \frac{(3-n)}{(n+3)}, \quad (4.27)$$

onde reescrevemos como:

$$n = 3 \frac{R - 2\dot{R}\tau_c}{R + 2\dot{R}\tau_c}. \quad (4.28)$$

### 4.1.1 Previsão dos Índices de Frenagem dos Pulsares

Assumindo que nossa amostra de pulsares é representativa de pulsares jovens e isolados, usamos os valores mais baixos e mais altos de  $\dot{R}$  na tabela 4.1 para prever faixas de índices de frenagem de outros jovens pulsares. Isso significa que calculamos o menor valor de intervalo aplicando  $\dot{R} = 2,4 \times 10^{-7} \text{ cm s}^{-1}$  para a equação (4.28), enquanto o mais alto foi encontrado aplicando  $\dot{R} = 2,7 \times 10^{-6} \text{ cm s}^{-1}$  para essa equação.

Para ilustrar esse procedimento, usamos os pulsares cujos dados estão listados na tabela 4.2. Eles foram escolhidos porque os seus índices de frenagem observacional,  $n_{obs}$ , foram publicados na literatura ou foram teoricamente investigados em outro lugar (MAGALHAES *et al.*, 2012; ESPINOZA *et al.*, 2016).

TABELA 4.2 – Velocidade Angular ( $\Omega$ ) e suas derivadas no tempo para outros jovens pulsares. Os valores do índice de frenagem,  $n_{obs}$ , que foram publicados. A idade dada pelo dipolo puro é  $\tau_c$ , enquanto a faixa  $n$  apresentada na última coluna é a previsão do nosso modelo.

Pulsar	$\Omega$ rad s <sup>-1</sup>	$\dot{\Omega}$ ( $\times 10^{-10}$ ) rad s <sup>-2</sup>	$\ddot{\Omega}$ ( $\times 10^{-21}$ ) rad s <sup>-3</sup>	Refs.	$n_{obs}$	$\tau_c$ anos	$n$ faixa (deste modelo)
J1640-4631	30,4320477075	-1,433053	2,12	1	3,15	3367	[0,8, 2,7]
J1124-5916	46,377	-2,5762	-5,4034	2	-	2854	[1,0, 2,8]
J1418-6058	56,822	-0,8705	4,0211	3	-	10349	[-0,8, 2,2]
B1800-21	47,014	-0,4730	0,088	4	1,9	15800	[-1,4, 1,8]
B1823-13	61,920	-0,4595	0,069	5	2,2	21400	[-1,7, 1,5]

**Referências:** (1) (ARCHIBALD *et al.*, 2016); (2) (RAY *et al.*, 2011); (3) (KRAMER *et al.*, 2003); (4) (ESPINOZA *et al.*, 2016); (5) (ESPINOZA *et al.*, 2016).

O alcance que nosso modelo prevê para seus índices de frenagem é consistente com nossas considerações anteriores. O alto índice de frenagem reportado para J1640-4631

pela referência. (ARCHIBALD *et al.*, 2016) ainda está para ser confirmado, uma vez que esses autores não puderam descartar a contaminação devido a uma recuperação de *glitch* invisível; nosso modelo prevê um valor mais convencional de  $n$  para isso. Se os pulsares com tais índices de frenagem forem confirmados, teremos que analisar suas características físicas para explicar adequadamente seus valores de  $n$  usando nosso modelo. Por exemplo, sabe-se que, para índices dentro do intervalo  $3 < n < 5$ , há também perda de energia por emissão de ondas gravitacionais (ARAUJO *et al.*, 2016a). Os intervalos previstos para os pulsares J1124-5916 e J1418-6058 são significativamente coincidentes com os intervalos previstos por Magalhães *et al.* (2012).

Na próxima seção abordaremos a temática acerca da idade de pulsares juntamente com o parâmetro de deslocamento.

## 4.2 Idade de Pulsares Associada ao Parâmetro de Deslocamento

Vamos considerar o desenvolvimento que segue a temática da idade característica de pulsares como tratado na seção 2.4 partindo da equação de conservação de energia em 4.17 isolaremos o termo  $\dot{\Omega}$ , o qual relacionamos agora com o parâmetro de deslocamento com o tempo:

$$\dot{\Omega} = -\frac{5 \sin^2(\alpha) B_P^2 R^4 \Omega^3}{12c^3 M} - \Omega \frac{\dot{R}}{R}. \quad (4.29)$$

Neste momento reescreveremos a equação 4.24, proposta a partir de nossas hipóteses, da seguinte forma:

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \left( \frac{n-3}{n+3} \right), \quad (4.30)$$

e substituíremos a razão  $\dot{R}/R$  da equação 4.30 na equação 4.29, então, teremos:

$$\dot{\Omega} = -k_1 R^4 \Omega^3 - \Omega \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \left( \frac{n-3}{n+3} \right), \quad (4.31)$$

onde  $k_1$  é uma constante positiva, igual a:

$$k_1 = \frac{B_P^2 \sin^2 \alpha}{6\lambda M c^3}. \quad (4.32)$$

Isolando-se  $\dot{\Omega}$  na equação 4.31:

$$\left( \frac{2n}{n+3} \right) \dot{\Omega} = -k_1 R^4 \Omega^3, \quad (4.33)$$

sabendo que:

$$\dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{dt}, \quad (4.34)$$

dada a equação diferencial acima, e substituindo em 4.33 e multiplicando por  $dt$  em ambos os lados desta equação, então:

$$\left(\frac{2n}{n+3}\right) d\Omega = -k_1 R^4 \Omega^3 dt. \quad (4.35)$$

Ao integrarmos a equação 4.35, consideraremos que a função  $R(t)$  é dada pela expansão de Taylor introduzida em 4.2, sendo truncada em seu segundo termo dada a pequena variação da mesma como descrito pela equação 4.4, mais ainda, consideramos igualmente como na seção 2.4, semelhantemente ao modelo canônico, que em um tempo muito pequeno  $t_0$ , o qual para efeitos práticos é considerado igual a zero, sendo este o tempo o qual o pulsar apresenta uma velocidade angular de rotação igual a  $\Omega_0$ , e em um tempo  $t$  o qual é considerado ser a idade ( $\tau$ ) conforme o modelo empregado pela equação 4.29, considerando também o parâmetro de deslocamento  $R(t)$  que evolui lentamente e uniformemente, sendo relacionado a uma velocidade angular  $\dot{\Omega}$ , tal como segue:

$$\left(\frac{2n}{n+3}\right) \int_{\Omega_0}^{\Omega} \frac{d\Omega}{\Omega^3} = -k_1 \int_{t_0=0}^{t=\tau} R^4(t) dt, \quad (4.36)$$

como resultado desta expressão:

$$\left(\frac{2n}{n+3}\right) \left[ \frac{1}{(-3+1)\Omega^{(3-1)}} - \frac{1}{(-3+1)\Omega_0^{(3-1)}} \right] = -k_1 \frac{(\dot{R}^4 \tau^5 + 5\dot{R}^3 \tau^4 R + 10\dot{R}^2 \tau^3 R^2 + 10\dot{R} \tau^2 R^3 + 5\tau R^4)}{5}. \quad (4.37)$$

considerando que  $\Omega_0 \gg \Omega$  e ainda os termos efetivos (significativos) do lado direito da equação 4.37, temos que a idade ( $\tau$ ) pode ser obtida a partir da expressão a seguir:

$$\left(\frac{n}{n+3}\right) \left[ \frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{\Omega_0^2} \right] = k_1 (2\dot{R} \tau^2 R^3 + \tau R^4), \quad (4.38)$$

nesta expressão  $\Omega_0$  é a velocidade angular que a estrela apresenta em seu nascimento, se não há matéria superfluida, então  $\dot{R} = 0$ , e a equação não deveria ser a mesma como no modelo canônico sem a consideração de limites que devem ser admitidos antes da integral, quando se generaliza 3 para  $n$  na equação de energia.

### 4.2.1 Idade e o Caso do Pulsar B1757-24

“O Pato” (do inglês: *“the Duck”*) é um complicado sistema de rádio não térmico, consistindo do pulsar de rádio em atividade B1757-24, sua nebulosa do vento do pulsar (em inglês: *pulsar wind nebula*, de sigla PWN) circundante a PWN G5.27-0.90, e a remanescente de supernova (em inglês: *supernova remnant*, de sigla SNR) adjacente a SNR G5.4-1.2. Este pulsar foi originalmente alegado ser um jovem pulsar ( $\approx 15000$  anos) e de velocidade muito alta ( $\gtrsim 1500$  km s $^{-1}$ ), que havia penetrado e emergido da “concha” da SNR G5.4-1.2, mas os limites superiores no movimento do pulsar levantaram sérias dificuldades com esta interpretação.

O pulsar B1757-24 tem uma idade característica de  $\tau_c = 15$  mil anos (MANCHESTER *et al.*, 2005). Se assumimos que  $t_P = \tau_c$  (onde  $\tau_c$  é a idade característica do pulsar:  $\tau_c \equiv -\Omega/(2\dot{\Omega})$ ), e que o pulsar tem viajado  $\Theta = 16,1-20,6$  a partir do centro da remanescente de supernova em sua vida útil (FRAIL *et al.*, 1994), isso implica um movimento próprio para o pulsar de magnitude  $\mu = \Theta/\tau_c = 63-80$  mas anos $^{-1}$  (miliarsegundo por ano). No entanto, observações no Very Large Array (GREISEN, 2003) sobre 6,7 anos produziu um limite superior de  $\mu < 25$  mas anos $^{-1}$  (GAENSLER; FRAIL, 2000), implicando uma idade do pulsar de  $t_P > 39-50$  mil anos  $\gg \tau_c$ , se o pulsar nasceu próximo ao centro geométrico da remanescente de supernova.

A partir de novas observações (BLAZEK *et al.*, 2006) conseguiu restringir o valor do movimento próprio para  $\mu < 13.9$  indicando que o pulsar deve ter uma idade  $t_P > 69-88$  mil anos. Para Espinoza *et al.* 2016 o índice de frenagem medido para o pulsar B1757-24 é  $1,1 \pm 0,4$ , combinado com um período inicial de rotação de 10 ms (o que pode ser uma taxa de período inicial curta como afirmam os autores), resulta em uma idade de 70 mil anos. Os autores acreditam que tal evolução pode ser resultado da evolução do campo magnético ou efeitos de superfluidos dinâmicos a longo prazo.

Os autores utilizaram a seguinte equação 2.24 para a estimativa de idade onde  $k$  é uma constante que deve depender da combinação entre momento de inércia, intensidade e orientação do dipolo magnético. Calculamos a idade para o pulsar a partir da equação 4.38, nossas previsões sugerem que este pulsar apresenta idade de 11,5 mil anos para os resultados estimados de  $P_0 = 10$  ms e  $n = \pm 1,1$  (como em Espinoza *et al.* 2016).

### 4.2.2 Comparação do Modelo Modificado para Idade e Evolução Rotacional devido ao Desacoplamento do Superfluido

Em um artigo recente (HO; ANDERSSON, 2012), Ho & Andersson consideraram a possibilidade de variações no momento de inércia devido a mudanças entre núcleo e crosta (vórtice presos a crosta e fricção mútua dissipativa), com a estrela de nêutrons mantendo

um constante momento de inércia total. Eles calcularam o índice de frenagem como:

$$n = 3 - 4\tau_c \left| \frac{\dot{I}}{I} \right|. \quad (4.39)$$

Da equação 4.39 graficamos, conforme figura 4.2, 3 linhas de índices de frenagens constantes de valores: 1 (na cor preta), 2 (triângulos) e 2,9 (traço-traço-ponto), onde os asteriscos representam as estrelas de nêutrons de nossa amostra com legenda corresponde a cor escolhida.

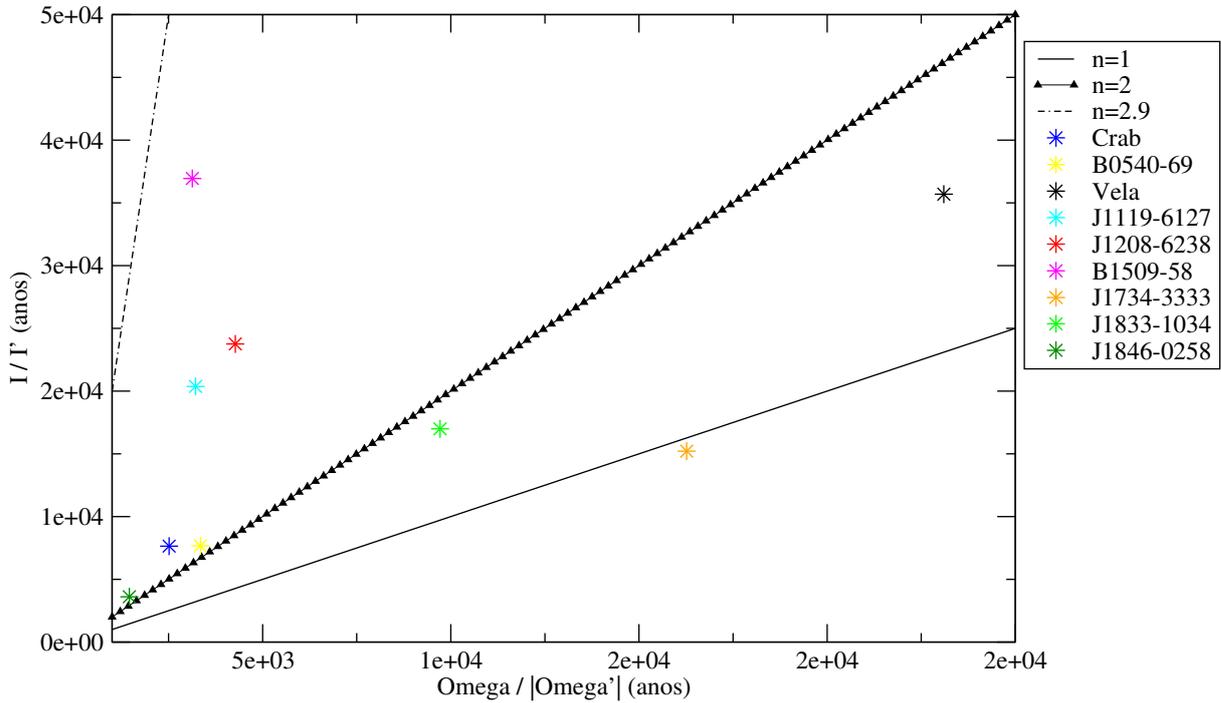


FIGURA 4.2 – No gráfico,  $I/I'$  representa  $|I|/|\dot{I}|$ , é o momento de inércia pela sua derivada como função de  $\Omega/|\dot{\Omega}|^{-1}$ , que representa  $\Omega/\dot{\Omega}^{-1}$ , a velocidade angular de rotação dividida pelo módulo de sua derivada, os asteriscos representam estrelas no modelo da equação 4.39. A linha, triângulos e traço-traço-ponto representam respectivamente funções para índices de frenagens constantes de valores  $n = 1$ ,  $n = 2$  e  $n = 2,9$ .

Para fazermos comparações com o resultado destes autores, a equação 4.28 foi reescrita:

$$n = 3 \frac{1 - \tau_c \frac{\dot{I}}{I}}{1 + \tau_c \frac{\dot{I}}{I}}. \quad (4.40)$$

Identicamente ao passo anterior nós fizemos na figura 4.3 linhas constantes de índices de frenagem com os valores: 1 (na cor preta), 2 (azul) e 2,9 (violeta púrpura), onde os círculos representam as estrelas de nêutrons de nossa amostra com legenda corresponde a cor escolhida.

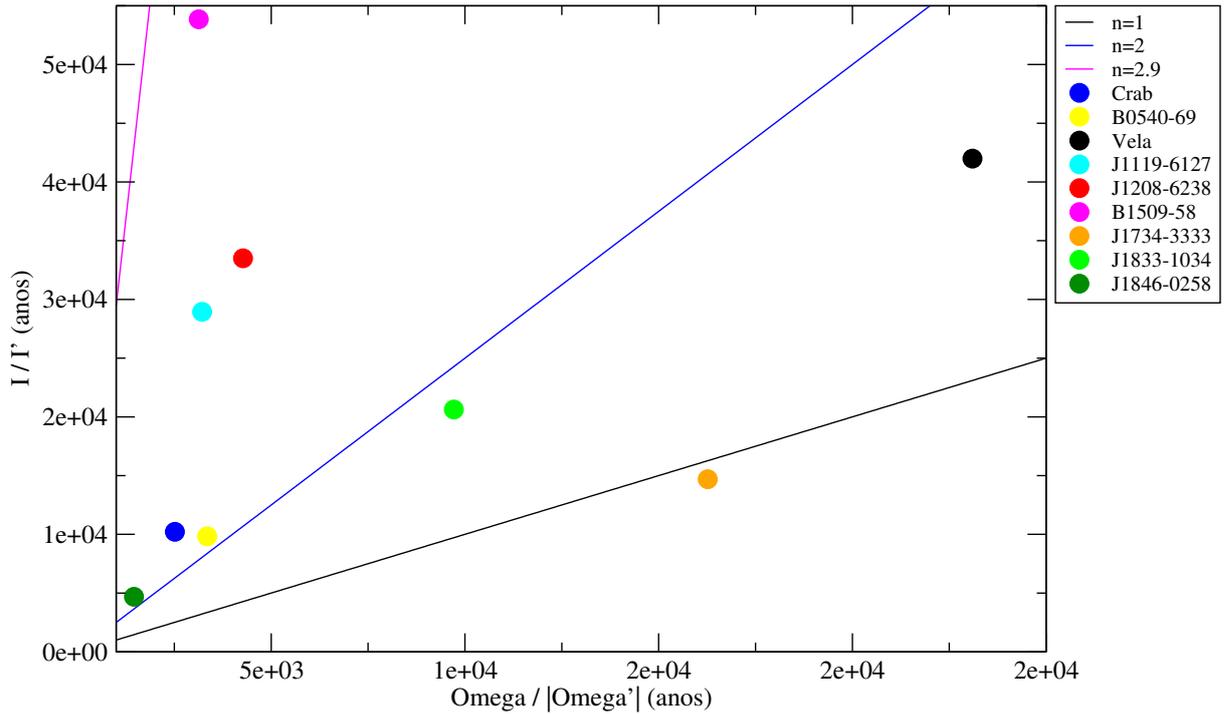


FIGURA 4.3 – No gráfico,  $I/I'$  representa  $|I|/|\dot{I}|$ , é o momento de inércia pela sua derivada como função de  $\Omega/|\dot{\Omega}'|^{-1}$ , que representa  $\Omega/\dot{\Omega}^{-1}$ , a velocidade angular de rotação dividida pelo módulo de sua derivada, os círculos representam estrelas no modelo da equação 4.40. As linhas representam a função para índice de frenagem constante de valores  $n = 1$ ,  $n = 2$  e  $n = 2,9$ .

