

Tese apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Física Nuclear.

**Lucas Alves de Souza**

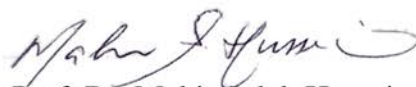
## **FÍSICA NUCLEAR DE POUCOS CORPOS EM NÚCLEOS EXÓTICOS RICOS EM NÊUTRONS**

Tese aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:



Prof. Dr. Tobias Frederico

Orientador



Prof. Dr. Mahir Saleh Hussein

Coorientador

Prof. Dr. Luiz Carlos Sandoval Góes  
Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa

Campo Montenegro  
São José dos Campos, SP - Brasil  
2017

## Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

### Divisão de Informação e Documentação

Souza, Lucas Alves de  
Física Nuclear de Poucos Corpos em Núcleos Exóticos Ricos em Nêutrons / Lucas Alves de Souza.  
São José dos Campos, 2017.  
146f.

Tese de Doutorado – Curso de Física. Área de Física Nuclear – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2017. Orientador: Prof. Dr. Tobias Frederico. Coorientador: Prof. Dr. Mahir Saleh Hussein.

1. Física de Poucos-Corpos. 2. Espalhamento Quântico. 3. Física Nuclear. 4. Núcleos Exóticos. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Título.

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SOUZA, Lucas Alves de. **Física Nuclear de Poucos Corpos em Núcleos Exóticos Ricos em Nêutrons**. 2017. 146f. Tese de Doutorado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

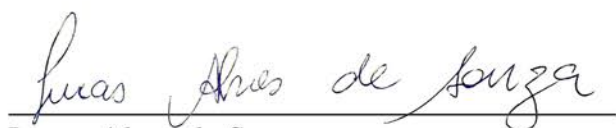
## CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Lucas Alves de Souza

TÍTULO DO TRABALHO: Física Nuclear de Poucos Corpos em Núcleos Exóticos Ricos em Nêutrons.

TIPO DO TRABALHO/ANO: Tese / 2017

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta tese e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese pode ser reproduzida sem a autorização do autor.



Lucas Alves de Souza

Armando Couto Magalhães Rodrigues, 78

12245483 – São José dos Campos–SP

# FÍSICA NUCLEAR DE POUCOS CORPOS EM NÚCLEOS EXÓTICOS RICOS EM NÊUTRONS

**Lucas Alves de Souza**

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Brett Vern Carlson	Presidente	-	ITA
Prof. Dr. Tobias Frederico	Orientador	-	ITA
Prof. Dr. Mahir Saleh Hussein	Coorientador	-	USP, ITA
Prof. Dr. Wayne Leonardo Silva de Paula	Membro Interno	-	ITA
Prof. Dr. Renato Higa	Membro Externo	-	USP
Prof. Dr. Varese Salvador Timoteo	Membro Externo	-	Unicamp

Aos meus pais.

# Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Tobias Frederico, que muito admiro, registro aqui meu agradecimento por acreditar nesse trabalho.

Ao Filipe Bellotti pela paciência, críticas e sugestões.

Ao “desorientador” Mauro Oliveira pelas discussões sobre ciência, filosofia, vida, etc.

Aos amigos de república Armstrong (ITA), Samuel (ITA) e Quirion (ITA), e os que passaram por aqui, Pipe (IEAV), Roy (INPE), Sérgio (IEAV), Manuel Chileno (INPE).

Aos amigos/irmãos que ganhei em SJC, Edson Otoniel (ITA), Lucas Bonan (ITA/EMBRATER) e Leandro Tufão (ITA/AVIBRAS); e às *girls* Gi (UFSJ/PMSJC) e Lorena (ITA/INPE).

Um agradecimento especial à German Racca (INPE), que se foi a pouco.

Aos companheiros de trabalho das salas 1604 e 1610 pelas discussões que vão de mecânica quântica à futebol: Ronaldo Lobato (ITA), Vincenzo Liccardo (ITA), Heitor Oliveira (ITA), Geanderson Carvalho (ITA), Vitor Gigante (ITA), Tiago Jesus (ITA), Maurício Pazzianoto (ITA), etc.

Obrigado aos colegas de doutorado que participaram diretamente desta tese sendo eles Jorge Alvarenga (ITA) e Emanuel Chimanski (ITA).

Aos amigos que contribuíram mesmo que distante. Obrigado!

Um agradecimento aos professores do grupo de pesquisa de Física Nuclear: Brett Carlson (ITA), Wayne de Paula (ITA), Lauro Tomio (IFT), Rubens Marinho (ITA), Manuel Malheiro (ITA), Mahir Hussein (USP) e também colaboradores, Eduardo Garrido (CSIC, Madrid), Carlos Bertulani (A&M University, Texas), Marcelo Yamashita (IFT).

À minha família, muito obrigado pelo apoio e torcida, meu pai Wellington, minha mãe Aparecida, meus irmãos Leandro Mihaus e Gustavo, e meu primo Mateus.

A Deus!

*“Obstáculos são aquilo que vemos quando afastamos nossos olhos do objetivo.”*

HENRY FORD

# Resumo

Estados quânticos chamados Efimov são constituídos por três corpos fracamente ligados e aparecem no limite em que as energias dos subsistemas de dois corpos na onda  $S$  tendem a zero. A possibilidade da existência desses estados motivou grupos de pesquisa a desenvolverem investigações sobre sistemas de poucos corpos através do formalismo do espalhamento quântico, possibilitando, dessa forma, extrair informações acerca dos observáveis físicos. Três corpos interagindo fracamente na onda  $S$  podem ser estudados teoricamente usando equações de Faddeev com potenciais de alcance zero do tipo delta de Dirac. Utilizamos esse formalismo para obter a função de onda de três corpos, onde, partindo da equação de Schrödinger, foi possível a derivação das equações integrais de Faddeev. O ingrediente essencial é a matriz  $T$  de dois corpos que é depois estendida para três corpos. As componentes da função de onda de Faddeev são soluções de equações integrais acopladas que são resolvidas numericamente. O método numérico para resolver as equações integrais já vem sendo desenvolvido por nosso grupo de pesquisa onde é possível calcular as energias de ligação de diferentes sistemas de três corpos e suas funções de onda. Investigamos núcleos exóticos (núcleos-halo) estudados como sistemas de três partículas. Esses núcleos são compostos por um caroço compacto, mais núcleons que ocupam uma órbita mais distante. Neste trabalho, investigamos o núcleo possuindo um halo de dois nêutrons. Foram calculados parâmetros importantes tal como a largura da distribuição que está ligada ao desvio padrão das distribuições. Comparamos nossos resultados com alguns núcleos halo de dois nêutrons que possuem dados experimentais e prevemos o comportamento universal das distribuições de momento do caroço que devem ser eventualmente obtidas em trabalhos experimentais futuros. Analisamos o comportamento da função de onda no espaço das configurações, e obtemos informações acerca da distribuição espacial do halo de dois nêutrons de alguns núcleos-halo como o  $^{22}\text{C}$  e  $^{11}\text{Li}$  que têm ganhado atenção da comunidade científica de física nuclear nos últimos anos. Foi feito um estudo comparando o potencial de alcance-zero com um potencial de alcance finito possibilitando analisar a universalidade de núcleos-halo.

**Palavras-Chave:** Física de Poucos-Corpos, Espalhamento Quântico, Física Nuclear, Núcleos Exóticos

# Abstract

Quantum states called Efimov states are constituted by three bodies weakly bound and appear in the limit where the binding energies of S-wave two-body subsystems tend to zero. The possibility of these states to exist motivated in the past years several groups to carry out investigations on the properties of Efimov states, thus making it possible to extract information about physical observables. Weakly bound three-body systems interacting in S-wave can be theoretically studied using Faddeev equations with Dirac delta type zero-range potentials. We use this potential to obtain the three-body wave function and our derivation of the Faddeev integral equations for the adopted model starts with the Schrödinger equation. The essential ingredient is the two-body T-matrix, which is later extended to three-bodies. The Faddeev components of the wave function are solution of a coupled set of integral equations that are solved numerically. The numerical methods to solve the set of integral equations has already been developed by our research group and it was possible to calculate the binding energies of different three-body systems and their wave functions. We investigated exotic nuclei (halo nuclei) studied as systems of three particles without structure. These nuclei are composed by a compact core and more nucleons, which occupy very large orbits. The nuclei we investigated have a halo composed by two neutrons. We studied the core recoil momentum distribution with respect to the center of mass of the system and compared to experimental results. We calculated important parameters such as the width of the distribution that is associated to the standard deviation of the momentum distributions. We investigated the dependence of this parameter with two- and three-body energies. We compared our results in the case of some two-neutron halo nuclei, where exists experimental data, and we predict a universal behavior of the core recoil momentum distribution which can be obtained eventually obtained experimentally in the future. We analyzed the behavior of the wave function in configuration space, and obtained information on the two-neutron halo spatial distribution in nuclei like  $^{22}\text{C}$  and  $^{11}\text{Li}$ , which have gained attention of the scientific community in recent years. Also a study was carried out comparing the results obtained with the zero-range potential with a finite-range potential to analyze the universality in the properties of two-neutron halo-nuclei.

**Keywords:** Few-Body Physics, Quantum Scattering, Nuclear Physics, Exotic Nuclei



# Lista de Figuras

- FIGURA 1.1 – Formação de estados ligados no limite de Efimov. Energia de ligação de três corpos como função do inverso do comprimento de espalhamento  $1/a$ . A linha horizontal indica o limiar do contínuo para o espalhamento de três corpos. A região verde marca o contínuo do sistema átomo-dímero para  $a > 0$ , a zona branca abaixo do eixo do comprimento de espalhamento indica a região onde existem 3 corpos ligados. Na física atômica a ressonância de Feshbach pode controlar a energia de ligação do dímero. Figura adaptada de (Ferlaino, F; Grimm, R., 2010). . . . . 20
- FIGURA 1.2 – Energias dos trímeros  $E_3/\mu_{(3)}^2$  em unidades de  $\mu_{(3)}^2 = 1$  em função da energia do estado ligado do dímero  $E_2/\mu_{(3)}^2$ . Os três primeiros estados são caracterizados no gráfico como: estado fundamental em vermelho (linha contínua), primeiro estado excitado em azul (linha tracejada) e segundo estado excitado em preto (linha tracejada e pontilhada). A linha pontilhada laranja representa a região em que não há mais formação de estado ligado de dois corpos ( $E_3 = E_2$ ) onde se iniciam os estados virtuais. 22
- FIGURA 1.3 – Função de escala para as energias de trímeros de Efimov.  $E_3^n$  é a energia do n-ésimo estado de Efimov,  $E_2$  é o módulo da energia do dímero ligado ou virtual,  $E_2^* = E_2$  para um dímero ligado e 0 para estado virtual. A região amarelo claro mostra a situação onde dímeros são ligados ( $a > 0$ ), e a região amarela escuro corresponde a um dímero no estado virtual ( $a < 0$ ), ocorrendo a ligação borromeana. O ponto correspondente ao limite de Efimov é o círculo vermelho. O quadrado verde mostra o ponto onde o trímero é formado no limiar do contínuo átomo-dímero. O triângulo azul indica quando o trímero encontra o limiar contínuo de três corpos. O ponto no qual  $n + 2$ -ésimo estado de Efimov torna-se ligado ( $E_2 = E_3^{(n+2)}$ ) também é indicado. . . . . 23

- FIGURA 1.4 – Esquema de classificação de três corpos com relação a energia de ligação de dois corpos. À esquerda o caso com 3 corpos ligados onde não existe estado ligado de dois corpos (Borromeano). A seguir, ao centro o caso com estados ligados dos dois corpos idênticos (ROBICHEAUX, 1999) e o outro em que os dois corpos não apresentam estado ligado entre si mas há ligação de dois corpos de cada uma das duas partículas idênticas com relação ao caroço. Na figura da direita o caso em que há estados ligados de dois corpos entre todos os três entre si (YAMASHITA *et al.*, 2003). . . . . 24
- FIGURA 1.5 – Figura retirada da Referência (STIPANOVIĆ *et al.*, 2014) mostrando o tamanho versus o valor absoluto da energia do estado fundamental (dada na Referência (STIPANOVIĆ *et al.*, 2014) por  $(B)$ ) em halos moleculares de três corpos. Todos os casos do esquema de classificação de três corpos podem ser vistos. Detalhes dos modelos de curto alcance utilizados são discutidos na referência (STIPANOVIĆ *et al.*, 2014). . . . . 25
- FIGURA 1.6 – Comprimento de espalhamento  $a$  como função do campo magnético  $B$  para o  $^{87}\text{Rb}$  no canal hiperfino  $|f, m_f\rangle = |1, 1\rangle$ . A linha horizontal pontilhada indica comprimento de espalhamento direto  $a_{bg} = 100a_0$  (com  $a_0$  sendo o raio de Bohr), e a linha vertical indica a ressonância para o campo magnético  $B_0 = 1007.4$  G. A largura do campo é dada por  $\Delta B = 0.2$  G. Figura retirada de (MARCELIS *et al.*, 2004). . . . . 27
- FIGURA 1.7 – Tabela de núclídeos contendo informações sobre o tipo de decaimento radioativo e enfatizando os núcleos exóticos com *halos* de um e dois nêutrons. Os núclídeos estáveis aparecem em preto representando uma linha de estabilidade enquanto que os instáveis são os demais. Dados da tabela obtidos de (NNDC, 2017). . . . . 29
- FIGURA 1.8 – Limiar crítico para o aparecimento de um estado excitado de Efimov  $(n + 1)$  de um sistema  $nnn$ . As energias de dois corpos,  $E_{nn}$  e  $E_{nc}$ , são dadas em termos da energia de separação de dois nêutrons  $S_{2n}$  e podem ser ligadas (valores positivos da raiz quadrada) ou virtuais (valores negativos). Um número crescente de estados excitados de três corpos deve emergir quando diminui o valor das razões  $E_{nn}/S_{2n}$  e  $E_{nc}/S_{2n}$ . O limite Efimov exato, com um número infinito de estados excitados de três corpos, é dado por  $E_{nn} = E_{nc} = 0$ . Os dados experimentais dos núcleos de carbono  $^{18}\text{C}$  e  $^{20}\text{C}$  vêm das Refs. (AMORIM *et al.*, 1997; CANHAM; HAMMER, 2008), com a energia de separação de dois nêutrons do  $^{22}\text{C}$  da Ref. (TANAKA *et al.*, 2010). . . . . 32

- FIGURA 1.9 – Gráfico tridimensional recombinando a região limite dos estados excitados de Efimov (Fig. 1.3) com a função de escala da Fig. 1.8. Fonte: (FREDERICO *et al.*, 2012). . . . . 33
- FIGURA 3.1 – Momentos relativos de Jacobi. À esquerda representamos o momento relativo do caroço ao centro de massa do par nêutron-nêutron ( $\vec{p}_c$  e  $\vec{q}_c$ ). À direita temos o momento relativo do nêutron ao centro de massa do subsistema caroço-nêutron ( $\vec{q}_n$  e  $\vec{p}_n$ ). Figura construída baseando-se na Fig. A.1. . . . . 60
- FIGURA 3.2 – Função espectadora  $f_{nm}$  em função do momento do caroço  ${}^9\text{Li}$ , correspondendo ao sexto estado excitado do  ${}^{11}\text{Li}$  (azul) comparada com a forma assintótica (em vermelho). A função  $f_{nm}$  foi normalizada arbitrariamente para efeito de comparação com a forma assintótica. Definimos  $E_0 = \hbar^2 \mu_{(3)}^2 / m_n$  onde  $m_n$  é a massa do núcleon, trabalhamos com  $\hbar = m_n = \mu_{(3)}^2 = 1$ . . . . . 62
- FIGURA 3.3 – Função espectadora  $f_{nm}$  em função do momento do caroço  ${}^{20}\text{C}$ , correspondendo ao oitavo estado excitado do  ${}^{22}\text{C}$  (azul) comparada com a forma assintótica (vermelho). As definições de unidades são as mesmas da figura 3.2. . . . . 63
- FIGURA 3.4 – Distribuição de momento do caroço  ${}^{20}\text{C}$  com relação ao subsistema  $nn$ . A legenda do gráfico indica as curvas correspondentes ao estado fundamental, primeiro e segundo estados excitados. O ciclo limite é notado na figura, visto que para diferentes funções de onda referente a diferentes estados, a distribuição de momentos exhibe o mesmo formato. As energias de ligação dos subsistemas são  $E_{nn} = E_{nc} = 0$ . . . . . 65
- FIGURA 3.5 – Parâmetro ( $\sigma$ ) da distribuição de momentos dos caroços de núcleos-halo como função da massa nuclear do caroço  $A$  no limite Efimov ( $E_{nn} = E_{nc} = 0$ ). Os pontos experimentais são referentes aos núcleos  ${}^{11}\text{Li}$  de (TANIHATA, 1996) e  ${}^{14}\text{Be}$  de (ZAHAR *et al.*, 1993). . . . . 66
- FIGURA 3.6 – Função de escala para a correlação da largura da distribuição de momento ( $\sigma$ ) no  ${}^{11}\text{Li}$  (*superior*) e também para o  ${}^{14}\text{Be}$  (*inferior*) para uma energia do estado virtual  $nn$  fixa (-143 keV). Os valores experimentais de  $S_{2n}$  são 369 keV (SMITH *et al.*, 2008) e 1.337 MeV (AUDI *et al.*, 2003) para  ${}^{11}\text{Li}$  e  ${}^{14}\text{Be}$ , respectivamente. A linhas pontilhadas representam a região delimitada pelo valor experimental  $\text{FWHM} = 92.7 \pm 2.7 \text{ MeV}/c$  (ZAHAR *et al.*, 1993). . . . . 67

- FIGURA 3.7 – Função de escala ( $\sigma$ ) da distribuição de momento de recuo do caroço do  $^{20}\text{C}$ . . . . . 68
- FIGURA 3.8 – Função de escala ( $\sigma$ ) da distribuição de momentos de recuo do caroço do  $^{22}\text{C}$ . . . . . 69
- FIGURA 3.9 – Distribuições de momentos de recuo dos caroços  $^{11}\text{Li}$  (*superior*) e  $^{20}\text{C}$  (*inferior*) observados nas reações de quebra com alvos de carbono. A distribuição estreita para o  $^{11}\text{Li}$  é calculada para  $S_{2n} = 369$  keV (SMITH *et al.*, 2008), a energia do estado virtual na onda S do  $^{10}\text{Li}$  é  $E_{nc} = -50$  keV e a energia do estado virtual  $nn$  é  $E_{nn} = -143$  keV. O resultado da distribuição com  $\sigma_{th} = 21.5$  MeV/c é adicionado a outra distribuição larga com  $\sigma_{exp} = 80$  MeV/c. Os cálculos foram realizados para valores experimentais (AUDI *et al.*, 2003) de  $S_{2n} = 3.5$  MeV para  $^{20}\text{C}$ , com  $E_{nc} = 580$  keV para o subsistema  $^{19}\text{C}$ . Os resultados experimentais do  $^{11}\text{Li}$  são extraídos de (TANIHATA, 1996) e para o  $^{20}\text{C}$  de (KOBAYASHI *et al.*, 2012). A distribuição para  $^{20}\text{C}$  foi convoluída com uma distribuição com a resolução experimental de  $\sigma = 28$  MeV/c. . . . . 70
- FIGURA 3.10 – *superior*: Distribuição do momento de recuo do caroço do  $^{22}\text{C}$  obtido no modelo alcance zero comparada aos dados experimentais de (KOBAYASHI *et al.*, 2012) para diferentes parâmetros. Para cada curva são mostrados resultados para  $(S_{2n}[\text{keV}], E_{nc}[\text{MeV}])$  com a uma resolução experimental  $\sigma = 27$  MeV/c e a distribuição é somada a uma curva normal com  $\sigma = 89.6$  MeV/c: linha sólida (100,0), linha pontilhada (100,-1) e linha tracejada (400,-1). *inferior*: Função de escala ( $\sigma$ ) do momento do caroço no  $^{22}\text{C}$  para energias do estado virtual de dois corpos (-143 keV) e energia de separação  $S_{2n}$  de 100 keV (linha tracejada), 250 keV (linha pontilhada) e 400 keV (linha sólida). . . . . 72
- FIGURA 3.11 – Distribuições de momentos de recuo do caroço do  $^{22}\text{C}$  e  $^{21}\text{C}$  sem convoluções. As energias do  $^{22}\text{C}$  são  $S_{2n} = 400$  keV e  $E_V[^{21}\text{C}] = -1$  MeV, e do  $^{21}\text{C}$ ,  $S_{2n} = 3.5$  MeV e  $E[^{19}\text{C}] = 580$  MeV. Os dados experimentais são os mesmos usados nas Figs. 3.9 e 3.10. . . . . 73

- FIGURA 4.1 – Energia de separação de dois nêutrons  $S_{2n}$  como função de  $r_n$ . Os círculos e quadrados são cálculos incluindo as componentes  $\ell_x, \ell_y \leq 8$  e as componentes  $\ell_x = \ell_y = 0$ , respectivamente. As curvas sólidas são aquelas mostradas na Fig. 22 da Ref. (FREDERICO *et al.*, 2012) onde a superior corresponde à  $E_{nc} = 0$  e a inferior  $E_{nc} = -100$  keV. Os triângulos e as estrelas são cálculos com somente ondas  $S$  mas substituindo a força de três corpos na Eq. (4.9) por uma gaussiana e uma exponencial Eq. (4.10) (com o alcance  $\rho_0 = 5$  fm em ambos os casos), respectivamente. 80
- FIGURA 4.2 – A mesma função de escala usada na Fig. 4.1 mas configurando (a)  $\rho_0 = 3$  fm e (b)  $\rho_0 = 1$  fm para o alcance da força de três corpos. . . . . 83
- FIGURA 4.3 – Definição do ângulo polar  $\theta'_x$  para duas possibilidades de coordenadas (o caroço nuclear é representado pelo círculo maior, e os nêutrons pelos menores). . . . . 84
- FIGURA 4.4 – Densidade nêutron-halo  $\eta_n(r_n)$  no  $^{22}\text{C}$  com dois diferentes potenciais de três corpos, o potencial dependente da força (4.9) em (a) e o potencial Gaussiano (4.10) em (b), comparados ao modelo de alcance zero (representado pelas linhas pretas com círculos). Dois valores de  $S_{2n}$  são usados para os cálculos: 250 keV (curvas tracejadas) e 1000 keV (curvas sólidas). A energia do  $^{21}\text{C}$  é fixa para  $E_{nc} = 0$ . Dois diferente alcances foram considerados para a força de três corpos  $\rho_0 = 1$  fm (curvas azuis) e  $\rho_0 = 5$  fm (curvas vermelhas). . . . . 86
- FIGURA 4.5 – Curvas Pretas: O mais baixo potencial efetivo adiabático  $V(\rho)$  (como dado na Eq.(4.8)) para o  $^{22}\text{C}$  quando  $E_{nc} = 0$  e  $\ell_x = \ell_y = 0$ . Curvas Sólidas: O mais baixo potencial efetivo somando as forças de três corpos produzindo um estado  $^{22}\text{C}$  com  $S_{2n} = 1000$  keV. Curvas tracejadas: O mais baixo potencial efetivo somando as forças de três corpos produzindo um estado  $^{22}\text{C}$  com  $S_{2n} = 250$  keV. Dois diferentes alcances são considerados para a força de três corpos,  $\rho_0 = 1$  fm (curvas azuis), e  $\rho_0 = 5$  fm (curvas vermelhas). Em (a) a força de três corpos corresponde à dependência de uma potência na Eq.(4.9), e em (b) a força de três corpos tem uma forma Gaussiana dada na Eq.(4.10). . . . . 91
- FIGURA 4.6 – Gráficos dos contornos para a densidade  $F(r_x^\perp, r_x^\parallel)$  definida na Eq.(4.22) para o ângulo polar  $\theta'_x$  definido na Fig.4.3a e um alcance do potencial de  $\rho_0=5$  fm. Os painéis (a), (b), (c), e (d) correspondem às energias  $S_{2n}$  de 1000 keV, 500 keV, 250 keV, and 50 keV, respectivamente. . . . . 92

FIGURA 4.7 – Estrutura do halo referente ao potencial de alcance zero. As colunas separam os painéis referentes a diferentes energias de separação de dois nêutrons, sendo os painéis (a), (b), (c) e (d) com $S_{2n}$ de 1000 keV, 500 keV, 250 keV e 50 keV, respectivamente. . . . .	92
FIGURA 4.8 – Densidade $F(r_x^\perp, r_x^\parallel)$ como na Figura 4.6 mas com o ângulo polar $\theta'_x$ definido em Fig.4.3b. . . . .	93
FIGURA A.1 – Sistema de coordenadas para um sistema de três corpos. À esquerda (a) temos o esquema da posição das três partículas (A, B e C) com relação ao centro de massa do sistema de três corpos no espaço das configurações. Do lado direito o esquema dos momentos relativos de Jacobi das três partículas. . . . .	108
FIGURA B.1 – Espalhamento de uma onda plana incidente por um potencial. (a) antes da colisão e (b) depois da colisão. . . . .	112
FIGURA B.2 – Relação de variáveis no espalhamento por um potencial. . . . .	120
FIGURA D.1 – Transformada de Fourier do sistema de coordenadas de Jacobi do espaço dos momentos à esquerda e seus referentes vetores no espaço das coordenadas à direita. . . . .	127
FIGURA D.2 – Sistema de coordenadas de $n - n - c$ com relação ao centro de massa. . . . .	128
FIGURA E.1 – Coordenadas do sistema . . . . .	136
FIGURA F.1 – Coordenadas de Jacobi para o sistema de quatro corpos. . . . .	138
FIGURA F.2 – Ilustração do esquema angular para integração. . . . .	141
FIGURA G.1 – Coordenadas da reação de quebra de um núcleo-halo de dois nêutrons com um alvo pesado. . . . .	143

# Lista de Tabelas

<p>TABELA 1.1 – Propriedade de alguns núcleos-halo de três corpos (nêutron+nêutron+caroço). Os momentos angulares possíveis são representados por <math>l</math>, <math>r_{core}^{rms}</math> e <math>r_{tot}^{rms}</math> são os raios quadrados médios do caroço e do núcleo total, respectivamente. <math>\rho</math> e <math>\rho_0</math> são definidos nas Eqs. (1.2) e (1.3). A tabela está na Referência: (RIISAGER, 2013). . . . .</p>	30
<p>TABELA 4.1 – Energias de dois corpos <math>E_{nc}</math>, comprimento de espalhamento <math>a_{nc}</math>, e alcance efetivo <math>r_0</math> para ondas <math>S</math> do <math>n-^{20}\text{C}</math> para diferentes de valores da força <math>V_c</math>. . . . .</p>	78
<p>TABELA 4.2 – Valores de <math>S_{2n}</math> (em MeV), <math>\langle \rho^2 \rangle</math> (em fm<sup>2</sup>), e <math>r_n</math> (em fm), para diferentes valores da força de três corpos <math>V_{3B}^P</math>, Eq.(4.9), com <math>\rho_0 = 5</math> fm e para <math>V_c = -21.0</math> MeV. O lado esquerdo da tabela são os resultados incluindo as componentes com <math>\ell_x, \ell_y \leq 8</math>, e o lado direito mostra os resultados incluindo somente as componentes <math>\ell_x = \ell_y = 0</math>. . . . .</p>	79

# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	19
1.1	<b>Física de poucos corpos</b> . . . . .	19
1.1.1	Controle da interação de poucos corpos em física atômica . . . . .	26
1.2	<b>Física nuclear de poucos corpos</b> . . . . .	27
1.2.1	Estados excitados de Efimov e estrutura dos núcleos-halo . . . . .	30
1.2.2	Tamanho dos núcleos exóticos com halos de dois nêutrons . . . . .	37
1.3	<b>Organização da Tese</b> . . . . .	39
2	ESTADOS LIGADOS NA FÍSICA DE POUCOS CORPOS . . . . .	41
2.1	<b>Mecânica Quântica de Poucos Corpos</b> . . . . .	41
2.1.1	Efeito Efimov . . . . .	42
2.2	<b>Formalismo - Equações de Faddeev</b> . . . . .	43
2.2.1	Equações de Faddeev para Funções de Onda de Espalhamento . . . . .	43
2.2.2	Equações de Faddeev para a matriz de transição . . . . .	46
2.2.3	Matriz de Transição para o Potencial de Alcance zero e Elementos de Matriz . . . . .	48
2.3	<b>Equações de Faddeev para Estados Ligados</b> . . . . .	52
3	DISTRIBUIÇÕES DE MOMENTO DE NÚCLEOS HALO DE DOIS NÊUTRONS . . . . .	58
3.1	<b>Função de onda no espaço dos momentos</b> . . . . .	59
3.2	<b>Distribuição de momento de recuo do caroço</b> . . . . .	62
4	ESTRUTURA DO HALO DO $^{22}\text{C}$ . . . . .	74
4.1	<b>Função de onda do modelo de alcance zero</b> . . . . .	74
4.2	<b>Função de onda do modelo de alcance finito</b> . . . . .	75



---

<b>4.3</b>	<b>Raio e energia de separação de dois nêutrons</b> . . . . .	77
<b>4.4</b>	<b>Densidade de nêutron do halo</b> . . . . .	84
4.4.1	Geometria do halo . . . . .	88
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS</b> . . . . .	94
<b>5.1</b>	<b>Conclusões</b> . . . . .	94
<b>5.2</b>	<b>Perspectivas Futuras</b> . . . . .	97
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	100
	<b>APÊNDICE A – COORDENADAS E MOMENTOS RELATIVOS DE JACOBI</b>	108
	<b>APÊNDICE B – ELEMENTOS DO ESPALHAMENTO QUÂNTICO</b> . . . . .	112
<b>B.1</b>	<b>Espalhamento de uma partícula por um potencial - Equação de Lippmann-Schwinger</b> . . . . .	112
B.1.1	Espalhamento de uma partícula por um potencial . . . . .	112
B.1.2	Seção de Choque . . . . .	114
<b>B.2</b>	<b>Cálculo da Amplitude de Espalhamento</b> . . . . .	116
	<b>APÊNDICE C – MÉTODO NUMÉRICO PARA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS</b> . . . . .	122
<b>C.1</b>	<b>Solução numérica da equação do estado ligado de três corpos idênticos (AAA)</b> . . . . .	122
<b>C.2</b>	<b>Solução Numérica da Equação do Estado Ligado de 3 corpos Distintos (ABC)</b>	124
	<b>APÊNDICE D – TRANSFORMADA DE FOURIER DA FUNÇÃO DE ONDA</b> .	127
	<b>APÊNDICE E – DISTRIBUIÇÕES DE MOMENTO NA APROXIMAÇÃO EIKONAL</b> . . . . .	136
<b>E.1</b>	<b>Distribuições de momento na aproximação eikonal</b> . . . . .	136
	<b>APÊNDICE F – DINÂMICA DO FATOR DE FORMA DO POTENCIAL DE POLARIZAÇÃO DE EFIMOV</b> . . . . .	138
<b>F.1</b>	<b>Cinâmica do Fator de Forma do Potencial de Polarização</b> . . . . .	138
<b>F.2</b>	<b>Fator de Forma</b> . . . . .	140
	<b>APÊNDICE G – REAÇÕES DE QUEBRA COM NÚCLEOS HALO</b> . . . . .	143

---

<b>G.1</b>	<b>Função de onda de três corpos nas reações com núcleos halo . . . . .</b>	<b>143</b>
	<b>ANEXO A – TRABALHOS PUBLICADOS . . . . .</b>	<b>145</b>

# 1 Introdução

## 1.1 Física de poucos corpos

O efeito Efimov é aquele em que três bósons idênticos interagem, com a previsão de uma série infinita de níveis de energia de estados excitados, surgindo quando o estado ligado de dois bósons na onda  $S$  encontra-se no limiar de dissociação. Em outras palavras, há um corolário em que no limite Efimov, é possível a ligação de três bósons mesmo que a energia de ligação de dois corpos tenda a zero. Previsto pela primeira vez no entorno de 1970 por Vitaly Efimov (EFIMOV, 1970) e estudado recentemente por alguns grupos de pesquisa no mundo (YAMASHITA *et al.*, 2008; DELTUVA, 2010; TUSNSKI *et al.*, 2014), o espectro da energia em sistemas de três bósons interagentes com um potencial de curto alcance tem a característica de a razão da energia de dois sucessivos estados ligados variar por um fator constante como,

$$E_{n+1}/E_n = e^{-2\pi/s_0} \approx 1/22.7^2, \quad (1.1)$$

onde  $n$  corresponde ao estado excitado e a constante  $s_0$  é próxima à unidade para três bósons idênticos. As energias de ligação citadas nesse trabalho são tratadas de modo que seus valores são escritos pelos seus valores absolutos. Na Figura 1.1 são mostrados cálculos para as trajetórias de estados ligados de três corpos em um exemplo para sistemas atômicos. O espectro mostra as diferentes energias de ligação distanciadas pelo fator de Efimov. Este fator de escala pode ser alterado quando os corpos constituintes do sistema possuem diferentes massas. Três regiões diferentes podem ser distinguidas: o contínuo de três átomos, o contínuo átomo-dímero, e a região dos trimeros ligados. O efeito Efimov ocorre quando o comprimento de espalhamento é

muito maior do que o alcance da força de van der Waals  $r_0$ , em  $a \gg r_0$ .