Veremos ainda a diferença dada pelo coeficiente angular das equações 4.39 e 4.40 na figura 4.4, onde a diferença de cada modelo estará em  $|I|/|\dot{I}|$ .

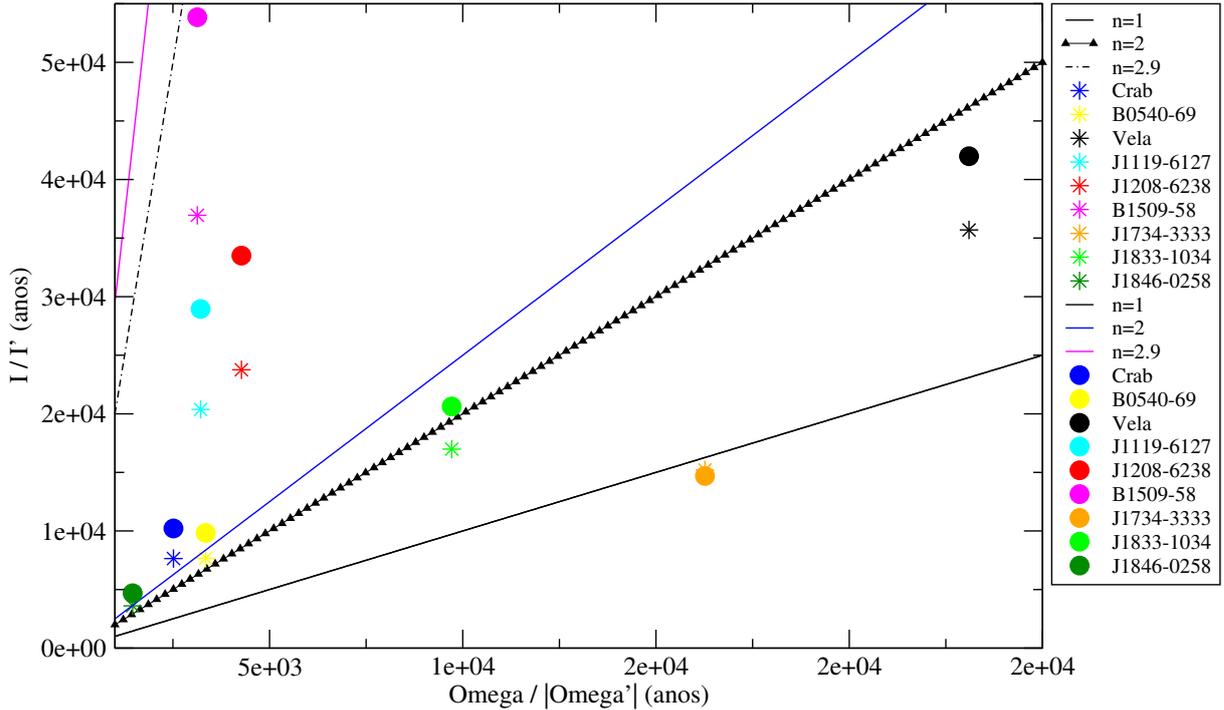


FIGURA 4.4 – No gráfico,  $I/I'$  representa  $|I|/|\dot{I}|$ , é o momento de inércia pela sua derivada como função de  $\Omega/|\dot{\Omega}|^{-1}$ , que representa  $\Omega/\dot{\Omega}^{-1}$ , a velocidade angular de rotação dividida pelo módulo de sua derivada, os asteriscos representam estrelas no modelo da equação 4.39 e os círculos representam estrelas no modelo da equação 4.40. As linhas preta, azul e violeta púrpura representam respectivamente a função para índices de frenagens constantes de valores  $n = 1$ ,  $n = 2$  e  $n = 2,9$ . Assim como, respectivamente triângulos e traço-traço-ponto representam  $n = 2$  e  $n = 2,9$ .

Os resultados tendem a ser iguais quando  $n \rightarrow 1$ . Nesta seção observamos a semelhança entre o modelo de Ho & Andersson com o nosso modelo. O que era esperado tendo em vista que ambos consideram núcleos superfluidos. Na próxima subseção 4.2.3, seguindo a temática abordada nas subseções 4.2.1 e 4.2.2, apresentamos um pulsar o qual pode ser plausível supor ter núcleo superfluido.

### 4.2.3 Pulsar B1951+32 na Remanescente de Supernova CTB 80

Usando o VLA e a antena da cidade de Pie (antena que faz parte de um sistema de dez radiotelescópios do Very Long Baseline Array (VLBA)), a posição do pulsar de rádio B1951+32 foi medida em relação às fontes de rádio de fundo em quatro épocas entre 1989 e 2000. O pulsar B1951+32 emite em rádio e rotaciona muito rapidamente ( $P = 39,5$  ms), além disso emite em raios-X e Raio- $\gamma$ , localizado na borda da incomum remanescente de supernova (SNR) CTB 80 (G69.0+2.7) (STROM, 1987; KULKARNI *et al.*, 1988).

O pulsar B1951+32 tem uma idade característica  $\tau_c = 107$  mil anos. Foi estimado a partir do infravermelho da casca que a separação angular entre o pulsar e o seu suposto

local de nascimento é  $\Theta \sim 27' \pm 8$ , com movimento próprio de  $\mu = 25 \pm 4$  mas ano<sup>-1</sup>, o que resulta em uma idade para o pulsar de  $64 \pm 18$  mil anos (MIGLIAZZO *et al.*, 2002). Para Migliazzo *et al.* 2002 esta discrepância, para a idade, pode ser explicada se o período inicial de rotação do pulsar foi de  $P_0 = 27 \pm 6$  ms.

Na figura 4.5 podemos verificar que há motivos para considerar que o pulsar B1951+32 e a SNR G69.0+2.7 podem estar relacionados. Além disso medidas do ângulo de posição do movimento próprio estão em acordo com a direção prevista (STROM, 1987; MIGLIAZZO *et al.*, 2002).

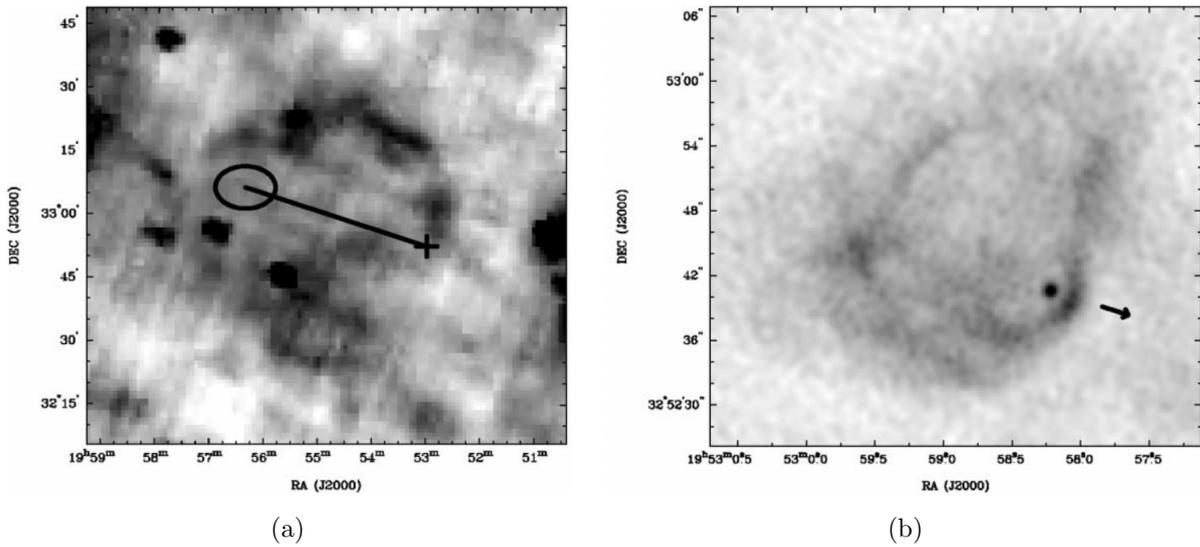


FIGURA 4.5 – Imagem da SNR CTB 80 (G69.0+2.7) e do pulsar B1951+32 a partir do VLA. (a) Podemos ver a casca da SNR G69.0+2.7, onde o sinal + representa a posição do pulsar e a linha indica a direção ao qual ele viajou com a elipse de 1 sigma ( $\sigma$ ) marcando o possível local de nascimento se o pulsar tem 107 mil anos, (b) A seta indica a direção de movimento medida do pulsar com o comprimento correspondendo a distância viajada ao longo de 100 anos. Imagem em: Migliazzo *et al.* 2002

Para o pulsar B1951+32 com a idade de 64 mil anos utilizamos a equação 4.38, onde consideramos apenas valores de índice de frenagem menores do que 3 tendo em vista que o modelo não admite uma perda maior de energia do que por irradiação de dipolo magnético, e considerando um período inicial de rotação de  $P_0 = 23 \pm 2$  ms a estimativa do índice de frenagem para o pulsar B1951+32 a partir da equação 4.38 é de  $n = 2, 1 \pm 0, 8$ .

### 4.3 Conservação do Momento Angular Total e Dinâmica do Núcleo Superfluido

Baym *et al.* (1969) notaram que qualquer mudança no momento angular dos nêutrons superfluidos ocorre por criação ou destruição de vórtices que podem ser originados na maior parte do superfluido ou na interface entre regiões de superfluido e regiões normais. Então, sendo o momento angular proporcional ao momento de inércia  $I$  e a velocidade angular de rotação  $\Omega$ ,

$$L = \Omega I, \quad (4.41)$$

e sua variação no tempo:

$$\dot{L} = \Omega \dot{I} + \dot{\Omega} I. \quad (4.42)$$

Com a razão entre o torque que é a derivada do momento angular com o tempo  $\dot{L}$  e o momento angular  $L$ , igual a:

$$\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\Omega I}{\Omega I} \left( \frac{\dot{I}}{I} + \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right), \quad (4.43)$$

onde nós usamos que o momento de inércia é o momento de inércia geral ( $I = \lambda M R^2$ ), de modo que a equação 4.42 pode ser escrita, como:

$$\frac{\dot{I}}{I} = \frac{2\dot{R}}{R} = \left( \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right). \quad (4.44)$$

Para deduzirmos os valores do índice de frenagem, nós obtivemos a seguinte relação (OLIVEIRA *et al.*, 2018):

$$n = \frac{3R\dot{\Omega} + 3\dot{R}\Omega}{R\dot{\Omega} - \dot{R}\Omega}, \quad (4.45)$$

para fins didáticos, esta equação foi reescrita da seguinte forma:

$$n = 3 \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} + \frac{\dot{R}}{R} \right) \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} - \frac{\dot{R}}{R} \right)^{-1}. \quad (4.46)$$

Agora considere o caso, no qual a taxa de aumento dado pelo parâmetro de deslocamento compensa a taxa de desaceleração da rotação, neste caso de conservação de momento angular ( $\dot{L} = 0$ ) a equação 4.42 torna-se:

$$\frac{|\dot{\Omega}|}{\Omega} = \frac{2\dot{R}}{R}, \quad (4.47)$$

e como consequência a equação 4.46:

$$n = 1. \quad (4.48)$$

Observamos que, o índice de frenagem igual a 1 não necessariamente está relacionado com o modelo de ventos de pulsares, mas aos fatores físicos que influenciam o momento de inércia com a nossa hipótese em um caso onde a taxa de irradiação da crosta é equilibrada pela criação ou destruição de vórtices.

## 4.4 Torque no Pulsar J1734-3333

Vimos na seção 3.3 que pulsares com desaceleração rotacional da crosta apresentam movimento das linhas de vórtices de nêutrons superfluidos em direção a sua crosta. E, com isso, um aumento no parâmetro de deslocamento com o tempo quantificado na tabela 4.1 e, também, demonstramos na seção 4.3 que para este mecanismo físico quando considerado a conservação do momento angular encontramos que a variação temporal do seu parâmetro de deslocamento ( $\dot{R}$ ) é igual a metade da razão  $R|\dot{\Omega}|/\Omega$  (conforme equação 4.47), e índice de frenagem igual a 1.

O torque total pode ser relacionado ao índice de frenagem usando a equação 4.44 na equação 4.46 para encontrarmos uma equação do torque em função do índice de frenagem, como sendo:

$$\dot{L} = 3 \frac{(n-1)}{(n+3)} I \dot{\Omega}, \quad (4.49)$$

onde se o índice de frenagem corresponde ao índice canônico,  $n = 3$ , então a expressão do torque canônico é recuperada:

$$\dot{L} = I \dot{\Omega}. \quad (4.50)$$

Além disso, da expressão 4.60, se  $n = 1$  o torque total é igual a zero:

$$\dot{L} = 0. \quad (4.51)$$

O comportamento do torque como uma função do índice de frenagem é graficado na figura 4.6, para a qual usamos os seguintes valores de ordem de magnitude para as constantes:  $M = 1.4M_{\odot}$  e  $R = 8$  km. Estes valores correspondem próximos as estrelas de nêutrons estáveis como descrito por Hartle & Thorne 1968.

Observamos na figura 4.6 que, quando o índice de frenagem é igual a 1 o torque é igual a zero mas entre 0 e 1 este torque é positivo. E entre 1 até 3 este torque irá apresentar um valor de sinal negativo. Comentários sobre este resultado são tomados na seção 5.3.

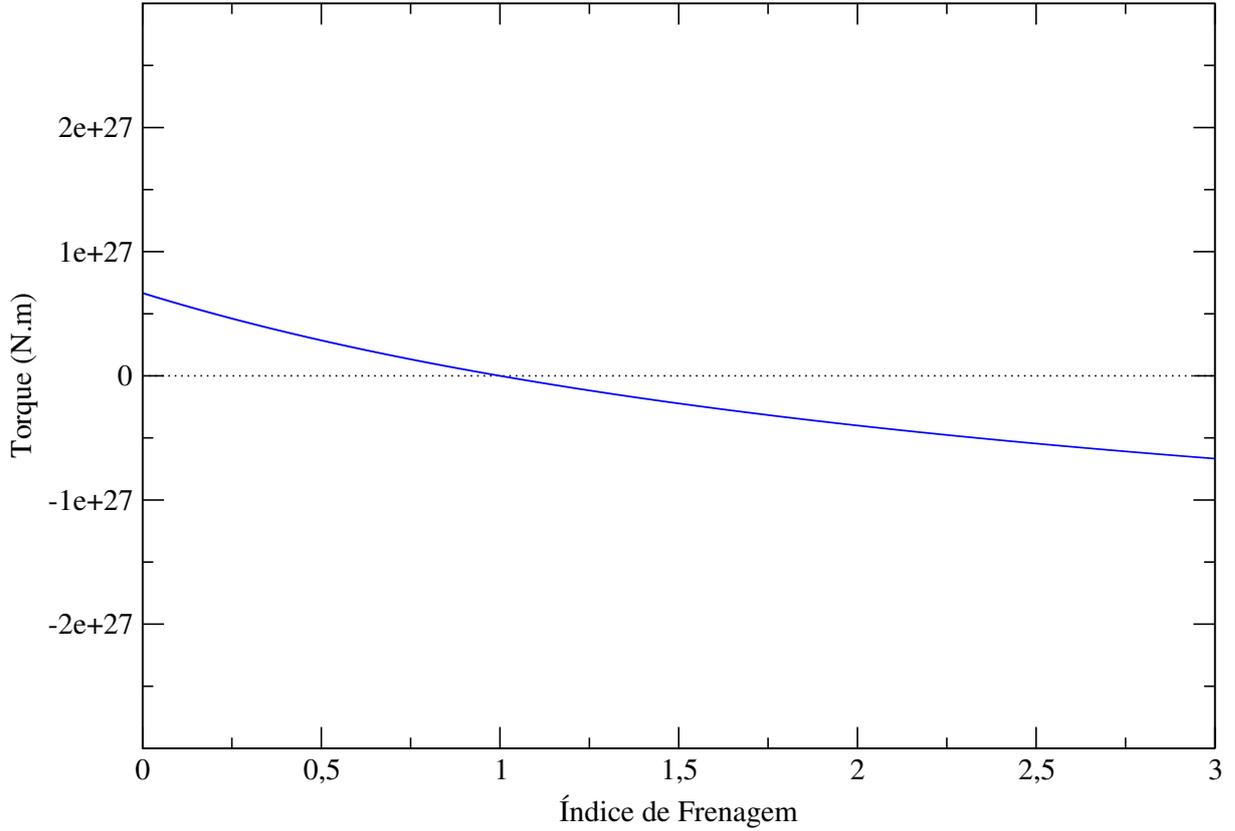


FIGURA 4.6 – Gráfico do torque ( $\dot{L}$ ) como função do índice de frenagem ( $n$ ) usando os dados do pulsar J1734-3333.

#### 4.4.1 Pressão do Conjunto de Vórtices

Podemos escrever a pressão dada pela energia livre por comprimento de linha para um conjunto de vórtices, isto é, a pressão da rede de vórtices do núcleo sobre a crosta da estrela de nêutrons, usando a equação de energia livre de 3.37, obtemos que a pressão é igual:

$$P = \frac{2\rho_s\pi R^2\Omega^2 + (\rho_s\kappa_0 - 2\kappa_0\rho_s \ln(1/(a_0\Omega)))\Omega}{8\pi R}. \quad (4.52)$$

A correção dada pelo segundo termo em 4.52 é pequena de modo que podemos reescrever esta equação, da seguinte forma:

$$P = \frac{\rho_s R \Omega^2}{4}. \quad (4.53)$$

Esta expressão simples que deduzimos para a pressão é útil quando for necessário comparar com resultados de modelos que consideram a matéria superfluida no interior de estrelas de nêutrons.

## 4.5 O Modelo de Frenagem do Deslocamento Interno do Superfluido Considerando a Evolução do Ângulo de Inclinação

Como mencionamos na seção 3.1 iremos também abordar a possibilidade de evolução do ângulo de inclinação ( $\alpha$ ) ao processo interno de deslocamento do superfluido. Nós iniciamos a partir da segunda derivada do módulo do vetor dipolo magnético com relação ao tempo, semelhantemente como na seção 4.1 consideramos que além do parâmetro de deslocamento da distribuição de massa no núcleo  $\dot{R}$  também levaremos em consideração que o ângulo entre o eixo do dipolo magnético e o eixo de rotação ( $\alpha$ ) varia com o tempo, mas que tal variação não é acelerada e pode ser descrita por uma expansão de Taylor a qual pode ser truncada até o seu segundo termo, de modo que obtemos:

$$|\ddot{\vec{m}}| = \frac{\dot{\alpha}^4 B_P^2 R^6 + (4 - 2 \sin^2(\alpha)) \dot{\alpha}^2 B_P^2 R^6 \Omega^2 + \sin^2(\alpha) B_P^2 R^6 \Omega^4}{4}. \quad (4.54)$$

Tendo encontrado o módulo da segunda derivada do dipolo magnético então podemos encontrar a variação da radiação magnética:

$$\dot{E}_{mr} = \frac{2}{3c^3} \left( \frac{\dot{\alpha}^4 B_P^2 R^6 + (4 - 2 \sin^2(\alpha)) \dot{\alpha}^2 B_P^2 R^6 \Omega^2 + \sin^2(\alpha) B_P^2 R^6 \Omega^4}{4} \right). \quad (4.55)$$

Dada a ordem de grandeza do primeiro e do segundo termo percebemos que as variações em alfa e raio não provocam mudanças na equação de irradiação da energia pelo dipolo magnético em 4.55, tornando a equação simplesmente como:

$$\dot{E}_{mr} = \frac{\sin^2(\alpha) B_P^2 R^6 \Omega^4}{6c^3}. \quad (4.56)$$

Agora consideraremos a seguinte expressão para a energia rotacional do Pulsar:

$$E_{rot} = \frac{I\Omega^2}{2}, \quad (4.57)$$

então a variação da energia rotacional de um pulsar com momento de inércia igual a  $\frac{2MR^2}{5}$ , sendo este o momento de inércia de uma esfera e, aceitável para os pulsares em questão, temos:

$$\dot{E}_{rot} = \frac{2R^2\Omega\dot{\Omega}M}{5} + \frac{2R\dot{R}\Omega^2M}{5}. \quad (4.58)$$

Assumindo -se a seguinte variação da energia de um pulsar:

$$\dot{E}_{rot} + \dot{E}_{mr} = 0, \quad (4.59)$$

então substituíremos as expressões em 4.56 e 4.58 em 4.59:

$$\frac{2R^2\Omega\dot{\Omega}M}{5} + \frac{2R\dot{R}\Omega^2M}{5} = -\frac{\sin^2(\alpha)B_P^2R^6\Omega^4}{6c^3}, \quad (4.60)$$

obteremos assim o seguinte decaimento da rotação:

$$\dot{\Omega} = -\frac{5\sin^2(\alpha)B_P^2R^5\Omega^3 + 12c^3\dot{R}\Omega M}{12c^3RM}. \quad (4.61)$$

De posse do decaimento 4.61 derivamos com relação ao tempo e multiplicaremos por  $\Omega/\dot{\Omega}^2$  para obtermos o índice de frenagem,  $n$ :

$$n = \frac{-15\sin(\alpha)B_P^2R^6\Omega^2(8\cos(\alpha)\dot{\alpha}c^3M - 5\sin^3(\alpha)B_P^2R^4\Omega^2)}{+120\sin^2(\alpha)B_P^2c^3R^5\dot{R}\Omega^2M + 25\sin^4(\alpha)B_P^4R^{10}\Omega^4}. \quad (4.62)$$

Se a variação temporal do raio e do ângulo forem ambas iguais a zero teremos como resultado nesta expressão o modelo canônico ( $n = 3$ ).

Para encontrarmos uma expressão mais simplificada para o índice de frenagem podemos isolar o quadrado do campo magnético na equação de conservação do sistema que adotamos para um pulsar (4.60) e substituí-la em 4.62, e assim teremos:

$$n = \frac{3\sin(\alpha)\dot{R}\Omega + 2\cos(\alpha)\dot{\alpha}R\Omega + 3\sin(\alpha)R\dot{\Omega}}{\sin(\alpha)R\dot{\Omega} - \sin(\alpha)\dot{R}\Omega}, \quad (4.63)$$

a qual podemos isolar a expressão para o parâmetro de deslocamento  $\dot{R}$ :

$$\dot{R} = \frac{(n-3)\sin(\alpha)R\dot{\Omega} - 2\cos(\alpha)\dot{\alpha}R\Omega}{(n+3)\sin(\alpha)\Omega}. \quad (4.64)$$

mas, também, podemos reorganizá-la da seguinte forma:

$$\dot{R} = \frac{n-3}{n+3}R\dot{\Omega} \left( \frac{1}{\Omega} \right) - \frac{1}{n+3} \frac{\dot{\alpha}}{\tan(\alpha)} (2R). \quad (4.65)$$

Se não houver superfluido no interior dos pulsares ( $\dot{R} = 0$ ), então:

$$\dot{R} = 0 \Rightarrow -\frac{n-3}{n+3}R\dot{\Omega} \left( \frac{1}{\Omega} \right) = -\frac{1}{n+3} \frac{\dot{\alpha}}{\tan(\alpha)} (2R). \quad (4.66)$$

A equação 4.65 resulta em (ALLEN; HORVATH, 1997; HORVATH, 2019):

$$\frac{\dot{\alpha}}{\tan(\alpha)} = \frac{n-3}{2} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}. \quad (4.67)$$

## 5 Discussão acerca dos Resultados

Nós usamos a equação 4.25 para encontrarmos os valores de  $\dot{R}$  representados na tabela 4.1, a qual mostra que para esta amostra de pulsares a condição de 4.23 não é completamente preenchida. Os valores de campo magnético dados pelo modelo canônico tem a mesma ordem de magnitude dos valores obtidos com nosso modelo a partir da equação 4.22, como mostrado na tabela 4.1. Mesmo assim, valores canônicos de campo magnético não devem ser usados nas equações 4.18 e 4.19, pois eles produziriam resultados canônicos. A pequena diferença entre os valores de campo magnético nos dois modelos é essencial para os índices de frenagem obtidos observacionalmente.

Por outro lado, como consequência da magnitude dos termos contendo  $\dot{R}$ , o campo magnético na equação 4.22, assim como o momento de dipolo magnético na equação 4.15 (a qual varia de acordo com a pequena fração  $\dot{R}/R$ ), tem desprezíveis derivadas temporais em nosso modelo para propósitos práticos, como ambos no modelo canônico. Em outras palavras, nosso modelo, apesar da existência de um núcleo dinâmico que influencia o índice de frenagem, tanto o campo magnético quanto o momento do dipolo magnético se comportam no tempo, como fazem no modelo canônico.

É indicado a partir da equação 4.26 que o pulsar Vela (B0833-45) assim como o J1734-3333 são os mais velhos de nossa amostra (ver tabela 4.1). A idade do pulsar é usada sobre a hipótese que pulsares são nascidos com uma velocidade angular elevada a qual decai no tempo ( $\dot{\Omega} < 0$ ), resultando em  $\tau > 0$ .

De acordo com o nosso modelo e assumindo que todos os pulsares da tabela 2.1 tiveram  $R = 10$  km desde que nasceram, depois de transcorridos os seus tempos característicos, todos teriam momentos de inércia de 60 a 90  $M_{\odot} \text{ km}^2$  (ver tabela 4.1). Estes são valores dentro de intervalos obtidos em modelos teóricos (LATTIMER; PRAKASH, 2016). O aumento no momento de inércia de B1509-58 durante seu tempo característico em relação ao momento de inércia ao nascer ( $I_0 = 56 M_{\odot} \text{ km}^2$ ) é o menor da amostra e ainda é relevante para a física do índice de frenagem deste modelo.

A expressão 4.28 mostra que, para uma dada dinâmica do núcleo (quantificada por um  $\dot{R}$  fixo), pulsares velhos (onde “velho” refere-se a altos valores de  $\tau_c$ ) são esperados ter baixos índices de frenagem. Este é realmente o caso mostrado na figura 4.1, onde a curva

no topo corresponde aos pulsares mais jovens desta amostragem, enquanto que a curva a baixo corresponde aos mais velhos.

## 5.1 Sobre a Força Centrífuga

Em relação à força centrífuga,  $F_{cf} = I\Omega/R$ , diminui no tempo no modelo canônico, porque o mesmo acontece com  $\Omega$ . Agora mostramos que, em nosso modelo, também é esperado que diminua, apesar do crescente momento de inércia. De fato, considerando um parâmetro de deslocamento variável no tempo dado pela equação 4.4 a derivada temporal desta força é

$$\dot{F}_{cf} = \frac{I\Omega^2}{R} \left( 2\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} + \frac{\dot{I}}{I} \right) = \frac{2I\Omega^2}{R^2} \left( \frac{R\dot{\Omega}}{\Omega} + \dot{R} \right). \quad (5.1)$$

Esta derivada é negativa em nosso modelo porque o primeiro termo dentro do parênteses é negativo e, em módulo, é maior do que o segundo termo (ver: tabela 4.1). Em outras palavras, fisicamente a força centrífuga decai devido ao decaimento na frequência angular do pulsares estar maior (relativo à frequência angular envolvida) do que o relativo aumento simultâneo dado pelo parâmetro de deslocamento.

## 5.2 Idade de Pulsares a partir do Parâmetro de Deslocamento e Índice de Frenagem

A formação e evolução de pulsares ainda não são facilmente entendidas. Uma poderosa restrição acerca de tais processos é fornecida por uma independente estimativa de idade. Em casos onde tanto o pulsar como a sua remanescente de supernova podem ser identificados, uma idade estimada que é independente de distância e efeitos de inclinação são simplesmente (MIGLIAZZO *et al.*, 2002; KRAMER *et al.*, 2003):

$$t_p = \frac{\Theta}{\mu}, \quad (5.2)$$

onde  $\Theta$  é o ângulo de separação entre o pulsar e o seu possível local de nascimento,  $\mu$  é o movimento próprio. Esta idade é geralmente comparada à idade do modelo canônico. Como desenvolvido na seção 4.2 encontramos na equação 4.38 a relação entre idade do pulsar, parâmetro de deslocamento, índice de frenagem e a velocidade de rotação inicial do pulsar em seu nascimento, sendo que esta última podemos estimar mesmo que arbitrariamente (para isto ver o trabalho de Espinoza *et al.* 2016).

Podemos ainda tomar como exercício o cálculo de  $\Omega_0$  para o único pulsar que simulta-

neamente tem seu nascimento e índice de frenagem medidos (LYNE *et al.*, 2015), o pulsar B0531+21. Então, este pulsar da Nebulosa de Caranguejo teria frequência de rotação igual a 74,6 Hz ( $P = 13,4$  ms), enquanto que no modelo canônico este valor é de 58 Hz ( $P = 17,2$  ms).

### 5.2.1 Da Comparação entre o Modelo de Desacoplamento do Superfluido e o Modelo que Mensura a Velocidade dos Deslocamentos de Massa Internos na Estrela

Da comparação com o modelo de Ho & Andersson (2012) verificamos que há diferença entre os modelos, observada na figura 4.4. A diferença percentual entre as retas para  $n = 1$  é de 0% entre os modelos. No entanto, para  $n = 2$  a diferença percentual entre a inclinação da reta azul (nosso modelo) e da reta representada por triângulos (modelo de Ho & Andersson) é de 25%. E, para  $n = 2,9$ , a diferença percentual entre a inclinação da reta violeta púrpura dada pelo nosso modelo (na equação 4.40) em relação a reta traço-ponto (da equação 4.39) é de 47,5%, o que parece ser devido à proximidade com a condição limitante de ambos os modelos ( $n = 3$ ).

## 5.3 Comentários sobre Momento Angular no Pulsar J1734-3333

Estando a crosta em decaimento rotacional e sob a ação de um torque magnético, de modo que ocorrerá uma rotação diferencial (mesmo que rapidamente transmitida para o núcleo, de acordo com a seção 4.1) entre a crosta e líquido no núcleo, a componente que apresenta maior rotação funciona como reservatório de momento angular.

O torque igual a zero pode ser justificável pela formação de vórtices que escoam em direção à crosta, responsáveis pela transferência de momento angular do superfluido de nêutrons para a crosta. Além disso, tendo o núcleo elevada quantidade de momento angular em relação à crosta a quantidade de radiação não é suficiente para que haja variação significativa no momento angular do pulsar J1734-3333, pois não podemos esquecer que a formação das linhas de vórtices acontece devido à rotação do superfluido de nêutrons. Estando a crosta da estrela em decaimento rotacional eles se movem radialmente afastando-se do eixo de rotação e, com isso, a transferência de momento angular dos nêutrons superfluidos através dos vórtices evita que haja alteração de momento angular na crosta e que conduza a um torque apreciável sob esta.

## 5.4 Pressão do Conjunto de Vórtices

Um dos resultados deste trabalho foi o cálculo da pressão da rede de vórtices sobre a crosta das estrelas de nêutrons com núcleos superfluidos (seção 4.4.1) que pode ser comparado a modelos de massa-raio para estrelas de nêutrons com núcleos superfluidos (BAYM *et al.*, 1971). No trabalho de Baym (1971) há um comparativo com outros modelos com matéria superfluida; por enquanto não tomamos como necessária a escolha de um modelo em detrimento de outro. Entretanto se considerado o modelo destes autores não é provável que a pressão da rede de vórtices sob a crosta promova mudanças no raio global da estrela, todavia salientamos que dependendo da especificidade do modelo essa condição pode mudar.

## 6 Conclusão

“Eu gostei muito do trabalho.”

(M. M. B. Malheiro de Oliveira, 07/08/2019)

Neste trabalho investigou-se a influência, sobre a velocidade angular de uma estrela de nêutrons do tipo pulsar, de um parâmetro de deslocamento que contém fatores físicos que podem modificar o momento de inércia. Pulsares são normalmente modelados como irradiando a sua energia rotacional sob a forma de ondas eletromagnéticas através do que chamamos modelo canônico, atualmente o mais em voga e que desconsidera a existência de uma variação no momento de inércia. Analisamos a premissa e concluímos que, o que parece ocorrer é que pode existir de fato um movimento de vórtices no núcleo estelar resultando assim em modificações na rotação de pulsares.

Tal efeito costuma ser desconsiderado por não gerar efeitos perceptíveis. Isso contrasta com a existência de *glitches* em pulsares, que são efeitos súbitos, sob conservação do momento angular, que provocam mudanças nas rotações devido a variação do raio. Mostramos que o nosso modelo é condizente com o modelo de *glitches*, pois as variações de momento de inércia tomadas pelo parâmetro de deslocamento não implicam modificações visíveis a curto prazo, mas modificações a longo prazo. Conseqüentemente, o trabalho apresentado aqui não conflita com resultados observáveis de efeitos de reajuste de crosta.

Com os resultados obtidos e o refinamento do modelo proposto neste trabalho pode-se ainda encontrar valores mais precisos de campo magnético de pulsares, ainda que a correção seja pequena.

Outra consequência direta de nossa formulação é a possibilidade de estimativa tanto de um índice de frenagem, quanto da segunda derivada da velocidade angular de pulsares para os quais elas não tenham sido obtidas observacionalmente.

Uma extensão alcançada neste trabalho é a investigação do processo físico interno à estrela que é responsável pelo parâmetro de deslocamento. Extensões naturais deste trabalho poderiam ser: análise mais detalhada da família de pulsares para a qual o valor médio obtido para a variação do parâmetro de deslocamento se aplica; verificação da aplicabilidade do modelo para magnetares ou pulsares com campos magnéticos de valores

---

distintos ao considerado típico aqui; análise do modelo em função de variações de massa dos pulsares em torno do valor típico que foi adotado neste estudo. Além disso, com novos cálculos apresentados para a idade de pulsares compatíveis com efeitos da dinâmica de superfluido, no futuro, devemos relacionar esta idade a alguns possíveis candidatos de sistemas de pulsares de rádio energizados, cercados ou não pela nebulosa com vento, e próximos a remanescente de supernovas às quais são associados, desde que possamos ter a separação angular entre este e o seu possível local de nascimento assim como o seu movimento próprio.

# Referências

AASI, J.; ABADIE, J.; ABBOTT, B.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T.; ABERNATHY, M.; ACCADIA, T.; ACERNESE, F.; ADAMS, C.; ADAMS, T. *et al.* Gravitational waves from known pulsars: results from the initial detector era. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 785, n. 2, p. 119, 2014.

ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T.; ABERNATHY, M.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADAMS, T.; ADDESSO, P.; ADHIKARI, R. *et al.* Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. **Physical Review Letters**, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.

ABRIKOSOV, A. A. Magnetic properties of superconductors of the second group. **Sov. Phys.-JETP (Engl. Transl.);(United States)**, v. 5, n. 6, 1957.

AKMAL, A.; PANDHARIPANDE, V. R. Spin-isospin structure and pion condensation in nucleon matter. **Physical Review C**, APS, v. 56, n. 4, p. 2261, 1997.

ALLEN, M.; HORVATH, J. Glitches, torque evolution and the dynamics of young pulsars. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 287, n. 3, p. 615–621, 1997.

ALPAR, M.; PINES, D.; ANDERSON, P.; SHAHAM, J. Vortex creep and the internal temperature of neutron stars. i-general theory. **The Astrophysical Journal**, v. 276, p. 325–334, 1984.