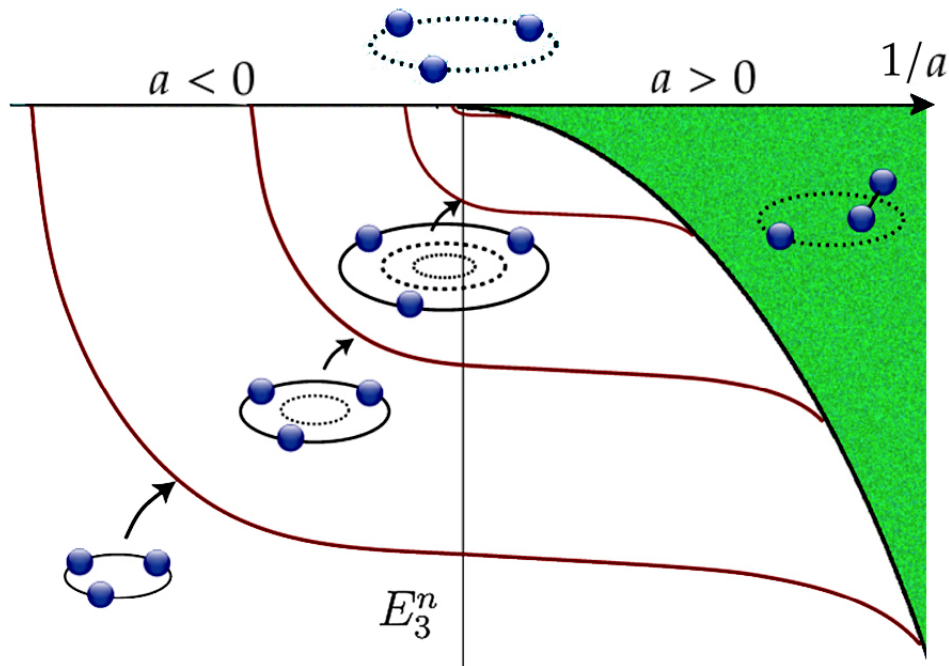


FIGURA 1.1 – Formação de estados ligados no limite de Efimov. Energia de ligação de três corpos como função do inverso do comprimento de espalhamento  $1/a$ . A linha horizontal indica o limiar do contínuo para o espalhamento de três corpos. A região verde marca o contínuo do sistema átomo-dímero para  $a > 0$ , a zona branca abaixo do eixo do comprimento de espalhamento indica a região onde existem 3 corpos ligados. Na física atômica a ressonância de Feshbach pode controlar a energia de ligação do dímero. Figura adaptada de (Ferlaino, F; Grimm, R., 2010).

O conceito de escala, comumente associado à renormalização em mecânica quântica, tem propriedades conhecidas para uma dada energia. Esse conceito segue a mesma abordagem que foi anteriormente considerada na Ref. (AMORIM *et al.*, 1997), quando se estuda os aspectos universais dos estado Efimov como o modelo de alcance zero renormalizado para núcleos halo leves. Uma mudança na escala física faz com que os parâmetros da teoria conduzam à solução tal que as previsões teóricas sem mantêm inalteradas. Geralmente, sistemas Hamiltonianos com divergência ultravioleta que requerem ser renormalizados, podem apresentar o chamado ciclo limite (*limit cycle*) (GLAZEK; WILSON, 2002). Seu conceito será discutido no decorrer do texto.

A introdução de uma escala é necessária para a regularização e renormalização do modelo de três corpos com o potencial delta de Dirac (ADHIKARI; FREDERICO, 1995). O passo para renormalizar o modelo é feito pela regularização do kernel das equações de três corpos, introduzindo uma subtração na escala de energia, identificada como  $-\mu_{(3)}^2$ . Esse parâmetro é o ponto

de subtração da energia, que pode ser identificado com um observável físico no procedimento de renormalização (YAMASHITA *et al.*, 2002; YAMASHITA *et al.*, 2003).

As equações de estados ligados de Efimov foram resolvidas numericamente como mostra o gráfico da Fig. 1.2, correspondendo à energia de três bósons como função da energia do dímero para o potencial de contato. Essa interação leva ao colapso Thomas (ADHIKARI *et al.*, 1988), e as equações de Faddeev devem ser regularizadas em curtas distâncias ou em grandes momentos, como discutiremos no Cap. 2. Essa escala de momento leva a uma escala de energia  $\mu_{(3)}^2$ , como vemos na figura. Podemos mensurar o espectro de três corpos em unidades de  $\mu_{(3)}^2$ , sem perda de generalidade. As equações de Faddeev para estados ligados de três corpos com interação de contato têm divergência a curtas distâncias ou grandes momentos, regularizada e renormalizada por uma subtração no kernel com um parâmetro de energia. Os resultados desse estudo são discutidos com detalhes no trabalho de (YAMASHITA, 2004). O comportamento do gráfico na Fig. 1.2 mostra o aparecimento dos estados ligados dos trímeros conforme a energia de ligação de dois corpos varia. Os estados fundamental, primeiro e segundo estados excitados são indicados na figura. Quando a energia do estado ligado cruza o limiar de dois corpos (linha diagonal laranja pontilhada) o estado deixa de ser ligado. Por outro lado temos o limite Efimov que se dá quando a energia de ligação de dois corpos vai para o limite  $E_2 \rightarrow 0$ .

Uma função de escala exibe a correlação entre as energias de trímeros sucessivos como mostrado na Fig. 1.3. Em amarelo claro temos a região em que dímeros são ligados ( $a > 0$ ), e em amarelo escuro um dímero no estado virtual ( $a < 0$ ), quando ocorre a ligação borromeana. São classificados borromeanos os casos em que mesmo que os subsistemas de dois corpos não formam estados ligados, há o estado ligado de três corpos. O círculo vermelho corresponde ao limite de Efimov. O quadrado verde mostra o ponto onde o trímero é formado no limiar do contínuo átomo-dímero, quando ele se torna também um estado virtual. O trímero borromeano encontra o limiar do contínuo de três átomos indicado pelo triângulo azul, quando esse trímero se torna uma ressonância triatômica no contínuo.

O efeito Efimov pode ser observado com a ajuda de aparatos que confinam átomos ultrafrios e também pode dominar as propriedades do halo de dois nêutrons em núcleos exóticos leves como será discutido nesta tese, tais como  $^{11}\text{Li}$  e  $^{22}\text{C}$ . A dinâmica quântica de aglomerados de

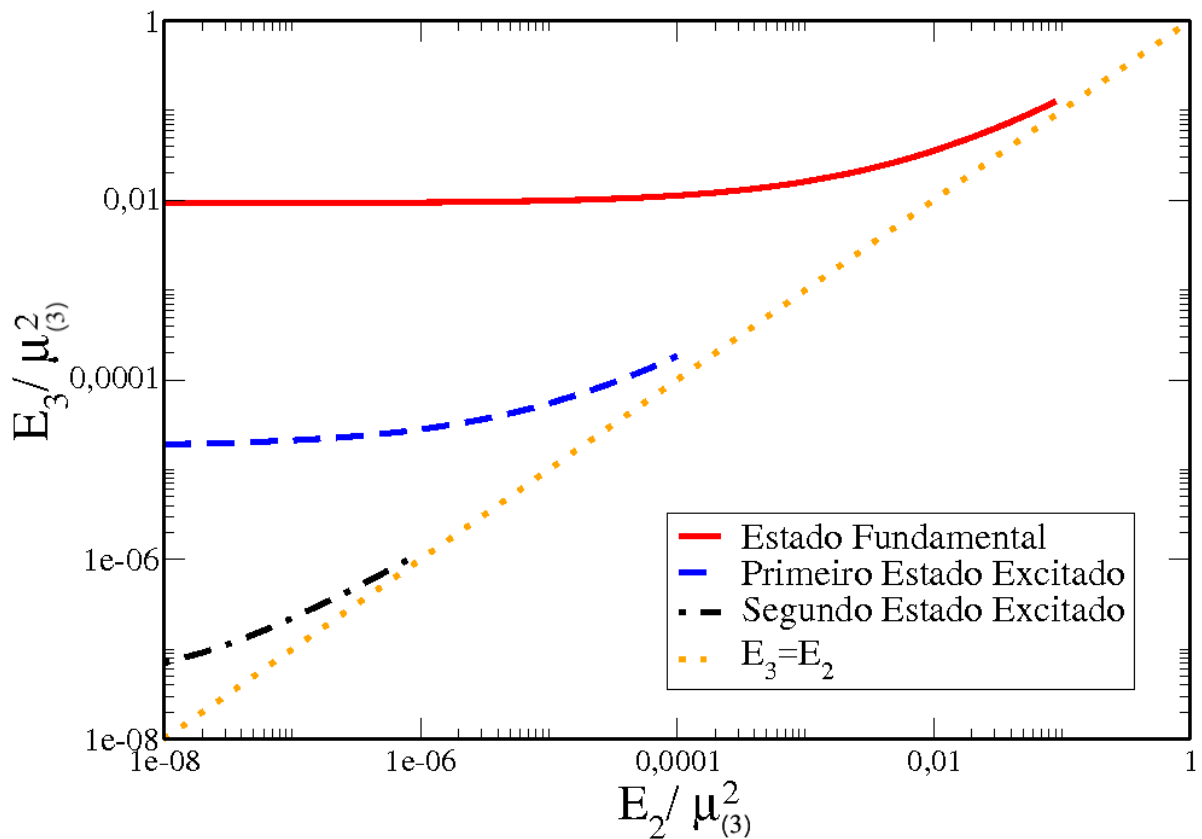


FIGURA 1.2 – Energias dos trimeros  $E_3/\mu_{(3)}^2$  em unidades de  $\mu_{(3)}^2 = 1$  em função da energia do estado ligado do dímero  $E_2/\mu_{(3)}^2$ . Os três primeiros estados são caracterizados no gráfico como: estado fundamental em vermelho (linha contínua), primeiro estado excitado em azul (linha tracejada) e segundo estado excitado em preto (linha tracejada e pontilhada). A linha pontilhada laranja representa a região em que não há mais formação de estado ligado de dois corpos ( $E_3 = E_2$ ) onde se iniciam os estados virtuais.

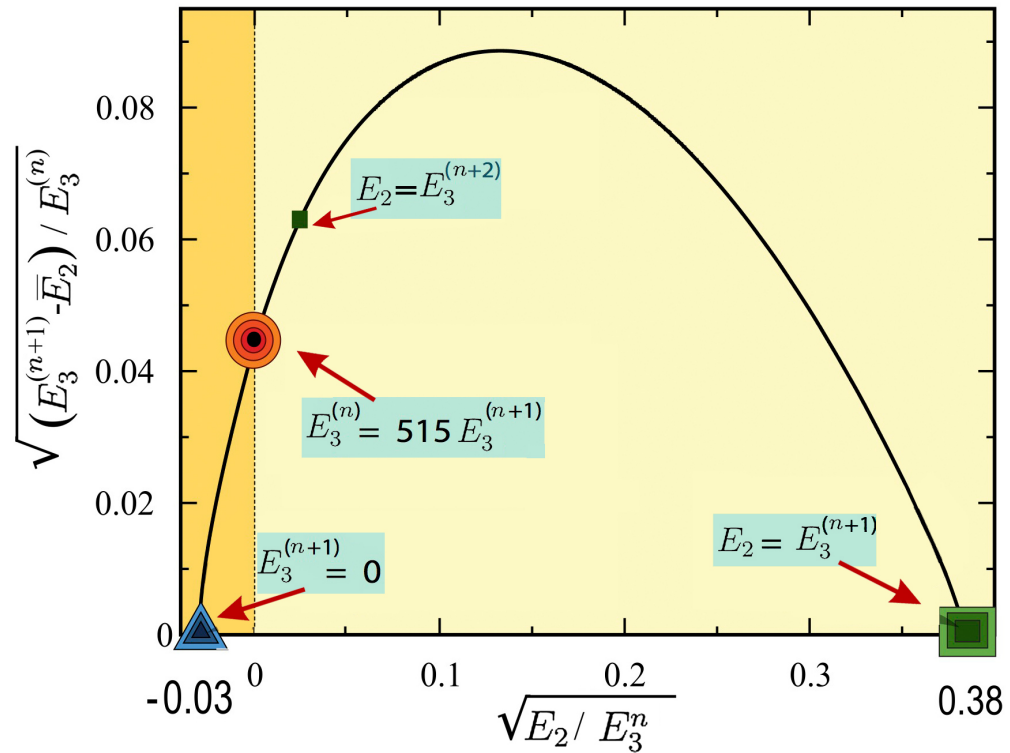


FIGURA 1.3 – Função de escala para as energias de trímeros de Efimov.  $E_3^n$  é a energia do  $n$ -ésimo estado de Efimov,  $E_2$  é o módulo da energia do dímero ligado ou virtual,  $E_2^* = E_2$  para um dímero ligado e 0 para estado virtual. A região amarelo claro mostra a situação onde dímeros são ligados ( $a > 0$ ), e a região amarela escuro corresponde a um dímero no estado virtual ( $a < 0$ ), ocorrendo a ligação borromeana. O ponto correspondente ao limite de Efimov é o círculo vermelho. O quadrado verde mostra o ponto onde o trímero é formado no limiar do contínuo átomo-dímero. O triângulo azul indica quando o trímero encontra o limiar contínuo de três corpos. O ponto no qual  $n + 2$ -ésimo estado de Efimov torna-se ligado ( $E_2 = E_3^{(n+2)}$ ) também é indicado.

poucos corpos constituídos por bósons e/ou férmions de natureza idêntica ou diferente, tem um grande interesse para a investigação da física de poucos átomos frios neutros em armadilhas magneto-ópticas. A técnica trata amostras gasosas relativamente densas na armadilha onde os átomos são submetidos a temperaturas muito baixas através do método de resfriamento a laser. Nesse regime o movimento térmico não suprime os efeitos quânticos e a interação de dois corpos entre os átomos pode ser ajustada usando ressonâncias de Feshbach. Neste caso o comprimento de espalhamento pode ser manipulado atingindo magnitudes muito maiores que o alcance da interação de Van der Waals. Resultados de evidências experimentais de trímeros de Efimov são discutidos na Referência (KRAEMER M. MARK; GRIMM, 2006).

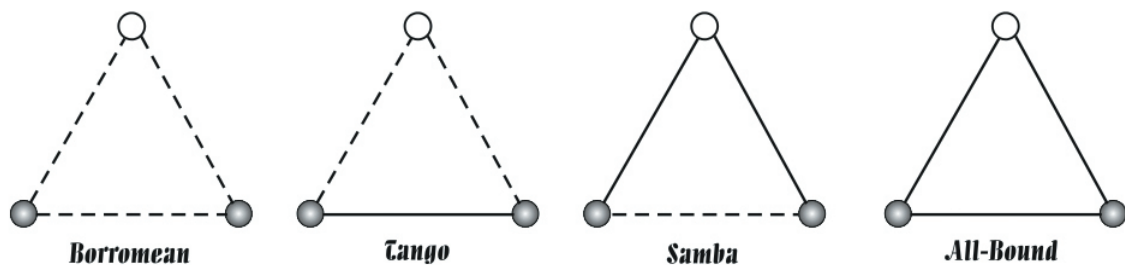


FIGURA 1.4 – Esquema de classificação de três corpos com relação a energia de ligação de dois corpos. À esquerda o caso com 3 corpos ligados onde não existe estado ligado de dois corpos (Borromeano). A seguir, ao centro o caso com estados ligados dos dois corpos idênticos (ROBICHEAUX, 1999) e o outro em que os dois corpos não apresentam estado ligado entre si mas há ligação de dois corpos de cada uma das duas partículas idênticas com relação ao caroço. Na figura da direita o caso em que há estados ligados de dois corpos entre todos os três entre si (YAMASHITA *et al.*, 2003).

Os sistemas de três corpos fracamente ligados são classificados em grupos tais como os principais são os “Borromeanos” onde os pares não formam estados ligados e a classe “Samba” onde dois pares formam estado ligado. As propriedades desses sistemas são dominadas pela física de três-corpos estando próximos do limite Efimov associado aos grandes comprimentos de espalhamento. Esses e os demais tipos de sistemas com relação ao estado de dois corpos serem ligados ou virtuais são mostrados na Figura 1.4. Os observáveis de baixa energia são fortemente correlacionados, exibindo comportamento universal independente do detalhe da interação.

Na física de átomos frios pode-se obter todos esses estados de três corpos propostos, pois existe uma correlação independente do modelo do potencial de curto alcance entre as quantidades de dois e três corpos. A figura 1.5 é um gráfico da Ref. (STIPANOVIĆ *et al.*, 2014) onde são



mostrados os resultados para vários sistemas diferentes de *clusters* e suas classificações na física atômica e molecular. O raio de escala é definido para trómeros, onde o tamanho do sistema é medido com o hiper-raio quadrático médio  $\sqrt{\rho^2}$ , dado por

$$m\rho = \frac{1}{M} \sum_{i<k} m_i m_k (\vec{r}_i - \vec{r}_k)^2, \quad (1.2)$$

onde  $m$  é uma massa arbitrária unitária,  $m_i$  é a massa da espécie  $i$ , e  $M$  é a massa total do sistema. Generalizando esse hiper-raio, na Ref. (JENSEN *et al.*, 2004) é definido o parâmetro de escala  $\rho_0$  como

$$m\rho_0^2 = \frac{1}{M} \sum_{i<k} m_i m_k R_{ik}^2, \quad (1.3)$$

onde  $R_{ik}$  é o comprimento de escala de dois corpos do subsistema  $i - k$ .

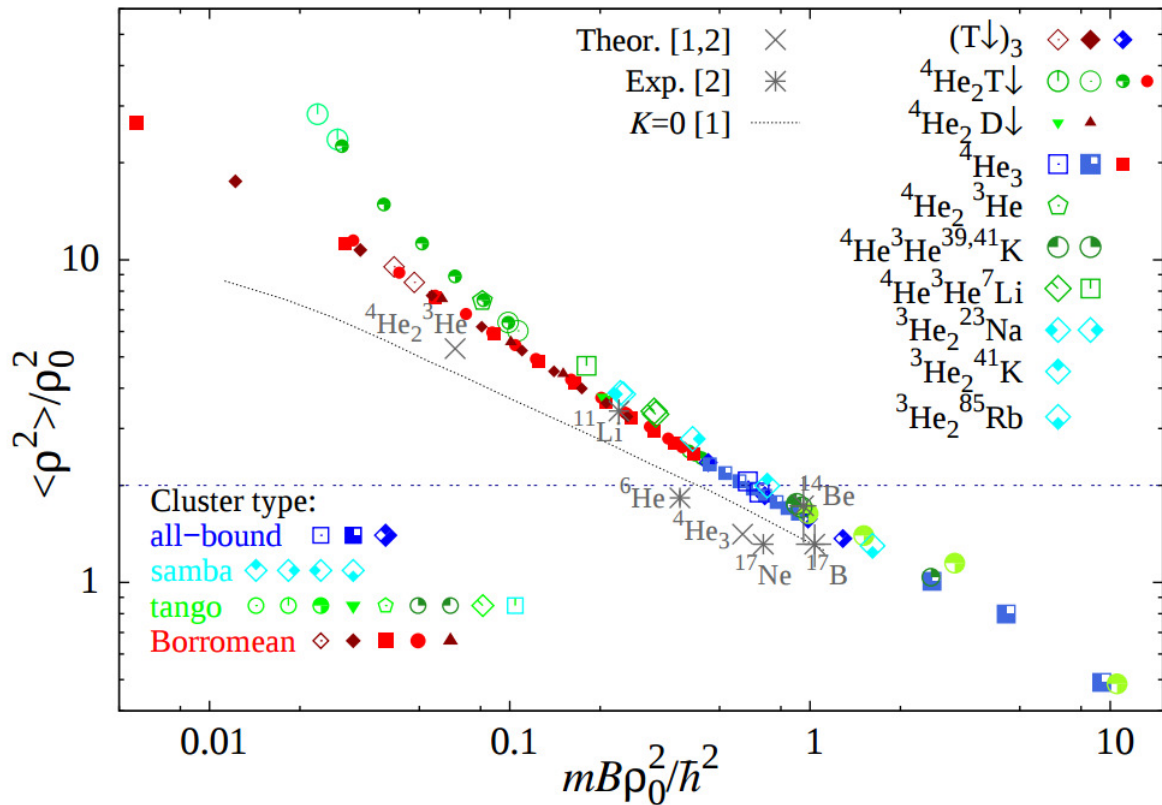


FIGURA 1.5 – Figura retirada da Referência (STIPANOVIĆ *et al.*, 2014) mostrando o tamanho versus o valor absoluto da energia do estado fundamental (dada na Referência (STIPANOVIĆ *et al.*, 2014) por (B)) em halos moleculares de três corpos. Todos os casos do esquema de classificação de três corpos podem ser vistos. Detalhes dos modelos de curto alcance utilizados são discutidos na referência (STIPANOVIĆ *et al.*, 2014).

### 1.1.1 Controle da interação de poucos corpos em física atômica

Ressonâncias de Feshbach controlam a interação entre os átomos em experiências com gases ultrafrios em armadilhas magneto-ópticas onde a interação é manipulada (THEIS *et al.*, 2004; YAN *et al.*, 2013; ENOMOTO *et al.*, 2008; PETROV *et al.*, 2012). Todas as propriedades fundamentais dos condensados de Bose-Einstein (BEC), tais como sua forma, suas flutuações e a formação de vórtices, são determinados pelas interações atômicas. A energia de interação em uma nuvem de átomos é proporcional à sua densidade e também ao comprimento de espalhamento  $a$ . A interação efetiva entre os átomos na equação de Gross-Pitaevskii é controlada através desse parâmetro, sendo repulsiva se  $a > 0$  e atrativa se  $a < 0$ . A equação de Gross-Pitaevskii é a ferramenta formal que descreve a dinâmica dos condensado atômicos (ROGEL-SALAZAR, 2013).

No caso dos BECs, as densidade são baixas (da ordem de  $\approx 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ ), tal que a distância média dos átomos é de  $\approx 100 \text{ nm}$  e o comprimento de espalhamento  $a$  é muito pequeno (da ordem da nuvem eletrônica  $\approx 1 \text{ nm}$ ) em relação à separação média entre os átomos. Os átomos usados nos BEC são neutros e, como a densidade é baixa e a distância entre átomos é muito maior que o tamanho do átomo, espera-se que a única forma de interação entre as partículas seja as colisões. Esse tipo de interação é de curto alcance e pode ser modelado, sem perda de generalidade, por potenciais de contato descritos pela função Delta de Dirac.

A dependência do comprimento de espalhamento  $a$  como função do campo magnético  $B$  é dada pela equação,

$$a = a(B) = a_{bg} \left( 1 - \frac{\Delta}{B - B_0} \right) \quad (1.4)$$

onde  $a_{bg}$  representa o comprimento de espalhamento longe da ressonância de Feshbach,  $B_0$  é a posição de ressonância onde o comprimento de espalhamento diverge ( $a \rightarrow \pm\infty$ ) e o parâmetro  $\Delta$  representa a largura da ressonância como mostrado na Figura 1.6.

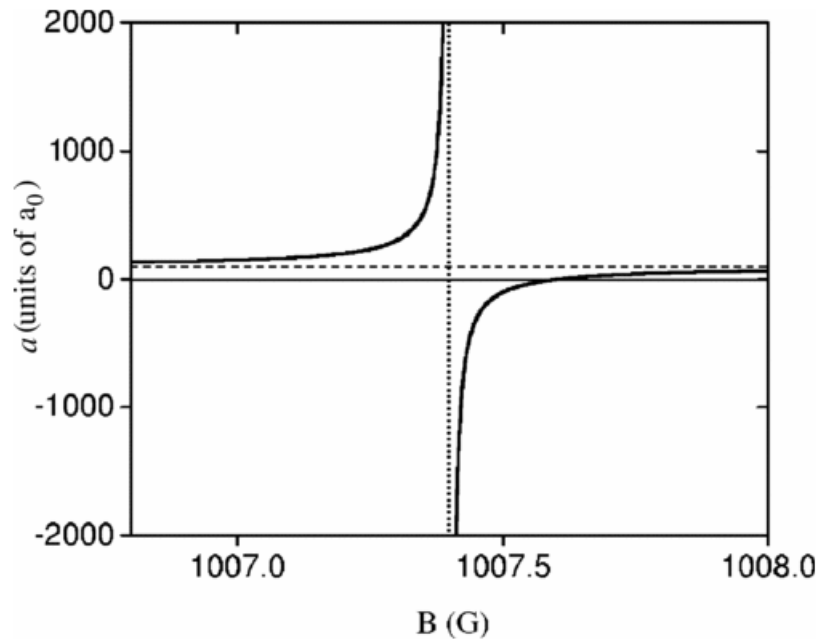


FIGURA 1.6 – Comprimento de espalhamento  $a$  como função do campo magnético  $B$  para o  $^{87}\text{Rb}$  no canal hiperfino  $|f, m_f\rangle = |1, 1\rangle$ . A linha horizontal pontilhada indica comprimento de espalhamento direto  $a_{bg} = 100a_0$  (com  $a_0$  sendo o raio de Bohr), e a linha vertical indica a ressonância para o campo magnético  $B_0 = 1007.4$  G. A largura do campo é dada por  $\Delta B = 0.2$  G. Figura retirada de (MARCELIS *et al.*, 2004).

## 1.2 Física nuclear de poucos corpos

Trabalharemos com a física de Efimov utilizada no estudo de sistemas de três bósons idênticos e a estenderemos para sistemas de três corpos tendo um desses massa diferente. O formalismo que descreve esses sistemas nos permite entender a formação de trímeros fracamente ligados em armadilhas atômicas ultrafrias e também explorar problemas da física nuclear estudando os núcleos exóticos. O formalismo de nosso trabalho consiste na introdução de escalas físicas nas equações de Faddeev para um potencial de alcance zero. O fato de resolvermos as equações de Faddeev usando um potencial separável como o de contato, que consiste numa forma especial de interação não local bastante utilizada em problemas de três corpos, pode nos levar à equação do estado ligado do sistema. Esse método resulta em uma forma simples da equação integral de Faddeev que leva ao efeito Efimov. Através da equação integral obtida para o estado ligado, é possível calcular as energias de ligação de três corpos e posteriormente podemos analisar o espectro de energia. A partir da função de onda é possível calcular alguns observáveis e assim nossos resultados para a estrutura de alguns sistemas estudados podem

contribuir ao estabelecimento das propriedades expressas através da tabela de núclídeos.

Alguns núcleos têm uma grande diferença entre os números de prótons e nêutrons sendo bastante instáveis possuindo, também, características muito diferentes dos estáveis. Esse tipo de núcleo é classificado como exótico. Do fato de serem instáveis, esses núcleos não são encontrados na natureza e a investigação dos seus constituintes, bem como a observação de suas propriedades físicas deve ser feita em laboratório.