ALPAR, M. A.; PINES, D. Vortex creep dynamics: theory and observations. In: **Timing Neutron Stars**. [S.l.]: Springer, 1989. p. 441–455.

AMALDI, E. From the discovery of the neutron to the discovery of nuclear fission. **Physics Reports**, Elsevier, v. 111, n. 1-4, p. 1–331, 1984.

ANDERSON, P.; ITOH, N. Pulsar glitches and restlessness as a hard superfluidity phenomenon. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 256, n. 5512, p. 25, 1975.

ANTONOPOULOU, D.; ESPINOZA, C. M.; KUIPER, L.; ANDERSSON, N. Pulsar spin-down: the glitch-dominated rotation of psr j0537- 6910. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 473, n. 2, p. 1644–1655, 2017.

ANTONOPOULOU, D.; WELTEVREDE, P.; ESPINOZA, C.; WATTS, A.; JOHNSTON, S.; SHANNON, R.; KERR, M. The unusual glitch recoveries of the

- high-magnetic-field pulsar j1119- 6127. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 447, n. 4, p. 3924–3935, 2015.
- ARAUJO, J. C. D.; COELHO, J. G.; COSTA, C. A. Gravitational wave emission by the high braking index pulsar psr j1640-4631. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2016, n. 07, p. 023, 2016.
- ARAUJO, J. C. D.; COELHO, J. G.; COSTA, C. A. Gravitational waves from pulsars and their braking indices: The role of a time dependent magnetic ellipticity. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 831, n. 1, p. 35, 2016.
- ARAUJO, J. C. de; COELHO, J. G.; COSTA, C. A. Gravitational waves from pulsars with measured braking index. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 76, n. 9, p. 481, 2016.
- ARCHIBALD, R.; GOTTHELF, E.; FERDMAN, R.; KASPI, V.; GUILLOT, S.; HARRISON, F.; KEANE, E.; PIVOVAROFF, M.; STERN, D.; TENDULKAR, S. *et al.* A high braking index for a pulsar. **The Astrophysical Journal Letters**, IOP Publishing, v. 819, n. 1, p. L16, 2016.
- ARCHIBALD, R.; KASPI, V.; BEARDMORE, A.; GEHRELS, N.; KENNEA, J. On the braking index of the unusual high-b rotation-powered pulsar psr j1846–0258. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 810, n. 1, p. 67, 2015.
- BAADE, W.; ZWICKY, F. Remarks on super-novae and cosmic rays. **Physical Review**, APS, v. 46, n. 1, p. 76, 1934.
- BABCOCK, H.; COWLING, T. General magnetic fields in the sun and stars (report on progress of astronomy). **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 113, p. 357–381, 1953.
- BAYM, G.; PETHICK, C.; PINES, D. Superfluidity in neutron stars. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 224, n. 5220, p. 673–674, 1969.
- BAYM, G.; PETHICK, C.; SUTHERLAND, P. The ground state of matter at high densities: equation of state and stellar models. **The Astrophysical Journal**, v. 170, p. 299, 1971.
- BLAZEK, J.; GAENSLER, B.; CHATTERJEE, S.; SWALUW, E. V. D.; CAMILO, F.; STAPPERS, B. The duck redux: An improved proper-motion upper limit for the pulsar b1757–24 near the supernova remnant g5. 4-1.2. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 652, n. 2, p. 1523, 2006.
- CHADWICK, J. Possible existence of a neutron. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 129, n. 3252, p. 312, 1932.
- CHARBONNEAU, J. **Vortex Structures in Neutron Stars**. Tese (Doutorado) — The University Of British Columbia, 2007.
- CHENG, K. Could glitches inducing magnetospheric fluctuations produce low-frequency pulsar timing noise? **The Astrophysical Journal**, v. 321, p. 805–812, 1987.

- CLARK, C.; PLETSCH, H.; WU, J.; GUILLEMOT, L.; CAMILO, F.; JOHNSON, T.; KERR, M.; ALLEN, B.; AULBERT, C.; BEER, C. *et al.* The braking index of a radio-quiet gamma-ray pulsar. **The Astrophysical Journal Letters**, IOP Publishing, v. 832, n. 1, p. L15, 2016.
- COELHO, J. G.; PEREIRA, J. P.; ARAUJO, J. C. de. The influence of quantum vacuum friction on pulsars. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 823, n. 2, p. 97, 2016.
- COLE, T. Stability of pulsar periods. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 221, n. 5175, p. 29, 1969.
- CORDES, J.; DOWNS, G. Jpl pulsar timing observations. iii-pulsar rotation fluctuations. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, v. 59, p. 343–382, 1985.
- CORDES, J.; HELFAND, D. Pulsar timing. iii-timing noise of 50 pulsars. **The Astrophysical Journal**, v. 239, p. 640–650, 1980.
- COWLING, T. The oscillation theory of magnetic variable stars. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press Oxford, UK, v. 112, n. 5, p. 527–539, 1952.
- DAVIES, J.; HUNT, G.; SMITH, F. Changing periodicities in the pulsars. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 221, n. 5175, p. 27, 1969.
- DEUTSCH, A. J. The electromagnetic field of an idealized star in rigid rotation in vacuo. In: **Annales d’Astrophysique**. [S.l.: s.n.], 1955. v. 18, p. 1.
- ENGVIK, L.; HJORTH-JENSEN, M.; OSNES, E.; BAO, G.; ØSTGAARD, E. Asymmetric nuclear matter and neutron star properties. **Physical Review Letters**, APS, v. 73, n. 20, p. 2650, 1994.
- ESPINOZA, C.; LYNE, A.; STAPPERS, B. New long-term braking index measurements for glitching pulsars using a glitch-template method. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 466, n. 1, p. 147–162, 2016.
- ESPINOZA, C. M.; LYNE, A.; KRAMER, M.; MANCHESTER, R. N.; KASPI, V. The braking index of psr j1734–3333 and the magnetar population. **The Astrophysical Journal Letters**, IOP Publishing, v. 741, n. 1, p. L13, 2011.
- ESPINOZA, C. M.; LYNE, A. G.; STAPPERS, B. W.; KRAMER, M. A study of 315 glitches in the rotation of 102 pulsars. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 414, n. 2, p. 1679–1704, 2011.
- FERDMAN, R. D.; ARCHIBALD, R. F.; KASPI, V. M. Long-term timing and emission behavior of the young crab-like pulsar psr b0540–69. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 812, n. 2, p. 95, 2015.
- FEYNMAN, R. Statistical mechanics: a set of lectures (advanced book classics). p. 354, 1998.

- FEYNMAN, R. P. Chapter ii application of quantum mechanics to liquid helium. **Progress in Low Temperature Physics**, Elsevier, v. 1, p. 17–53, 1955.
- FILHO, K. d. S. O.; SARAIVA, M. d. F. O. **Astronomia e Astrofísica**. Porto Alegre: Editora da Universidade/UFRGS, 2000. 585 p.
- FOSTER, R.; LYNE, A.; SHEMAR, S.; BACKER, D. A six year timing solution for psr b1951+ 32. **The Astronomical Journal**, v. 108, p. 175–178, 1994.
- FRAIL, D.; KASSIM, N.; WEILER, K. Radio imaging of two supernova remnants containing pulsars. **The Astronomical Journal**, v. 107, p. 1120–1127, 1994.
- FRANZON, B. C. d. S. **Gluons em estrelas de nêutrons**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2012.
- FRIEDMAN, B.; PANDHARIPANDE, V. Hot and cold, nuclear and neutron matter. **Nuclear Physics A**, Elsevier, v. 361, n. 2, p. 502–520, 1981.
- GAENSLER, B.; FRAIL, D. A large age for the pulsar b1757-24 from an upper limit on its proper motion. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 406, n. 6792, p. 158, 2000.
- GHOSH, P. **Rotation and accretion powered pulsars**. [S.l.]: World Scientific, 2007.
- GINZBURG, V.; KIRZHNITS, D. On the superconductivity of electrons at the surface levels. **Zh. Eksp. Teor. Fiz**, v. 46, p. 397, 1964.
- GINZBURG, V. L.; LANDAU, L. D. On the theory of superconductivity. **Zh. Eksp. Teor. Fiz**, Springer, v. 20, n. 1064-1082, p. 35, 1950.
- GLENDENNING, N.; MOSZKOWSKI, S. Reconciliation of neutron-star masses and binding of the  $\lambda$  in hypernuclei. **Physical Review Letters**, APS, v. 67, n. 18, p. 2414, 1991.
- GLENDENNING, N. K. **Compact stars: Nuclear physics, particle physics, and general relativity**. 2. ed. New York: Springer, 2000. 468 p.
- GLENDENNING, N. K.; SCHAFFNER-BIELICH, J. First order kaon condensate. **Physical Review C**, APS, v. 60, n. 2, p. 025803, 1999.
- GOBBI, M.; DIAS, N. L.; MACARENHAS, F.; VALENTINE, E. **Introdução à Mecânica dos Fluidos e aos Fenômenos de Transporte**. [S.l.]: Editora da UFPR, Curitiba, 2006.
- GOLD, T. Rotating neutron stars as the origin of the pulsating radio sources. **Nature**, v. 218, p. 731–732, 1968.
- GOLDREICH, P. Neutron star crusts and alignment of magnetic axes in pulsars. **The Astrophysical Journal**, v. 160, p. L11, 1970.
- GOR'KOV, L. P. Microscopic derivation of the ginzburg-landau equations in the theory of superconductivity. **Sov. Phys. JETP**, v. 9, n. 6, p. 1364–1367, 1959.
- GREISEN, E. W. Aips, the vla, and the vlba. In: **Information Handling in Astronomy-Historical Vistas**. [S.l.]: Springer, 2003. p. 109–125.

- GRIFFITHS, D. J.; COLLEGE, R. **Introduction to electrodynamics**. 3. ed. New Jersey: Prentice hall Upper Saddle River, 1999. 576 p.
- GUNN, J. E.; OSTRIKER, J. P. Magnetic dipole radiation from pulsars. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 221, n. 5179, p. 454, 1969.
- HALL, H. The rotation of liquid helium ii. **Advances in Physics**, Taylor & Francis, v. 9, n. 33, p. 89–146, 1960.
- HARDING, A. K.; CONTOPOULOS, I.; KAZANAS, D. Magnetar spin-down. **The Astrophysical Journal Letters**, IOP Publishing, v. 525, n. 2, p. L125, 1999.
- HARTLE, J. B.; THORNE, K. S. Slowly rotating relativistic stars. ii. models for neutron stars and supermassive stars. **The Astrophysical Journal**, v. 153, p. 807, 1968.
- HELLINGS, R.; DOWNS, G. Upper limits on the isotropic gravitational radiation background from pulsar timing analysis. **The Astrophysical Journal**, v. 265, p. L39–L42, 1983.
- HEWISH, A.; BELL, S. J.; PILKINGTON, J.; SCOTT, P.; COLLINS, R. Observation of a rapidly pulsating radio source. **Nature**, v. 217, n. 5130, p. 709–713, 1968.
- HINATA, S.; JACKSON, A. On the axisymmetric pulsar atmosphere. **The Astrophysical Journal**, v. 192, p. 703–711, 1974.
- HO, W. C.; ANDERSSON, N. Rotational evolution of young pulsars due to superfluid decoupling. **Nature Physics**, Nature Publishing Group, v. 8, n. 11, p. 787–789, 2012.
- HOBBS, G.; LYNE, A.; KRAMER, M. An analysis of the timing irregularities for 366 pulsars. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 402, n. 2, p. 1027–1048, 2010.
- HORVATH, J. Braking index jumps in young pulsars. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 484, n. 2, p. 1983–1987, 2019.
- JACKSON, J. D. **Eletrodinâmica Clássica**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1983. 587 p.
- JENET, F. A.; HOBBS, G. B.; LEE, K.; MANCHESTER, R. N. Detecting the stochastic gravitational wave background using pulsar timing. **The Astrophysical Journal Letters**, IOP Publishing, v. 625, n. 2, p. L123, 2005.
- JR, C. E. R.; RUFFINI, R. Maximum mass of a neutron star. **Physical Review Letters**, APS, v. 32, n. 6, p. 324, 1974.
- KLEINERT, H. **Gauge Fields in Condensed Matter: Vol. 1: Superflow and Vortex Lines (Disorder Fields, Phase Transitions) Vol. 2: Stresses and Defects (Differential Geometry, Crystal Melting)**. [S.l.]: World Scientific, 1989.
- KOU, F.; TONG, H. Rotational evolution of the crab pulsar in the wind braking model. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 450, n. 2, p. 1990–1998, 2015.

KRAMER, M.; LYNE, A.; HOBBS, G.; LÖHMER, O.; CARR, P.; JORDAN, C.; WOLSZCZAN, A. The proper motion, age, and initial spin period of psr j0538+ 2817 in s147. **The Astrophysical Journal Letters**, IOP Publishing, v. 593, n. 1, p. L31, 2003.

KRAMER, M.; LYNE, A. G.; O'BRIEN, J. T.; JORDAN, C. A.; LORIMER, D. R. A periodically active pulsar giving insight into magnetospheric physics. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 312, n. 5773, p. 549–551, 2006.

KULKARNI, S. R.; CLIFTON, T. C.; BACKER, D. C.; FOSTER, R. S.; FRUCHTER, A. S.; TAYLOR, J. H. A fast pulsar in radio nebula ctb80. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 331, n. 6151, p. 50, 1988.

LADISLAU, S. **Análises dos mecanismos de perda de energia e os índices de freamento em pulsares**. Dissertação (Mestrado) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2019.

LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. **Course of theoretical physics. Vol. 9: Statistical physics**. [S.l.]: Pergamon Press, Oxford, 1980. 387 p.

LATTIMER, J. M.; PRAKASH, M. What a two solar mass neutron star really means. In: **From Nuclei To Stars: Festschrift in Honor of Gerald E Brown**. [S.l.]: World Scientific, 2011. p. 275–304.

LATTIMER, J. M.; PRAKASH, M. The equation of state of hot, dense matter and neutron stars. **Physics Reports**, Elsevier, v. 621, p. 127–164, 2016.

LINK, B.; EPSTEIN, R. I.; LATTIMER, J. M. Pulsar constraints on neutron star structure and equation of state. **Physical Review Letters**, APS, v. 83, n. 17, p. 3362, 1999.

LIVINGSTONE, M. A.; KASPI, V. M. Long-term x-ray monitoring of the young pulsar psr b1509–58. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 742, n. 1, p. 31, 2011.

LIVINGSTONE, M. A.; KASPI, V. M.; GAVRIIL, F. P.; MANCHESTER, R. N.; GOTTHELF, E.; KUIPER, L. New phase-coherent measurements of pulsar braking indices. **Astrophysics and Space Science**, Springer, v. 308, n. 1-4, p. 317–323, 2007.

LIVINGSTONE, M. A.; NG, C. Y.; KASPI, V. M.; GAVRIIL, F. P.; GOTTHELF, E. V. Post-outburst observations of the magnetically active pulsar j1846–0258. a new braking index, increased timing noise, and radiative recovery. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 730, n. 1, p. 66, 2011.

LONDON, F.; LONDON, H. The electromagnetic equations of the supraconductor. In: **THE ROYAL SOCIETY. Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**. [S.l.], 1935. v. 149, n. 866, p. 71–88.

LORIMER, D. R. Binary and millisecond pulsars. **Living Rev. Relativity**, v. 11, n. 8, 2008.

LORIMER, D. R.; KRAMER, M. **Handbook of pulsar astronomy**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005.

- LOUNASMAA, O. V.; THUNEBERG, E. Vortices in rotating superfluid  $^3\text{He}$ . **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Acad Sciences, v. 96, n. 14, p. 7760–7767, 1999.
- LYNE, A. Glitches and timing noise. In: **Pulsar Timing, General Relativity and the Internal Structure of Neutron Stars**. [S.l.: s.n.], 1999. v. 1, p. 141.
- LYNE, A.; GRAHAM-SMITH, F.; WELTEVREDE, P.; JORDAN, C.; STAPPERS, B.; BASSA, C.; KRAMER, M. Evolution of the magnetic field structure of the crab pulsar. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 342, n. 6158, p. 598–601, 2013.
- LYNE, A.; HOBBS, G.; KRAMER, M.; STAIRS, I.; STAPPERS, B. Switched magnetospheric regulation of pulsar spin-down. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 329, n. 5990, p. 408–412, 2010.
- LYNE, A.; JORDAN, C.; GRAHAM-SMITH, F.; ESPINOZA, C.; STAPPERS, B.; WELTEVREDE, P. 45 years of rotation of the crab pulsar. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 446, n. 1, p. 857–864, 2015.
- LYNE, A. G.; BURGAY, M.; KRAMER, M.; POSSENTI, A.; MANCHESTER, R.; CAMILO, F.; MCLAUGHLIN, M.; LORIMER, D.; D'AMICO, N.; JOSHI, B. *et al.* A double-pulsar system: a rare laboratory for relativistic gravity and plasma physics. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 303, n. 5661, p. 1153–1157, 2004.
- MACHADO, K. Teoria do eletromagnetismo vol. 2. **Ponta Grossa. Editora**, 2002.
- MAGALHAES, N. S.; MIRANDA, T. A.; FRAJUCA, C. Predicting ranges for pulsars' braking indices. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 2012, n. 755, p. 54, 2012.
- MAGALHÃES, N. S.; OKADA, A. S.; FRAJUCA, C. Braking indices of pulsars obtained in the presence of an effective force. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 461, n. 4, p. 3993–3996, 2016.
- MANCHESTER, R.; DURDIN, J.; NEWTON, L. A second measurement of a pulsar braking index. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 313, n. 6001, p. 374, 1985.
- MANCHESTER, R.; HOBBS, G.; TEOH, A.; HOBBS, M. The australia telescope national facility pulsar catalogue. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 129, n. 4, p. 1993, 2005.
- MANCHESTER, R. N.; TAYLOR, J. H. **Pulsars**. [S.l.]: WH Freeman and Company, San Francisco, 1977.
- MIDDLEDITCH, J.; MARSHALL, F. E.; WANG, Q. D.; GOTTHELF, E. V.; ZHANG, W. Predicting the starquakes in psr j0537–6910. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 652, n. 2, p. 1531, 2006.
- MIGDAL, A. Superfluidity and the moments of inertia of nuclei. **Sov. Phys. JETP**, v. 10, p. 176–185, 1960.

- MIGLIAZZO, J.; GAENSLER, B.; BACKER, D.; STAPPERS, B.; SWALUW, E. V. D.; STROM, R. Proper-motion measurements of pulsar b1951+ 32 in the supernova remnant ctb 80. **The Astrophysical Journal Letters**, IOP Publishing, v. 567, n. 2, p. L141, 2002.
- MUELLER, H.; SEROT, B. D. Relativistic mean-field theory and the high-density nuclear equation of state. **Nuclear Physics A**, Elsevier, v. 606, n. 3-4, p. 508–537, 1996.
- MÜTHER, H.; PRAKASH, M.; AINSWORTH, T. The nuclear symmetry energy in relativistic brueckner-hartree-fock calculations. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 199, n. 4, p. 469–474, 1987.
- NOVELLO, N.; NELSON, P. N.; BERGLIAFFA, S. E. P. **Programa Mínimo de Cosmologia**. Rio de Janeiro: Editora Jauá, 2010. 568 p.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica-VOL. 2, Fluidos; Oscilações e Ondas; Calor**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2002. 314 p.
- OLIVEIRA, H.; MAGALHAES, N.; JR, R. M.; CARVALHO, G.; FRAJUCA, C. Relating braking indices of young pulsars to the dynamics of superfluid cores. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2018, n. 11, p. 025, 2018.
- ONSAGER, L. Statistical hydrodynamics. **Il Nuovo Cimento (1943-1954)**, Springer, v. 6, p. 279–287, 1949.
- OPPENHEIMER, J. R.; VOLKOFF, G. M. On massive neutron cores. **Physical Review**, APS, v. 55, n. 4, p. 374, 1939.
- PACINI, F. Energy emission from a neutron star. **Nature**, v. 216, p. 567–568, 1967.
- PANDHARIPANDE, V. Hyperonic matter. **Nuclear Physics A**, Elsevier, v. 178, n. 1, p. 123–144, 1971.
- PANDHARIPANDE, V.; SMITH, R. A model neutron solid with  $\pi^0$  condensate. **Nuclear Physics A**, Elsevier, v. 237, n. 3, p. 507–532, 1975.
- PHILIPPOV, A.; TCHEKHOVSKOY, A.; LI, J. G. Time evolution of pulsar obliquity angle from 3d simulations of magnetospheres. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 441, n. 3, p. 1879–1887, 2014.
- PRAKASH, M.; AINSWORTH, T. Sigma model calculations of neutron-rich nuclear matter. **Physical Review C**, APS, v. 36, n. 1, p. 346, 1987.
- PRAKASH, M.; AINSWORTH, T.; LATTIMER, J. Equation of state and the maximum mass of neutron stars. **Physical Review Letters**, APS, v. 61, n. 22, p. 2518, 1988.
- PRAKASH, M.; COOKE, J.; LATTIMER, J. Quark-hadron phase transition in protoneutron stars. **Physical Review D**, APS, v. 52, n. 2, p. 661, 1995.
- RADHAKRISHNAN, V.; MANCHESTER, R. Detection of a change of state in the pulsar psr 0833-45. **Nature**, Springer, v. 222, n. 5190, p. 228–229, 1969.

- RAY, P. S.; KERR, M.; PARENT, D.; ABDO, A.; GUILLEMOT, L.; RANSOM, S.; REA, N.; WOLFF, M.; MAKEEV, A.; ROBERTS, M. *et al.* Precise  $\gamma$ -ray timing and radio observations of 17 fermi  $\gamma$ -ray pulsars. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, IOP Publishing, v. 194, n. 2, p. 17, 2011.
- RICHARDS, D.; PETTENGILL, G.; III, C. C.; RANKIN, J. Quasi-sinusoidal oscillation in arrival times of pulses from np 0532. **The Astrophysical Journal**, v. 160, p. L1, 1970.
- ROY, J.; GUPTA, Y.; LEWANDOWSKI, W. Observations of four glitches in the young pulsar j1833- 1034 and study of its glitch activity. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Blackwell Science Ltd Oxford, UK, v. 424, n. 3, p. 2213–2221, 2012.
- SAULS, J. Superfluidity in the interiors of neutron stars. In: OGELMAN, H. AND VAN DEN HEUVEL, EJP, KLUWER, DORDRECHT. **Timing neutron stars**. [S.l.], 1989. v. 1, p. 457.
- SHANNON, R. M.; CORDES, J. M. Assessing the role of spin noise in the precision timing of millisecond pulsars. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 725, n. 2, p. 1607, 2010.
- SHAPIRO, S. L.; TEUKOLSKY, S. A. **Black holes, white dwarfs and neutron stars: the physics of compact objects**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.
- SRINIVASAN, G.; BHATTACHARYA, D.; MUSLIMOV, A.; TSYGAN, A. A novel mechanism for the decay of neutron star magnetic fields. **Current Science**, Current Science Association, v. 59, p. 31–38, 1990.
- STAIRS, I.; LYNE, A.; SHEMAR, S. Evidence for free precession in a pulsar. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 406, n. 6795, p. 484, 2000.
- STROM, R. G. Pulsar-like emission from the supernova remnant ctb 80. **The Astrophysical Journal**, v. 319, p. L103–L107, 1987.
- TONG, H.; KOU, F. Possible evolution of the pulsar braking index from larger than three to about one. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 837, n. 2, p. 117, 2017.
- VIVEKANAND, M. The 1969 glitch in the crab pulsar revisited. **arXiv preprint arXiv:1710.05293**, 2017.
- WELTEVREDE, P.; JOHNSTON, S.; ESPINOZA, C. M. The glitch-induced identity changes of psr j1119- 6127. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 411, n. 3, p. 1917–1934, 2011.
- WIRINGA, R. B.; FIKS, V.; FABROCINI, A. Equation of state for dense nucleon matter. **Physical Review C**, APS, v. 38, n. 2, p. 1010, 1988.

# Apêndice A - Campo Magnético de um Dipolo Magnético

Como ocorre na eletrostática o campo elétrico que pode ser determinado através de um potencial a ele relacionado, também, assim o é para o campo magnético. O campo magnético pode ser determinado por um potencial magnético, mas ao contrário do potencial elétrico que é uma grandeza física mensurável, os potenciais magnéticos, no Eletromagnetismo Clássico, é apenas uma ferramenta matemática, ou seja, o potencial vetor magnético clássico não tem realidade física, mas facilita a solução de problemas de campo magnético (MACHADO, 2002). Sendo o campo sujeito a Lei de Maxwell,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{A.1})$$

no qual o fluxo magnético através de uma superfície fechada é nulo. Esta lei que evidencia a inexistência de monopólos magnéticos. Sabe-se que, quando o divergente de um campo vetorial é nulo ele pode ser escrito como sendo o rotacional de outro campo vetorial, ou seja,

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Sendo o vetor  $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ . Então, faremos o rotacional de  $\vec{A}$  ( $\nabla \times \vec{A}$ )

$$\nabla \times \vec{A} = \left( \frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \hat{k}. \quad (\text{A.3})$$

E, então,

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = \left[ \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot \left[ \left( \frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \hat{k} \right],$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right). \quad (\text{A.4})$$

Explicitando as derivadas,

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x}. \quad (\text{A.5})$$

Reorganizando os termos

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Portanto, podemos definir um campo vetorial  $\vec{A}$  na forma,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (\text{A.7})$$

onde  $\vec{A}$  é definido como o potencial vetor magnético. A partir da Eq A.7 podemos encontrar o campo magnético. Da Lei de Biot-Savart encontraremos uma função explícita para o potencial vetor magnético. Seja,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV. \quad (\text{A.8})$$

O termo  $(\vec{r} - \vec{r}')/|\vec{r} - \vec{r}'|^3$  é exatamente igual a

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\nabla \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]. \quad (\text{A.9})$$

Logo, reescrevendo-se A.8

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \times \nabla \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV. \quad (\text{A.10})$$

Pela identidade (MACHADO, 2002),

$$\nabla \times (\Phi \vec{A}) = (\nabla \Phi) \times \vec{A} + \Phi (\nabla \times \vec{A}). \quad (\text{A.11})$$

Então,

$$\nabla \times \left[ \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \nabla \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \times \vec{J}(\vec{r}') + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} [\nabla \times \vec{J}(\vec{r}')]. \quad (\text{A.12})$$

O segundo termo é zero pois  $\vec{J}(\vec{r}')$  é função de coordenadas com linha e considerando que o operador  $\nabla$  age apenas sobre coordenadas sem linha. Então,

$$\nabla \times \left[ \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \nabla \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \times \vec{J}(\vec{r}'). \quad (\text{A.13})$$

E quando invertemos os vetores em um produto vetorial este muda de sinal. Sendo assim,

$$\nabla \times \left[ \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = -\vec{J}(\vec{r}') \times \nabla \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]. \quad (\text{A.14})$$

Agora há outra forma para A.8:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left[ \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV. \quad (\text{A.15})$$

Da comparação com A.7 percebemos que o potencial vetor magnético  $\vec{A}$  é

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV. \quad (\text{A.16})$$

Calculando o campo magnético produzido por um dipolo (com a intenção de entendermos a função de momento de dipolo encontrada nos livros de física que geralmente partem apenas das componentes deste campo).

O campo magnético pode ser obtido através da relação entre o potencial vetor magnético e o campo magnético (JACKSON, 1983),

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (\text{A.17})$$

isto é,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left[ \vec{m} \times \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) \right]. \quad (\text{A.18})$$

Utilizando-se a identidade (JACKSON, 1983):

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \cdot \vec{B})\vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}. \quad (\text{A.19})$$

Assim, com  $\vec{A} = \vec{m}$  e  $\vec{B} = r^{-3}\vec{r}$ , temos

$$\nabla \times \left[ \vec{m} \times \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) \right] = \left[ \nabla \cdot \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) \right] \vec{m} - (\nabla \cdot \vec{m}) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \left[ \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) \cdot \nabla \right] \vec{m} - (\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right). \quad (\text{A.20})$$

Pensando em  $\vec{m}$  como um vetor fixo e, também, com isto facilitando o desenvolvimento da expressão A.20, temos

$$\nabla \times \left[ \vec{m} \times \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) \right] = \left[ \nabla \cdot \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) \right] \vec{m} - (\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right). \quad (\text{A.21})$$

Se adotamos um raio  $\vec{r} = \vec{R} - \vec{R}' = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ , de forma que:

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right] = \frac{1}{|\vec{r}|^3} \nabla \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \nabla \left[ \frac{1}{|\vec{r}|^3} \right]. \quad (\text{A.22})$$

Do primeiro termo, temos:

$$\frac{1}{|\vec{r}|^3} \nabla \cdot \vec{r} = \frac{1}{|\vec{r}|^3} \left[ \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot [x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}] \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{1}{|\vec{r}|^3} \nabla \cdot \vec{r} = \frac{1}{|\vec{r}|^3} \left[ \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right] \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{1}{|\vec{r}|^3} \nabla \cdot \vec{r} = \frac{1}{|\vec{r}|^3} \cdot 3 = \frac{3}{|\vec{r}|^3}. \quad (\text{A.25})$$

E o segundo termo,

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \nabla \left[ \frac{1}{|\vec{r}|^3} \right] &= \vec{r} \left[ \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right] \left[ \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \\ \vec{r} \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r}|^3} &= \vec{r} \left[ \frac{-3x\hat{i} - 3y\hat{j} - 3z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \right] \\ \vec{r} \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r}|^3} &= -3\vec{r} \cdot \left[ \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^5} \right] = -3 \frac{r^2}{r^5} = -\frac{3}{r^3} \\ \vec{r} \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r}|^3} &= -\frac{3}{r^3}, \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

e assim, obtemos que A.22 fica

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right] = \frac{1}{|\vec{r}|^3} \nabla \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \nabla \left[ \frac{1}{|\vec{r}|^3} \right] = 0. \quad (\text{A.27})$$

Logo,

$$\nabla \times \left[ \vec{m} \times \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) \right] = -(\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right). \quad (\text{A.28})$$

Em coordenadas retangulares, podemos escrever

$$\vec{m} = m_x \hat{i} + m_y \hat{j} + m_z \hat{k}. \quad (\text{A.29})$$

Fazendo o seguinte termo  $\vec{m} \cdot \nabla$ :

$$\begin{aligned} (\vec{m} \cdot \nabla) &= (m_x \hat{i} + m_y \hat{j} + m_z \hat{k}) \cdot \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ (\vec{m} \cdot \nabla) &= \left( m_x \frac{\partial}{\partial x} + m_y \frac{\partial}{\partial y} + m_z \frac{\partial}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Então,

$$(\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) = \left( m_x \frac{\partial}{\partial x} + m_y \frac{\partial}{\partial y} + m_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[ \frac{x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (\text{A.31})$$

Fazendo-se separadamente para cada componente; em  $\hat{i}$

$$\begin{aligned} \left[ (\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) \right]_x &= \hat{i} \left( m_x \frac{\partial}{\partial x} + m_y \frac{\partial}{\partial y} + m_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[ \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \\ \left[ (\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) \right]_x &= \left( m_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[ \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \hat{i} + \left( m_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[ \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \hat{i} \\ &\quad + \left( m_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[ \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \hat{i}. \end{aligned}$$

Fazendo termo a termo,

$$\begin{aligned} \left( m_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[ \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] &= \frac{m_x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + m_x \left( -\frac{3}{2} \right) 2x \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \left( m_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[ \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] &= \frac{m_x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3(m_x x)x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned}$$

O próximo termo:

$$\begin{aligned} \left( m_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[ \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] &= m_y \left( -\frac{3}{2} \right) 2y \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \left( m_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[ \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] &= -\frac{3(m_y y)x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned}$$

E, agora,

$$\begin{aligned} \left( m_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[ \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] &= m_z \left( -\frac{3}{2} \right) 2z \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \left( m_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[ \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] &= -\frac{3(m_z z)x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned}$$

Então encontramos a contribuição em  $\hat{i}$ ,

$$\left[ (\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) \right]_x = \hat{i} \left[ \frac{m_x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3(m_z z)x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \right]. \quad (\text{A.32})$$

Ou ainda,

$$\left[ (\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) \right]_x = \frac{m_x \hat{i}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - 3x \hat{i} \frac{m_x x + m_y y + m_z z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}. \quad (\text{A.33})$$

Podemos simplificar essa expressão se considerarmos que:

$$\vec{m} \cdot \vec{r} = (m_x \hat{i} + m_y \hat{j} + m_z \hat{k}) \cdot (x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}),$$

$$\vec{m} \cdot \vec{r} = (m_x x + m_y y + m_z z),$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

E assim,

$$\left[ (\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) \right]_x = \frac{m_x \hat{i}}{|\vec{r}|^3} - \frac{3x(\vec{m} \cdot \vec{r}) \hat{i}}{|\vec{r}|^5}. \quad (\text{A.34})$$

De forma análoga temos,

$$\left[ (\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) \right]_y = \frac{m_y \hat{j}}{|\vec{r}|^3} - \frac{3y(\vec{m} \cdot \vec{r}) \hat{j}}{|\vec{r}|^5}, \quad (\text{A.35})$$

$$\left[ (\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) \right]_z = \frac{m_z \hat{k}}{|\vec{r}|^3} - \frac{3z(\vec{m} \cdot \vec{r}) \hat{k}}{|\vec{r}|^5}. \quad (\text{A.36})$$

Agrupando as equações A.34, A.35 e A.36

$$(\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) = \frac{m_x \hat{i}}{|\vec{r}|^3} - \frac{3x(\vec{m} \cdot \vec{r}) \hat{i}}{|\vec{r}|^5} + \frac{m_y \hat{j}}{|\vec{r}|^3} - \frac{3y(\vec{m} \cdot \vec{r}) \hat{j}}{|\vec{r}|^5} + \frac{m_z \hat{k}}{|\vec{r}|^3} - \frac{3z(\vec{m} \cdot \vec{r}) \hat{k}}{|\vec{r}|^5}. \quad (\text{A.37})$$

Ou,

$$(\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) = \frac{m_x \hat{i} + m_y \hat{j} + m_z \hat{k}}{|\vec{r}|^3} - 3 \frac{(x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}) \cdot (\vec{m} \cdot \vec{r})}{|\vec{r}|^5}. \quad (\text{A.38})$$

E, então,

$$(\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) = \frac{\vec{m}}{|\vec{r}|^3} - 3 \frac{(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{|\vec{r}|^5}. \quad (\text{A.39})$$

Consequentemente A.28 fica

$$\left[ \nabla \times \vec{m} \times \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) \right] = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{m}}{|\vec{r}|^3}. \quad (\text{A.40})$$

E voltando para a equação de campo magnético que deu origem a estes cálculos:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left[ \vec{m} \times \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{m}}{|\vec{r}|^3} \right]. \quad (\text{A.41})$$

Sendo o raio  $\vec{r}$  na direção radial  $\hat{n}$ ,

$$\vec{r} = |\vec{r}| \cdot \hat{n}.$$

Chegamos a equação para o campo magnético de uma distribuição localizada de correntes permanentes (JACKSON, 1983):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{r}|^3}. \quad (\text{A.42})$$

Se adotarmos um dipolo no eixo z com inclinação  $\alpha$  em relação ao eixo de rotação de uma esfera. Conhecendo a seguinte função do potencial vetor magnético:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}. \quad (\text{A.43})$$

E, considerando o dipolo magnético localizado na origem, com o momento dipolar magnético  $\vec{m}$  na direção do eixo z e no sentido positivo deste. Teremos um potencial vetor tangente a uma circunferência horizontal em torno do eixo z e paralelo ao plano xy. Partiremos da equação A.41,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{m}}{|\vec{r}|^3} \right].$$