Os núcleos exóticos são isótopos de elementos conhecidos, podendo possuir um número excessivo de nêutrons (ricos em nêutrons) ou um déficit de nêutrons (ricos em prótons). Têm ganhado atenção principalmente a partir da década de 1980, onde se descobriu que alguns núcleos atômicos de elementos leves (hélio, lítio e berílio) não teriam uma geometria externa bem definida. Assim, esses isótopos possuiriam algo além das bordas do núcleo, criando uma nuvem que envolve o mesmo. A energia de ligação dos nêutrons é baixa possibilitando uma distribuição de nêutrons muito além daquela ocupada pelo núcleo principal que corresponde à parte mais estável (caroço) do núcleo total. Essa quantidade excessiva de nêutrons compõe a nuvem difusa formando um “halo” de nêutrons, de onde se originou o termo *halo nuclei*<sup>1</sup>. Nesse trabalho trataremos sistemas de núcleos exóticos com halos de dois nêutrons como *nnc* onde  $n$ =nêutron e  $c$ =caroço. São exemplos de núcleos exóticos que serão descritos nos próximos capítulos:  $^{11}\text{Li}$  formado pelo caroço  $^9\text{Li}$ , e também o  $^{22}\text{C}$  com caroço  $^{20}\text{C}$ , ambos isótopos com dois nêutrons de valência. Esses núcleos exóticos são altamente instáveis e têm um tempo de vida curto ( $^{11}\text{Li} \approx 8 \text{ ms}$ ) (KELLEY *et al.*, 2012).

Todos os núclídeos podem ser representados em uma tabela, que relaciona seus respectivos números atômicos e número de nêutrons, a chamada tabela ou carta de núclídeos. A Figura 1.7 mostra uma pequena parte dessa tabela contendo os núclídeos mais leves representando os estáveis em preto, onde os demais são instáveis (radioativos). De três mil núcleos conhecidos, apenas 266 são estáveis e a maioria destes se encontra na região da tabela aproximadamente em  $N = Z$  com  $Z < 20$ .

Na Tabela 1.1, temos propriedades importantes de alguns núclídeos como por exemplo o

---

<sup>1</sup>Nesse texto iremos usar o termo halo (do inglês: auréola), designado para descrever a órbita dos nêutrons em excesso afastados do caroço. Portanto descreveremos o sistema nêutron-nêutron-caróço como núcleo-halo.

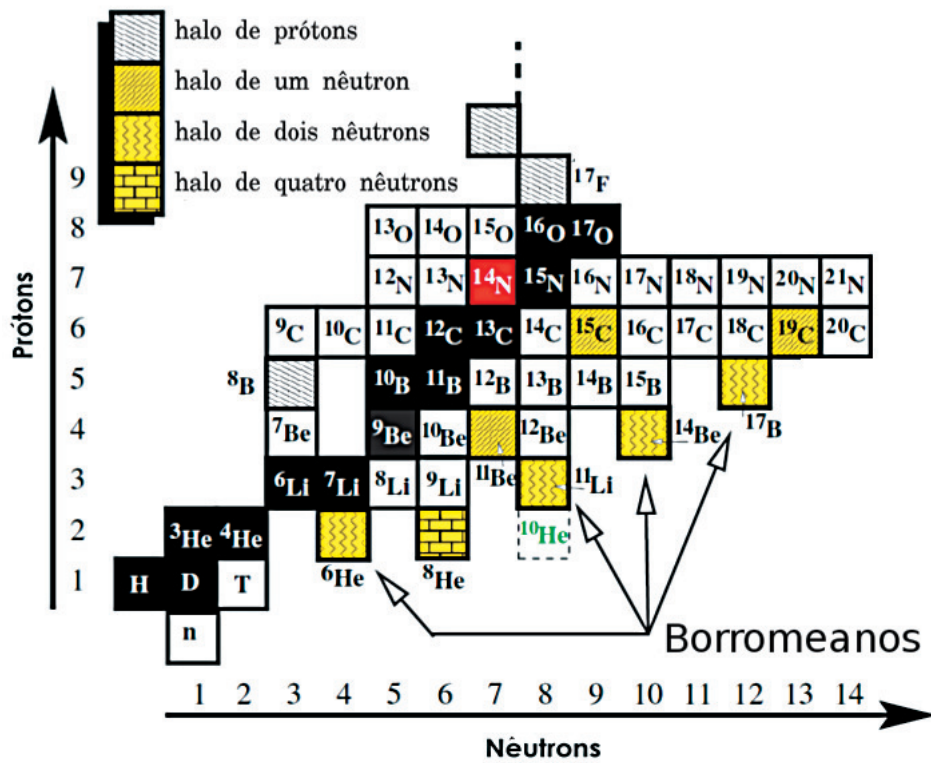


FIGURA 1.7 – Tabela de nuclídeos contendo informações sobre o tipo de decaimento radioativo e enfatizando os núcleos exóticos com *halos* de um e dois nêutrons. Os nuclídeos estáveis aparecem em preto representando uma linha de estabilidade enquanto que os instáveis são os demais. Dados da tabela obtidos de (NNDC, 2017).

$^{11}\text{Li}$ , um dos principais isótopos investigados nessa pesquisa. O  $^{11}\text{Li}$  foi um dos primeiros dos núcleos exóticos (TANIHATA *et al.*, 1985) identificados e ainda é bastante investigado. Muitos dos dados existentes têm sido resumidos e comparados com um modelo de três corpos (SHULGINA *et al.*, 2009). O raio de matéria desse nuclide é dado em (AL-KHALILI *et al.*, 1996) como 3,53(10) fm a partir da seção de choque, e 3,71(20) fm a partir do espalhamento elástico de altas-energias em (DOBROVOLSKY *et al.*, 2006). As duas medições dos raios são consistentes, em que os raios de  $^9\text{Li}$  também diferem ligeiramente nos dois métodos 3.4(3) e 3.5(6) fm, respectivamente. O primeiro deles é o valor incluído na Tabela 1.1. O  $^{22}\text{C}$  também será bastante discutido na tese, principalmente por não ter algumas propriedades de sua estrutura bem esclarecidas. O valor da energia de separação de dois nêutrons por exemplo, dado na tabela, é um valor estimado nos nossos trabalhos recentes (SOUZA *et al.*, 2016a; SOUZA *et al.*, 2016b) e discutido nas seções 3.2 e 4.1.

Isótopo	Composição	$l$	$S_{2n}$ (MeV)	$r_{core}^{rms}$	$r_{tot}^{rms}$	$\langle \rho^2 \rangle (fm^2)$	$\langle \rho^2 \rangle / \rho_0^2$
$^6\text{He}$	$^4\text{He}+n+n$	1	0.955	1.58(4)	2.54(4)	28.6(1.3)	1.84(10)
$^{11}\text{Li}$	$^9\text{Li}+n+n$	0,1	0.369(1)	2.30(2)	3.53(10)	89(8)	3.4(3)
$^{14}\text{Be}$	$^{12}\text{Be}+n+n$	0,1,2	1.26(13)	2.59(6)	3.10(15)	54(13)	1.7(4)
$^{17}\text{B}$	$^{15}\text{B}+n+n$	0,2	1.34(17)	2.59(3)	2.90(6)	42(6)	1.3(2)
$^{19}\text{B}$	$^{17}\text{B}+n+n$	2?	1.04(4)	2.90(4)	3.11(13)	41(16)	1.1(5)
$^{17}\text{Ne}$	$^{15}\text{O}+n+n$	0,2	0.933	2.44(4)	2.75(7)	39(7)	1.3(3)
$^{22}\text{C}$	$^{20}\text{C}+n+n$	0?	0.4(3)*	2.98(5)	5.4(9)	460(210)	12(5)

\*Estimado em nosso trabalho (ver seção 3.2)

TABELA 1.1 – Propriedade de alguns núcleos-halo de três corpos (nêutron+nêutron+caroço). Os momentos angulares possíveis são representados por  $l$ ,  $r_{core}^{rms}$  e  $r_{tot}^{rms}$  são os raios quadrados médios do caroço e do núcleo total, respectivamente.  $\rho$  e  $\rho_0$  são definidos nas Eqs. (1.2) e (1.3). A tabela está na Referência: (RIISAGER, 2013).

## 1.2.1 Estados excitados de Efimov e estrutura dos núcleos-halo

A condição para existir um estado Efimov ligado  $E_3^{n+1}$  de um sistema de três corpos com duas partículas idênticas depende de dois parâmetros dados pelas energias dos estados virtuais  $E_{nn}$  e  $E_{nc}$  em unidades da energia do estado ligado de três corpos  $E_3^n$ , quando o alcance da interação vai à zero. Nesse contexto, as energias de dois corpos estão escritas com os subíndices

$nn$  e  $nc$ , referindo-se às interações de dois corpos nêutron-nêutron e nêutron-carço, respectivamente. A função de onda de três corpos leva em conta a contribuição do carço e o halo de dois nêutrons no estado de spin 0, onde um observável natural a ser calculado é a energia do estado ligado nêutron-nêutron-carço, denominada nesse contexto energia de separação de dois nêutrons  $S_{2n}$ . Para os subsistemas nêutron-nêutron e nêutron-carço, é conveniente levar em conta os observáveis como sendo os comprimentos de espalhamento de suas interações (ou energia do estado ligado/virtual de dois corpos  $E_{nn}$  e  $E_{nc}$ ).

O limite crítico o qual separa as regiões onde um estado Efimov ( $n+1$ ) aparece é mostrado na Fig. 1.8 retirada da Referência (FREDERICO *et al.*, 2012). Nesse trabalho foi conveniente definir  $\sqrt{E_{nn}/S_{2n}^N}$  e  $\sqrt{E_{nc}/S_{2n}^N}$  ( $S_{2n}^N$  é a energia de separação de dois nêutrons do  $N$ -ésimo estado excitado) com resultados numéricos para diferentes razões de massa  $A = m_c/m_n$  configurando  $m_n = 1$  e a massa do carço foi variada de 1 a 100 como é mostrado na figura.

A estrutura matemática do kernel das equações integrais do estado ligado para sistemas de três partículas distintas não impede o colapso Thomas ou efeito Efimov quando  $\sqrt{E_{nn}/S_{2n}^N}$  e  $\sqrt{E_{nc}/S_{2n}^N}$  vão pra zero. A origem dos eixos da Figura 1.8 corresponde à situação em que aparecem infinitos estados separados geometricamente.

Os núcleos exóticos leves são caracterizados por halos de nêutrons fracamente ligados, contendo raios grandes levando em consideração o tamanho do carço (BERTULANI *et al.*, 1993; ZHUKOV *et al.*, 1993; HANSEN *et al.*, 1995). Considerando uma interação de contato, a função de onda correspondente é um auto estado do Hamiltoniano livre, exceto quando as partículas estão na região classicamente proibida (FREDERICO, 2014). Tal abordagem aplicada aos núcleos exóticos leves ricos em nêutrons é descrita em detalhes no trabalho de revisão (FREDERICO *et al.*, 2012), onde são abordados os aspectos universais dos sistemas  $nnc$ . A estrutura desses núcleos pode ser descrita na física de poucos corpos fracamente ligados. A possibilidade de estados Efimov para representar núcleos exóticos leves de  $^{11}\text{Li}$ ,  $^{12}\text{Be}$  e  $^{20}\text{C}$  foi apontada originalmente nas Refs. (FEDOROV *et al.*, 1994; FEDOROV; JENSEN, 1993; FEDOROV *et al.*, 1995). Esses núcleos são caracterizados por pequenos valores da energia de separação de um ou dois nêutrons. Temos duas possibilidades de interações de subsistemas em pares  $nc$  e  $nn$  virtual ou ligado. Lembrando que para os núcleos halo o sistema nêutron-nêutron forma um estado virtual  $0^+$  en-

quanto o nêutron-carço pode tanto ter um estado virtual na onda  $S$ , por exemplo  $^{10}\text{Li}$ , como pode ser ligado no caso do  $^{20}\text{C}$  (AUDI *et al.*, 2003).

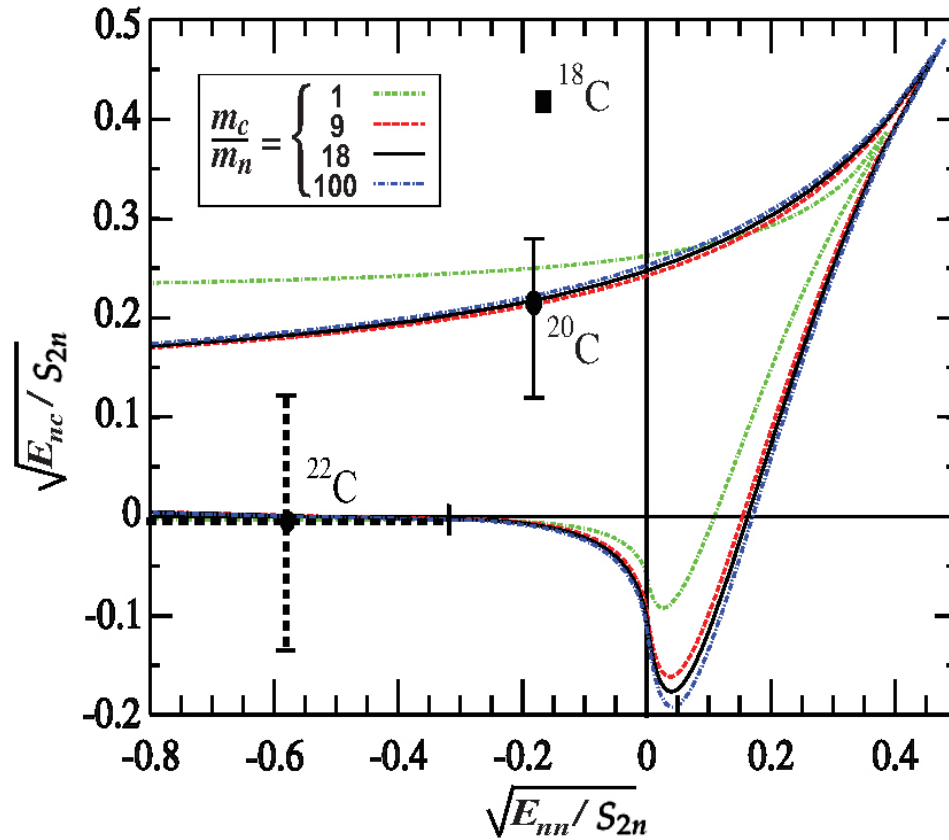


FIGURA 1.8 – Limiar crítico para o aparecimento de um estado excitado de Efimov ( $n + 1$ ) de um sistema  $nnc$ . As energias de dois corpos,  $E_{nn}$  e  $E_{nc}$ , são dadas em termos da energia de separação de dois nêutrons  $S_{2n}$  e podem ser ligadas (valores positivos da raiz quadrada) ou virtuais (valores negativos). Um número crescente de estados excitados de três corpos deve emergir quando diminui o valor das razões  $E_{nn}/S_{2n}$  e  $E_{nc}/S_{2n}$ . O limite Efimov exato, com um número infinito de estados excitados de três corpos, é dado por  $E_{nn} = E_{nc} = 0$ . Os dados experimentais dos núcleos de carbono  $^{18}\text{C}$  e  $^{20}\text{C}$  vêm das Refs. (AMORIM *et al.*, 1997; CANHAM; HAMMER, 2008), com a energia de separação de dois nêutrons do  $^{22}\text{C}$  da Ref. (TANAKA *et al.*, 2010).

Os núclídeos com números de massa  $A = 18, 20$  e  $22$  são localizados na Fig. 1.8 com relação às suas energias de dois corpos. Para os núcleos mostrados na figura, podemos notar que o  $^{18}\text{C}$  está afastado de ter um estado excitado. A situação é mais favorável nos casos representados pelos outros isótopos como estão mais próximos do limite crítico.



Uma função de escala combinando as informações contidas nas Figuras 1.3 e 1.8 pode ser ilustrada tridimensionalmente na Figura 1.9. Esta função é o ciclo limite da correlação entre os limites de energia e a figura é um esquema em que a superfície ( $x = \sqrt{E_{nn}/S_{2n}^N}$ ,  $y = \sqrt{E_{nc}/S_{2n}^N}$ ) define a região limite de modo a ter pelo menos um estado excitado de Efimov. Fora dessa região (para  $x$  e/ou  $y$  maiores) o estado de três corpos será virtual ou ressonante.

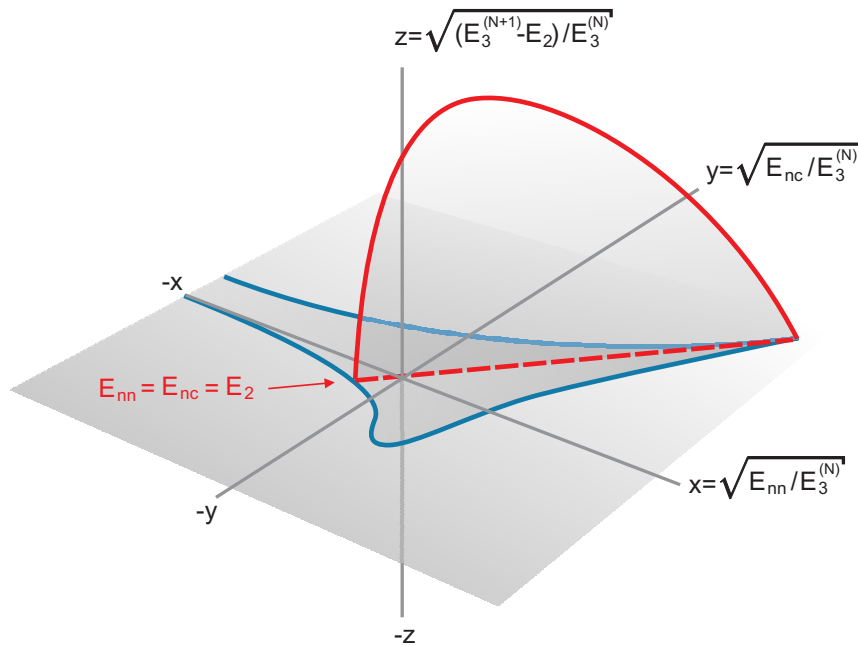


FIGURA 1.9 – Gráfico tridimensional recombinando a região limite dos estados excitados de Efimov (Fig. 1.3) com a função de escala da Fig. 1.8. Fonte: (FREDERICO *et al.*, 2012).

A energia de separação de dois nêutrons  $S_{2n}$  para o  $^{22}\text{C}$  ainda não é conhecida com precisão. Nesse trabalho nós sugerimos uma janela de valores calculados através do modelo de alcance zero configurado para diferentes energias do subsistema virtual  $E_V[^{21}\text{C}]$ . A estrutura do núcleo de  $^{22}\text{C}$  será discutida na seção 3.2. Através de cálculos para as distribuições de momento e do raio quadrado médio, fixando a energia de separação de dois nêutrons e comparando diferentes potenciais, iremos investigar as propriedades do halo de dois nêutrons nesse núcleo.

As distribuições de momento de recuo do caroço de núcleos-halo de dois nêutrons são extraídas a partir de reações de quebra com feixes de energia a centenas de MeV por núcleon. Essas distribuições são importantes para nos dar uma descrição da estrutura desses sistemas (TANIHATA, 1996; RIISAGER, 2013). Reações de quebra do  $^{11}\text{Li}$  com feixes de 800 MeV/A (TANIHATA, 1996) resultam em uma distribuição de momento do caroço caracterizada pela soma de distribuições, sendo uma estreita com  $\sigma = 21(3)$  MeV/c e uma distribuição larga de  $\sigma = 80$

MeV/c (veja Eq. 1.5). A distribuição estreita deve ser estar associada com a configuração dos dois nêutrons dando forma à estrutura do halo. A reação de quebra ocorre quando os dois nêutrons são encontrados muito longe do caroço, o que corresponde a um sistema de três corpos fracamente ligado levando em conta a escala nuclear. Por outro lado, a distribuição de momentos mais larga está relacionada com a parte interior das órbitas dos nêutrons do halo próxima à região do caroço. Um aspecto interessante dos estados de halos de dois nêutrons associado com a distribuição de momento estreita é que os constituintes do halo devem ter uma grande probabilidade de serem encontrados na região classicamente proibida, fora do alcance do potencial.

Os trabalhos recentes sobre núcleos exóticos nos tem motivado a investigar propriedades de distribuições de momentos em baixas energias de núcleos-halo leves os quais prevalece a onda-s e as interações são governadas por um potencial de curto alcance. Um dos nossos interesses está em investigar teoricamente dentro de um modelo de três corpos, a distribuição de momento de recuo do caroço do núcleo que é obtida experimentalmente na reação do núcleo com alvos nucleares. O modelo para calcular a distribuição de momento dos núcleos é um modelo de três corpos aplicado ao sistema caroço-nêutron-nêutron (HADIZADEH *et al.*, 2011; FREDERICO *et al.*, 2012). A formulação detalhada das distribuições foi dada em (YAMASHITA *et al.*, 2013) e os parâmetros do modelo são os comprimentos de espalhamento, e uma escala de três corpos dada pela energia de separação de dois nêutrons  $S_{2n}$ . Portanto, três observáveis de baixa energia são suficientes para determinar uma outra quantidade de baixa energia através de uma função de escala universal adequada. Por exemplo, a largura de distribuição de momento é universalmente correlacionada com as escalas físicas e, uma vez que os comprimentos de espalhamento de dois corpos são dados, é possível obter  $S_{2n}$  se a largura da distribuição é conhecida experimentalmente.

Nessa tese será enfatizada a investigação teórica das distribuições de momento, bem como sua comparação com os dados experimentais dos núcleos-halo de  $^{11}\text{Li}$  (TANIHATA, 1996),  $^{14}\text{Be}$  (ZAHAR *et al.*, 1993),  $^{20}\text{C}$  e  $^{22}\text{C}$  (KOBAYASHI *et al.*, 2012). Nesses nuclídeos em particular, nós consideramos que as interações nêutron-nêutron e nêutron-caroço são dominadas pelos estados na onda S. Usualmente, a abordagem do modelo é feita de modo que as energias correspondentes aos subsistemas, ou seja, os comprimentos de espalhamento de dois corpos, são dados

positivos para estados ligados e negativos para estados virtuais, e a escala de três corpos é dada pela energia de separação de dois nêutrons  $S_{2n}$ .

A largura a meia altura da distribuição (do inglês, *full width half maximum* - FWHM) é uma forma de quantificar a dispersão dos valores numa distribuição normal. É possível demonstrar que esta quantidade está relacionada com o desvio padrão  $\sigma'$  de acordo com  $FWHM = 2\sigma' \sqrt{2 \ln 2} \approx 2.355\sigma'$  onde a função distribuição Gaussiana é invariante sob translação. Com variância igual a  $\sigma'^2$ , para uma variável qualquer  $x$ , essa distribuição é definida por,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma' \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma'^2} \right]. \quad (1.5)$$

A FWHM é utilizada em fenômenos como duração de pulso de ondas e largura espectral de fontes em comunicações, entre outros. Na física nuclear, investigamos características das distribuições de momento que calculamos para o momento do caroço com relação ao centro de massa do par nêutron-nêutron. A FWHM é uma propriedades das distribuições de momento que determinamos teoricamente e tem sido usada para ajustar dados experimentais. Chamaremos a largura à meia altura de  $\sigma$  e sua unidade nas distribuições de momentos nuclear é naturalmente a unidade de momentos MeV/c. Como estamos interessados nas propriedades universais de observáveis, é conveniente introduzir a grandeza adimensional  $\sigma / \sqrt{S_{2n}m_n}$  onde  $m_n$  é a massa do nêutron. Tomando  $m_n$  como unitária, a função de escala para  $\sigma$  é dada de forma geral como,

$$\frac{\sigma}{\sqrt{S_{2n}}} = \mathcal{S}_c \left( \pm \sqrt{\frac{E_{nn}}{S_{2n}}}, \pm \sqrt{\frac{E_{nc}}{S_{2n}}}; A \right), \quad (1.6)$$

onde o sinais + e - referem aos estados ligado e virtual, respectivamente. A massa do caroço  $m_c$  define seu número de massa  $A \equiv m_c/m_n$ . As energias de estado ligado de dois corpos,  $E_{nn}$  e  $E_{nc}$ , são definidas grandezas positivas, com  $a_{nn}$  e  $a_{nc}$  sendo os respectivos comprimentos de espalhamento de dois corpos. No nosso caso, especificamente, fixamos a energia do estado virtual nêutron-nêutron  $E_{nn}$  na função de escala acima para os núcleos-halo de dois nêutrons. Nesse contexto as unidades são tal que a constante de Planck  $\hbar$  e a velocidade da luz  $c$  são iguais a 1 e as massas são dadas em termos da massa unitária do nêutron  $m_n$ .

A função de correlação (1.6), calculada próximo ao limite unitário, é válida para todos os estados geometricamente espaçados de Efimov, os quais estão relacionados pelo fator de  $e^{-2\pi/s_0^A}$ , como mostrado na eq. (1.1), onde  $s_0$  depende da massa  $A$ . Três bósons interagindo na onda  $S$  nesse limite, em que a interação é de curto alcance, apresentam a propriedade de ciclo limite (WILSON, 1971). O ciclo limite refere-se a um modelo independente para se encontrar uma escala oculta. A correlação entre quantidades físicas, sendo reformulada geometricamente quando multiplicada por um fator, é um exemplo de ciclo limite. Após a remoção da escala, todas as curvas convergem para uma função. Na Ref. (BEDAQUE *et al.*, 1999), vê-se que dentro da renormalização do problema de três corpos com as interações de curto alcance, o conceito de um ciclo limite aplica-se para grandes comprimentos de espalhamento de dois corpos, em estreita relação com o efeito Efimov. Nesse caso, eles correspondem às correlações entre observáveis de três bósons descritas pelas funções de escala, como na eq. (1.6). Próximo ao limite em que as energias de dois corpos são dimensionadas pelo fator geométrico  $e^{-2\pi/s_0^A}$ , todas as propriedades do núcleo halo são redimensionadas e o valor da distribuição de momentos muda cada ciclo com  $\sigma \rightarrow e^{\pi/s_0^A} \sigma$ . Com isso, a função de escala  $\frac{\sigma}{\sqrt{S_{2n}}}$ , se replica por si só em cada ciclo de Efimov, i.e., as curvas de todos os estados convergem para uma mesma função. Isso será visualizado em nossos resultados.

Pesquisas vêm sendo desenvolvidas com o intuito de investigar sistemas quânticos de três corpos no regime de interações de curto alcance em física nuclear (FREDERICO *et al.*, 2012) e também com potenciais de alcance finito (NIELSEN *et al.*, 2001). Além do estudo teórico no espaço dos momentos, a estrutura desses sistemas pode ser analisada com modelos teóricos no espaço das configurações para obter, por exemplo, o halo. Uma maneira de usarmos nosso modelo para esse estudo consiste em realizar a transformada de Fourier da função de onda do estado ligado obtida no espaço dos momentos. Isso resume-se à transformada de Fourier do resolvente livre de dois corpos que é bem conhecido. Com o estudo da função de onda no espaço das configurações foi possível comparar a estrutura do  $^{22}\text{C}$  no modelo de alcance zero com um modelo de alcance finito para diferentes forças de três corpos. Os cálculos com o potencial de alcance finito foram realizados utilizando-se o método de expansão adiabática com hiperharmônicos esféricos e discutido com detalhes na Referência (NIELSEN *et al.*, 2001). Em ambos

os modelos a função de onda do halo na configuração espacial é obtida usando como parâmetros os comprimentos de espalhamento de dois corpos e a energia de separação de dois nêutrons. Um de nossos objetivos consiste em investigar a estrutura do  $^{22}\text{C}$  com o modelo de alcance zero renormalizado incluindo a física de Efimov, comparando o comportamento resultante com o modelo de alcance finito. Para esse propósito são estudados, nos dois casos, os raios quadrados médios, as densidades de nêutrons e a geometria, levando em conta o ângulo na configuração das coordenadas de Jacobi com o objetivo de estabelecer a validade e as limitações do modelo de alcance zero. As relações universais de escala são a consequência dominante do potencial Efimov de longo alcance sobre as propriedades do halo (JENSEN *et al.*, 2004; BRAATEN; HAMMER, 2006; ZINNER; JENSEN, 2013), sendo elas explicitadas como correlações independentes de modelos entre observáveis de baixa energia (HADIZADEH *et al.*, 2011; FREDERICO *et al.*, 2012), onde a física de curto alcance é parametrizada por um observável de três corpos na onda  $S$ , como a energia de separação de dois nêutrons. A correlação entre observáveis de dois e três corpos é associada a uma função de escala universal (FREDERICO *et al.*, 1999) escrita em termos da quantidade adimensional dos comprimentos de espalhamento  $\sqrt{\hbar^2/(m_n S_{2n})}$ . As funções de escala podem ser construídas com o modelo de alcance zero (ADHIKARI; FREDERICO, 1995) já aplicadas às condições críticas para o aparecimento dos estados excitados dos núcleos-halo (AMORIM *et al.*, 1997). O conceito do ciclo limite no problema de alcance zero de três corpos foi explorado em (BEDAQUE *et al.*, 1999; NIEMANN; HAMMER, 2015), o qual está relacionado ao limite de Efimov. Quando o alcance da interação tende a zero com respeito ao comprimento de espalhamento, esse limite pode ser visto de duas maneiras (ADHIKARI *et al.*, 1988), como sendo no regime do colapso Thomas com comprimentos de espalhamento fixos e o alcance da interação indo a zero, ou no limite Efimov com o alcance fixo e os comprimentos de espalhamento indo para  $\pm\infty$  (limite unitário). Os resultados para a estrutura do  $^{22}\text{C}$  investigados com a comparação de dois potenciais distintos são discutidos na seção 4.1.

### 1.2.2 Tamanho dos núcleos exóticos com halos de dois nêutrons

Uma análise quantitativa das equações de Faddeev para interações de alcance zero pode evidenciar o que acontece com os tamanhos dos núcleos-halo de dois nêutrons quando fixamos

a energia de três corpos. A configuração do sistema vai de "All-Bound" ao Borromeano. Os tamanhos dos sistemas se configuram na sequência de acordo com a atração efetiva do *kernel* dada por: All-Bound > Samba > Tango > Borromeano. Essas diferenças são diretamente refletidas no tamanho do núcleo onde atração implica em um raio maior para uma mesma energia de separação de dois nêutrons. O caso Borromeano é o que apresenta a configuração mais compacta em relação às outras configurações quando a energia de separação de dois nêutrons está fixa. No núcleo Borromeano os pares formam apenas estados virtuais e portanto para ligar os dois nêutrons ao caroço é necessária uma maior aproximação entre os constituintes do sistema de três corpos. Essa interpretação é feita em (YAMASHITA, 2004) e tem sido fortalecida pelos cálculos numéricos.

As distâncias nucleares de um sistema de três corpos podem ser descritas por funções de escala que são convenientes para investigar as propriedades universais de tais sistemas fracamente ligados como dos núcleos-halo. As funções de escala para as distâncias de separação entre duas partículas ( $n - \gamma$ , onde  $\gamma \equiv n, c$ ) e entre cada partícula ao centro de massa do sistema de três corpos podem ser escritas pelas expressões adimensionais a seguir,

$$\sqrt{\langle r_{n\gamma}^2 \rangle |S_{2n}|} = R_{n\gamma} \left( \pm \sqrt{\frac{E_{nn}}{S_{2n}}}, \sqrt{\frac{E_{nc}}{S_{2n}}}, A \right), \quad (1.7)$$

$$\sqrt{\langle r_{\gamma}^2 \rangle |S_{2n}|} = R_{\gamma}^{CM} \left( \pm \sqrt{\frac{E_{nn}}{S_{2n}}}, \sqrt{\frac{E_{nc}}{S_{2n}}}, A \right). \quad (1.8)$$

A grande seção de choque do Carbono-22 observada por Tanaka e colaboradores (TANAKA *et al.*, 2010), em colisões de  $^{22}\text{C}$  num alvo de hidrogênio líquido à 40 MeV/A comparada aos núclídeos de Carbono  $^{19}\text{C}$  e  $^{20}\text{C}$ , desencadeou uma discussão teórica (YAMASHITA *et al.*, 2011; FORTUNE; SHERR, 2012; ERSHOV *et al.*, 2012; ACHARYA *et al.*, 2013) sobre extrair o valor do raio quadrado médio  $\sqrt{\langle r_m^2 \rangle}$  do  $^{22}\text{C}$ . Como dito anteriormente, do ponto de vista experimental, a energia de separação de dois nêutrons do  $^{22}\text{C}$  não é bem conhecida. Uma recente avaliação de (AUDI *et al.*, 2012), foi de  $S_{2n} = 110(60)$  keV. A seção de choque da Ref. (TANAKA *et al.*, 2010), analisada com o método de alcance finito de Glauber sob uma aproximação óptica, sugere que raio quadrado médio (rms) do  $^{22}\text{C}$  é de  $5.4 \pm 0.9$  fm. E também, a partir de uma medida de massa

da Ref. (GAUDEFROY *et al.*, 2012), o valor de  $S_{2n}$  é sugerido igual a  $-0.14$  (46) MeV. Há também uma evidência indireta que o  $^{22}\text{C}$  pode ser ligado com um valor menor que 70 keV (MOSBY *et al.*, 2013).

A análise do nosso grupo de pesquisa mostrou que os dois nêutrons de valência preferem ocupar o orbital  $s_{1/2}$ . Considerando a observação do raio de  $^{22}\text{C}$  junto ao  $^{20}\text{C}$ , foi dado na Ref. (YAMASHITA *et al.*, 2011) o raio estimado de

$$\sqrt{\langle r_n^2 \rangle} = \sqrt{\frac{22}{2} \sqrt{\langle r_m^2 [^{22}\text{C}] \rangle - \frac{20}{22} \langle r_m^2 [^{20}\text{C}] \rangle}} = 15 \pm 4 \text{ fm}, \quad (1.9)$$

onde  $\sqrt{\langle r_m^2 [^{20}\text{C}] \rangle} = 2.98(5)$  fm (OZAWA *et al.*, 2001). Nossos cálculos para o raio quadrado médio do  $^{22}\text{C}$  são mostrados na seção 4.1.

Um dos objetivos desse trabalho consiste em dar continuidade ao estudo da física de Efimov com ênfase em sistemas de núcleos-halo do tipo dois corpos nêutron-carço (por exemplo o espalhamento  $n\text{-}^{19}\text{C}$ ), ou com halos de dois núcleons (por exemplo  $n\text{-}n\text{-}^{20}\text{C}$ ). Como o modelo de alcance zero renormalizado é justificável para interações no contexto de física de baixa energia, nós servimos desse formalismo a fim de investigar o comportamento físico dos núcleos exóticos que têm sido recentemente alvo de pesquisas experimentais e teóricas.

Para cumprir os objetivos propostos nós nos dedicamos a estudar modelos e métodos (numéricos e formais) em física nuclear de três corpos. Os modelos estudados têm por objetivo basicamente reproduzir resultados experimentais observados e dessa forma se deduzir e/ou verificar leis de escala, que são obedecidas pelas propriedades do halo de dois nêutrons em núcleos exóticos leves. Os métodos formais e numéricos consideram técnicas para se resolver equações integrais não-relativísticas que se aplicam aos modelos em questão.

### 1.3 Organização da Tese

No capítulo 2 será introduzido o formalismo. É feita a derivação das equações de Faddeev inserindo escalas de energia para um potencial separável de curto alcance do tipo delta de Dirac.

A partir das funções espectadoras obtidas no Capítulo 2, no capítulo 3 é obtida a função de onda do núcleo halo de dois nêutrons e são calculadas distribuições de momento de recuo de alguns núcleos.

No capítulo 4 são mostrados resultados para a estrutura do  $^{22}\text{C}$ , onde foram analisadas algumas densidades comparando o potencial de alcance zero e um potencial de alcance finito e também propriedades da estrutura espacial do halo.

As conclusões e perspectivas são discutidas no Capítulo 5.



# 2 Estados ligados na física de poucos corpos

## 2.1 Mecânica Quântica de Poucos Corpos

No espalhamento de duas partículas em baixas energias, a interação prevalece no estado de onda  $S$ , já que há uma barreira centrífuga nas ondas parciais de ordem maior suprime a aproximação das partículas. A amplitude de espalhamento, discutida no Apêndice B, para uma onda  $S$  é dada por

$$f_0(k) = \frac{1}{k} e^{i\delta_0(k)} \text{sen}(\delta_0(k)), \quad (2.1)$$

onde  $\delta_0(k)$  é o deslocamento de fase entre a onda esférica emergente e incidente nesse estado de momento angular. O espalhamento entre duas partículas a baixas energias é bem conhecido por dois parâmetros: o comprimento de espalhamento  $a$ , relacionado com a amplitude de espalhamento na energia zero, e o alcance efetivo  $r_0$ , que está associado ao alcance de um potencial de dois corpos, onde  $k \cot(\delta_0(k)) = -1/a + (1/2)r_0 k^2 + \dots$ .

Considerando uma situação onde o potencial de curto alcance atrativo não é forte o suficiente para manter um estado ligado de dois corpos, o sinal de  $a$  é negativo. Conforme o potencial se torna mais atrativo  $|a|$  aumenta enquanto  $a < 0$  é mais negativo chegando a divergir para  $-\infty$  (i.e., um estado ligado em  $E_b = 0$ ). De fato, essa situação pode ser encontrada em armadilhas atômicas ultrafrias próximo a uma ressonância de Feshbach (THEIS *et al.*, 2004). Fazendo este potencial ainda mais atrativo, o comprimento de espalhamento se tornará positivo (mas com  $a \gg r_0$ ), e nos condensados de átomos frios, por exemplo, haverá a formação de dímeros.

Para um potencial de alcance zero, apenas o primeiro termo da expansão acima sobreviverá, extrapolando-se a amplitude de espalhamento para os números de onda imaginários,  $k = ik_0$  pode-se obter que o dímero tem energia  $E_b = -\frac{\hbar^2}{Ma^2}$  com a condição de existir pólo nessa amplitude.  $M$  é a massa de cada partícula isolada. A função de onda correspondente para  $r > r_0$  é dada por  $\psi(r) \sim (1/r)e^{-r/a}$ , que corresponde exatamente à função de onda de um potencial de alcance zero se  $r_0 \rightarrow 0$ .

### 2.1.1 Efeito Efimov

Efimov (EFIMOV, 1970) descobriu que três bósons idênticos ocupando um estado  $S$  totalmente simétrico obedecem a uma lei de escala geométrica, de tal forma que a razão dos autovalores de energias de dois estados sucessivos é uma constante. Isso resulta em uma acumulação de estados de energias próximas a zero, com o tamanho do sistema crescendo por um fator de 22.7. A quantidade de estados ligados de três corpos é infinita quando a energia de ligação do dímero é zero, e surpreendentemente o número de estados fracamente ligados diminui quando a interação se torna mais atrativa.

Um meio de se obter experimentalmente esses estados consiste em tratar amostras gasosas relativamente densas em armadilhas magneto-ópticas, onde a amostra atômica é submetida a temperaturas muito baixas através do método de resfriamento a laser. Nesse regime o movimento térmico não suprime os efeitos quânticos e a interação de dois corpos entre os átomos pode ser ajustada usando ressonâncias de Feshbach (FESHBACH, 1962). Nessas condições ocorre a formação de trímeros de Efimov, observados em misturas de  $^{41}\text{K}$  e  $^{87}\text{Rb}$  (BARONTINI *et al.*, 2009). A vantagem desse tipo de estudo em átomos frios é que a interação pode ser modificada experimentalmente, o que não se pode controlar no caso dos núcleos exóticos.

Colisões onde duas partículas permanecem em seu estado fundamental e absorvem somente momento de recuo, mudando sua energia cinética, são caracterizadas pelo espalhamento elástico. A interação entre dois corpos é assumida central e de curto alcance onde  $r_0$  é o alcance efetivo. Quando o comprimento de espalhamento de dois corpos  $a$  é tal que  $a \gg r_0$  podemos usar potenciais do tipo  $\delta$ -Dirac. Em sistemas de mais partículas o problema se torna não trivial

pois ocorrem espalhamentos múltiplos com as partículas que interagem aos pares, mesmo com interação de curto alcance, ou interação de contato.

## 2.2 Formalismo - Equações de Faddeev

O formalismo para tratar os sistemas descritos na seção anterior consiste na introdução de escalas físicas nas equações de Faddeev. Uma das maneiras, a princípio, é resolver as equações de Faddeev usando um potencial separável (TABAKIN, 1965), uma forma especial de interação não local que já foi muito utilizada em problemas de três corpos em física nuclear. Esse potencial leva a uma simplificação considerável das equações de Faddeev e o efeito Efimov aparece de forma natural no limite da energia (EFIMOV, 1979).

### 2.2.1 Equações de Faddeev para Funções de Onda de Espalhamento

Num sistema de três corpos existem três diferentes subsistemas de dois corpos. A idéia é somar as contribuições dos pares de cada subsistema de dois corpos, para em seguida, construir o sistema para três corpos.

Começamos por escrever a equação de Schrödinger como

$$(E - H_0)|\psi^{(+)}\rangle = V|\psi^{(+)}\rangle, \quad (2.2)$$

onde  $\psi^{(+)}$  é a função de onda de espalhamento e o sinal (+) indica ser a solução contendo ondas esféricas emergentes,  $H_0$  é o operador energia cinética e o potencial  $V$  para o sistema de 3 corpos pode ser definido em termos dos potenciais de interação das 3 partículas como,

$$V = v_A + v_B + v_C.$$

No caso do espalhamento de uma das partículas pelo par ligado das outras duas, a Eq. 2.2 correspondente às interações entre os pares (B,C), (A,C) e (A,B) respectivamente, pode ser

escrita da forma,

$$\psi^{(+)} = \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} \sum v_\alpha \psi^{(+)}, \quad (2.3)$$

onde o subíndice  $\alpha$  é referente aos pares formados pelas três partículas A, B e C.

A função de onda de espalhamento pode ser escrita em termos das componentes de Faddeev como

$$\psi^{(+)} = G_0^{(+)}(E)(v_A + v_B + v_C)\psi^{(+)} = \psi_A^{(+)} + \psi_B^{(+)} + \psi_C^{(+)}, \quad (2.4)$$

e a função de onda para um par qualquer ( $\alpha = A, B$  ou  $C$ ),

$$\psi_\alpha^{(+)} = G_0^{(+)}(E)v_\alpha \psi^{(+)}. \quad (2.5)$$

Substituindo  $\psi^{(+)}$  na equação acima temos,

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^{(+)} &= G_0^{(+)}(E)v_\alpha(v_A + v_B + v_C)\psi^{(+)} \\ &= G_0^{(+)}(E)v_\alpha(\psi_A^{(+)} + \psi_B^{(+)} + \psi_C^{(+)}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Para a partícula  $\alpha = A$ , por exemplo temos,

$$\psi_A^{(+)} = G_0^{(+)}(E)v_A(\psi_A^{(+)} + \psi_B^{(+)} + \psi_C^{(+)}), \quad (2.7)$$

ou ainda,

$$(1 - G_0^{(+)}(E)v_A)\psi_A^{(+)} = G_0^{(+)}v_A(\psi_B^{(+)} + \psi_C^{(+)}). \quad (2.8)$$

Para resolvermos (2.8) devemos introduzir uma condição de contorno do espalhamento, que escolhemos como a solução da equação homogênea  $\phi_A$ , que é a função de onda do par ligado (BC) e uma onda plana na coordenada relativa de A e (BC). Assim a componente de Faddeev da função é dada por

$$\psi_A^{(+)} = \phi_A + \left[ (1 - G_0^{(+)}(E)v_A)\psi_A^{(+)} \right]^{-1} G_0^{(+)}v_A(\psi_B^{(+)} + \psi_C^{(+)}). \quad (2.9)$$

Podemos ainda escrever

$$\phi_A = G_0^{(+)}(E)v_A\phi_A, \quad (2.10)$$

ou

$$(1 - G_0^{(+)}(E)v_A)\phi_A = 0. \quad (2.11)$$

Uma matriz de transição de dois corpos  $t$  para um par pode ser escrita como

$$\begin{aligned} t_\alpha &= v_\alpha + t_\alpha G_0^{(+)}(E)v_\alpha \\ &= v_\alpha + v_\alpha G_0^{(+)}(E)t_\alpha, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$G_0^{(+)}t_\alpha = G_0^{(+)}v_\alpha + G_0^{(+)}t_\alpha G_0^{(+)}(E)v_\alpha, \quad (2.13)$$

$$(1 - G_0^{(+)}v_\alpha)G_0^{(+)}t_\alpha = G_0^{(+)}v_\alpha. \quad (2.14)$$

Assim,

$$G_0^{(+)}t_\alpha = (1 - G_0^{(+)}v_\alpha)^{-1} G_0^{(+)}v_\alpha. \quad (2.15)$$

Podemos notar que se  $\alpha = A$ , a expressão acima é equivalente ao termo que multiplica  $(\psi_B^{(+)} + \psi_C^{(+)})$  no lado direito da equação (2.9). Assim, substituindo (2.15) em (2.9) com os índices das partículas,

$$\psi_A^{(+)} = \phi_A + G_0^{(+)}t_A(\psi_B^{(+)} + \psi_C^{(+)}), \quad (2.16)$$

$$\psi_B^{(+)} = G_0^{(+)}t_B(\psi_A^{(+)} + \psi_C^{(+)}), \quad (2.17)$$

$$\psi_C^{(+)} = G_0^{(+)}t_C(\psi_A^{(+)} + \psi_B^{(+)}). \quad (2.18)$$

Podemos escrever as expressões para  $\psi_A^{(+)}$ ,  $\psi_B^{(+)}$  e  $\psi_C^{(+)}$  acima na forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \psi_A^{(+)} \\ \psi_B^{(+)} \\ \psi_C^{(+)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + G_0^{(+)}(E) \begin{pmatrix} 0 & t_A & t_A \\ t_B & 0 & t_B \\ t_C & t_C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A^{(+)} \\ \psi_B^{(+)} \\ \psi_C^{(+)} \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

e a solução é dada por

$$\begin{pmatrix} \psi_A^{(+)} \\ \psi_B^{(+)} \\ \psi_C^{(+)} \end{pmatrix} = \left( 1 - G_0^{(+)}(E) \begin{pmatrix} 0 & t_A & t_A \\ t_B & 0 & t_B \\ t_C & t_C & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \phi_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

### 2.2.2 Equações de Faddeev para a matriz de transição

Podemos também escrever a matriz de transição para três corpos  $T$  em função da variável  $z$  como,

$$T^{(+)}(z) = V + VG^{(+)}(z)T^{(+)}(z)V \quad (2.21)$$

onde o propagador de três corpos é dado por,

$$\begin{aligned} G^{(+)}(z) &= G_0^{(+)}(z) + G_0^{(+)}(z)T^{(+)}(z)G_0^{(+)}(z) \\ &= \frac{1}{z - H + i\epsilon} \end{aligned} \quad (2.22)$$

e o potencial,

$$V = v_A + v_B + v_C \quad (2.23)$$

A equação (2.21) pode ser escrita para os três corpos separadamente onde,

$$T^{(+)}(z) = T_A^{(+)}(z) + T_B^{(+)}(z) + T_C^{(+)}(z), \quad (2.24)$$

temos,

$$T_A^{(+)} = v_A + v_A G_0^{(+)} T^{(+)} \quad (2.25)$$

$$T_B^{(+)} = v_B + v_B G_0^{(+)} T^{(+)} \quad (2.26)$$

$$T_C^{(+)} = v_C + v_C G_0^{(+)} T^{(+)}, \quad (2.27)$$

que na forma matricial pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} T_A^{(+)} \\ T_B^{(+)} \\ T_C^{(+)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_A & v_A & v_A \\ v_B & v_B & v_B \\ v_C & v_C & v_C \end{pmatrix} G_0^{(+)} \begin{pmatrix} T_A^{(+)} \\ T_B^{(+)} \\ T_C^{(+)} \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Analisando a componente  $T_A$ , da matriz acima, temos

$$T_A^{(+)} = v_A + v_A G_0^{(+)} (T_A^{(+)} + T_B^{(+)} + T_C^{(+)}) \quad (2.29)$$

escrevendo em termos de  $T_A$ ,

$$T_A^{(+)} - v_A G_0^{(+)} T_A^{(+)} = v_A + v_A G_0^{(+)} (T_B^{(+)} + T_C^{(+)}), \quad (2.30)$$

$$(1 - v_A G_0^{(+)}) T_A^{(+)} = v_A + v_A G_0^{(+)} (T_B^{(+)} + T_C^{(+)}). \quad (2.31)$$

Multiplicando a equação (2.31) pelo termo  $(1 - v_A G_0)^{-1}$ ,

$$(1 - v_A G_0^{(+)})^{-1} (1 - v_A G_0^{(+)}) T_A^{(+)} = (1 - v_A G_0^{(+)})^{-1} v_A + v_A G_0^{(+)} (T_B^{(+)} + T_C^{(+)}), \quad (2.32)$$

onde sabemos que

$$t_A(z) = (1 - v_A G_0^{(+)})^{-1} v_A, \quad (2.33)$$

podemos escrever as componentes  $T(z)$  em termos das componentes  $t(z)$ ,

$$T_A^{(+)} = t_A + t_A G_0^{(+)} (T_B^{(+)} + T_C^{(+)}) \quad (2.34)$$

$$T_B^{(+)} = t_B + t_B G_0^{(+)} (T_A^{(+)} + T_C^{(+)}) \quad (2.35)$$

$$T_C^{(+)} = t_C + t_C G_0^{(+)} (T_A^{(+)} + T_B^{(+)}) \quad (2.36)$$

Na forma de matriz,

$$\begin{pmatrix} T_A^{(+)} \\ T_B^{(+)} \\ T_C^{(+)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_A \\ t_B \\ t_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t_A & t_A \\ t_B & 0 & t_B \\ t_C & t_C & 0 \end{pmatrix} G_0^{(+)} \begin{pmatrix} T_A^{(+)} \\ T_B^{(+)} \\ T_C^{(+)} \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

O argumento da matriz  $t$  de dois corpos é a energia do centro de massa do par  $(\beta\gamma)$  dado por  $\left(E_3 - \frac{q_\alpha^2}{2m_{\beta\gamma,\alpha}}\right)$ , onde  $q_\alpha$  é o momento de Jacobi da partícula  $\alpha$  com relação ao centro de massa do par. Assim a equação de Faddeev para as componentes do operador transição pode ser dada por,

$$T_\alpha^{(+)}(E_3) = t_\alpha \left( E_3 - \frac{q_\alpha^2}{2m_{\beta\gamma,\alpha}} \right) \left[ 1 + G_0^{(+)}(E_3) (T_\beta^{(+)}(E_3) + T_\gamma^{(+)}(E_3)) \right], \quad (2.38)$$

onde os subíndices  $\alpha, \beta, \gamma = A, B, C$  correspondem as três partículas sendo  $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ .

### 2.2.3 Matriz de Transição para o Potencial de Alcance zero e Elementos de Matriz

O potencial de contato é bem descrito matematicamente pela função generalizada delta de Dirac. Qualitativamente, ele corresponde a um potencial que tem valor zero em todo espaço, exceto num único ponto com valor infinito característico da função delta. Essa interação representa o limite de alcance nulo de um potencial de curto alcance. Esse limite é útil para



descrever a física de sistemas quânticos muito dilutos cuja a interação é dominada pelo estado de momento angular zero.

A princípio estudaremos uma forma especial de interação não local que foi muito utilizada em problemas de poucos corpos em física nuclear. Isso resulta em uma simplificação considerável das equações integrais de Faddeev que ainda contém o efeito Efimov.

O potencial separável deve ser escrito como,

$$V = \lambda|\chi\rangle\langle\chi|, \quad (2.39)$$

onde o sinal de  $\lambda$  nos dá informação sobre o potencial ser atrativo ou repulsivo. Considerando que  $\vec{R}$  é um vetor que separa duas partículas, o elemento de matriz do potencial local  $V$  no espaço das configurações é dado por,

$$\langle\vec{R}'|V|\vec{R}\rangle = V(\vec{R})\delta(\vec{R}' - \vec{R}).$$

Para o potencial  $\delta$ -Dirac,

$$V(\vec{R}) = \lambda\delta(\vec{R}),$$

e assim,

$$\begin{aligned} \langle\vec{R}'|V|\vec{R}\rangle &= \lambda\delta(\vec{R})\delta(\vec{R}' - \vec{R}) \\ &= \lambda\delta(\vec{R})\delta(\vec{R}'). \end{aligned} \quad (2.40)$$

No espaço dos momentos fica,

$$\langle\vec{p}'|V|\vec{p}\rangle = (2\pi)^3 \int d^3R d^3R' e^{i\vec{p}\cdot\vec{R}} e^{i\vec{p}'\cdot\vec{R}'} \delta(\vec{R})\delta(\vec{R}'), \quad (2.41)$$

e por conveniência redefinimos  $\lambda/2\pi$  como  $\lambda$ :

$$\langle\vec{p}'|V|\vec{p}\rangle = \lambda g^*(\vec{p}')g(\vec{p}), \quad (2.42)$$

onde,

$$\int d^3R e^{i\vec{p}\cdot\vec{R}} \delta(\vec{R}) = 1, \quad (2.43)$$

e o fator de forma do potencial  $\delta$ -Dirac é  $g(\vec{p}) = g^*(\vec{p}^\dagger) = 1$  e,

$$\langle \chi | \vec{p} \rangle = \langle \vec{p} | \chi \rangle = g(p), \quad (2.44)$$

Podemos escrever a equação da matriz  $T$  (2.21) inserindo o potencial separável,

$$\begin{aligned} T^{(+)}(E) &= V + VG_0^{(+)}(E)T^{(+)}(E) \\ &= \lambda|\chi\rangle\langle\chi| + \lambda|\chi\rangle\langle\chi|G_0^{(+)}(E)T^{(+)}(E), \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde substituímos  $G(E)V$  por  $G_0(E)V$ . Multiplicando toda equação (2.45) por um operador  $\langle\chi|G_0(E)$  à esquerda de cada termo obtemos facilmente que:

$$\langle\chi|G_0(E)T(E) = \frac{\lambda\langle\chi|G_0(E)|\chi\rangle\langle\chi|}{(1 - \lambda\langle\chi|G_0(E)|\chi\rangle)}. \quad (2.46)$$

Levando (2.46) em (2.45) podemos escrever,

$$T(E) = \lambda|\chi\rangle \left[ 1 + \frac{\lambda\langle\chi|G_0(E)|\chi\rangle}{1 - \lambda\langle\chi|G_0(E)|\chi\rangle} \right] \langle\chi|. \quad (2.47)$$

Essa é a matriz  $T$  de dois corpos que também pode ser escrita como,

$$T(E) = |\chi\rangle\tau(E)\langle\chi|, \quad (2.48)$$

onde,

$$\tau(E) = \frac{1}{\lambda^{-1} - \langle\chi|G_0(E)|\chi\rangle} \quad (2.49)$$

Introduzindo a resolução da identidade

$$\int d^3p |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| = 1$$

em (2.49),

$$\begin{aligned} \tau(E) &= \left[ \lambda^{-1} - \int \int d^3p' d^3p \langle \chi | \vec{p}' \rangle \langle \vec{p}' | G_0(E) | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \chi \rangle \right]^{-1} \\ &= \left[ \lambda^{-1} - \int \int d^3p' d^3p \frac{g(p)g(p')\delta(\vec{p}' - \vec{p})}{E - \frac{p^2}{2m_r} + i\epsilon} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Assim, na forma integral  $\tau(E)$  é dado por

$$\tau(E) = \left[ \lambda^{-1} - \int d^3p \frac{g(p)^2}{E - \frac{p^2}{2m_r} + i\epsilon} \right]^{-1}, \quad (2.51)$$

onde  $m_r$  é a massa reduzida de dois corpos e  $g(p)$  o fator de forma do potencial.

Se o potencial é um  $\delta$ -Dirac o fator de forma é  $g(p) = 1$ ,

$$\tau(E) = \left[ \lambda^{-1} - \int d^3p \frac{1}{E - \frac{p^2}{2m_r} + i\epsilon} \right]^{-1} = \left[ \lambda^{-1} - I(p) \right]^{-1}, \quad (2.52)$$

com  $I(p) = \int d^3p \frac{1}{E - \frac{p^2}{2m_r} + i\epsilon}$ . A integral  $I(p)$  não seria divergente somente se fosse unidimensional, para o caso tridimensional esta divergência é linear (ADHIKARI *et al.*, 1988; ADHIKARI *et al.*, 1993). Para que o resultado do elemento  $\tau(E)$  seja finito, o termo  $\lambda^{-1}$  deve apresentar um termo similar para cancelar a divergência em  $I(p)$ . Afim de resolver o problema da divergência introduzimos um valor para a energia em um ponto de subtração, onde a matriz  $T$  terá um valor  $\lambda_R$  para uma energia associada à uma escala de dois corpos  $E = -\mu_{(2)}^2$ . Assim a matriz  $\tau_R(E)$  renormalizada para o valor de energia no ponto de subtração é dada por,

$$\tau_R(-\mu_{(2)}^2)^{-1} = \lambda^{-1} - \int d^3p \frac{1}{-\mu_{(2)}^2 - \frac{p^2}{2m_r}} = \lambda_R^{-1}(-\mu_{(2)}^2), \quad (2.53)$$

ou

$$\lambda^{-1} = \lambda_R^{-1}(-\mu_{(2)}^2) + \int d^3p \frac{1}{-\mu_{(2)}^2 - \frac{p^2}{2m_r}}. \quad (2.54)$$

Substituindo (2.54) em (2.52) temos que,

$$\tau^{-1}(E) = \lambda_R^{-1}(-\mu_{(2)}^2) + (E + \mu_{(2)}^2)4\pi \int_0^\infty dp \left[ \frac{p^2}{\left(-\mu_{(2)}^2 - \frac{p^2}{2m_r}\right)\left(E - \frac{p^2}{2m_r}\right)} \right]. \quad (2.55)$$

A integral acima é finita e pode ser resolvida pelo método dos resíduos,

$$\int_0^\infty dp \left[ \frac{p^2}{\left(-\mu_{(2)}^2 - \frac{p^2}{2m_r}\right)\left(E - \frac{p^2}{2m_r}\right)} \right] = \frac{\pi \sqrt{2m_r}(\mu_{(2)} - \sqrt{-E})}{(E + \mu_{(2)}^2)}. \quad (2.56)$$

Substituindo (2.56) em (2.55) temos,

$$\tau^{-1}(E) = \lambda_R^{-1}(-\mu_{(2)}^2) + 2\pi^2 \sqrt{2m_r}(\mu_{(2)} - \sqrt{-E}) \quad (2.57)$$

Essa expressão nos será útil adiante no cálculo do estado ligado de três corpos.

## 2.3 Equações de Faddeev para Estados Ligados

Iremos deduzir as equações integrais acopladas para o estado ligado de três partículas, partindo da matriz de transição de três corpos, onde iremos introduzir uma escala de subtração para evitar o colapso Thomas (FREDERICO, 2014) no limite do potencial de alcance nulo. A matriz de transição apresenta um pólo na energia do estado ligado e o resíduo pode ser escrito em termos da função de onda do estado ligado. Desta forma podemos obter as equações de Faddeev para a função de onda do estado de três corpos, que correspondem às Eqs. 2.19 na forma homogênea. A utilidade desse método é trabalhar com a forma regularizada das equações para a matriz de transição de três corpos para o potencial de contato, que leva à equações integrais regularizadas, que evitam o colapso Thomas (ADHIKARI; FREDERICO, 1995). Essa derivação encontra-se na tese de doutorado de M. Yamashita (YAMASHITA, 2004) e por conveniência do

leitor reproduziremos a seguir.