Estando o dipolo magnético na origem,

$$\vec{m} = m_z \hat{k} = m \hat{k}. \quad (\text{A.44})$$

Substituindo-se A.44 na equação de campo magnético em termos do momento e posição A.41 podemos reescrevê-la

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(m_z z) \cdot (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})}{|\vec{r}|^5} - \frac{m\hat{k}}{|\vec{r}|^3} \right] \\ \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3mzx}{|\vec{r}|^5} \hat{i} + \frac{3mzy}{|\vec{r}|^5} \hat{j} + \frac{3mz^2}{|\vec{r}|^5} \hat{k} - \frac{m}{|\vec{r}|^3} \hat{k} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Consideraremos o plano  $xz$  e encontraremos  $\vec{B}$  em um ponto deste plano. Para o plano  $xz$  temos que:  $z = |\vec{r}|\cos\theta$ ,  $x = |\vec{r}|\sen\theta$  e  $y = 0$ ; então, A.45 fica,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3m|\vec{r}|\cos\theta \cdot |\vec{r}|\sen\theta}{|\vec{r}|^5} \hat{i} + \frac{3m|\vec{r}|\cos\theta \cdot 0}{|\vec{r}|^5} \hat{j} + \frac{3m|\vec{r}|^2\cos^2\theta}{|\vec{r}|^5} \hat{k} - \frac{m}{|\vec{r}|^3} \hat{k} \right],$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3m\sen\theta\cos\theta}{|\vec{r}|^3} \hat{i} + 0\hat{j} + \frac{m(3\cos^2\theta - 1)}{|\vec{r}|^3} \hat{k} \right]. \quad (\text{A.46})$$

Sendo as componentes em coordenadas cartesianas,

$$\begin{aligned} \vec{B}_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3m\sen\theta\cos\theta}{|\vec{r}|^3} \hat{i}, \\ \vec{B}_y &= 0\hat{j}, \\ \vec{B}_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m(3\cos^2\theta - 1)}{|\vec{r}|^3} \hat{k}. \end{aligned}$$

Vamos transformar para coordenadas esféricas. Temos que:

$$\begin{aligned} \hat{i} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{r} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{\theta} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{\varphi}, \\ \hat{j} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{r} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{\theta} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{\varphi}, \\ \hat{k} &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{r} - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{\theta}. \end{aligned}$$

Sendo  $y = 0$ ,  $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $x = |\vec{r}|\sen\theta$ , e  $z = |\vec{r}|\cos\theta$ . Como não há componente de campo na direção  $\hat{j}$  faremos o desenvolvimento das equações acima apenas nas direções  $\hat{i}$  e  $\hat{k}$ . Estas equações ficam na forma,

$$\hat{i} = \frac{|\vec{r}|\sen\theta}{|\vec{r}|} \hat{r} + \frac{|\vec{r}|\cos\theta}{|\vec{r}|} \frac{|\vec{r}|\sen\theta}{|\vec{r}|\sen\theta} \hat{\theta} = \sen\theta \hat{r} + \cos\theta \hat{\theta}, \quad (\text{A.47})$$

$$\hat{k} = \frac{|\vec{r}|\cos\theta}{|\vec{r}|} \hat{r} - \frac{|\vec{r}|\sen\theta}{|\vec{r}|} \hat{\theta} = \cos\theta \hat{r} - \sen\theta \hat{\theta}. \quad (\text{A.48})$$

Fazendo-se a mudança de coordenada em A.46 teremos o desenvolvimento a seguir:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3m\sen\theta\cos\theta}{|\vec{r}|^3} \hat{i} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m(3\cos^2\theta - 1)}{|\vec{r}|^3} \hat{k},$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3m\sen\theta\cos\theta}{|\vec{r}|^3} (\sen\theta \hat{r} + \cos\theta \hat{\theta}) + \frac{m(3\cos^2\theta - 1)}{|\vec{r}|^3} (\cos\theta \hat{r} - \sen\theta \hat{\theta}) \right],$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3m \text{sen}^2\theta \text{cos}\theta \hat{r} + 3m \text{sen}\theta \text{cos}^2\theta \hat{\theta}}{|\vec{r}|^3} + \frac{m(3\text{cos}^3\theta \hat{r} - \text{cos}\theta \hat{r} - 3\text{sen}\theta \text{cos}^2\theta \hat{\theta} + \text{sen}\theta \hat{\theta})}{|\vec{r}|^3} \right],$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \left[ \frac{3\text{sen}^2\theta \text{cos}\theta \hat{r} + 3\text{cos}^3\theta \hat{r} - \text{cos}\theta \hat{r} + (\text{sen}\theta - 3\text{sen}\theta \text{cos}^2\theta + 3\text{sen}\theta \text{cos}^2\theta) \hat{\theta}}{|\vec{r}|^3} \right],$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi |\vec{r}|^3} [(3\text{sen}^2\theta \text{cos}\theta + 3\text{cos}\theta - 3\text{cos}\theta \text{sen}^2\theta - \text{cos}\theta) \hat{r} + \text{sen}\theta \hat{\theta}],$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi |\vec{r}|^3} (2\text{cos}\theta \hat{r} + \text{sen}\theta \hat{\theta}),$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{2\pi |\vec{r}|^3} \text{cos}\theta \hat{r} + \frac{\mu_0 m}{4\pi |\vec{r}|^3} \text{sen}\theta \hat{\theta}. \quad (\text{A.49})$$

E, por fim, chegamos as componentes do campo magnético em coordenadas esféricas (JACKSON, 1983)

$$\vec{B}_r = \frac{\mu_0 m}{2\pi |\vec{r}|^3} \text{cos}\theta \hat{r}, \quad (\text{A.50})$$

$$\vec{B}_\theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi |\vec{r}|^3} \text{sen}\theta \hat{\theta}, \quad (\text{A.51})$$

$$\vec{B}_\varphi = 0 \hat{\varphi} \quad (\text{A.52})$$

Como podemos perceber o campo é descrito mais simplesmente em coordenadas esféricas. Se consideramos que o dipolo magnético está alinhado com o eixo de rotação temos que o campo magnético assume a forma mais simplificada,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{2\pi |\vec{r}|^3} \hat{r}. \quad (\text{A.53})$$

# Apêndice B - Cálculo para a Energia Irradiada

Cálculo para a energia irradiada por um dipolo rotacionando com eixo do dipolo magnético inclinado em relação ao eixo rotacional com o raio e campo magnético do pulsar constantes, produção feita no programa Wxmaxima.

reset()kill(all)

depends(w,t,m,t,I,t);

[w(t),m(t),I(t)]

a1:((1/2)\*b\*r\*\*3\*(sin(alpha)\*cos(w\*t)));

$$\frac{\sin(\alpha)br^3\cos(tw)}{2} \quad (\text{B.1})$$

a2:((1/2)\*b\*r\*\*3\*(cos(alpha)));

$$\frac{(\cos(\alpha)br^3)}{2} \quad (\text{B.2})$$

a3:((1/2)\*b\*r\*\*3\*(sin(alpha)\*sin(w\*t)));

$$\frac{(\sin(\alpha)br^3\sin(tw))}{2} \quad (\text{B.3})$$

m:[a1,a2,a3];

$$\left[ \frac{(\sin(\alpha)br^3\cos(t * w))}{2}, \frac{(\cos(\alpha)br^3)}{2}, \frac{(\sin(\alpha)br^3\sin(tw))}{2} \right] \quad (\text{B.4})$$

mdd:diff(m,t,2);

$$0, \frac{(\sin(\alpha)br^3(t\ddot{w}) + 2(\dot{w}))\sin(tw)}{2} - \frac{(\sin(\alpha)br^3(t\dot{w}) + w)^2\cos(tw)}{2},$$

$$\frac{(\sin(\alpha)br^3(t\ddot{w}) + 2(\dot{w}))\cos(tw)}{2} - \frac{(\sin(\alpha)br^3(t\dot{w}) + w)^2\sin(tw)}{2}$$

mod:mdd.mdd;

$$\left( \frac{-((\sin(\alpha)br^3(t\ddot{w}) + 2(\dot{w}))\sin(tw))}{2} - \frac{(\sin(\alpha)br^3(t\dot{w}) + w)^2\cos(tw)}{2} \right)^2 \quad (\text{B.5})$$

$$\left( + \frac{((\sin(\alpha)br^3(t\ddot{w}) + 2(\dot{w}))\cos(tw))}{2} - \frac{(\sin(\alpha)br^3(t\dot{w}) + w)^2 * \sin(t * w)}{2} \right)^2 \quad (\text{B.6})$$

mod:subst(0, diff(w,t,2), mod);

$$\left( \sin(\alpha)br^3(\dot{w})\cos(tw) - \frac{(\sin(\alpha)br^3(t\dot{w}) + w)^2\sin(tw)}{2} \right)^2 \quad (\text{B.7})$$

$$+ \left( -\sin(\alpha)br^3(\dot{w})\sin(tw) - \frac{(\sin(\alpha)br^3(t\dot{w}) + w)^2\cos(tw)}{2} \right)^2 \quad (\text{B.8})$$

mod:subst(0, diff(w,t), mod);

$$\frac{(\sin(\alpha)^2b^2r^6w^4\sin(tw)^2)}{4} + \frac{(\sin(\alpha)^2b^2r^6w^4\cos(tw)^2)}{4} \quad (\text{B.9})$$

trigsimp(mod);

$$\frac{(\sin(\alpha)^2b^2r^6w^4)}{4} \quad (\text{B.10})$$

# Apêndice C - Modelo Proposto

Cálculo do índice de frenagem de pulsares com o parâmetro de deslocamento variando no tempo, produção feita no programa Wxmaxima. Equações extremamente grandes foram omitidas, entretanto os comandos os quais resultam nas mesmas encontram-se no texto. Temos equações suprimidas devido serem muito extensas.

```
(%i2) reset()$kill(all)$;
```

```
(%i1) depends(\Omega,t,m,t,R,t,I,t);
```

$$(\%o1) \quad [\Omega(t), m(t), R(t), I(t)] \quad (C.1)$$

```
(%i2) a1:((1/2)*B_P*R**3*(sin(\alpha)*cos(\Omega*t)));
```

$$(\%o2) \quad \frac{\sin(\alpha) \cdot \cos(\Omega \cdot t) \cdot B_P \cdot R^3}{2} \quad (C.2)$$

```
(%i3) a2:((1/2)*B_P*R**3*(cos(\alpha)));
```

$$(\%o3) \quad \frac{\cos(\alpha) \cdot B_P \cdot R^3}{2} \quad (C.3)$$

```
(%i4) a3:((1/2)*B_P*R**3*(sin(\alpha)*sin(\Omega*t)));
```

$$(\%o4) \quad \frac{\sin(\alpha) \cdot \sin(\Omega \cdot t) \cdot B_P \cdot R^3}{2} \quad (C.4)$$

```
(%i5) m: [a1, a2, a3];
```

$$(\%o5) \quad \left[ \frac{\sin(\alpha) \cdot \cos(\Omega \cdot t) \cdot B_P \cdot R^3}{2}, \frac{\cos(\alpha) \cdot B_P \cdot R^3}{2}, \frac{\sin(\alpha) \cdot \sin(\Omega \cdot t) \cdot B_P \cdot R^3}{2} \right] \text{(C.5)}$$

(%i6) `mdd:diff(m,t,2);`

(%o6) (C.6)

(%i7) `mod:mdd.mdd;`

(%o7) (C.7)

(%i8) `mod:expand(mod);`

(%o8) (C.8)

(%i9) `mod:subst(1/2,cos(\Omega*t)^2,mod);`

(%o9) (C.9)

(%i10) `mod:subst(1/2,sin(\Omega*t)^2,mod);`

(%o10) (C.10)

(%i11) `mod:factor(mod);`

(%o11) (C.11)

(%i12) `mod:trigsimp(mod);`

(%o12) (C.12)

(%i13) mod:subst(0,diff(\Omega,t,2),mod);

$$(\%o13) \tag{C.13}$$

(%i14) mod:subst(0,diff(\Omega,t),mod);

$$(\%o14) \tag{C.14}$$

$$\frac{\sin(\alpha)^2 \cdot \Omega^4 \cdot B_P^2 \cdot R^6 + 24 \cdot \sin(\alpha)^2 \cdot \Omega^2 \cdot B_P^2 \cdot R^4 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot R\right)^2}{4}$$

$$+ \frac{36 \cdot B_P^2 \cdot R^2 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot R\right)^4}{4}$$

$$+ \frac{\left(36 \cdot B_P^2 \cdot R^3 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot R\right)^2 - 6 \cdot \sin(\alpha)^2 \cdot \Omega^2 \cdot B_P^2 \cdot R^5\right) \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} \cdot R\right)}{4}$$

$$+ \frac{9 \cdot B_P^2 \cdot R^4 \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} \cdot R\right)^2}{4}$$

(%i15) mod:subst(0,diff(R,t,2),mod);

$$(\%o15) \tag{C.15}$$

$$\frac{\sin(\alpha)^2 \cdot \Omega^4 \cdot B_P^2 \cdot R^6 + 24 \cdot \sin(\alpha)^2 \cdot \Omega^2 \cdot B_P^2 \cdot R^4 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot R\right)^2}{4}$$

$$+ \frac{36 \cdot B_P^2 \cdot R^2 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot R\right)^4}{4}$$

Fazendo-se combinações de senos e cossenos de argumento “ $\Omega t$ ”, e adotando-se que:  $\dot{\Omega}^2 \ll \Omega^4$  (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008), e, em seguida, por analogia às considerações do cálculo para um dipolo rotacionando com frequência angular de rotação  $\Omega$ , podemos também dizer que:  $\ddot{R}^2 \ll \dot{R}^4$ , e fazendo-se combinações de senos e cossenos de argumento “ $\alpha$ ”, obtemos a expressão para a potência da energia irradiada por uma estrela de nêutron com um parâmetro de deslocamento variando no tempo:

(%i16) Emd:(2/(3\*c\*\*3))\*(mod);

$$(\%o16) \tag{C.16}$$

$$\frac{\sin(\alpha)^2 \cdot \Omega^4 \cdot B_P^2 \cdot R^6 + 24 \cdot \sin(\alpha)^2 \cdot \Omega^2 \cdot B_P^2 \cdot R^4 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot R\right)^2}{6 \cdot c^3}$$

$$+ \frac{36 \cdot B_P^2 \cdot R^2 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot R\right)^4}{6 \cdot c^3}$$

(%i17) Ec:(1/2)\*I\*\Omega\*\*2;

$$(\%o17) \quad \frac{\Omega^2 \cdot I}{2} \quad (C.17)$$

(%i18) `Ec:subst(\lambda*M*R**2,I,Ec);`

$$(\%o18) \quad \frac{\Omega^2 \cdot M \cdot R^2 \cdot \lambda}{2} \quad (C.18)$$

(%i19) `Ecd:diff(Ec,t);`

$$(\%o19) \quad \Omega^2 \cdot M \cdot R \cdot \left( \frac{d}{dt} \cdot R \right) \cdot \lambda + \Omega \cdot \left( \frac{d}{dt} \cdot \Omega \right) \cdot M \cdot R^2 \cdot \lambda \quad (C.19)$$

(%i20) `eq:Ecd=-Emd;`

$$(\%o20) \quad \Omega^2 \cdot M \cdot R \cdot \left( \frac{d}{dt} \cdot R \right) \cdot \lambda + \Omega \cdot \left( \frac{d}{dt} \cdot \Omega \right) \cdot M \cdot R^2 \cdot \lambda = -\frac{\sin(\alpha)^2 \cdot \Omega^4 \cdot B_P^2 \cdot R^6}{6 \cdot c^3} + \frac{24 \cdot \sin(\alpha)^2 \cdot \Omega^2 \cdot B_P^2 \cdot R^4 \cdot \left( \frac{d}{dt} \cdot R \right)^2 + 36 \cdot B_P^2 \cdot R^2 \cdot \left( \frac{d}{dt} \cdot R \right)^4}{6 \cdot c^3} \quad (C.20)$$

(%i21) `eq:solve(eq,diff(\Omega,t));`

$$(\%o21) \quad \left[ \frac{d}{dt} \cdot \Omega = -\frac{\sin(\alpha)^2 \cdot \Omega^4 \cdot B_P^2 \cdot R^5 + 24 \cdot \sin(\alpha)^2 \cdot \Omega^2 \cdot B_P^2 \cdot R^3 \cdot \left( \frac{d}{dt} \cdot R \right)^2}{6 \cdot c^3 \cdot \Omega \cdot M \cdot R \cdot \lambda} + \frac{36 \cdot B_P^2 \cdot R \cdot \left( \frac{d}{dt} \cdot R \right)^4 + 6 \cdot c^3 \cdot \Omega^2 \cdot M \cdot \left( \frac{d}{dt} \cdot R \right) \cdot \lambda}{6 \cdot c^3 \cdot \Omega \cdot M \cdot R \cdot \lambda} \right] \quad (C.21)$$

(%i22) `wdd:diff(rhs(eq[1]),t);`

$$(\%o22) \quad (C.22)$$

(%i23) `wdd:expand(wdd);`

$$(\%o23) \quad (C.23)$$

Solucionaremos a equação C.20 para a variação da frequência angular no tempo ( $\dot{\Omega}$ ), feito isso derivamos esta equação com relação ao tempo, multiplicaremos pela frequência angular ( $\Omega$ ) e dividiremos pelo quadrado da variação desta frequência angular no tempo ( $\dot{\Omega}^2$ ), e ainda, fazendo-se:  $\ddot{R}^2 \ll \dot{R}^4$ , obtemos assim, a equação para o índice de frenagem segundo o nosso modelo proposto:

(%i24) `n:expand(wdd*\Omega/diff(\Omega,t)^2);`

$$\begin{aligned}
 (\%o24) \quad & -\frac{24 \cdot B_P^2 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot R\right)^3 \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} \cdot R\right)}{c^3 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot \Omega\right)^2 \cdot M \cdot \lambda} - \frac{8 \cdot \sin(\alpha)^2 \cdot \Omega^2 \cdot B_P^2 \cdot R^2 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot R\right) \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} \cdot R\right)}{c^3 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot \Omega\right)^2 \cdot M \cdot \lambda} \\
 & + \frac{6 \cdot B_P^2 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot R\right)^4}{c^3 \cdot \Omega \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot \Omega\right) \cdot M \cdot \lambda} - \frac{8 \cdot \sin(\alpha)^2 \cdot \Omega^2 \cdot B_P^2 \cdot R \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot R\right)^3}{c^3 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot \Omega\right)^2 \cdot M \cdot \lambda} \\
 & - \frac{4 \cdot \sin(\alpha)^2 \cdot \Omega \cdot B_P^2 \cdot R^2 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot R\right)^2}{c^3 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot \Omega\right) \cdot M \cdot \lambda} - \frac{2 \cdot \sin(\alpha)^2 \cdot \Omega^4 \cdot B_P^2 \cdot R^3 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot R\right)}{3 \cdot c^3 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot \Omega\right)^2 \cdot M \cdot \lambda} \\
 & - \frac{\sin(\alpha)^2 \cdot \Omega^3 \cdot B_P^2 \cdot R^4}{2 \cdot c^3 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot \Omega\right) \cdot M \cdot \lambda} - \frac{\Omega^2 \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} \cdot R\right)}{\left(\frac{d}{dt} \cdot \Omega\right)^2 \cdot R} \\
 & + \frac{\Omega^2 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot R\right)^2}{\left(\frac{d}{dt} \cdot \Omega\right)^2 \cdot R^2} - \frac{\Omega \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot R\right)}{\left(\frac{d}{dt} \cdot \Omega\right) \cdot R} \tag{C.24}
 \end{aligned}$$

(%i25) `n:ratsimp(n);`

$$(\%o25) \tag{C.25}$$

(%i26) `n:n,eq;`

$$(\%o26) \tag{C.26}$$

(%i27) `n:ratsimp(n);`

$$(\%o27) \tag{C.27}$$

(%i28) `n:subst(0,diff(R,t,2),n);`

$$(\%o28) \tag{C.28}$$

(%i29) `n:facsum(n,diff(R,t));`

$$\begin{aligned}
(\%o29) \quad & -(3 \cdot (-\sin(\alpha)^4 \cdot \Omega^8 \cdot B_P^4 \cdot R^{10} - 32 \cdot \sin(\alpha)^4 \cdot \Omega^6 \cdot B_P^4 \cdot R^8 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot R\right)^2 \\
& - 24 \cdot \sin(\alpha)^2 \cdot \Omega^4 \cdot B_P^4 \cdot R^6 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot R\right)^4 - 192 \cdot \sin(\alpha)^4 \cdot \Omega^4 \cdot B_P^4 \cdot R^6 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot R\right)^4 \\
& + 432 \cdot B_P^4 \cdot R^2 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot R\right)^8 \\
& + 96 \cdot \sin(\alpha)^2 \cdot c^3 \cdot \Omega^4 \cdot B_P^2 \cdot M \cdot R^4 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot R\right) \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} \cdot R\right) \cdot \lambda \\
& + 288 \cdot c^3 \cdot \Omega^2 \cdot B_P^2 \cdot M \cdot R^2 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot R\right)^3 \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} \cdot R\right) \cdot \lambda \\
& - 24 \cdot c^6 \cdot \Omega^4 \cdot M^2 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot R\right)^2 \cdot \lambda^2 + 12 \cdot c^6 \cdot \Omega^4 \cdot M^2 \cdot R \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} \cdot R\right) \cdot \lambda^2) / \\
& (\sin(\alpha)^2 \cdot \Omega^4 \cdot B_P^2 \cdot R^5 + 24 \cdot \sin(\alpha)^2 \cdot \Omega^2 \cdot B_P^2 \cdot R^3 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot R\right)^2 \\
& + 36 \cdot B_P^2 \cdot R \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot R\right)^4 + 6 \cdot c^3 \cdot \Omega^2 \cdot M \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot R\right) \cdot \lambda)^2
\end{aligned} \tag{C.29}$$

Podemos perceber que se fizéssemos o parâmetro de deslocamento não variar com o tempo neste modelo que desenvolvemos, voltaríamos ao modelo canônico de pulsares com índice de frenagem igual a 3.

(%i30) `n0:ev(n,diff(R,t)=0);`

$$(\%o30) \quad 3$$

Ou seja,

$$n = 3. \tag{C.30}$$

Isso significa que o nosso modelo está em conformidade com o modelo canônico. Tomaremos, novamente, considerações de variação de momento de inércia através de um parâmetro de deslocamento para as estrelas de nêutrons que, naturalmente, aumentam muito lentamente. Considerando as potências significativas e admitindo que potência com ordem muito menores não impliquem efetiva mudança no tratamento do modelo, nosso

modelo para frenagem de pulsares fica:

```
(%i2) reset()$kill(all)$
```

```
(%i1) n:(3*sin(\alpha)^4*B_P^4*R^10*\Omega^8)/(12*\lambda*sin(\alpha)^2
      *B_P^2*c^3*R^5*(rd)*\Omega^6*M+sin(\alpha)^4*B_P^4*R^10*\Omega^8);
```

Onde  $rd$  é  $\text{diff}(r,t)$  ou  $\frac{d}{dt}R$ .

$$(\%o1) \quad \frac{3 \cdot \sin(\alpha)^4 \cdot \Omega^8 \cdot B_P^4 \cdot R^{10}}{12 \cdot \sin(\alpha)^2 \cdot c^3 \cdot \Omega^6 \cdot rd \cdot B_P^2 \cdot M \cdot R^5 \cdot \lambda + \sin(\alpha)^4 \cdot \Omega^8 \cdot B_P^4 \cdot R^{10}} \quad (\text{C.31})$$

```
(%i2) n:ratsimp(n);
```

$$(\%o2) \quad \frac{3 \cdot \sin(\alpha)^2 \cdot \Omega^2 \cdot B_P^2 \cdot R^5}{12 \cdot c^3 \cdot rd \cdot M \cdot \lambda + \sin(\alpha)^2 \cdot \Omega^2 \cdot B_P^2 \cdot R^5} \quad (\text{C.32})$$

```
(%i3) 'n;
```

$$(\%o3) \quad n \quad (\text{C.33})$$

```
(%i4) rd:solve(n='n,rd);
```

$$(\%o4) \quad [rd = -\frac{(\sin(\alpha)^2 \cdot n - 3 \cdot \sin(\alpha)^2) \cdot \Omega^2 \cdot B_P^2 \cdot R^5}{12 \cdot c^3 \cdot n \cdot M \cdot \lambda}] \quad (\text{C.34})$$

```
(%i5) rd:rhs(rd[1]);
```

$$(\%o5) \quad -\frac{(\sin(\alpha)^2 \cdot n - 3 \cdot \sin(\alpha)^2) \cdot \Omega^2 \cdot B_P^2 \cdot R^5}{12 \cdot c^3 \cdot n \cdot M \cdot \lambda} \quad (\text{C.35})$$

```
(%i6) rd:facsum(rd,[sin(alpha),b]);
```

$$(\%o6) \quad -\frac{\sin(\alpha)^2 \cdot (n - 3) \cdot \Omega^2 \cdot B_P^2 \cdot R^5}{12 \cdot c^3 \cdot n \cdot M \cdot \lambda}$$

Ou seja,

$$\dot{R} = -\frac{\sin(\alpha)^2 \cdot (n-3) \cdot \Omega^2 \cdot B_P^2 \cdot R^5}{12 \cdot c^3 \cdot n \cdot M \cdot \lambda} \quad (\text{C.36})$$

Podemos observar explicitamente que se o índice de frenagem for igual a 3 o nosso parâmetro de deslocamento não varia com o tempo, ou seja, observa-se o caso do modelo canônico.

```
(%i2) reset()$kill(all)$
```

```
(%i1) depends(\Omega,t,R,t);
```

```
(%o1) [\Omega(t), R(t)] \quad (\text{C.37})
```

```
(%i2) eq:\lambda*R^2*\Omega*diff(\Omega,t)*M+\lambda*R*rd*\Omega^2*M=-
-(+sin(\alpha)^2*B_P^2*R^6*\Omega^4)/(6*c^3);
```

```
(%o2) \Omega \cdot \left( \frac{d}{dt} \cdot \Omega \right) \cdot M \cdot R^2 \cdot \lambda + \Omega^2 \cdot rd \cdot M \cdot R \cdot \lambda =
-\frac{\sin(\alpha)^2 \cdot \Omega^4 \cdot B_P^2 \cdot R^6}{6 \cdot c^3} \quad (\text{C.38})
```

```
(%i3) kill(B_P);
```

```
(%o3) done \quad (\text{C.39})
```

```
(%i4) eq:solve(eq,B_P);
```

```
(%o4) [B_P = -\frac{\sqrt{6} \cdot c \cdot \sqrt{-\frac{c \cdot rd \cdot M \cdot \lambda}{R} - \frac{c \cdot (\frac{d}{dt} \cdot \Omega) \cdot M \cdot \lambda}{\Omega}}}{\sin(\alpha) \cdot \Omega \cdot R^2},
B_P = \frac{\sqrt{6} \cdot c \cdot \sqrt{-\frac{c \cdot rd \cdot M \cdot \lambda}{R} - \frac{c \cdot (\frac{d}{dt} \cdot \Omega) \cdot M \cdot \lambda}{\Omega}}}{\sin(\alpha) \cdot \Omega \cdot R^2}] \quad (\text{C.40})
```

```
(%i5) B_P:rhs(eq[1]);
```

```
(%o5) -\frac{\sqrt{6} \cdot c \cdot \sqrt{-\frac{c \cdot rd \cdot M \cdot \lambda}{R} - \frac{c \cdot (\frac{d}{dt} \cdot \Omega) \cdot M \cdot \lambda}{\Omega}}}{\sin(\alpha) \cdot \Omega \cdot R^2} \quad (\text{C.41})
```

```
(%i6) rd:-(sin(\alpha)^2*B_P^2*(n-3)*R^5*\Omega^2)/(12*\lambda*c^3*n*M);
```

$$(\%o6) \quad - \frac{(n-3) \cdot R \cdot \left( -\frac{c \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot \Omega\right) \cdot M \cdot \lambda}{\Omega} - \frac{c \cdot rd \cdot M \cdot \lambda}{R} \right)}{2 \cdot c \cdot n \cdot M \cdot \lambda} \quad (C.42)$$

```
(%i7) 'rd;
```

$$(\%o7) \quad rd \quad (C.43)$$

```
(%i8) n:solve(rd='rd,n);
```

$$(\%o8) \quad \left[ n = \frac{3 \cdot \Omega \cdot rd + 3 \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot \Omega\right) \cdot R}{\left(\frac{d}{dt} \cdot \Omega\right) \cdot R - \Omega \cdot rd} \right] \quad (C.44)$$

# Apêndice D - Estado de Equilíbrio Termodinâmico Obtido pela Minimização da Energia Livre do Sistema

Em física básica, sabemos que o estado de equilíbrio termodinâmico é obtido pela minimização da energia livre do sistema ( $F$ ). No caso, para “ $N_v$ ” vórtices, tratado na seção 3.5.4. Iremos demonstrar, a seguir, o passo a passo até encontrarmos a equação 3.33. Primeiro substituímos as expressões da equação 3.31 e também da 3.32, na equação 3.14:

$$F = \frac{\rho_s \pi}{4} r^4 \Omega_0 + \frac{\rho_s N_v \kappa_0^2}{4\pi} \ln \left( \frac{b}{a_0} \right) + \frac{\rho_s N_v^2 \kappa_0^2}{4\pi} \ln \left( \frac{R}{r} \right) + \left( \frac{\rho_s \pi r^4 \Omega_0}{2} + \frac{\rho_s \kappa_0 r^2}{4} + \frac{\rho_s N_v \kappa_0}{2} (R^2 - r^2) \right) \Omega, \quad (\text{D.1})$$

então, dada a organização, substituímos a equação 3.30 na expressão acima (D.1), de modo que:  $r^2 = \frac{N_v \kappa_0}{2\pi \Omega_0} \Rightarrow r^4 = \left( \frac{N_v \kappa_0}{2\pi \Omega_0} \right)^2$ , agora organizando,

$$F = \frac{\rho_s \pi}{4} \left( \frac{N_v \kappa_0}{2\pi \Omega_0} \right)^2 \Omega_0 + \frac{\rho_s N_v \kappa_0^2}{4\pi} \ln \left( \frac{b}{a_0} \right) + \frac{\rho_s N_v^2 \kappa_0^2}{4\pi} \ln \left( \sqrt{\frac{2\pi \Omega_0 R^2}{N_v \kappa_0}} \right) + \left( \frac{\rho_s \pi}{2} \left( \frac{N_v \kappa_0}{2\pi \Omega_0} \right)^2 \Omega_0 + \frac{\rho_s \kappa_0}{4} \left( \frac{N_v \kappa_0}{2\pi \Omega_0} \right) + \frac{\rho_s N_v \kappa_0}{2} \left( R^2 - \frac{N_v \kappa_0}{2\pi \Omega_0} \right) \right) \Omega, \quad (\text{D.2})$$

Note que conforme a equação 3.30 e sabendo-se que “ $b$ ” é da ordem do espaçamento entre vórtices, então:  $b \approx \Omega_0^{\frac{1}{2}}$ .

Agora derivando com relação a  $\Omega_0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \Omega_0} = & \frac{\rho_s N_v \kappa_0^2}{4\pi} \left[ \frac{1}{\Omega_0^{\frac{1}{2}} a_0} \right] \left[ \left( -\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\Omega_0^{\frac{3}{2}} a_0} \right] + \frac{\rho_s N_v^2 \kappa_0^2}{4\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi \Omega_0 R^2}{N_v \kappa_0}}} \right] \left[ \sqrt{\frac{2\pi R^2}{N_v \kappa_0}} \left( \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{\Omega_0}} \right] + \\ & - \left( \frac{\rho_s \pi N_v^2 \kappa_0^2}{8\pi^2} (-1) \left( \frac{1}{\Omega_0^2} \right) + \frac{\rho_s \kappa_0^2 N_v}{8\pi} (-1) \left( \frac{1}{\Omega_0^2} \right) - \frac{\rho_s N_v^2 \kappa_0^2}{4\pi} (-1) \left( \frac{1}{\Omega_0^2} \right) \right) \Omega. \quad (D.3) \end{aligned}$$

Organizando os termos da expressão acima (D.3):

$$\frac{\partial F}{\partial \Omega_0} = -\frac{\rho_s N_v \kappa_0^2}{8\pi} \frac{1}{\Omega_0} + \frac{\rho_s N_v^2 \kappa_0^2}{8\pi \Omega_0} + \frac{\rho_s N_v^2 \kappa_0^2}{8\pi} \frac{\Omega}{\Omega_0^2} + \frac{\rho_s N_v \kappa_0^2}{8\pi} \frac{\Omega}{\Omega_0^2} - \frac{\rho_s N_v^2 \kappa_0^2}{4\pi} \frac{\Omega}{\Omega_0^2}, \quad (D.4)$$

como queríamos demonstrar, os passos até a forma da equação 3.33:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \Omega_0} &= -\frac{\rho_s \kappa_0^2 N_v}{8\pi \Omega_0} (1 - N_v) + \frac{\rho_s \kappa_0^2}{8\pi \Omega_0^2} (N_v^2 + N_v - 2N_v^2) \Omega, \\ \frac{\partial F}{\partial \Omega_0} &= \frac{\rho_s \kappa_0^2 N_v}{8\pi \Omega_0} (N_v - 1) - \frac{\rho_s \kappa_0^2 N_v}{8\pi \Omega_0} (N_v - 1) \frac{\Omega}{\Omega_0}, \\ \frac{\partial F}{\partial \Omega_0} &= \frac{\rho_s N_v (N_v - 1) \kappa_0^2}{8\pi \Omega_0} \left( 1 - \frac{\Omega}{\Omega_0} \right). \quad (D.5) \end{aligned}$$

# Anexo A - Trabalhos Publicados

## Stellar structures and the enigma of pulsars rotation frequency decay

H. O. de Oliveira, R. M. Marinho Jr, N. S. Magalhães

Physics Dept., Technological Institute of Aeronautics, Vila das Accias, São José dos Campos, SP, 12228-900, Brazil

E-mail: [heitor.de.oliveira@hotmail.com](mailto:heitor.de.oliveira@hotmail.com)

**Abstract.** Pulsars are astrophysical objects normally modelled as compact neutron stars that originated from the collapse of another star. This model, that we name canonical, assumes that pulsars are described by spherical magnetized dipoles that rotate, usually with the magnetic axis misaligned to the rotation axis. This misalignment would be responsible for the observation of radiation emitted in well-defined time intervals in a certain direction (lighthouse effect), the typical observational characteristic of this kind of star. It has been noticed that the rotation frequency of pulsars is slowly decaying with time (spin down), implying a gradual decrease of the rotational angular velocity ( $\Omega$ ). Such decay can be quantified by a dimensionless parameter called “braking index” (“ $n$ ”), given by  $n = \Omega \dot{\Omega} / (\dot{\Omega})^2$ , where a dot indicates a time derivative. The canonical model predicts that this index has one only value for all pulsars, equal to three. However, observational data indicate that actual braking indices are less than three, representing an enigma. The main goal of this research is the exploration of a more precise model for pulsars’ rotation frequency decay.

### 1. Introduction

In July 1967, scientists at the University of Cambridge detected signals using a radio telescope. The observed signals were not only isolated peaks, but periodic pulses and, according the authors, “clearly displays the regular periodicity and also the characteristic irregular variation of pulse amplitude.” [1]

Pulsar became the name of the new phenomenon, an abbreviation of pulsating stars, “The constancy of frequency in the recently discovered pulsed radio sources can be accounted for by the rotation of a neutron star.” [2]

According to Gold [3], pulsars have a strong magnetic field and high rotational speeds, and the radiation is released as a pattern of a rotating beacon.

Neutron stars are the remnants of the supernova process. The compression of the remains of the star after the supernova effect also implies a compression of magnetic field leaving it stronger where the field strength is greatest at its poles due to a larger magnetic density. The gravitational attraction of the remains of the star that went through a supernova process results in an extremely compact object with radius of about 10 km, which has high-speed rotation due to conservation of angular momentum.