Podemos escrever a equação de Lippman-Schwinger para a matriz  $T$  como,

$$T(E) = (1 + T(E)G_0(E)) V. \quad (2.58)$$

A escala física que incluímos nos dá a matriz  $T$  de forma renormalizada  $T_R$ , onde a energia no ponto de subtração vale  $E = -\mu_{(3)}^2$  (usaremos a notação  $\mu_{(3)}^2$  para a energia no ponto de subtração e  $T_R$  para a matriz de transição, ambos para três corpos,  $t$  minúsculo para a matriz de transição de 2 corpos). Assim podemos escrever a matriz renormalizada como,

$$T_R(-\mu_{(3)}^2) = \left(1 + T(-\mu_{(3)}^2)G_0(-\mu_{(3)}^2)\right) V, \quad (2.59)$$

ou seja,

$$V = \left(1 + T(-\mu_{(3)}^2)G_0(-\mu_{(3)}^2)\right)^{-1} T(-\mu_{(3)}^2), \quad (2.60)$$

Substituindo o valor da expressão acima para  $V$  na expressão da matriz  $T$ ,

$$T_R(E) = \left(1 + T(-\mu_{(3)}^2)G_0(-\mu_{(3)}^2)\right)^{-1} T(-\mu_{(3)}^2) + \left(1 + T(-\mu_{(3)}^2)G_0(-\mu_{(3)}^2)\right)^{-1} T(-\mu_{(3)}^2)G_0(E)T_R(E), \quad (2.61)$$

definindo a matriz de 3 corpos no ponto de subtração como a soma das matrizes de dois corpos ( $\alpha, \beta$ ) renormalizadas  $t_R$  (ADHIKARI; FREDERICO, 1995),

$$T_R(-\mu_{(3)}^2) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma=A, B, C} t_{R\alpha} \left( -\mu_{(3)}^2 - \frac{q_\alpha^2}{2m_{\beta\gamma, \alpha}} \right). \quad (2.62)$$

Substituindo a expressão (2.62) em (2.61) temos que,

$$T_R(E) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma=A, B, C} t_{R\alpha} \left( -\mu_{(3)}^2 - \frac{q_\alpha^2}{2m_{\beta\gamma, \alpha}} \right) \left( 1 + \left( G_0(E) - G_0(-\mu_{(3)}^2) \right) T_R(E) \right). \quad (2.63)$$

Quando a energia é próxima da energia de ligação ( $E \approx E_B$ ) aparece a energia associada ao pólo

do estado ligado. Assim esse termo domina e portanto temos que:

$$T(E_3) \approx \frac{|\Gamma_B\rangle\langle\Gamma_B|}{E_3 - E_B} = \frac{|\Gamma_B\rangle\langle\Gamma_B|}{E_3 + |E_B|}, \quad (2.64)$$

e ainda podemos escrever a matriz T como as componentes de Faddeev por,

$$T_\alpha(E_3) \approx \frac{|\Gamma_\alpha\rangle\langle\Gamma_B|}{E_3 + |E_B|}, \quad (2.65)$$

onde os vértices das componentes referentes ao estado ligado são  $|\Gamma_\alpha\rangle = v_\alpha|\Phi_B\rangle$  e  $\langle\Gamma_B| = \langle\Phi_B|V$ , lembrando que o potencial para as 3 partículas é  $V = v_\alpha + v_\beta + v_\gamma$ . Levando a expressão (2.65) na equação de Faddeev regularizada (2.63) em termos das componentes (2.38),

$$\frac{|\Gamma_\alpha\rangle\langle\Gamma_B|}{E_3 + |E_B|} \approx t_\alpha \left( E_3 - \frac{q_\alpha^2}{2m_{\beta\gamma,\alpha}} \right) \left[ 1 + \left( G_0(E_3) - G_0(-\mu_{(3)}^2) \right) \left( \frac{|\Gamma_\beta\rangle\langle\Gamma_B|}{E_3 + |E_B|} + \frac{|\Gamma_\gamma\rangle\langle\Gamma_B|}{E_3 + |E_B|} \right) \right]. \quad (2.66)$$

Para  $E \rightarrow -|E_B|$ ,

$$|\Gamma_\alpha\rangle = t_\alpha \left( E_3 - \frac{q_\alpha^2}{2m_{\beta\gamma,\alpha}} \right) \left( G_0(E_3) - G_0(-\mu_{(3)}^2) \right) \left( |\Gamma_\beta\rangle + |\Gamma_\gamma\rangle \right). \quad (2.67)$$

Da expressão (2.48),  $T(E) = |\chi\rangle\tau(E)\langle\chi|$ , podemos escrever a equação homogênea (2.67) como,

$$|\Gamma_\alpha\rangle = |\chi_\alpha\rangle\tau_\alpha \left( E_3 - \frac{q_\alpha^2}{2m_{\beta\gamma,\alpha}} \right) |\chi_\alpha\rangle \left( G_0(E_3) - G_0(-\mu_{(3)}^2) \right) \left( |\Gamma_\beta\rangle + |\Gamma_\gamma\rangle \right). \quad (2.68)$$

Projetando a equação (2.68) nos estados  $|\vec{p}_\alpha, \vec{q}_\alpha\rangle$ , temos

$$\langle\vec{p}_\alpha, \vec{q}_\alpha|\Gamma_\alpha\rangle = \langle\vec{p}_\alpha|\chi_\alpha\rangle\tau \left( E_3 - \frac{q_\alpha^2}{2m_{\beta\gamma,\alpha}} \right) \langle\chi_\alpha, \vec{q}_\alpha| \left( G_0(E_3) - G_0(-\mu_{(3)}^2) \right) \left( |\Gamma_\beta\rangle + |\Gamma_\gamma\rangle \right). \quad (2.69)$$

Para o potencial  $\delta$ -Dirac nós usamos

$$\langle\vec{p}_\alpha, \vec{q}_\alpha|\Gamma_\alpha\rangle = \langle\vec{p}_\alpha|\chi_\alpha\rangle\langle\vec{q}_\alpha|f_\alpha\rangle = g_\alpha(\vec{p}_\alpha)f_\alpha(\vec{q}_\alpha) = f_\alpha(\vec{q}_\alpha),$$

e a componente do estado ligado  $\alpha$  de 3 corpos de Faddeev satisfaz a equação homogênea dada

por

$$f_\alpha(\vec{q}_\alpha) = \tau \left( E_3 - \frac{q_\alpha^2}{2m_{\beta\gamma,\alpha}} \right) \langle \chi_\alpha, \vec{q}_\alpha | (G_0(E_3) - G_0(-\mu_{(3)}^2)) (|\chi_\beta\rangle|f_\beta\rangle + |\chi_\gamma\rangle|f_\gamma\rangle) \rangle, \quad (2.70)$$

onde  $f_\alpha(\vec{q}_\alpha)$  é a função espectadora que descreve a interação da partícula espectadora com o sub-sistema de dois corpos. O elemento de matriz  $\langle \chi_\alpha, \vec{q}_\alpha | (G_0(E_3) - G_0(-\mu_{(3)}^2)) (|\chi_\beta\rangle|f_\beta\rangle + |\chi_\gamma\rangle|f_\gamma\rangle) \rangle$  pode ser calculado separando a soma por,

$$\langle \chi_\alpha, \vec{q}_\alpha | (G_0(E_3) - G_0(-\mu_{(3)}^2)) |\chi_\beta\rangle|f_\beta\rangle = \int d^3q_\beta \langle \chi_\alpha, \vec{q}_\alpha | (G_0(E_3) - G_0(-\mu_{(3)}^2)) |\vec{q}_\beta\rangle \langle \vec{q}_\beta | \chi_\beta\rangle |f_\beta\rangle \quad (2.71)$$

onde introduzimos as relações de completeza,

$$\mathbf{1} = \int d^3q_\beta |\vec{q}_\beta\rangle \langle \vec{q}_\beta| \quad \text{e} \quad \mathbf{1} = \int d^3p_\alpha |\vec{p}_\alpha\rangle \langle \vec{p}_\alpha|. \quad (2.72)$$

Isso leva ao elemento de matriz:

$$\begin{aligned} \langle \chi_\alpha, \vec{q}_\alpha | G_0(E) |\chi_\beta\rangle |f_\beta\rangle &= \int d^3q_\alpha d^3p_\alpha d^3p_\beta \langle \chi_\alpha, \vec{q}_\alpha | \vec{p}_\alpha\rangle \\ &\times \langle \vec{p}_\alpha | (G_0(E_3) - G_0(-\mu_{(3)}^2)) |\vec{p}_\beta\rangle \langle \vec{q}_\alpha, \vec{p}_\alpha | \vec{p}_\beta \vec{q}_\beta\rangle |f_\beta(\vec{q}_\beta)\rangle. \end{aligned} \quad (2.73)$$

e considerando as relações entre os momentos de Jacobi, dados no Apêndice A, podem ser explicitados como escreveremos mais a baixo. O outro ingrediente necessário para escrevermos as equações integrais para as funções espectadoras  $f_\alpha$  é o elemento de matriz da matriz  $T$  de dois corpos para a interação delta de Dirac. Como vimos na Eq. 2.57 ele pode ser escrito da seguinte forma:

$$\tau \left( E_3 - \frac{q_\alpha^2}{2m_{\beta\gamma,\alpha}} \right) = \frac{1/\pi^2}{\sqrt{2m_{\beta\gamma}} \left( \pm \sqrt{E_{\beta\gamma}} - \sqrt{-E_3 + \frac{q_\alpha^2}{2m_{\beta\gamma,\alpha}}} \right)}, \quad (2.74)$$

onde  $E_{\beta\gamma}$  é o valor absoluto da energia do estado ligado ou virtual do par  $(\beta\gamma)$ , e que na amplitude de espalhamento é acompanhado do sinal + ou -, respectivamente. A transformação para

coordenadas esféricas na integração de  $d^3q$  é feita como,

$$\int_0^\infty d^3q \rightarrow \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\infty q^2 dq \int_0^{2\pi} d\phi.$$

Assim, obtemos as equações integrais acopladas para o estado ligado de três corpos distintos, onde introduzimos  $\vec{k} = \vec{q}' \rightarrow \vec{q}' \cdot \vec{q} = q'q \cos \theta$ . Escolhendo  $\vec{q}$  na direção z, sem perda de generalidade, dado que o momento angular total é conservado pelo potencial de contato na onda S,

$$\begin{aligned} f_A(q) = & \frac{1/2\pi^2}{\left(\pm \sqrt{E_{BC}} - \sqrt{-E_3 + \frac{q^2}{2m_{BC,A}}}\right) \sqrt{m_{BC}}} \int_0^{2\pi} d\phi \left[ \int_0^\infty f_B(q') dq' \times \right. \\ & \times \int_0^\pi q'^2 \sin \theta d\theta \left( \frac{1}{E_3 - \frac{q^2}{2m_{AC}} - \frac{q'^2}{2m_{BC}} - \frac{1}{m_C} q'q \cos \theta} - \frac{1}{-\mu_{(3)}^2 - \frac{q^2}{2m_{AC}} - \frac{q'^2}{2m_{BC}} - \frac{1}{m_C} q'q \cos \theta} \right) \\ & \left. + \int_0^\infty f_C(q') dq' \int_0^\pi q'^2 \sin \theta d\theta \left( \frac{1}{E_3 - \frac{q^2}{2m_{AB}} - \frac{q'^2}{2m_{BC}} - \frac{1}{m_B} q'q \cos \theta} - \frac{1}{-\mu_{(3)}^2 - \frac{q^2}{2m_{AB}} - \frac{q'^2}{2m_{BC}} - \frac{1}{m_B} q'q \cos \theta} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} f_B(q) = & \frac{1/2\pi^2}{\left(\pm \sqrt{E_{AC}} - \sqrt{-E_3 + \frac{q^2}{2m_{AC,B}}}\right) \sqrt{m_{AC}}} \int_0^{2\pi} d\phi \left[ \int_0^\infty f_A(q') dq' \times \right. \\ & \times \int_0^\pi q'^2 \sin \theta d\theta \left( \frac{1}{E_3 - \frac{q^2}{2m_{BC}} - \frac{q'^2}{2m_{AC}} - \frac{1}{m_C} q'q \cos \theta} - \frac{1}{-\mu_{(3)}^2 - \frac{q^2}{2m_{BC}} - \frac{q'^2}{2m_{AC}} - \frac{1}{m_C} q'q \cos \theta} \right) \\ & \left. + \int_0^\infty f_C(q') dq' \int_0^\pi q'^2 \sin \theta d\theta \left( \frac{1}{E_3 - \frac{q^2}{2m_{AB}} - \frac{q'^2}{2m_{AC}} - \frac{1}{m_A} q'q \cos \theta} - \frac{1}{-\mu_{(3)}^2 - \frac{q^2}{2m_{AB}} - \frac{q'^2}{2m_{AC}} - \frac{1}{m_A} q'q \cos \theta} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.76)$$

e,

$$\begin{aligned} f_C(q) = & \frac{1/2\pi^2}{\left(\pm \sqrt{E_{AB}} - \sqrt{-E_3 + \frac{q^2}{2m_{AB,C}}}\right) \sqrt{m_{AB}}} \int_0^{2\pi} d\phi \left[ \int_0^\infty f_A(q') dq' \times \right. \\ & \times \int_0^\pi q'^2 \sin \theta d\theta \left( \frac{1}{E_3 - \frac{q^2}{2m_{BC}} - \frac{q'^2}{2m_{AB}} - \frac{1}{m_B} q'q \cos \theta} - \frac{1}{-\mu_{(3)}^2 - \frac{q^2}{2m_{BC}} - \frac{q'^2}{2m_{AB}} - \frac{1}{m_B} q'q \cos \theta} \right) \\ & \left. + \int_0^\infty f_B(q') dq' \int_0^{2\pi} \pi q'^2 d\theta \left( \frac{1}{E_3 - \frac{q^2}{2m_{AC}} - \frac{q'^2}{2m_{AB}} - \frac{1}{m_A} q'q \cos \theta} - \frac{1}{-\mu_{(3)}^2 - \frac{q^2}{2m_{AC}} - \frac{q'^2}{2m_{AB}} - \frac{1}{m_A} q'q \cos \theta} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.77)$$



onde as partículas A, B e C, possuem massas  $m_A$ ,  $m_B$  e  $m_C$ , respectivamente. Considerando o estado de momento angular total nulo, as funções espectradoras dependem apenas de  $|\vec{q}| \equiv q$ , podemos efetuar as integrais angulares e obtemos:

$$f_A(q) = \frac{1/\pi}{\left(\pm \sqrt{E_{BC}} - \sqrt{-E_3 + \frac{q^2}{2m_{BC,A}}}\right) \sqrt{m_{BC}}} \times \\ \times \int_0^\infty dq' \left\{ \left[ \ln \left( \frac{E_3 - \frac{q^2}{2m_{AC}} - \frac{q'^2}{2m_{BC}} - \frac{q'q}{m_C}}{E_3 - \frac{q^2}{2m_{AC}} - \frac{q'^2}{2m_{BC}} + \frac{q'q}{m_C}} \right) - \ln \left( \frac{-\mu_{(3)}^2 - \frac{q^2}{2m_{AC}} - \frac{q'^2}{2m_{BC}} - \frac{q'q}{m_C}}{-\mu_{(3)}^2 - \frac{q^2}{2m_{AC}} - \frac{q'^2}{2m_{BC}} + \frac{q'q}{m_C}} \right) \right] f_B(q') + \right. \\ \left. + \left[ \ln \left( \frac{E_3 - \frac{q^2}{2m_{AB}} - \frac{q'^2}{2m_{BC}} - \frac{q'q}{m_B}}{E_3 - \frac{q^2}{2m_{AB}} - \frac{q'^2}{2m_{BC}} + \frac{q'q}{m_B}} \right) - \ln \left( \frac{-\mu_{(3)}^2 - \frac{q^2}{2m_{AB}} - \frac{q'^2}{2m_{BC}} - \frac{q'q}{m_B}}{-\mu_{(3)}^2 - \frac{q^2}{2m_{AB}} - \frac{q'^2}{2m_{BC}} + \frac{q'q}{m_B}} \right) \right] f_C(q') \right\}, \quad (2.78)$$

$$f_B(q) = \frac{1/\pi}{\left(\pm \sqrt{E_{AC}} - \sqrt{-E_3 + \frac{q^2}{2m_{AC,B}}}\right) \sqrt{m_{AC}}} \times \\ \times \int_0^\infty dq' \left\{ \left[ \ln \left( \frac{E_3 - \frac{q^2}{2m_{BC}} - \frac{q'^2}{2m_{AC}} - \frac{q'q}{m_C}}{E_3 - \frac{q^2}{2m_{BC}} - \frac{q'^2}{2m_{AC}} + \frac{q'q}{m_C}} \right) - \ln \left( \frac{-\mu_{(3)}^2 - \frac{q^2}{2m_{BC}} - \frac{q'^2}{2m_{AC}} - \frac{q'q}{m_C}}{-\mu_{(3)}^2 - \frac{q^2}{2m_{BC}} - \frac{q'^2}{2m_{AC}} + \frac{q'q}{m_C}} \right) \right] f_A(q') + \right. \\ \left. + \left[ \ln \left( \frac{E_3 - \frac{q^2}{2m_{AB}} - \frac{q'^2}{2m_{AC}} - \frac{q'q}{m_A}}{E_3 - \frac{q^2}{2m_{AB}} - \frac{q'^2}{2m_{AC}} + \frac{q'q}{m_A}} \right) - \ln \left( \frac{-\mu_{(3)}^2 - \frac{q^2}{2m_{AB}} - \frac{q'^2}{2m_{AC}} - \frac{q'q}{m_A}}{-\mu_{(3)}^2 - \frac{q^2}{2m_{AB}} - \frac{q'^2}{2m_{AC}} + \frac{q'q}{m_A}} \right) \right] f_C(q') \right\}, \quad (2.79)$$

e,

$$f_C(q) = \frac{1/\pi}{\left(\pm \sqrt{E_{AB}} - \sqrt{-E_3 + \frac{q^2}{2m_{AB,C}}}\right) \sqrt{m_{AB}}} \times \\ \times \int_0^\infty dq' \left\{ \left[ \ln \left( \frac{E_3 - \frac{q^2}{2m_{BC}} - \frac{q'^2}{2m_{AB}} - \frac{q'q}{m_B}}{E_3 - \frac{q^2}{2m_{BC}} - \frac{q'^2}{2m_{AB}} + \frac{q'q}{m_B}} \right) - \ln \left( \frac{-\mu_{(3)}^2 - \frac{q^2}{2m_{BC}} - \frac{q'^2}{2m_{AB}} - \frac{q'q}{m_B}}{-\mu_{(3)}^2 - \frac{q^2}{2m_{BC}} - \frac{q'^2}{2m_{AB}} + \frac{q'q}{m_B}} \right) \right] f_A(q') + \right. \\ \left. + \left[ \ln \left( \frac{E_3 - \frac{q^2}{2m_{AC}} - \frac{q'^2}{2m_{AB}} - \frac{q'q}{m_A}}{E_3 - \frac{q^2}{2m_{AC}} - \frac{q'^2}{2m_{AB}} + \frac{q'q}{m_A}} \right) - \ln \left( \frac{-\mu_{(3)}^2 - \frac{q^2}{2m_{AC}} - \frac{q'^2}{2m_{AB}} - \frac{q'q}{m_A}}{-\mu_{(3)}^2 - \frac{q^2}{2m_{AC}} - \frac{q'^2}{2m_{AB}} + \frac{q'q}{m_A}} \right) \right] f_B(q') \right\}. \quad (2.80)$$

As soluções numéricas para as Eqs. (2.78), (2.79) e (2.80) são discutidas no Apêndice C e seus resultados, bem como seu uso em física nuclear, serão discutidos nos capítulos a seguir.

# 3 Distribuições de momento de núcleos halo de dois nêutrons

Para investigar os núcleos com halos de dois nêutrons, nós devemos utilizar as equações integrais para o estado ligado de três corpos onde dois são idênticos e um corpo é mais pesado referente ao caroço. Nesse caso, as equações integrais (2.78), (2.79) e (2.80) serão particularizadas para um sistema nêutron-nêutron-caroço. Note que neste modelo o estado de momento angular total do sistema de três corpos nêutron-nêutron-caroço é nulo. Além disso, os dois nêutrons do halo devem encontrar-se em um estado de spin zero para satisfazer a antissimetriação da função de onda para esses férmions, uma vez que a componente de momento da função de onda é simétrica pela troca dos dois nêutrons. O caroço é considerado sem estrutura. Essa descrição torna-se mais realista quando os halos são muito maiores que o caroço, fazendo com que os dois nêutrons tenham probabilidade muito pequena de encontrarem-se no caroço, onde o efeito da antissimetriação completa da função de onda nuclear não pode ser desconsiderada. A antissimetriação completa da função de onda dos nêutrons do halo e caroço será desprezada no presente trabalho, onde estamos interessados nas propriedades de longas distâncias do halo. A equação do estado ligado para o sistema de duas massas iguais e uma diferente ( $\alpha\alpha\beta$ , onde fazemos  $\alpha = \gamma$ ) é escrita para  $m_\alpha = m_\gamma$ , e  $A = m_\beta/m_\alpha$  a partir das funções espectadoras:

$$f_{\alpha\alpha}(q) = 2\tau_{\alpha\alpha}(q, \epsilon_3) \int_0^\infty dq' \frac{q'}{q} G_1(q, q', \epsilon_3) f_{\alpha\beta}(q'), \quad (3.1)$$

$$f_{\alpha\beta}(q) = \tau_{\alpha\beta}(q, \epsilon_3) \int_0^\infty dq' \left[ \frac{q'}{q} G_1(q, q', \epsilon_3) f_{\alpha\alpha}(q') + A G_2(q, q', \epsilon_3) f_{\alpha\beta}(q') \right], \quad (3.2)$$

com,

$$\tau_{\alpha\alpha}(q, \epsilon_3) = \frac{1}{\pi} \left[ \sqrt{\epsilon_3 + \frac{A+2}{4A}q^2} + \sqrt{\epsilon_{\alpha\alpha}} \right]^{-1},$$

$$\tau_{\alpha\beta}(q, \epsilon_3) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{A+1}{2A} \right)^{3/2} \left[ \sqrt{\epsilon_3 + \frac{A+2}{4A}q^2} + \sqrt{\epsilon_{\alpha\beta}} \right]^{-1},$$

e,

$$G_1(q, q', \epsilon_3) = \log \frac{2A(\epsilon_3 + q'^2 + q'q) + q^2(A+1)}{2A(\epsilon_3 + q'^2 - q'q) + q^2(A+1)} - \log \frac{2A(1 + q'^2 + q'q) + q^2(A+1)}{2A(1 + q'^2 - q'q) + q^2(A+1)},$$

$$G_2(q, q', \epsilon_3) = \log \frac{2(A\epsilon_3 + q'q) + (q^2 + q'^2)(A+1)}{2(A\epsilon_3 - q'q) + (q^2 + q'^2)(A+1)} - \log \frac{2(A + q'q) + (q^2 + q'^2)(A+1)}{2(A - q'q) + (q^2 + q'^2)(A+1)},$$

onde definimos as energias  $\epsilon_3 \equiv E_3/\mu_{(3)}^2$ ,  $\epsilon_{\alpha\alpha} \equiv E_{\alpha\alpha}/\mu_{(3)}^2$  e  $\epsilon_{\alpha\beta} \equiv E_{\alpha\beta}/\mu_{(3)}^2$  em termos do parâmetro de escala  $\mu_{(3)}^2$ .

### 3.1 Função de onda no espaço dos momentos

Alguns núcleos exóticos, como o  ${}^6\text{He}$  e  ${}^{11}\text{Li}$  por exemplo apresentam característica de serem Borromeanos, onde existe apenas a formação do estado ligado dos dois nêutrons com o caroço, mesmo que não haja ligação de pares individualmente como discutido anteriormente na classificação de núcleos exóticos na Seção 1.2. Para facilitar a descrição da configuração do halo de dois nêutrons em núcleos exóticos leves, escrevemos os momentos relativos de Jacobi como representados na figura 3.1.

Para potenciais do tipo alcance zero, as funções de onda no espaço dos momentos  $\Psi(\vec{q}_c, \vec{p}_c)$  ou  $\Psi(\vec{q}_n, \vec{p}_n)$  referentes ao sistema  $nnc$ , podem ser escritas em termos das funções espectadoras. A função espectadora  $f_{nn}$  descreve a dinâmica do caroço com relação ao centro de massa do subsistema nêutron-nêutron e  $f_{nc}$  a dinâmica de um nêutron com relação ao centro de massa do par remanescente, por sua vez, nêutron-caroço.

Na base  $|\vec{q}_c, \vec{p}_c\rangle$ , podemos escrever a função de onda de três corpos, nêutron-nêutron-caroço,

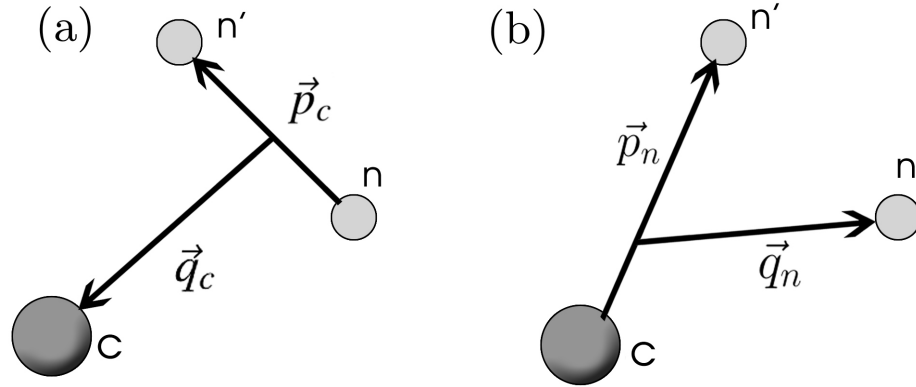


FIGURA 3.1 – Momentos relativos de Jacobi. À esquerda representamos o momento relativo do caroço ao centro de massa do par nêutron-nêutron ( $\vec{p}_c$  e  $\vec{q}_c$ ). À direita temos o momento relativo do nêutron ao centro de massa do subsistema caroço-nêutron ( $\vec{q}_n$  e  $\vec{p}_n$ ). Figura construída baseando-se na Fig. A.1.

com momento angular total nulo ( $L = 0$ ) como,

$$\langle \vec{q}_c \vec{p}_c | \Psi \rangle = \frac{f_{nn}(q_c) + f_{nc}(|\vec{p}_c - \frac{q_c}{2}|) + f_{nc}(|\vec{p}_c + \frac{q_c}{2}|)}{S_{2n} + H_0}; \quad (3.3)$$

onde acima temos,  $H_0 \equiv \frac{p_c^2}{2m_{nn}} + \frac{q_c^2}{2m_{nc}}$ , e  $S_{2n}$  é a energia de separação de dois nêutrons, que corresponde à energia de ligação de três corpos citada anteriormente. A função de onda pode ser escrita, também, na base de momentos de Jacobi  $|\vec{q}_n \vec{p}_n\rangle$  mostrados na Figura 3.1, como,

$$\langle \vec{q}_n \vec{p}_n | \Psi \rangle = \frac{f_{nn}(|\vec{p}_n - \frac{A}{A+1}\vec{q}_n|) + f_{nc}(|\vec{p}_n + \frac{1}{A+1}\vec{q}_n|) + f_{nc}(q_n)}{S_{2n} + H'_0}. \quad (3.4)$$

em que  $H'_0 \equiv \frac{p_n^2}{2m_{nc}} + \frac{q_n^2}{2m_{nc,n}}$ . Definimos  $A \equiv \frac{m_c}{m_n}$ , e as massas reduzidas são dadas por  $m_{nn} = \frac{m_n}{2} = \frac{1}{2}$ ,  $m_{nn,c} = \frac{2A}{A+2}$ ,  $m_{nc} = \frac{A}{A+1}$  e  $m_{nc,n} = \frac{A+1}{A+2}$  onde definindo a massa do nucleon  $m_n = 1$ , e a massa do caroço é simplesmente  $m_c = A$ .

As equações integrais para as funções espectadoras das Equações (3.3) e (3.4) podem ser escritas para o sistema nêutron-nêutron-caroço ( $nnc$ ) como:

$$f_{nn}(q) = 2\tau_{nn}(q, S_{2n}) \int_0^\infty dq' \frac{q'}{q} G_1(q, q', S_{2n}) f_{nc}(q'), \quad (3.5)$$

e

$$f_{nc}(q) = \tau_{nc}(q, S_{2n}) \int_0^\infty dq' \left[ \frac{q'}{q} G_1(q, q', S_{2n}) f_{nn}(q') + A G_2(q, q', S_{2n}) f_{nc}(q') \right], \quad (3.6)$$

onde  $\tau_{nc}(q, S_{2n})$ ,  $\tau_{nn}(q, S_{2n})$ ,  $G_1(q, q', S_{2n})$ ,  $G_2(q, q', S_{2n})$  são definidos como na seção anterior onde, agora se tratando de núcleos, as energias são definidas como energia do par nêutron-nêutron sendo  $E_{nn}$ , e a energia do subsistema nêutron-carço  $E_{nc}$ . Note que abusamos da linguagem e que as energias  $E_{nn}$  e  $E_{nc}$  nas nossas equações são consideradas em seus valores absolutos. O sistema nêutron-nêutron apresenta apenas um estado virtual  $S$  de energia 143 keV, porém, para generalidade do nosso estudo iremos variar esse valor. O sistema nêutron-carço pode ter estado  $S$  virtual ou ligado, como no caso do  $^{10}\text{Li}$  ou  $^{19}\text{C}$ , que formam respectivamente o  $^{11}\text{Li}$  e o  $^{20}\text{C}$  quando um nêutron é adicionado ao par.