The discovery of the first pulsar and curiosity by this object led the analysis and discovery of more pulsars. The pulsar B0531+21, in the Crab Nebula, had an increase in its period [4] and



## A Model for the Braking Indices of Pulsars

Heitor O. de Oliveira, Rubens M. Marinho Jr.

*Departamento de Física*  
*Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)*  
*Praca Marechal Eduardo Gomes 50, 12228-900 São Jose dos Campos, SP, Brazil*  
*heitoroliveiradeoliveira@gmail.com, marinho.rubens@gmail.com*

Nadja S. Magalhães

*Departamento de Física*  
*Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP)*  
*Rua São Nicolau 210, 09913-030 Diadema, SP, Brazil*  
*nadjasm@gmail.com*

Published 15 August 2017

Stars known as pulsars are generally modeled as magnetized spheres made of neutrons with high rotation frequency. It is known that such stars are spinning down and this braking is measured by a parameter,  $n$ , known as braking index. For the canonical model such parameter should have a single value for all pulsars:  $n = 3$ . However, from observations it is known that  $n$  diverges from 3. In this work, differently from the canonical model, we have hypothesized the existence of a variation of the moment of inertia of the star through a time-varying radius. Using energy conservation we find the values for the variation of the radius of our pulsar sample. Our results indicate that it may be reasonable to consider that the radius of pulsars can be changing with time.

*Keywords:* Pulsars, Star Rotation, Magnetic Fields.

PACS numbers: 97.60.Jd, 97.60.Gb, 26.60

### 1. Introduction

Pulsars are generally modeled as neutron stars, and they are referred to as pulsating because signals received from them arrive in the form of well-defined radio pulses<sup>1</sup>. This effect is basically explained assuming a strong magnetic field and high speed rotation of a neutron star, leading to radiation in the form of a rotating beacon<sup>2</sup> whose emission is given by a rotating dipole with magnetic axis inclined relative to the axis of rotation<sup>3</sup>.

This is an Open Access article published by World Scientific Publishing Company. It is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 (CC-BY) License. Further distribution of this work is permitted, provided the original work is properly cited.

## Bayesian Inference Applied to Pulsar's Models

Rubens M. Marinho Jr., Heitor O. de Oliveira

*Departamento de Física  
Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)  
12228-900 São José dos Campos, São Paulo, Brazil  
marinho@ita.br, heitor.de.oliveira@hotmail.com*

Nadja S. Magalhães, Rodolfo Valentim

*Departamento de Física  
Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP)  
09913-030 Diadema, São Paulo, Brazil  
nadjas@gmail.com, r.valentim@gmail.com*

Jaziel G. Coelho

*Divisão de Astrofísica  
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)  
12227-010 São José dos Campos, São Paulo, Brazil  
jaziel.coelho@inpe.br*

Márcio E. S. Alves

*Instituto de Ciência e Tecnologia  
Universidade Estadual Paulista (UNESP)  
12247-016 São José dos Campos, São Paulo, Brazil  
marcio.alves@ict.unesp.br*

Published 15 August 2017

The goal of this work is to apply Bayesian statistics to the problem of pulsars in order to compute the Bayes factor and investigate which one among different EoS could better fit known pulsar data, regarding the rate of decrease of the angular velocity versus the angular velocity itself. We also find the posterior distribution and the best fit for some relevant parameters of the pulsar like the mass and the magnetic field.

*Keywords:* Pulsar, Equation of State, Bayesian Statistics.

PACS numbers: 04.30.-w, 04.30

This is an Open Access article published by World Scientific Publishing Company. It is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 (CC-BY) License. Further distribution of this work is permitted, provided the original work is properly cited.

# Relating braking indices of young pulsars to the dynamics of superfluid cores

**H.O. Oliveira,<sup>a,1</sup> N.S. Magalhaes,<sup>a,b</sup> R.M. Marinho Jr.,<sup>a</sup>  
G.A. Carvalho<sup>a,c,d</sup> and C. Frajuca<sup>e</sup>**

<sup>a</sup>Graduate Program in Physics, Technological Institute of Aeronautics,  
Praça Marechal Eduardo Gomes 50, Sao Jose dos Campos, SP 12228-900, Brazil

<sup>b</sup>Department of Physics, Federal University of Sao Paulo,  
Rua Sao Nicolau 210, Diadema, SP 09913-030, Brazil

<sup>c</sup>Dipartimento di Fisica and ICRA, Sapienza Università di Roma,  
P.le Aldo Moro 5, I-00185 Rome, Italy

<sup>d</sup>ICRANet,  
P.zza della Repubblica 10, I-65122 Pescara, Italy

<sup>e</sup>Federal Institute of Education, Science and Technology of Sao Paulo,  
R. Pedro Vicente 625, Sao Paulo, SP 01109-010, Brazil

E-mail: [heitoroliveiradeoliveira@gmail.com](mailto:heitoroliveiradeoliveira@gmail.com), [nadja.magalhaes@unifesp.br](mailto:nadja.magalhaes@unifesp.br),  
[marinho@ita.br](mailto:marinho@ita.br), [geanderson.araujo.carvalho@gmail.com](mailto:geanderson.araujo.carvalho@gmail.com), [frajuca@ifsp.edu.br](mailto:frajuca@ifsp.edu.br)

Received August 16, 2018

Revised October 14, 2018

Accepted November 7, 2018

Published November 19, 2018

---

<sup>1</sup>Corresponding author.

**Abstract.** Pulsars are stars that emit electromagnetic radiation in well-defined time intervals. The frequency of such pulses decays with time as is quantified by the *braking index* ( $n$ ). In the canonical model  $n = 3$  for all pulsars, but observational data show that  $n \neq 3$ , indicating a limitation of the model. In this work we present a new approach to study the frequency decay of the rotation of a pulsar, based on an adaptation of the canonical one. We consider the pulsar a star that rotates in vacuum and has a strong magnetic field but, differently from the canonical model, we assume that its moment of inertia changes in time due to a uniform variation of a displacement parameter in time. We found that the braking index results smaller than the canonical value as a consequence of an increase in the star's displacement parameter, whose variation is small enough to allow plausible physical considerations that can be applied to a more complex model for pulsars in the future. In particular, this variation is of the order of neutron vortices' creep in rotating superfluids. When applied to pulsar data our model yielded values for the stars' braking indices close to the observational ones. The application of this approach to a more complex star model, where pulsars are assumed to have superfluid interiors, is the next step in probing it. We hypothesize that the slow expansion of the displacement parameter might mimic the motion of core superfluid neutron vortices in realistic models.

**Keywords:** massive stars, neutron stars, stars

**ArXiv ePrint:** [1807.11474](https://arxiv.org/abs/1807.11474)

# The dynamics of neutron star superfluid cores and braking indices of young pulsars

H. O. Oliveira<sup>1</sup>, N. S. Magalhaes<sup>1,2</sup>, R. M. Marinho, Jr.<sup>1</sup>, G. A. Carvalho<sup>1,3,4</sup> & C. Frajuca<sup>5</sup>,

<sup>1</sup> Graduate Program in Physics, Technological Institute of Aeronautics, Praça Marechal Eduardo Gomes 50, São José dos Campos, SP 12228-900, Brazil. e-mail: heitoroliveiradeoliveira@gmail.com e-mail: marinho@ita.br e-mail: geanderson.araujo.carvalho@gmail.com

<sup>2</sup> Federal University of São Paulo, Department of Physics, Rua São Nicolau 210, Diadema, SP 09913-030, Brazil. e-mail: nadja.magalhaes@unifesp.br

<sup>3</sup> Dipartimento di Fisica and ICRA, Sapienza Università di Roma, P.le Aldo Moro 5, I-00185 Rome, Italy.

<sup>4</sup> ICRA Net, P.zza della Repubblica 10, I-65122 Pescara, Italy.

<sup>5</sup> Federal Institute of Education, Science and Technology of São Paulo, R. Pedro Vicente 625, São Paulo, SP 01109-010, Brazil. e-mail: Frajuca@ifsp.edu.br

**Abstract.** Pulsars are modeled as neutron stars originated from the collapse of a progenitor one. In the canonical model they are described by spherical magnetized dipoles that rotate with the magnetic axis usually misaligned relative to the rotation axis, and such misalignment would explain the observation of radiation emitted in pulses in a certain direction rendering the typical observational characteristic of this kind of star. The frequency of such pulses decays with time and it can be quantified by the *braking index* ( $n$ ). In the canonical model  $n = 3$  for all pulsars but observational data show that  $n \neq 3$ . In this work we present a model for the understanding of the frequency decay of the rotation of a pulsar adapting the canonical one. We consider the pulsar a star that rotates in vacuum and has a strong magnetic field but, in contrast to the canonical model, we assume that its moment of inertia changes in time due to a uniform variation of a displacement parameter in time. We found that the braking index results smaller than the canonical value as a consequence of an increase in the star's displacement parameter. We relate this variation to neutron vortices' creep in rotating superfluids, indicating a possible reason for this coincidence.

**Resumo.** Os pulsares são modelados como estrelas de nêutrons originadas do colapso de um progenitor. No modelo canônico eles são descritos por dipolos esféricos magnetizados que giram com o eixo magnético geralmente desalinhado em relação ao eixo de rotação, e tal desalinhamento deveria explicar a observação da radiação emitida em pulsos em uma certa direção, uma característica observacional comum deste tipo de estrela. A frequência de tais pulsos decai com o tempo e pode ser quantificada pelo *índice de frenagem* ( $n$ ). No modelo canônico  $n = 3$  para todos os pulsares, mas os dados observacionais mostram que  $n \neq 3$ . Neste trabalho apresentamos um modelo para a compreensão do decaimento de frequência da rotação de um pulsar adaptando o modelo canônico. Consideramos o pulsar uma estrela que gira no vácuo e tem um forte campo magnético, mas, em contraste com o modelo canônico, assumimos que seu momento de inércia muda no tempo devido a uma variação uniforme de um parâmetro de deslocamento no tempo. Descobrimos que o índice de frenagem é menor do que o valor canônico como consequência de um aumento no parâmetro de deslocamento da estrela. Nós relacionamos essa variação com o movimento de vórtices de nêutrons em superfluidos girantes, indicando uma possível razão para essa coincidência.

**Keywords.** Stars: neutron – Stars: rotation – Stars: magnetic field

## 1. Introduction

Pulsars are considered neutron stars that emit electromagnetic radiation in well-defined time intervals, rotate rapidly and are highly magnetized. The observed magnetic radiation is generated from its magnetosphere and is emitted due to the misalignment of the axis of rotation with respect to the magnetic axis of the star in the pattern from a rotating beacon (Gold 1968).

The model to explain the frequency of the neutron stars' pulses (Gunn & Ostriker 1969), which we will call the canonical model, predicts a gradual deceleration of the rotation of these stars, quantified by a dimensionless parameter known as braking index, represented by " $n$ ". In that model this parameter has a theoretical value equal to 3 (Glendenning 2000), but results derived from the observation are different from that predicted in the theoretical model, indicating that the canonical model needs improvement.

To this end the pulsar wind model (Xu & Qiao 2001) was presented in recent times yielding  $n = 1$  such that, when combined with the contribution due to the magnetic dipole ( $n = 3$ ),

has presented interesting results although insufficient. A similar reasoning is followed in the work by Kou & Tong (2015).

In another investigation a phenomenological function was proposed in the energy conservation formula with the introduction of parameters which, although unrelated to known physical variables, allowed the prediction of ranges for braking indices (Magalhaes et al. 2012). A different approach by Allen & Horvath (1997) proposed an increase in the angle between the magnetic moment and rotation axis as the cause of the evolution of the torque, while Magalhaes et al. (2016) investigated the possibility of an effective force acting on the star which varies with the first power of the tangential velocity of the crust of the pulsar.

In this work we focus on the internal dynamics of the pulsar: the interior of these stars present a significant amount of matter in the form of superfluid neutrons (Baym et al. 1969) and it is also expected that the coupling and decoupling of this matter alter the long-term dynamics that leads to the measurement of the braking index and therefore producing changes in the pure

# Using pulsar's braking indices to estimate changes in their moments of inertia with age-related considerations

H O Oliveira <sup>1</sup>, N S Magalhaes <sup>1,2</sup>, R M Marinho, Jr <sup>1</sup>, G A Carvalho <sup>1,3,4</sup> and C Frajuca <sup>5</sup>,

<sup>1</sup>Graduate Program in Physics, Technological Institute of Aeronautics, Praça Marechal Eduardo Gomes 50, Sao Jose dos Campos, SP 12228-900, Brazil.

E-mail: [heitoroliveiradeoliveira@gmail.com](mailto:heitoroliveiradeoliveira@gmail.com)

<sup>2</sup>Federal University of Sao Paulo, Department of Physics, Rua Sao Nicolau 210, Diadema, SP 09913-030, Brazil.

E-mail: [nadja.magalhaes@unifesp.br](mailto:nadja.magalhaes@unifesp.br)

<sup>3</sup>Dipartimento di Fisica and ICRA, Sapienza Università di Roma, P.le Aldo Moro 5, I-00185 Rome, Italy.

<sup>4</sup>ICRANet, P.zza della Repubblica 10, I-65122 Pescara, Italy.

<sup>5</sup>Federal Institute of Education, Science and Technology of Sao Paulo, R. Pedro Vicente 625, Sao Paulo, SP 01109-010, Brazil.

**Abstract.** Pulsars are modeled as neutron stars originated from the collapse of a progenitor one. In the canonical model they are described by spherical magnetized dipoles that rotate with the magnetic axis usually misaligned relative to the rotation axis, and such misalignment would explain the observation of radiation emitted in pulses in a certain direction rendering the typical observational characteristic of this kind of star. The frequency of such pulses decays with time and it can be quantified by the *braking index* ( $n$ ). In the canonical model  $n = 3$  for all pulsars but observational data show that  $n \neq 3$ . In this work we present a model for the understanding of the frequency decay of the rotation of a pulsar adapting the canonical one. We consider the pulsar a star that rotates in vacuum and has a strong magnetic field but, in contrast to the canonical model, we assume that its moment of inertia changes in time due to a uniform variation of a displacement parameter in time. We found that the old pulsars that present high values of the braking index tend to present smaller internal displacements of mass, in particular the superfluid neutron matter in the core. We relate this trend to neutron vortices' creep in rotating superfluids, indicating a possible reason for this coincidence.

## 1. Introduction

Pulsars are considered neutron stars that emit electromagnetic radiation in well-defined time intervals, rotate rapidly and are highly magnetized. The observed magnetic radiation is generated from its magnetosphere and is emitted due to the misalignment of the axis of rotation with respect to the magnetic axis of the star in the pattern from a rotating beacon [1].

The model to explain the frequency of the neutron stars' pulses [2], which we will call the canonical model, predicts a gradual deceleration of the rotation of these stars, quantified by a dimensionless parameter known as braking index, represented by “ $n$ ”. In that model this



## FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO TD	2. DATA 28 de agosto de 2019	3. DOCUMENTO Nº DCTA/ITA/TD-025/2019	4. Nº DE PÁGINAS 120
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: Relacionando índices de frenagem de jovens pulsares à estrutura superfluida de seu núcleo			
6. AUTOR(ES): <b>Heitor Oliveira de Oliveira</b>			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: Índice de frenagem; Pulsar; Estrelas de nêutrons.			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Estrelas de nêutrons; Frenagem; Índices; Velocidade angular; Astronomia; Física.			
10. APRESENTAÇÃO: <span style="float: right;"><input checked="" type="checkbox"/> Nacional    <input type="checkbox"/> Internacional</span> ITA, São José dos Campos. Curso de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Física Nuclear. Orientadora: Profa. Dra. Nadja Simão Magalhães. Defesa em 07/08/2019. Publicada em 07/08/2019.			
11. RESUMO: Pulsares são estrelas que emitem radiação eletromagnética em intervalos de tempo bem definidos. A frequência de tais pulsos está diminuindo com o tempo, conforme quantificado pelo <i>índice de frenagem</i> ( $n$ ). No modelo canônico $n = 3$ para todos os pulsares, mas os dados observacionais mostram que $n \neq 3$ , indicando uma limitação do modelo. Neste trabalho apresentamos uma nova abordagem para estudar o decaimento da frequência de rotação de um pulsar, baseado em uma adaptação do modelo canônico. Consideramos o pulsar uma estrela que gira no vácuo e possui um forte campo magnético, mas, diferentemente do modelo canônico, nós admitimos que seu momento de inércia muda no tempo devido a uma variação da disposição de massa em seu interior, matematizada pela variação uniforme de um parâmetro de deslocamento no tempo. Nós descobrimos que o índice de frenagem é menor do que o valor canônico como uma consequência de um aumento no parâmetro de deslocamento da estrela, cuja variação é pequena o suficiente para permitir considerações físicas plausíveis que podem ser aplicadas a um modelo mais complexo de pulsares no futuro. Em particular, esta variação é da ordem de fluência dos vórtices de nêutrons em superfluidos rotativos. Quando aplicado aos dados do pulsar, nosso modelo forneceu valores para os índices de frenagem das estrelas próximos aos observacionais. A aplicação desta abordagem a um modelo estelar mais complexo, em que se pressupõe que os pulsares tenham interiores superfluidos, é o próximo passo para sondá-lo. Nossa hipótese é que a expansão lenta do parâmetro de deslocamento poderia imitar o movimento dos vórtices de nêutrons superfluidos do núcleo em modelos realistas. Essa contribuição não altera a irradiação da energia dipolar magnética, mas reduz a velocidade angular da estrela e, portanto, a frequência dos pulsos luminosos do pulsar, conforme se observa. Estendemos esta abordagem a outras propriedades do pulsar, fazendo análises preliminares de momento angular, idade e ângulo de inclinação.			
12. GRAU DE SIGILO: <input checked="" type="checkbox"/> <b>OSTENSIVO</b> <input type="checkbox"/> <b>RESERVADO</b> <input type="checkbox"/> <b>CONFIDENCIAL</b> <input type="checkbox"/> <b>SECRETO</b>			