As funções espectadoras para núcleos exóticos foram obtidas numericamente resolvendo-se as equações integrais acopladas (3.5) e (3.6). Nas Figuras 3.2 e 3.3 é mostrado o comportamento de funções espectadoras com o momento, obtidas considerando, hipoteticamente, estados altamente excitados do halo de núcleos borromeanos de  $^{11}\text{Li}$  e  $^{22}\text{C}$  respectivamente. As funções espectadoras resolvidas numericamente são comparadas com a forma assintótica em grandes momentos. A solução assintótica é uma forma analítica exata para a função espectadora calculada no limite em que as energias do sistema de três corpos e dos subsistemas são nulas e a energia de subtração vai para infinito como discutida na Ref. (YAMASHITA *et al.*, 2013). Esse limite é equivalente ao de altos momentos, pois relativo a ele as energias envolvidas ficam desprezíveis. O limite ultravioleta da energia de subtração é necessário para expor a singularidade devida ao colapso Thomas (THOMAS, 1935), estreitamente relacionado ao efeito Efimov (ADHIKARI *et al.*, 1988).

Para três bósons idênticos a solução exata no limite de grandes momentos da equação de Skorniakov e Ter-Martirosian (SKORNIAKOV; TE-MARTIROSIAN, 1957) corresponde às equações integrais (2.78), (2.79) e (2.80) em que para  $A = B = C$  foram resolvidas por Danilov em (DANILOV, 1962; DANILOV, 1961). Essa solução tem a forma log-periódica, característica dos estados Efimov e associadas ao potencial de longo alcance atrativo  $-(s_0^2 + 1/4)/\rho^2$ , onde  $\rho$  é a coordenada hiper-radial e  $s_0 = 1.002$  (EFIMOV, 1970). A forma assintótica das Figuras 3.2 e 3.3 é dada por,

$$f_{nn}(q) \rightarrow C_{nn} q^{-2} \sin(s_0 \log q/q_0), \quad (3.7)$$

onde o fator  $s_0$  vem de algumas Referências (JENSEN *et al.*, 2004; BRAATEN; HAMMER, 2006), e a razão  $C_{nm}/C_{nc}$  é universal, como mostrado em (YAMASHITA *et al.*, 2013). A constante  $C_{nc}$  normaliza a função espectadora assintótica  $f_{nc}(q) \rightarrow C_{nc}q^{-2} \sin(s_0 \log q/q_0)$ . Note que  $q_0$  é uma escala de momento arbitrária, que sumariza a informação física da escala  $\mu_{(3)}$  de três corpos. Na figura  $q_0$  é escolhido de forma a dar o ajuste das posições dos nós da função espectadora  $f_{nm}$  obtida da solução numérica das equações integrais acopladas (3.5) e (3.6). As figuras mostram funções espectadoras exibindo vários nós nos permitindo notar que na região  $\kappa \ll q \ll \mu_{(3)}^2$ , onde  $\kappa = \sqrt{S_{2n}}$  as curvas coincidem caracterizando assim a janela de momentos válida para a forma assintótica.

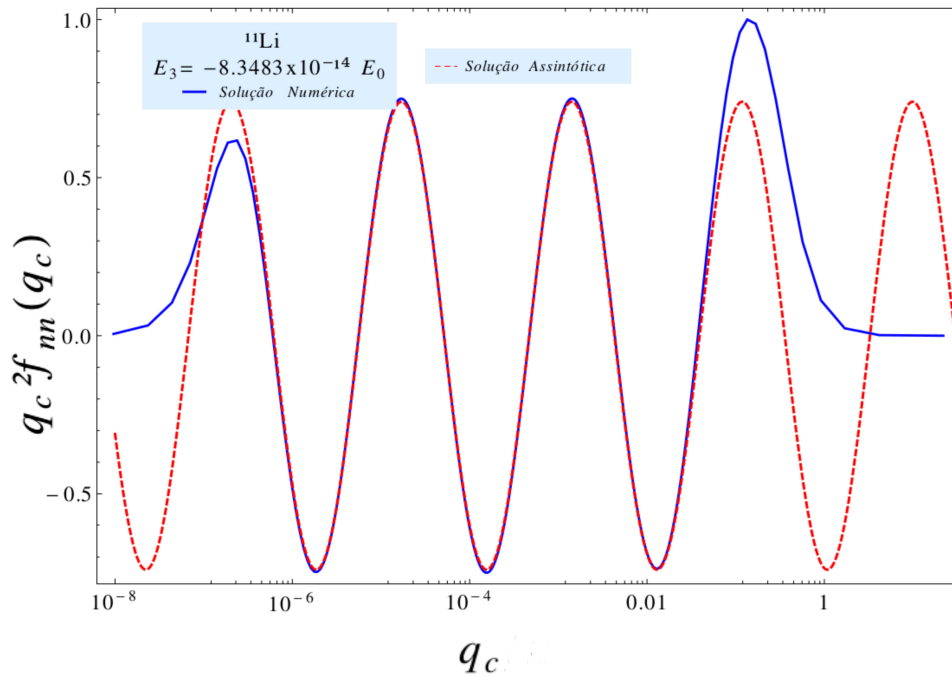


FIGURA 3.2 – Função espectadora  $f_{nm}$  em função do momento do caroço  ${}^9\text{Li}$ , correspondendo ao sexto estado excitado do  ${}^{11}\text{Li}$  (azul) comparada com a forma assintótica (em vermelho). A função  $f_{nm}$  foi normalizada arbitrariamente para efeito de comparação com a forma assintótica. Definimos  $E_0 = \hbar^2 \mu_{(3)}^2 / m_n$  onde  $m_n$  é a massa do núcleon, trabalhamos com  $\hbar = m_n = \mu_{(3)}^2 = 1$ .

## 3.2 Distribuição de momento de recuo do caroço

Reações de quebra são realizadas em colisões nucleares em laboratórios e seus resultados nos tem permitido obter propriedades dos núcleos exóticos ricos em nêutrons ou prótons distan-

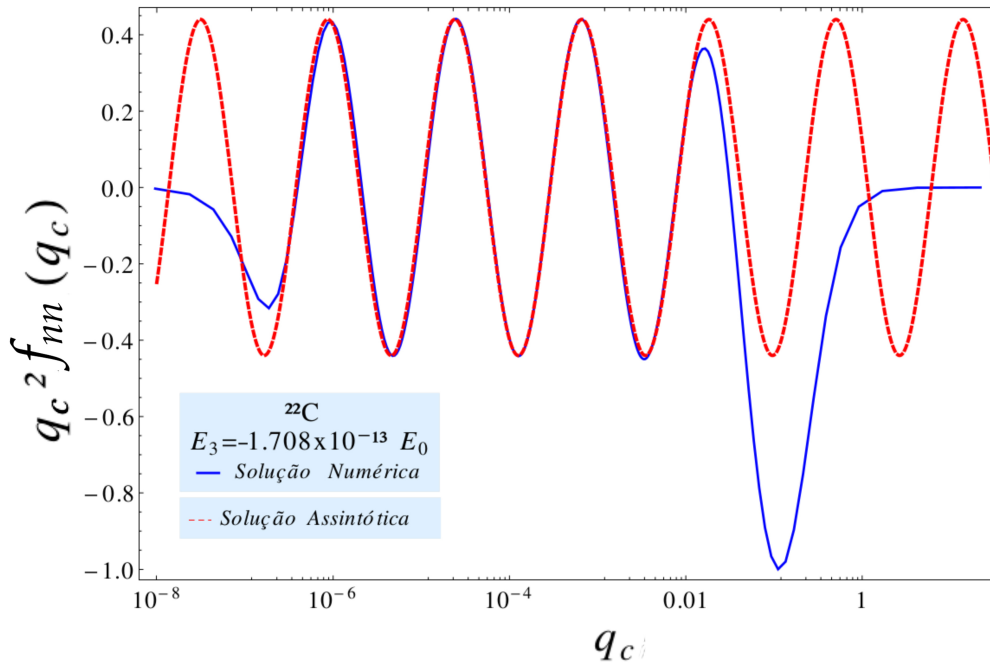


FIGURA 3.3 – Função espectadora  $f_m$  em função do momento do caroço  $^{20}\text{C}$ , correspondendo ao oitavo estado excitado do  $^{22}\text{C}$  (azul) comparada com a forma assintótica (vermelho). As definições de unidades são as mesmas da figura 3.2.

tes da linha de estabilidade. Núcleos com halos de dois nêutrons têm sido caracterizados assim por terem raios de matéria grandes, evidenciando a presença de um halo de nêutrons estendido muito além do tamanho do caroço nuclear. Também apresentam uma distribuição de momento de recuo do caroço muito estreita, observadas em reações de ruptura do halo de núcleos exóticos instáveis com feixes secundários com energias de centenas de MeV/núcleon. É o caso do  $^{11}\text{Li}$  que tem um raio de matéria de 3.5 fm (AL-KHALILI *et al.*, 1996) e um valor de energia de separação de dois nêutrons relativamente baixo  $S_{2n} = 0,35$  Mev (AUDI *et al.*, 2003). A partir da função de onda de três corpos, podemos analisar o comportamento da distribuição de momentos de núcleos exóticos leves. Os resultados que iremos apresentar a seguir estão contidos na nossa publicação recente (SOUZA *et al.*, 2016a).

As distribuições de momento para o caroço e para os nêutrons são dadas respectivamente, por

$$n(q_c) = \int d^3 p_c |\langle \vec{q}_c \vec{p}_c | \Psi \rangle|^2, \quad (3.8)$$

$$n(q_n) = \int d^3 p_n |\langle \vec{q}_n \vec{p}_n | \Psi \rangle|^2, \quad (3.9)$$

onde a renormalização é feita tal que,  $\int d^3 q n(q) = 1$ .

Na Figura 3.4 apresentamos os cálculos da densidade de momentos, Eq. (3.8), para o isótopo  $^{22}\text{C}$  onde a curva é normalizada em  $n(0) = 1$  representando a distribuição de momentos de recuo do caroço  $^{20}\text{C}$  como função do momento deste, em relação ao do centro de massa do subsistema  $nn$ . As curvas correspondem às distribuições de estados com diferente excitações, sendo a curva vermelha sólida o estado fundamental, curva com quadrados azuis o primeiro estado excitado e a curva com círculos vazios representa o segundo estado excitado. O fato das curvas aproximadamente coincidirem deve-se ao fato de existir um ciclo limite que independente do estado excitado, apesar de as funções de onda serem diferentes, a distribuição de momento mantém o mesmo comportamento na região de momentos muito menores que  $\mu_{(3)}^2$ . Configuramos as energias de dois corpos dos subsistemas  $^{21}\text{C}-n$  e  $nn$  iguais a zero para demonstrar o comportamento do ciclo limite da distribuição, pois nesse contexto os valores de  $E_{nn}$  e  $E_{nc}$  não são importantes. É importante salientar que levamos em conta o fato de os resultados corresponderem ao ciclo limite quando todas as energias envolvidas tendem a zero com relação ao parâmetro de subtração  $\mu_{(3)}^2$  ou escala de regularização (uma discussão detalhada da renormalização é feita também em (FREDERICO *et al.*, 2012)). O ciclo limite indica que a largura à meia altura é aproximadamente igual para diferentes estados de excitação.

A partir da solução numérica da função de onda escrita em termos das funções espectadoras no espaço dos momentos, obtivemos as densidades e foi possível adaptar nosso código para obtermos as distribuições de momento em diversos sistemas de três corpos com momento angular total igual a zero. Usando o artefato de interpolar essas densidades, foi possível obter o valor da largura à meia altura  $FWHM$  da distribuição. O parâmetro  $\sigma$  usado nos trabalhos experimentais se relaciona com a largura a meia altura como  $\sigma \approx FWHM/2.355$ , dado em unidades de momento [ $\text{MeV}/c^2$ ] e pode ser escrito como uma função de escala das energias de dois corpos  $E_{nn}$  e  $E_{nc}$  como,

$$\frac{\sigma}{\sqrt{S_{2n}}} = \mathcal{S}_c \left( \pm \sqrt{\frac{E_{nn}}{S_{2n}}}, \pm \sqrt{\frac{E_{nc}}{S_{2n}}}; A \right). \quad (3.10)$$



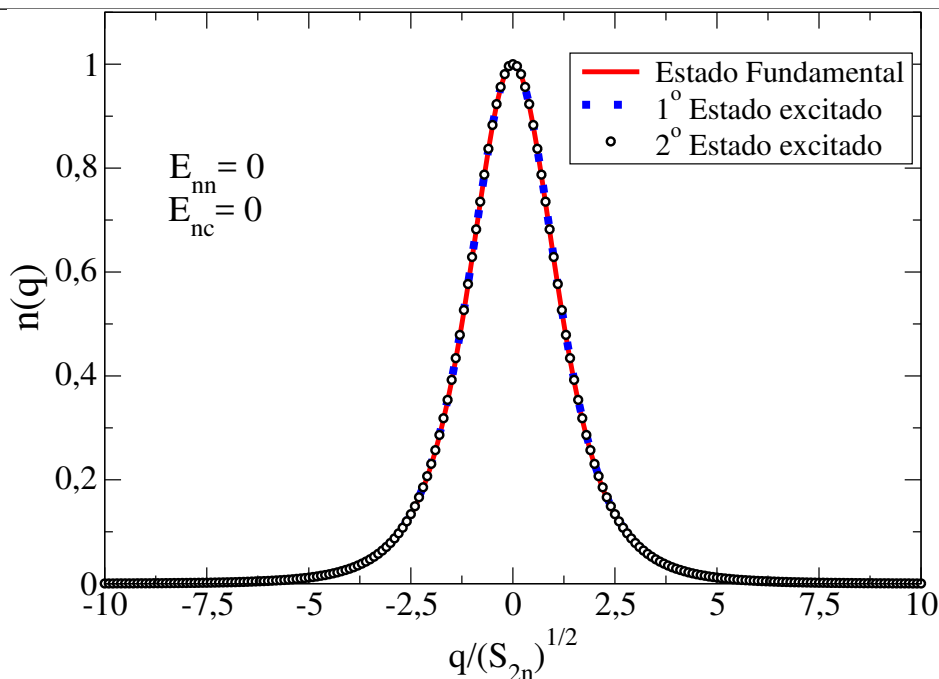


FIGURA 3.4 – Distribuição de momento do caroço  $^{20}\text{C}$  com relação ao subsistema  $nn$ . A legenda do gráfico indica as curvas correspondentes ao estado fundamental, primeiro e segundo estados excitados. O ciclo limite é notado na figura, visto que para diferentes funções de onda referente a diferentes estados, a distribuição de momentos exibe o mesmo formato. As energias de ligação dos subsistemas são  $E_{nn} = E_{nc} = 0$ .

Os sinais + e – referem às energias dos estados ligado e virtual de dois corpos, respectivamente.

O cálculo de  $\sigma$  nos permite estudar o comportamento da distribuição de momento para vários núcleos exóticos. Por exemplo, podemos estudar como esse parâmetro depende da razão de massa caroço-núcleon ( $A = m_c/m_n$ , onde tomamos a massa do nêutron  $m_n = 1$ ) no limite  $E_{nn} = E_{nc} = 0$ , como mostra a Figura 3.5. A curva é comparada com pontos experimentais de  $^{11}\text{Li}$  da Ref. (TANIHATA, 1996) e do isótopo  $^{14}\text{Be}$  de (ZAHAR *et al.*, 1993), onde é preciso salientar que o sistema foi configurado numericamente no limite Efimov, ou seja,

$$\frac{\sigma}{\sqrt{S_{2n}}} = \mathcal{S}_c(0, 0; A), \quad (3.11)$$

embora os pontos experimentais mostrados são correspondentes a núcleos onde a energia dos estados virtuais dos subsistemas, nêutron-nêutron e nêutron-caroço, não são nulas, porém pequenas na escala nuclear.

Investigamos a dependência de  $\sigma$  nas energias  $E_{nn}$  e  $E_{nc}$  para alguns núcleos fixando valores

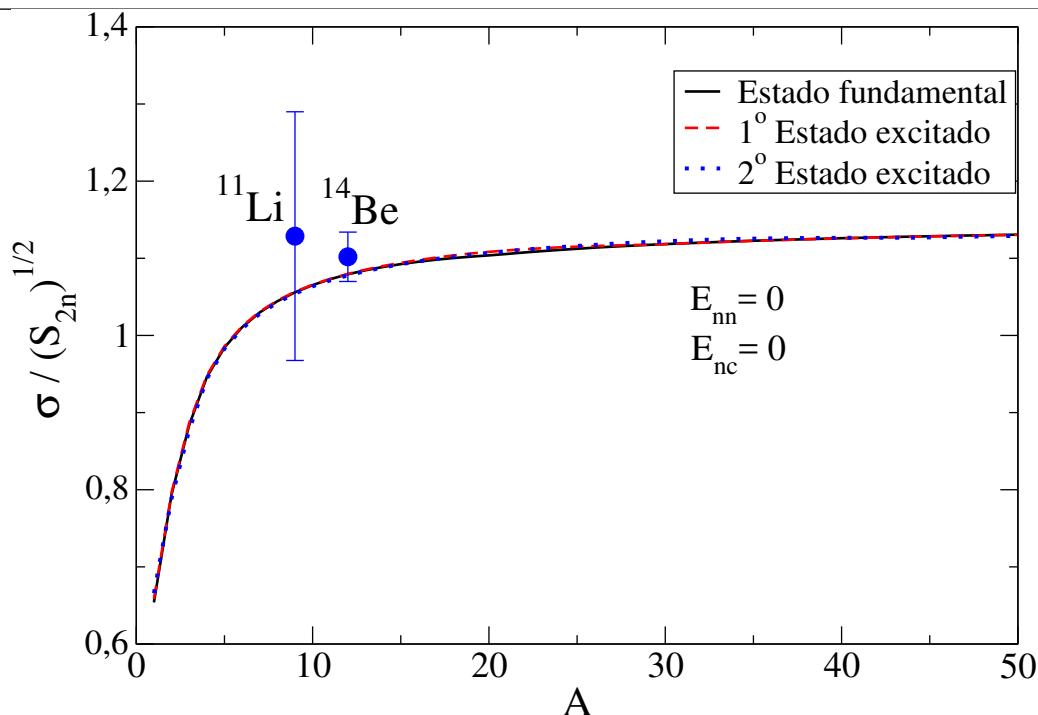


FIGURA 3.5 – Parâmetro ( $\sigma$ ) da distribuição de momentos dos caroços de núcleos-halo como função da massa nuclear do caroço  $A$  no limite Efimov ( $E_{nn} = E_{nc} = 0$ ). Os pontos experimentais são referentes aos núcleos  $^{11}\text{Li}$  de (TANIHATA, 1996) e  $^{14}\text{Be}$  de (ZAHAR *et al.*, 1993).

da massa do caroço. Os resultados são ilustrados na Fig. 3.6 onde foram considerados os núcleos Borromeanos de  $^{11}\text{Li}$  e  $^{14}\text{Be}$ , na Fig. 3.8 o  $^{22}\text{C}$ , e na Figura 3.7 o caso do  $^{20}\text{C}$  com o par caroço-nêutron ligado. Fixando  $E_{nn}$  e  $S_{2n}$  a largura  $\sigma$  cresce com o valor absoluto do aumento da energia do estado virtual  $E_{nc}$  e portanto o tamanho do sistema decresce. Isso pode ser notado nas figuras 3.6 e 3.8, onde temos núcleos Borromeanos, significando que o halo encolhe à medida que a energia  $E_{nc}$  aumenta. Esse efeito foi encontrado em (YAMASHITA *et al.*, 2004), onde para uma dada energia  $S_{2n}$  o tamanho do halo encolhe indo do maior (*all-bound*) para o menor (Borromeano). Esse comportamento acontece porque a interação torna-se menos atrativa, de tal forma que para manter a energia de ligação de três corpos o estado tem de se tornar menor, como mostrado na Figura 3.6.

Para uma energia do estado virtual na onda  $S$  do  $^{10}\text{Li}$  de valor 50 keV, obtemos  $\sigma / \sqrt{S_{2n}} = 1.18$  e  $\sigma = 22 \text{ MeV}/c$  comparado ao valor experimental de  $\sigma = 21(3) \text{ MeV}/c$  (TANIHATA, 1996). Para a distribuição de momento do  $^{14}\text{Be}$ , o valor experimental de  $\sigma = 39.4 \pm 1.1 \text{ MeV}/c$  (ZAHAR *et al.*, 1993) é representado pela região delimitada pelas linhas tracejadas vermelhas na Fig. 3.6.

Na Fig. 3.7, exibimos o comportamento da função de escala para a largura  $\sigma$  da distribuição

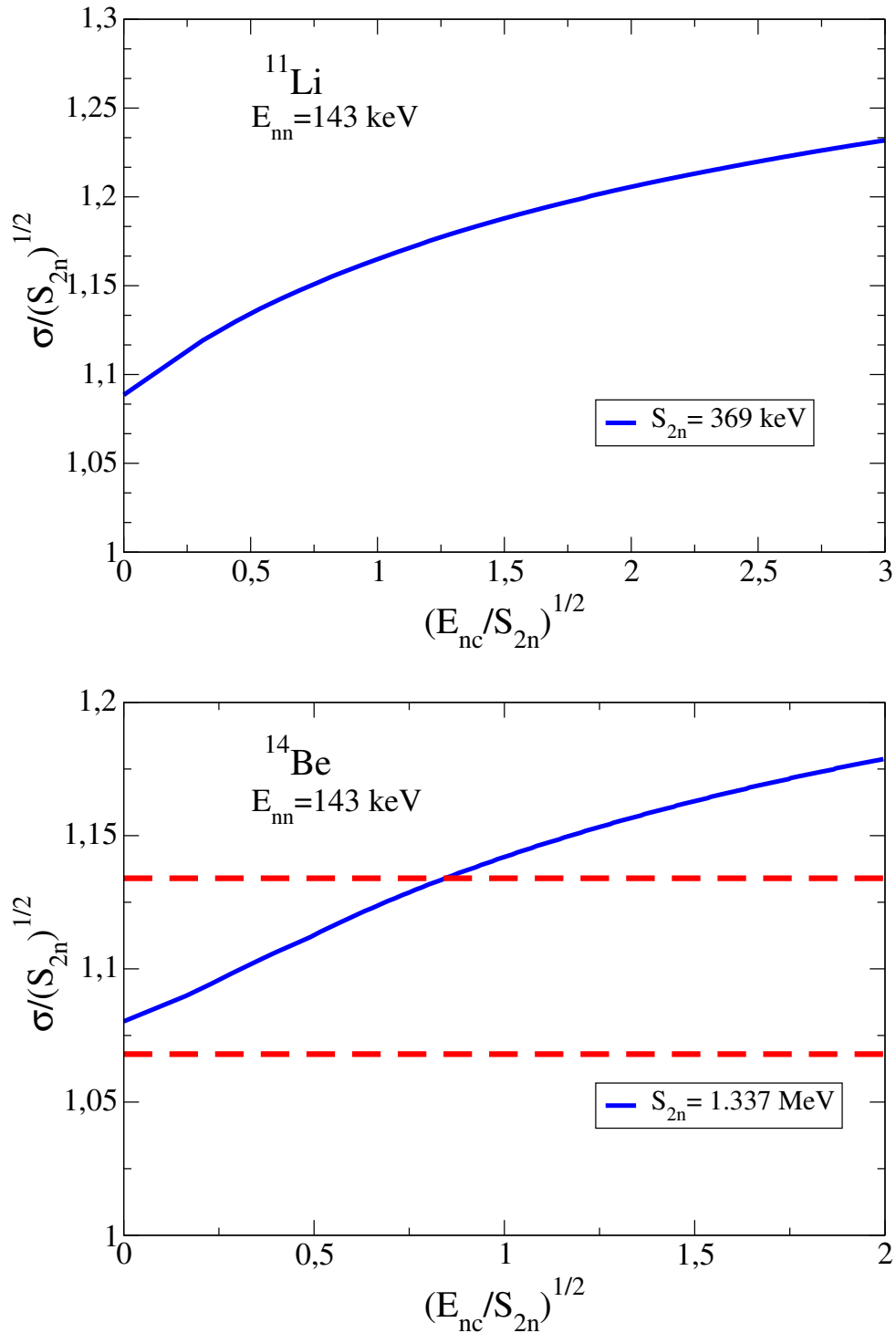


FIGURA 3.6 – Função de escala para a correlação da largura da distribuição de momento ( $\sigma$ ) no  $^{11}\text{Li}$  (*superior*) e também para o  $^{14}\text{Be}$  (*inferior*) para uma energia do estado virtual  $nn$  fixa (-143 keV). Os valores experimentais de  $S_{2n}$  são 369 keV (SMITH *et al.*, 2008) e 1.337 MeV (AUDI *et al.*, 2003) para  $^{11}\text{Li}$  e  $^{14}\text{Be}$ , respectivamente. As linhas pontilhadas representam a região delimitada pelo valor experimental  $\text{FWHM} = 92.7 \pm 2.7 \text{ MeV}/c$  (ZAHAR *et al.*, 1993).

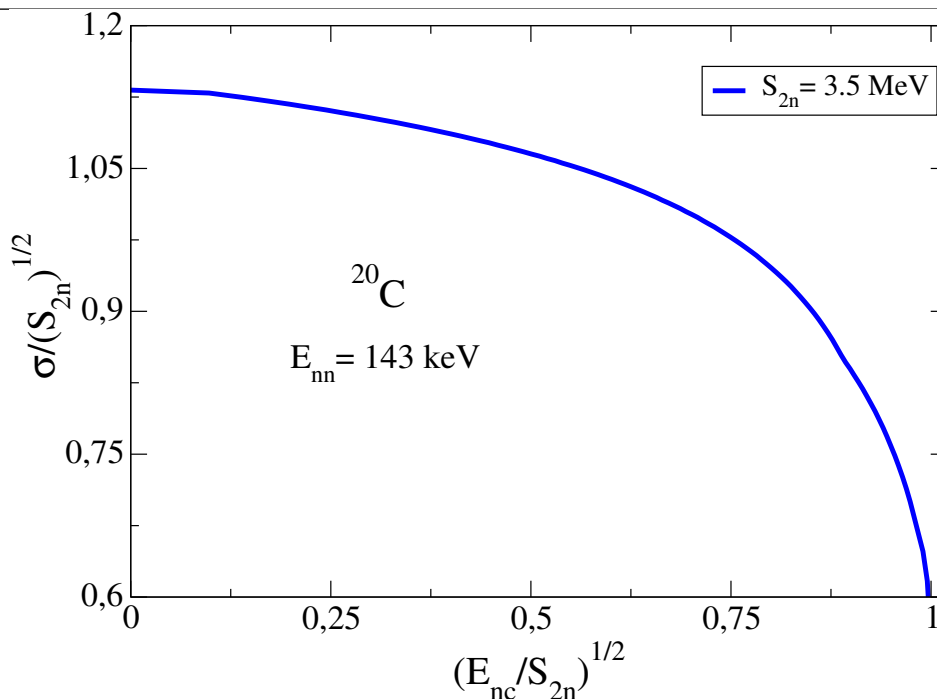


FIGURA 3.7 – Função de escala ( $\sigma$ ) da distribuição de momento de recuo do caroço do  $^{20}\text{C}$ .

de momento de recuo do caroço do  $^{20}\text{C}$ . O subsistema  $^{19}\text{C}$  formado pelo par  $n$ - $^{18}\text{C}$  ligado tem energia de separação do nêutron de  $E_{nc} = 580 \text{ keV}$  (AUDI *et al.*, 2003). Embora todas as escalas de baixa energia do  $^{20}\text{C}$  são bem conhecidas, nós nos permitimos variar a razão  $E_{nc}/S_{2n}$  para ilustrar como varia a largura da distribuição com o par ligado  $n - c$ . A largura decresce quando a razão  $E_{nc}/S_{2n}$  aumenta. A variação do comprimento de espalhamento resulta no aumento da distância do nêutron ao caroço levando a uma queda brusca do valor de  $\sigma$ , que tende a zero quando  $E_{nc}/S_{2n}$  tende a um.

Os resultados para o  $^{22}\text{C}$  são apresentados na Fig. 3.8, onde  $\sigma/\sqrt{S_{2n}}$  varia também com  $(E_{nc}/S_{2n})^{1/2}$ . Utilizamos diferentes valores da energia de separação  $S_{2n}$ : 100 keV, 250 keV e 400 keV. No gráfico é possível observar que enquanto  $\sigma/\sqrt{S_{2n}}$  exibe uma forte dependência na energia de separação mantendo  $E_{nn}$  e  $E_{nc}$  constantes, a variação de  $\sigma$  com a razão  $E_{nc}/S_{2n}$  para  $S_{2n}$  constante mostra uma variação pequena, como esperado para o caso Borromeano. Isso confirma a previsão da influência da energia de separação de dois nêutrons no valor de  $\sigma$ .

A parte superior da Figura 3.9 ilustra o comportamento da distribuição do momento de recuo do caroço do  $^{11}\text{Li}$ . Nesse caso os estados virtuais do par  $^{10}\text{Li}$  e  $nn$  são fixos para  $E_{nc} = -E_V[^{10}\text{Li}] = 50 \text{ keV}$  e  $E_{nn} = -E_v[nn] = 143 \text{ keV}$ , respectivamente (os valores das energias de

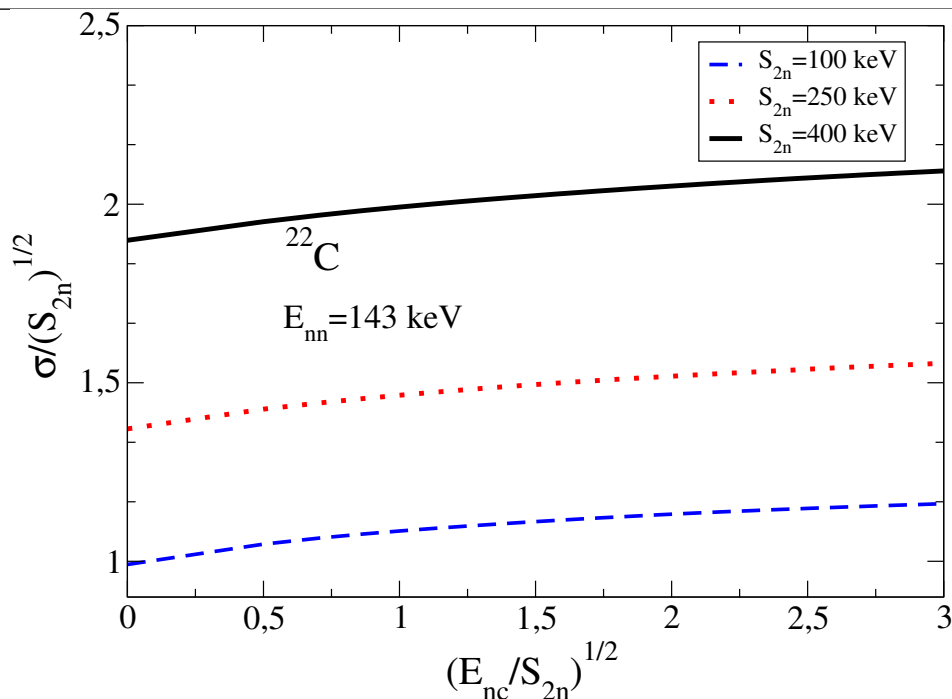


FIGURA 3.8 – Função de escala ( $\sigma$ ) da distribuição de momentos de recuo do caroço do  $^{22}\text{C}$ .

ligação são definidos absolutos). A energia de separação de dois nêutrons do  $^{11}\text{Li}$  é dada pelo valor experimental de 369 keV (SMITH *et al.*, 2008). Comparamos nossos resultados com dados experimentais para distribuições de momento transversal do  $^{11}\text{Li}$  em reações de quebra em um alvo de carbono à 800 MeV/núcleon (TANIHATA, 1996). Uma distribuição larga com  $\sigma = 80$  MeV/c é somada a uma distribuição estreita com  $\sigma = 21.5$  MeV/c, podendo ser comparada ao valor experimental de 21(3) MeV/c. A distribuição de momentos larga não descrita no nosso modelo está associada à parte interna das órbitas dos halos. Mostramos na figura a comparação com os dados experimentais, onde as normalizações das distribuições largas e estreitas estão equiparadas aos dados. Assim é possível reproduzir fielmente a distribuição experimental, como mostrado na figura. O bom ajuste da distribuição de momento do caroço mostra que nosso modelo é viável para extrair informações sobre as propriedades dos halos de dois nêutrons.

Na Figura 3.10 mostramos resultados para a densidade de distribuição de momento de recuo do caroço no caso do  $^{22}\text{C}$  comparada aos dados experimentais do trabalho de (KOBAYASHI *et al.*, 2012) com energia de separação de dois nêutrons entre  $\sim 100$  e 400 KeV. Somamos uma distribuição larga à do modelo como mostra a figura. A energia do estado virtual nêutron-nêutron foi fixada em 143 keV e a energia do estado virtual  $E_{nc}$  do par  $^{21}\text{C}$  foi escolhida como 0

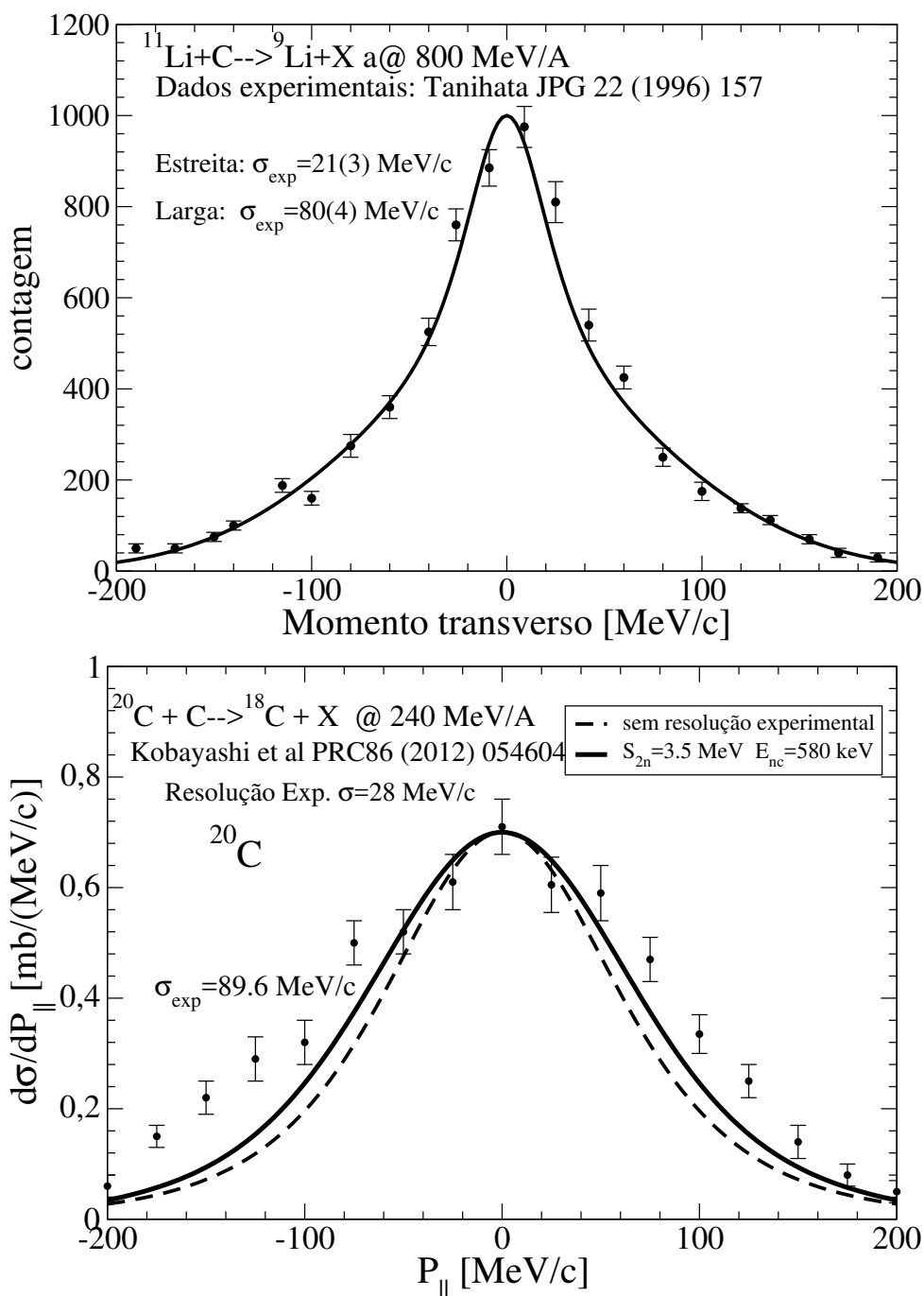


FIGURA 3.9 – Distribuições de momentos de recuo dos caroços  $^{11}\text{Li}$  (*superior*) e  $^{20}\text{C}$  (*inferior*) observados nas reações de quebra com alvos de carbono. A distribuição estreita para o  $^{11}\text{Li}$  é calculada para  $S_{2n} = 369 \text{ keV}$  (SMITH *et al.*, 2008), a energia do estado virtual na onda S do  $^{10}\text{Li}$  é  $E_{nc} = -50 \text{ keV}$  e a energia do estado virtual  $nn$  é  $E_{nn} = -143 \text{ keV}$ . O resultado da distribuição com  $\sigma_{th} = 21.5 \text{ MeV/c}$  é adicionado a outra distribuição larga com  $\sigma_{exp} = 80 \text{ MeV/c}$ . Os cálculos foram realizados para valores experimentais (AUDI *et al.*, 2003) de  $S_{2n} = 3.5 \text{ MeV}$  para  $^{20}\text{C}$ , com  $E_{nc} = 580 \text{ keV}$  para o subsistema  $^{19}\text{C}$ . Os resultados experimentais do  $^{11}\text{Li}$  são extraídos de (TANIHATA, 1996) e para o  $^{20}\text{C}$  de (KOBAYASHI *et al.*, 2012). A distribuição para  $^{20}\text{C}$  foi convoluída com uma distribuição com a resolução experimental de  $\sigma = 28 \text{ MeV/c}$ .

---

e -1 MeV. As curvas das distribuições de momentos do  $^{21}\text{C}$  e  $^{22}\text{C}$  sem convoluções são mostradas separadamente na Fig. 3.11 exibindo a relevância da curva do  $^{21}\text{C}$  (vermelha tracejada de  $\sigma = 89.6$  MeV) na distribuição do  $^{21}\text{C}$  .

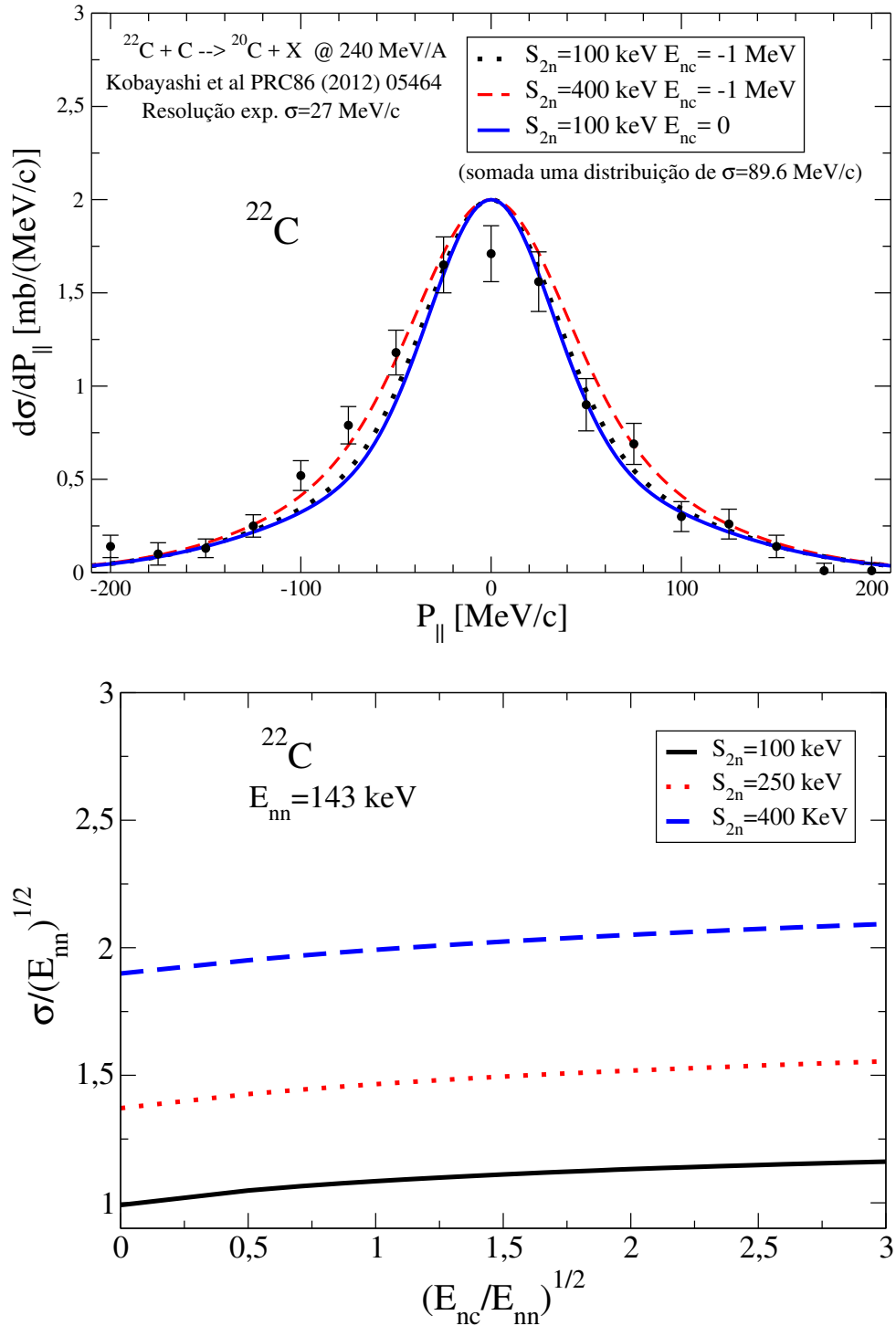


FIGURA 3.10 – superior: Distribuição do momento de recuo do caroço do  $^{22}\text{C}$  obtido no modelo alcance zero comparada aos dados experimentais de (KOBAYASHI *et al.*, 2012) para diferentes parâmetros. Para cada curva são mostrados resultados para  $(S_{2n}[\text{keV}], E_{nc}[\text{MeV}])$  com a uma resolução experimental  $\sigma = 27$  MeV/c e a distribuição é somada a uma curva normal com  $\sigma = 89.6$  MeV/c: linha sólida (100,0), linha pontilhada (100,-1) e linha tracejada (400,-1). inferior: Função de escala ( $\sigma$ ) do momento do caroço no  $^{22}\text{C}$  para energias do estado virtual de dois corpos (-143 keV) e energia de separação  $S_{2n}$  de 100 keV (linha tracejada), 250 keV (linha pontilhada) e 400 keV (linha sólida).



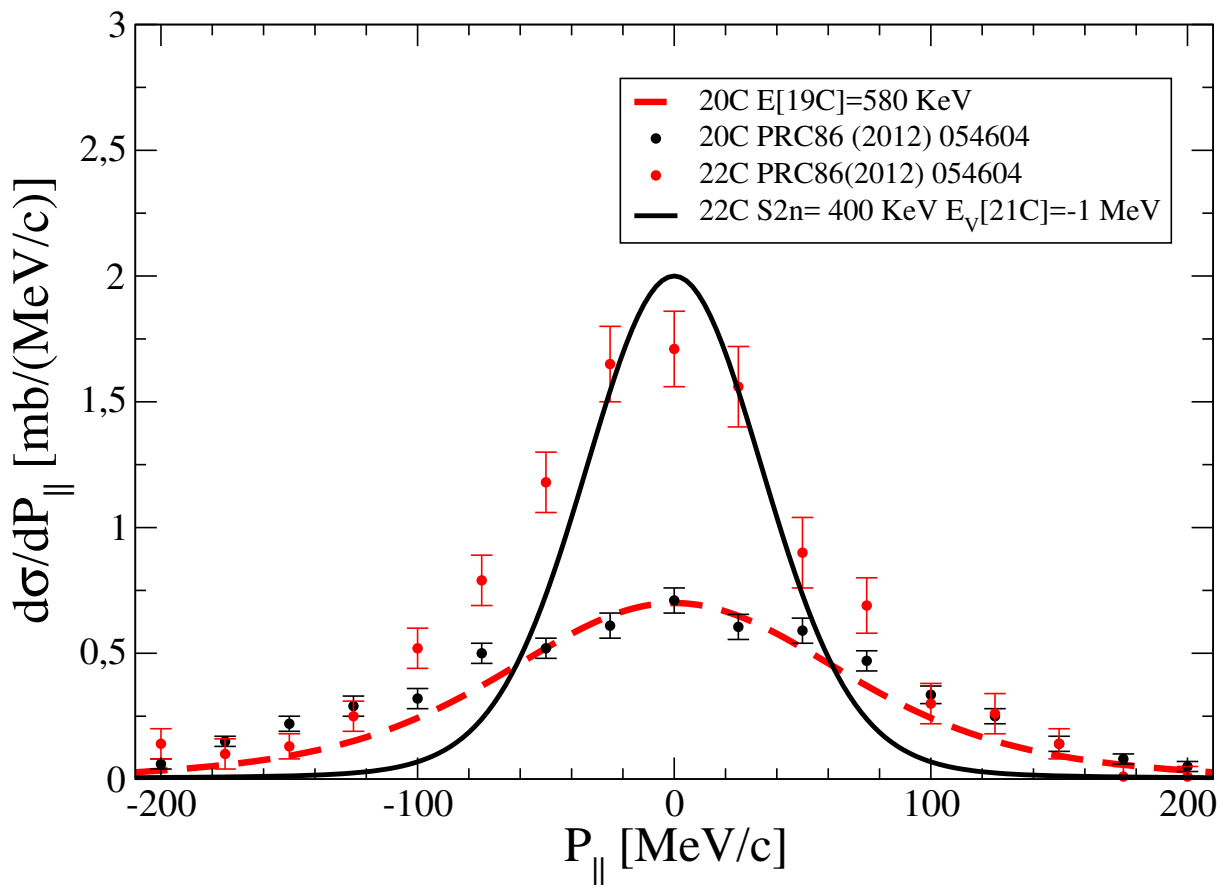


FIGURA 3.11 – Distribuições de momentos de recuo do caroço do  $^{22}\text{C}$  e  $^{21}\text{C}$  sem convoluções. As energias do  $^{22}\text{C}$  são  $S_{2n}=400$  keV e  $E_V[^{21}\text{C}] = -1$  MeV, e do  $^{22}\text{C}$ ,  $S_{2n}=3.5$  MeV e  $E[^{19}\text{C}] = 580$  MeV. Os dados experimentais são os mesmos usados nas Figs. 3.9 e 3.10.

## 4 Estrutura do halo do $^{22}\text{C}$

Investigamos a estrutura do halo de dois nêutrons do  $^{22}\text{C}$  com o modelo de alcance zero re-normalizado de três corpos e também por um modelo de alcance finito com forças de dois e três corpos pelo método de expansão adiabática hipersférico. Em ambos os casos a função de onda configurada no espaço de configurações é obtida usando os comprimentos de espalhamento e a energia de separação de dois nêutrons como parâmetros. A densidade de matéria do halo do  $^{22}\text{C}$  é calculada com diferentes forças de três corpos e parâmetros de baixa energia. Nesse capítulo nós nos permitimos variar a energia de separação de dois nêutrons com valores compreendidos entre 50 keV e 1000 keV a fim de investigar as propriedades do  $^{22}\text{C}$  com  $S_{2n}$  além dos valores sugeridos (compreendidos entre 100 keV e 400 keV) a partir dos cálculos de distribuições de momento. Os resultados para os modelos de alcance finito e alcance nulo foram comparados. O comportamento universal da densidade de nêutrons no halo e a geometria do mesmo foram investigados e seus resultados serão mostrados nesse capítulo.

### 4.1 Função de onda do modelo de alcance zero

Realizando a transformada de Fourier nos momentos de Jacobi da função de onda da Eq. (3.3), podemos escrever a função de onda do halo de dois nêutrons no espaço de configurações. Como demonstrado no Apêndice D a função de onda do halo de dois nêutrons no modelo de alcance

zero pode ser escrita como,

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}_n, \vec{r}_{n'}) = & \int \frac{e^{-|\vec{r}_n - \vec{r}_{n'}| \sqrt{S_{2n} + q_c^2 / 2m_{nn,c}}}}{|\vec{r}_n - \vec{r}_{n'}|} e^{i \frac{A+2}{2A} \vec{q}_c \cdot (\vec{r}_n + \vec{r}_{n'})} f_{nn}(q_c) d^3 q_c + \\ & + 2m_{nc} \int \frac{e^{-|((A+1)\vec{r}_n + \vec{r}_{n'})/A| \sqrt{2m_{nc}(S_{2n} + q_n^2 / 2m_{nc,n})}}}{|((A+1)\vec{r}_n + \vec{r}_{n'})/A|} e^{i \frac{A+2}{A+1} \vec{q}_n \cdot \vec{r}_n} f_{nc}(q_n) d^3 q_n + \\ & + 2m_{nc} \int \frac{e^{-|((A+1)\vec{r}_{n'} + \vec{r}_n)/A| \sqrt{2m_{nc}(S_{2n} + q_{n'}^2 / 2m_{nc,n})}}}{|((A+1)\vec{r}_{n'} + \vec{r}_n)/A|} e^{i \frac{A+2}{A+1} \vec{q}_{n'} \cdot \vec{r}_{n'}} f_{nc}(q_{n'}) d^3 q_{n'}. \quad (4.1) \end{aligned}$$

As posições dos nêutrons  $n$  e  $n'$  com relação ao centro de massa do sistema de três corpos nêutron-nêutron-caroço são  $\vec{r}_n$  e  $\vec{r}_{n'}$ , respectivamente. Os termos  $|\vec{r}_n - \vec{r}_{n'}|$  e  $|((A+1)\vec{r}_n + \vec{r}_{n'})/A|$  na Eq. (4.1) correspondem à distância relativa entre os nêutrons  $nn$  e a distância relativa entre  $n$ -caroço, respectivamente. Os vetores de posição são mostrados detalhadamente na Figura D.1 do Apêndice D. O vetor de posição do nêutron em relação ao centro de massa do sistema  $n'c$  é  $\vec{R}_n$ , e a distância correspondente ao caroço com relação ao centro de massa do par de nêutrons é  $\vec{R}_c$ . Lembrando que as massas reduzidas são dadas como  $m_{nn} = \frac{m_n}{2} = \frac{1}{2}$ ,  $m_{nn,c} = \frac{2A}{A+2}$ ,  $m_{nc} = \frac{A}{A+1}$  e  $m_{nc,n} = \frac{A+1}{A+2}$ . O primeiro termo da Eq. (4.1) diverge quando  $|\vec{r}_n - \vec{r}_{n'}|$  vai pra zero e, portanto, o multiplicamos por um termo, isto é, uma função regularizadora, do tipo  $\frac{e^{-|\vec{r}_n - \vec{r}_{n'}|/\alpha}}{|\vec{r}_n - \vec{r}_{n'}|}$  onde,  $\alpha$  é pequeno da ordem de 0.5 fm, o que não influencia no resultado.

## 4.2 Função de onda do modelo de alcance finito

O modelo do potencial de alcance finito usado nesse trabalho é resolvido pelo método de expansão adiabática hiperesférico discutido com detalhes em (NIELSEN *et al.*, 2001). Nesse método, a função de onda de três corpos é dada em termos das coordenadas de Jacobi, definidas como,

$$\begin{aligned} \vec{x}_i &= \sqrt{\frac{m_j m_k}{m(m_j + m_k)}} (\vec{r}_j - \vec{r}_k) \\ \vec{y}_i &= \sqrt{\frac{m_i(m_j + m_k)}{m(m_i + m_j + m_k)}} \left( \vec{r}_i - \frac{m_j \vec{r}_j + m_k \vec{r}_k}{m_j + m_k} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde o índice  $i$  em  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  refere-se às possibilidades das três configurações das coordenadas de Jacobi, as quais podem ser obtidas pelas permutações cíclicas dos índices  $i$ ,  $j$ , e  $k$  nas expressões acima. A massa  $m_i$  e o vetor posição  $\vec{r}_i$  referem-se à massa e à posição da partícula  $i$ , em que aqui também, a massa do nêutron é considerada a unidade. Em particular, a partir de agora, nós deveremos considerar  $\vec{r}_i$  a posição da partícula  $i$  com relação ao centro de massa de três corpos.

Das coordenadas de Jacobi pode-se construir as coordenadas hiperesféricas contendo assim um hiper-raio  $\rho$  ( $\rho^2 = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ ) e os cinco hiper-ângulos  $\Omega_i$  ( $[\Omega_i] \equiv [\alpha_i, \Omega_{x_i}, \Omega_{y_i}]$ ). O hiper-ângulo  $\alpha_i$  é definido como  $\tan \alpha_i = x_i/y_i$  e  $\Omega_{x_i}$  e  $\Omega_{y_i}$  dados na direção de  $\vec{x}_i$  e  $\vec{y}_i$ . Note que enquanto os cinco hiper-ângulos dependem da configuração escolhida de Jacobi, o hiper-raio não. A partir de agora, para simplificar, o índice nas coordenadas de Jacobi e os hiper-ângulos serão omitidos, levando em conta que entendemos que as três escolhas são possíveis. Quando necessário, a escolha da configuração de Jacobi será especificada.

Nas coordenadas hiperesféricas a Hamiltoniana  $\hat{\mathcal{H}}$  toma a seguinte forma,

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\hat{T}_\rho + \frac{\hbar^2}{2m\rho^2}\hat{\Lambda}^2 + \sum_{i<j} V_{ij}(\rho, \Omega) = -\frac{\hbar^2}{2m}\hat{T}_\rho + \hat{\mathcal{H}}_\Omega, \quad (4.3)$$

onde  $\hat{T}_\rho = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{5}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$  é o operador energia cinética hiper-radial,  $\hat{\Lambda}^2$  é o operador grande angular (as autofunções são os harmônicos hiperesféricos), e  $V_{ij}$  é a interação entre as partículas  $i$  e  $j$ .

No método de expansão adiabática, a equação de Schrödinger (ou Faddeev)  $(\hat{\mathcal{H}} - E)\Psi = 0$  é resolvida em dois passos. No primeiro se tem a parte do problema de autovalor angular

$$\hat{\mathcal{H}}_\Omega \Phi_n(\rho, \Omega) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\rho^2} \lambda_n(\rho) \Phi_n(\rho, \Omega), \quad (4.4)$$

resolvida para a configuração de valores fixos de  $\rho$ . A configuração de autofunções angulares  $\{\Phi_n(\rho, \Omega)\}$  forma uma base completa, usada a fim de expandir a função de onda total de três corpos, isto é,

$$\Psi^{JM}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{\rho^{5/2}} \sum_n f_n(\rho) \Phi_n^{JM}(\rho, \Omega). \quad (4.5)$$

O segundo passo do método corresponde ao cálculo das funções radiais  $f_n(\rho)$  na Eq.(4.5).

Elas são dadas como soluções das equações radiais acopladas:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (V^{(n)}(\rho) + V_{3B}(\rho)) - \frac{2mE}{\hbar^2}\right) f_n(\rho) - \sum_{n'} \left(2P_{nn'}(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} + Q_{nn'}(\rho)\right) f_{n'}(\rho) = 0, \quad (4.6)$$

onde  $E$  é a energia de três corpos (note que  $S_{2n} = -E$ ), e as funções  $P_{nn'}(\rho)$  e  $Q_{nn'}(\rho)$  são dadas por:

$$\begin{aligned} P_{nn'}(\rho) &= \langle \Phi_n(\rho, \Omega) \left| \frac{\partial}{\partial \rho} \right| \Phi_{n'}(\rho, \Omega) \rangle_{\Omega} \\ Q_{nn'}(\rho) &= \langle \Phi_n(\rho, \Omega) \left| \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right| \Phi_{n'}(\rho, \Omega) \rangle_{\Omega}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde  $\langle \rangle_{\Omega}$  representa somente a integração sobre os cinco hiperângulos. O potencial efetivo  $V^{(n)}(\rho)$  na Eq.(4.6) é chamado potencial adiabático dado por:

$$V^{(n)}(\rho) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\lambda_n(\rho) + \frac{15}{4}}{\rho^2}, \quad (4.8)$$

onde as funções  $\lambda_n(\rho)$  são os autovalores da equação angular (4.4).

Finalmente, é bem estabelecido que o uso das interações de dois corpos geralmente leva ao sistema de três corpos sub-ligado ou sobre-ligado comparado ao valores experimentais. Para configurar a energia dos três corpos é comum a introdução de uma interação de três corpos, que na Eq. (4.6) é denotada por  $V_{3B}(\rho)$ . Esta é uma maneira fenomenológica de contabilizar as polarizações das partículas que estão além das descritas pelas interações de dois corpos.

### 4.3 Raio e energia de separação de dois nêutrons

Para construir a função de onda de três corpos para o  $^{22}\text{C}$  no método de expansão do potencial adiabático hipersférico é usada uma interação específica nêutron-nêutron com a forma Gaussiana como na Ref. (GARRIDO; GUERRA, 1999). Esse potencial contém uma parte central, uma de spin-spin, uma spin-orbita e uma parte tensorial podendo assim ser ajustado para es-

palhamentos  $n - n$  de baixas energias. Para a interação nêutron-carço são usados os termos central e de spin-órbita no potencial da forma Woods-Saxon. Seguindo a Ref. (KUCUK; TOSTEVIN, 2014), foi escolhido o raio do potencial Woods-Saxon igual a 1.25 fm e o parâmetro de difusão igual 0.65 fm.

Para as ondas  $S$  o alcance  $V_c$  do potencial central é ajustado tal que o menor estado  $s_{1/2}$  em  $n-^{20}\text{C}$  é desligado ou fracamente ligado. Este é um potencial raso que não exclui estados proibidos de Pauli. Na tabela 4.1 temos a energia  $E_{nc}$ , o comprimento de espalhamento  $a_{nc}$ , e o alcance efetivo  $r_0$  do  $^{21}\text{C}$ , para diferentes valores de  $V_c$ . Como temos visto, uma força mais atrativa que  $-21.0$  MeV liga o sistema nêutron- $^{20}\text{C}$ . O valor de  $V_c = -21.0$  MeV corresponde basicamente ao comprimento de espalhamento infinito, ou equivalentemente, um estado ligado de dois corpos de energia zero. Os cálculos foram feitos tomando a massa do  $^{20}\text{C}$  igual a  $19.83m$  onde  $m$  é a massa do nêutron. Para ondas com  $l > 0$  usamos o potencial dado em (KUCUK; TOSTEVIN, 2014), onde as intensidades do potencial central e de spin-órbita são  $-42.0$  MeV e  $-25.2$  MeV, respectivamente.

Como podemos observar na Tabela 4.1, os alcances efetivos são consistentes com o raio quadrado médio (rms) de 2.98(5) fm do  $^{20}\text{C}$  (OZAWA *et al.*, 2001). Essa gama de valores do alcance efetivo, em princípio pode afetar as correlações universais entre observáveis no  $^{22}\text{C}$ . Esse será explorado na próxima seção, quando calculamos as densidades verificando as leis universais de escala perto do limite Efimov.

$V_c$ (MeV)	-21.0	-25.0	-30.0	-32.0	-33.5
$E_{nc}$ (MeV)	$-1.5 \cdot 10^{-5}$	-0.153	-0.693	-0.997	-1.25
$a_{nc}$ (fm)	1192	13.4	6.98	6.03	5.51
$r_0$ (fm)	2.88	2.54	2.22	2.11	2.04

TABELA 4.1 – Energias de dois corpos  $E_{nc}$ , comprimento de espalhamento  $a_{nc}$ , e alcance efetivo  $r_0$  para ondas  $S$  do  $n-^{20}\text{C}$  para diferentes de valores da força  $V_c$ .

Na Tabela 4.2 mostramos os resultados obtidos para a energia de separação de dois nêutrons  $S_{2n}$  e o valor esperado  $\langle \rho^2 \rangle$  quando a energia de dois corpos,  $E_{nc}$ , no sistema nêutron- $^{20}\text{C}$  é colocada igual a zero ( $V_c = -21.0$  MeV na interação nêutron-carço na onda  $S$ ). Resultados incluindo ondas parciais até  $\ell_x = \ell_y = 8$  (parte à esquerda) e com, somente ondas em  $\ell_x =$

$\ell_y = 0$  (parte à direita) são mostrados. Os momentos angulares  $\ell_x$  e  $\ell_y$  referem-se ao momento angular orbital relativo entre as duas partículas conectadas pela coordenada de Jacobi  $\vec{x}$ , e entre a terceira partícula e o centro de massa das duas primeiras. Nos cálculos uma força de três corpos com uma dependência numa potência (P) que é dada na Ref. (KUCUK; TOSTEVIN, 2014) pode ser usada:

$$V_{3B}^P(\rho) = \frac{V_{3B}^P}{1 + (\rho/\rho_0)^3}. \quad (4.9)$$

Os resultados para diferentes valores da intensidade  $V_{3B}^P$  e  $\rho_0 = 5$  fm (são dadas em (KUCUK; TOSTEVIN, 2014)) são mostrados na Tabela 4.2. Como podemos ver, sem uma força de três corpos o sistema  $^{22}\text{C}$  é ligado, com a energia de separação de dois nêutrons  $-1.83$  MeV ou  $-1.52$  MeV, dependendo das ondas parciais incluídas nos cálculos. Portanto, uma força repulsiva de três corpos é necessária a fim de obter um estado fracamente ligado do  $^{22}\text{C}$  neste modelo de potencial de dois corpos de alcance finito.

$V_{3B}^P$	$\ell_x, \ell_y \leq 8$				$\ell_x, \ell_y = 0$			
	$S_{2n}$	$\langle \rho^2 \rangle$	$r_n$		$V_{3B}^P$	$S_{2n}$	$\langle \rho^2 \rangle$	$r_n$
0.0	1.83	25.16	3.54		0.0	1.52	28.06	3.75
1.0	1.24	29.98	3.87		1.0	0.954	35.31	4.20
2.0	0.694	40.01	4.47		2.0	0.447	54.10	5.20
3.0	0.220	79.74	6.32		2.5	0.230	83.79	6.47
3.5	0.045	290.8	12.1		3.0	0.060	249.4	11.2
3.6	0.021	601.7	17.3		3.1	0.035	407.4	14.3

TABELA 4.2 – Valores de  $S_{2n}$  (em MeV),  $\langle \rho^2 \rangle$  (em  $\text{fm}^2$ ), e  $r_n$  (em fm), para diferentes valores da força de três corpos  $V_{3B}^P$ , Eq.(4.9), com  $\rho_0 = 5$  fm e para  $V_c = -21.0$  MeV. O lado esquerdo da tabela são os resultados incluindo as componentes com  $\ell_x, \ell_y \leq 8$ , e o lado direito mostra os resultados incluindo somente as componentes  $\ell_x = \ell_y = 0$ .

Vamos considerar o potencial Gaussiano (G) e o potencial exponencial (E) também:

$$V_{3B}^G(\rho) = V_{3B}^G e^{-(\rho/\rho_0)^2} \quad \text{e} \quad V_{3B}^E(\rho) = V_{3B}^E e^{-\rho/\rho_0}. \quad (4.10)$$

De (FREDERICO *et al.*, 2012) o raio do halo de dois nêutrons,  $r_n = \langle r_n^2 \rangle^{1/2}$ , é definido como:

$$r_n^2 = \frac{22}{2} (R_M^{22\text{C}})^2 - \frac{20}{2} (R_M^{20\text{C}})^2, \quad (4.11)$$

onde  $R_M^{22\text{C}}$  e  $R_M^{20\text{C}}$  são os raios quadrados médios de matéria do  $^{22}\text{C}$  e  $^{20}\text{C}$ , respectivamente.

A conexão entre  $r_n$  e  $\langle \rho^2 \rangle$  pode ser facilmente obtida lembrando que o raio do sistema de três corpos  $^{22}\text{C}$  ( $n+n+^{20}\text{C}$ ) é obtido como (FEDOROV *et al.*, 1995):

$$\left(R_M^{22\text{C}}\right)^2 = \frac{20}{22} \left(R_M^{20\text{C}}\right)^2 + \frac{1}{22} \langle \rho^2 \rangle, \quad (4.12)$$

o qual leva a  $r_n^2 = \langle \rho^2 \rangle / 2$ . Este resultado fornece o raio relativo do nêutron ao centro de massa do sistema para um caso em que o caroço é infinitivamente pesado. Para o caso de  $A = 20$  vamos nos contentar em comparar os resultados aproximados obtidos para  $r_n$ . Os valores calculados para  $r_n$  com o potencial dado na Eq. (4.9) são também apresentados na Tabela 4.2.

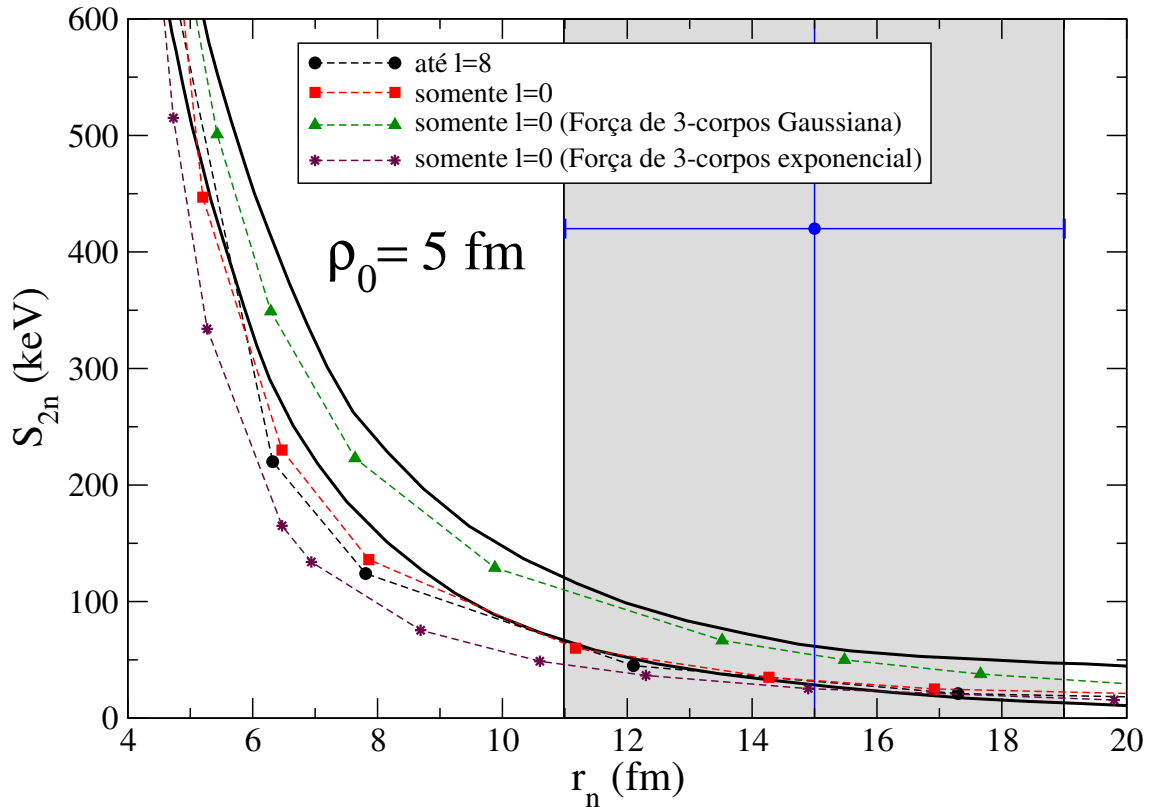


FIGURA 4.1 – Energia de separação de dois nêutrons  $S_{2n}$  como função de  $r_n$ . Os círculos e quadrados são cálculos incluindo as componentes  $\ell_x, \ell_y \leq 8$  e as componentes  $\ell_x = \ell_y = 0$ , respectivamente. As curvas sólidas são aquelas mostradas na Fig. 22 da Ref. (FREDERICO *et al.*, 2012) onde a superior corresponde à  $E_{nc} = 0$  e a inferior  $E_{nc} = -100$  keV. Os triângulos e as estrelas são cálculos com somente ondas  $S$  mas substituindo a força de três corpos na Eq. (4.9) por uma gaussiana e uma exponencial Eq. (4.10) (com o alcance  $\rho_0 = 5$  fm em ambos os casos), respectivamente.

Os resultados da Tabela 4.2, que foram obtidos com a força de três corpos dada pela Eq.(4.9)



com o alcance de  $\rho_0 = 5$  fm, são apresentados na Fig. 4.1 em função de  $r_n$ . Na figura, os círculos mostram resultados obtidos com as componentes  $\ell_x, \ell_y \leq 8$ , e os quadrados foram obtidos incluindo-se as componentes  $\ell_x = \ell_y = 0$ . Como podemos ver, o efeito das ondas parciais maiores não destrói a correlação entre  $S_{2n}$  e  $r_n$ , e a função de escala,  $S_{2n}$  versus  $r_n$ , mostra uma diferença muito pequena com respeito ao caso de onda  $S$ . Isso sugere que o efeito das ondas parciais mais altas está associado com a física de curto alcance representada pela escolha de  $S_{2n}$ , e os observáveis de baixa energia são correlacionados com essa quantidade, e portanto não vemos um efeito grande na correlação. A função de escala para  $r_n$  pode ser escrita como em (YAMASHITA *et al.*, 2004) por:

$$r_n = \sqrt{\frac{\hbar^2}{m}} S_{2n}^{-\frac{1}{2}} \mathcal{R}_n (\pm \varepsilon_{nc}, -\varepsilon_{nn}, A) \quad (4.13)$$

onde as energias reescaladas são

$$\varepsilon_{nc} = \sqrt{\frac{|E_{nc}|}{S_{2n}}}, \quad \varepsilon_{nn} = \sqrt{\frac{|E_{nn}|}{S_{2n}}} \quad (4.14)$$

e os sinais  $\pm$  referem-se aos subsistemas serem ligados ou virtuais, e o número de massa no presente estudo é dado por  $A = 20$ . A função de escala universal  $\mathcal{R}_n$  é computada com o modelo de alcance zero, sendo esse o ciclo limite da correlação entre as quantidade adimensionais  $r_n S_{2n}^{\frac{1}{2}} \sqrt{m/\hbar^2}$  com os raios  $\varepsilon_{nc}$  e  $\varepsilon_{nn}$  no limite Efimov, ou seja quando  $E_{nc}$  e  $E_{nn}$  tendem a zero.

A função de escala (4.13) define, implicitamente, uma correlação universal  $S_{2n}$  e  $r_n$  quando os comprimentos de espalhamento dos subsistemas são fixos. Essa função de escala universal é apresentada na Fig. 4.1 para  $E_{nc} = 0$  (curva preta sólida). Essas duas curvas são, na realidade, mostradas na Fig. 22 da Ref. (FREDERICO *et al.*, 2012), onde a função universal é obtida a partir da solução da hamiltoniana do modelo de alcance zero renormalizado com uma energia de estado virtual nêutron-nêutron de  $-143$  keV. Como visto na figura, os cálculos representados pelos círculos e quadrados parecem concordar melhor com a curva inferior do que com a curva sólida superior, que corresponde ao estado virtual do  $^{21}\text{C}$  com energia zero.

Portanto, um desvio da curva universal calculada com o estado de energia zero do  $^{21}\text{C}$  é

observado, e nesse caso torna-se mais próximo aos resultados do modelo de alcance zero com  $E_{nc} = -100$  keV. Isso porque o potencial repulsivo de três corpos exige uma configuração mais compacta para uma dada energia de separação de dois nêutrons.

Nossos resultados são entretanto, sensíveis à forma da força de três corpos. Se o potencial  $V_{3B}$  dado na Eq. (4.9) for substituído pelo potencial Gaussiano com  $\rho_0 = 5$  fm da Eq. (4.10), nossos cálculos são aumentados como mostra a curva dada na Fig.4.1 pelos triângulos. Essa curva é claramente próxima à curva sólida superior do resultado de alcance zero  $E_{nc} = 0$ . Entretanto, usamos uma força de três corpos exponencial, também com  $\rho_0 = 5$  fm (estrelas na figura), observamos que os resultados estão mais próximos dos cálculos alcance zero com o estado virtual de  $E_{nc} = -100$  keV.

Essa dependência na forma da força de três corpos sempre para valores pequenos de  $S_{2n}$ , sugere que não somente a parte interna no potencial adiabático na Eq.(4.8) é modificada por  $V_{3B}$ , mas também a cauda do potencial se altera. Isso é verdadeiro especialmente para a forma exponencial de  $V_{3B}$ , as quais morrem claramente mais vagorosamente que a Gaussiana. Também, o valor do raio (rms - *root mean square radius* - raiz do raio quadrático médio) do  $^{20}\text{C}$ , 2.98(5) fm (OZAWA *et al.*, 2001), sugere que os valores de  $\rho_0$  na força de três corpos deve ser abaixo de 5 fm, desde que  $\rho_0$  pode ser entendido como o valor do hiper raio na situação em que as três partículas estão tocando uma nas outras.

Na figura Fig.4.2 mostramos os resultados como na Fig.4.1, mas para  $\rho_0 = 3$  fm (subfigura (a)) e  $\rho_0 = 1$  fm (subfigura (b)). Como podemos ver, quando o alcance é reduzido, todas as curvas tendem a convergir aos resultados do modelo de alcance zero para  $E_{nc} = 0$ . A convergência aparece mais rápido quando é usada uma força Gaussiana de três corpos, que para um alcance de 3 fm concorda bem com os resultados do modelo de alcance zero da Ref. (FREDERICO *et al.*, 2012). Isso é consistente com o fato de que a força Gaussiana de três corpos morre mais rapidamente que as outras. Portanto, a cauda do potencial adiabático dado em Eq.(4.8) é inalterada.

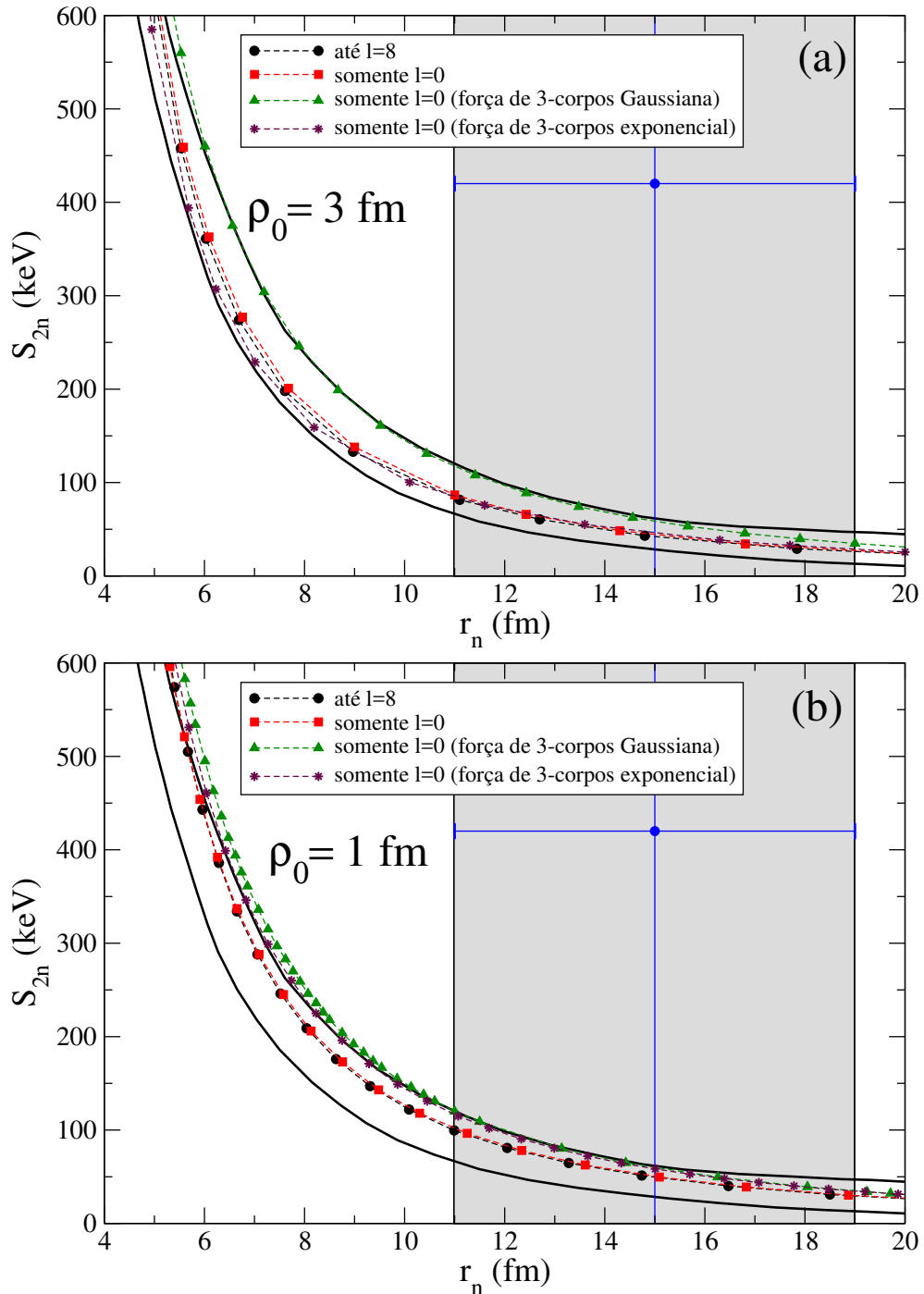


FIGURA 4.2 – A mesma função de escala usada na Fig. 4.1 mas configurando (a)  $\rho_0 = 3$  fm e (b)  $\rho_0 = 1$  fm para o alcance da força de três corpos.

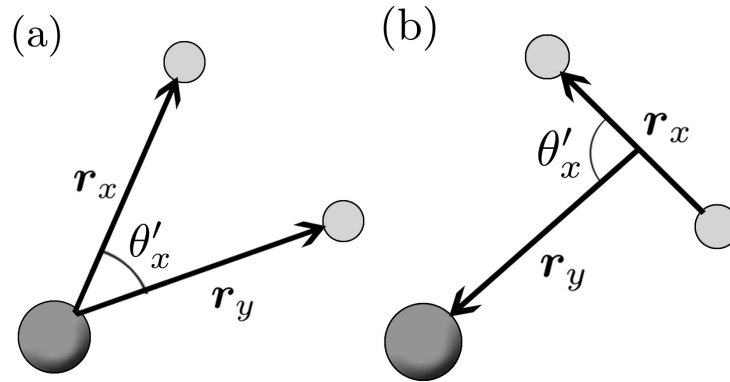


FIGURA 4.3 – Definição do ângulo polar  $\theta'_x$  para duas possibilidades de coordenadas (o caroço nuclear é representado pelo círculo maior, e os nêutrons pelos menores).

#### 4.4 Densidade de nêutron do halo

Para comparar os observáveis do modelo de alcance finito com o modelo de alcance zero, introduzimos a densidade de um nêutron do halo como:

$$\eta(r_y) = r_y^2 \int d\Omega_y d^3 r_x |\Psi(\vec{x}, \vec{y})|^2. \quad (4.15)$$

Onde,

$$\int d^3 r_x d^3 r_y |\Psi(\vec{x}, \vec{y})|^2 = 1, \quad (4.16)$$

as coordenadas  $\vec{r}_x$  e  $\vec{r}_y$  são apresentadas nas Figs. 4.3 (a) e (b). Assim pode-se notar que,

$$\int dr_y \eta(r_y) = 1. \quad (4.17)$$

Como vemos na Figura 4.3, temos duas possibilidades de conjuntos de coordenadas de Jacobi, e portanto duas densidades diferentes passíveis de serem estudadas. Para comparar com nosso modelo de alcance zero, escolhemos as coordenadas dadas na Fig. 4.3a, onde  $r_y$  é a distância relativa do nêutron ao centro de massa do subsistema  $^{21}\text{C}$ . Além disso, para proceder com a comparação nós introduzimos a densidade

$$\eta_n(r_n) = \eta(r_n(A+2)/(A+1)), \quad (4.18)$$

onde  $\vec{r}_n$  é a posição do nêutron com relação ao centro de massa do  $^{22}\text{C}$ .

No limite do potencial de alcance zero a densidade do nêutron do halo pode ser também associada a uma função de escala:

$$\eta_n(r_n) = \sqrt{\frac{m}{\hbar^2}} S_{2n}^{\frac{1}{2}} \mathcal{N}_n(\vec{r}_n, \pm \varepsilon_{nc}, -\varepsilon_{nn}, A), \quad (4.19)$$

onde,

$$\vec{r}_n = \frac{m}{\hbar^2} S_{2n}^{\frac{1}{2}} r_n. \quad (4.20)$$

A função de escala  $\mathcal{N}_n$  é o ciclo limite da correlação entre as quantidades adimensionais  $\eta_n(r_n) S_{2n}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\hbar^2/m}$  com as razões  $\varepsilon_{nc}$  e  $\varepsilon_{nn}$  no limite Efimov, quando  $E_{nc}$  e  $E_{nn}$  tendem a zero (veja as equações (4.13) e 4.14).

Calculamos os resultados obtidos para  $\eta_n(r_n)$  com o potencial de alcance finito e com o modelo de alcance zero, o qual permite construir a função de escala (4.19). Dessa forma é possível verificar o aparecimento do comportamento universal da densidade, bem como as limitações da universalidade. A seguir investigamos as diferentes forças de três corpos, para verificar quando os detalhes do potencial começam a se tornar relevantes para a descrição da estrutura do  $^{22}\text{C}$  além dos parâmetros de baixa energia de dois e três corpos  $E_{nc}$ ,  $E_{nn}$  e  $S_{2n}$ .

Na Ref. (SOUZA *et al.*, 2016a), foram apresentadas as distribuições de momento onde é possível extrair as distribuições de recuo do caroço do  $^{22}\text{C}$ , e assim estimamos uma janela para a energia de separação de dois nêutrons de  $100 \text{ keV} \lesssim S_{2n} \lesssim 400 \text{ keV}$ . Entretanto, para nossas considerações na comparação dos potenciais nessa seção, nós usamos o valor médio do intervalo acima, de  $S_{2n} = 250 \text{ keV}$ , e também, valor de  $S_{2n} = 1000 \text{ keV}$  bem acima do limite estimado. Além disso, usamos também para o  $^{21}\text{C}$  o valor da energia de dois corpos,  $E_{nc} = 0$ . É importante salientar que, na seção 3.2, nós mostramos que foi observada uma pequena dependência na energia de dois corpos  $E_{nc}$  do  $^{21}\text{C}$  na distribuição de momento de recuo do caroço para uma dada energia fixa  $S_{2n}$ .

Os resultados para a densidade de um nêutron do halo são mostrados na Figura 4.4. Eles foram obtidos com a força de três corpos (4.9) (Fig.4.4a) e com a forma Gaussiana (4.10)

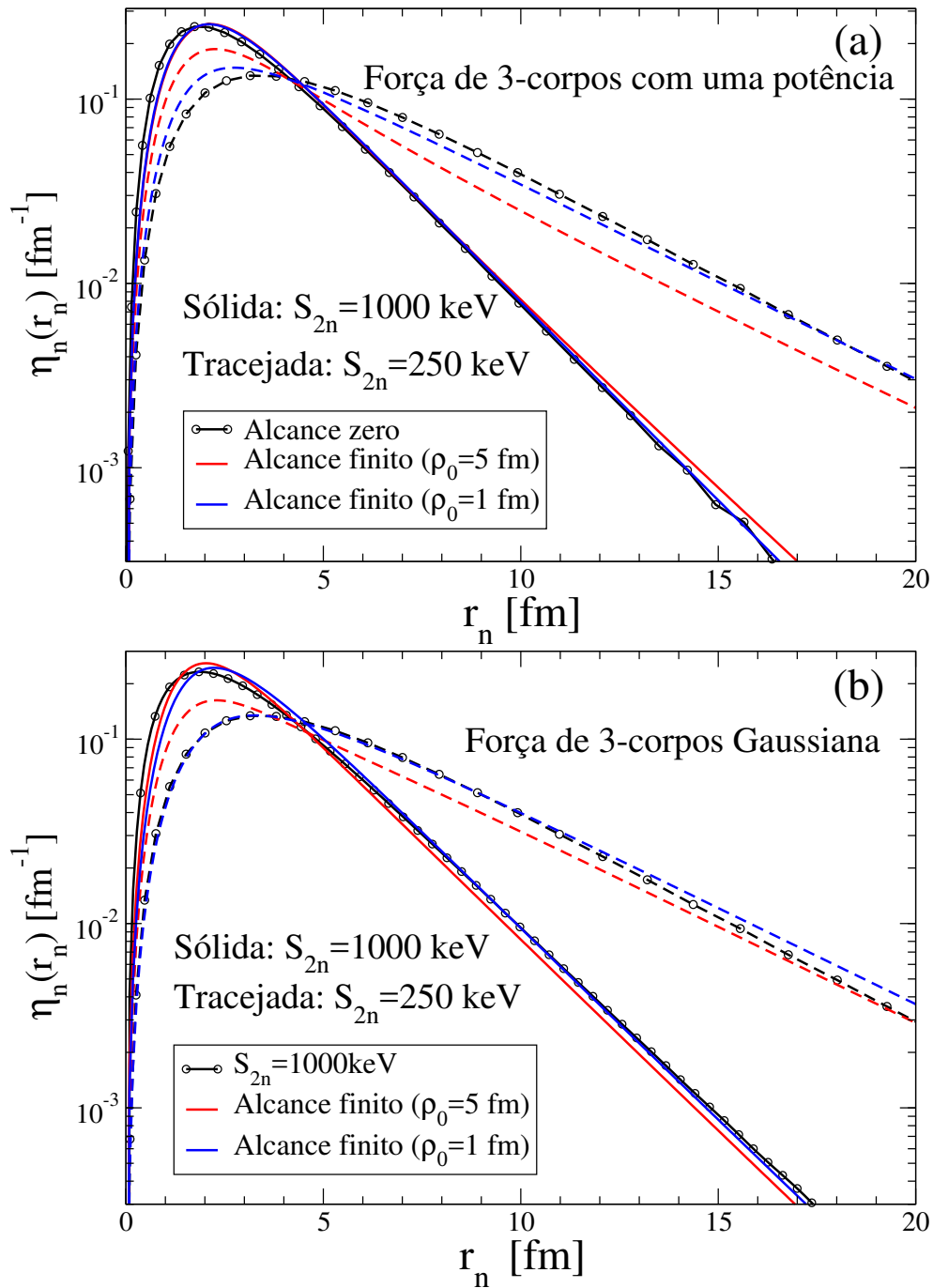


FIGURA 4.4 – Densidade nêutron-halo  $\eta_n(r_n)$  no  $^{22}\text{C}$  com dois diferentes potenciais de três corpos, o potencial dependente da força (4.9) em (a) e o potencial Gaussiano (4.10) em (b), comparados ao modelo de alcance zero (representado pelas linhas pretas com círculos). Dois valores de  $S_{2n}$  são usados para os cálculos: 250 keV (curvas tracejadas) e 1000 keV (curvas sólidas). A energia do  $^{21}\text{C}$  é fixa para  $E_{nc} = 0$ . Dois diferentes alcances foram considerados para a força de três corpos  $\rho_0 = 1$  fm (curvas azuis) e  $\rho_0 = 5$  fm (curvas vermelhas).

(Fig.4.4b). Comparamos a densidade do nêutron do halo no potencial de alcance finito à aquela obtida a partir da função de onda do modelo de alcance zero (4.1), por sua vez, oriunda da solução numérica das funções espectadoras (Eqs. 3.5 e 3.6).

Vamos considerar o caso com  $S_{2n} = 1000$  keV. Os resultados correspondentes são apresentados na Fig. 4.4 através das curvas sólidas. Os resultados dos cálculos com potenciais de alcance finito são mostrados pelas curvas vermelhas e azuis, correspondendo aos alcances de  $\rho_0 = 5$  fm e  $\rho_0 = 1$  fm, respectivamente. O resultado do modelo de alcance zero é dado pela curva sólida com círculos pretos. Como podemos ver no painel (a) (força de três corpos com uma dependência numa potência de  $\rho$ ) e no painel (b) (força de três corpos com uma forma Gaussiana), os resultados obtidos com potenciais de alcance finito com as duas escolhas de valores de  $\rho_0$  concordam bem entre si e com o modelo de alcance zero. No intuito de entender como isso acontece, devemos olhar para a Fig.4.5, onde em ambos painéis (a) e (b) a curva sólida preta mostra o mais baixo potencial adiabático como dado em Eq.(4.8) correspondendo ao núcleo de  $^{22}\text{C}$  com  $E_{nc} = 0$  e  $\ell_x = \ell_y = 0$ . Isso significa que o potencial adiabático combina com o potencial universal de Efimov, que é de fato, encontrado para distâncias além de aproximadamente 4 fm.

Devemos estar cientes de que o modelo de alcance zero contém somente o potencial de longo alcance de Efimov que é amortecido a distâncias correspondendo ao menor valor absoluto do comprimento de espalhamento, i.e.,  $a_{nn} = -17$  fm. Quando aumentamos a energia para  $S_{2n} = 1000$  keV, e usamos  $\rho_0 = 1$  fm e  $\rho_0 = 5$  fm, para a força de três corpos com a forma de potência na Fig.4.5a e a forma Gaussiana na Fig.4.5b, obtemos as curvas, sólida azul e sólida vermelha, respectivamente. Como vemos na figura, esses dois potenciais adiabáticos concordam razoavelmente com o potencial efetivo em preto, e tal como acima explicado, corresponde ao potencial universal de Efimov. Isso é verdade particularmente para o caso de  $\rho_0 = 1$  fm, enquanto que para  $\rho_0 = 5$  fm, a força de três corpos modifica o potencial adiabático a longas distâncias. De acordo com isso, pode-se então esperar uma melhor concordância com a densidade de um nêutron do halo obtida no modelo de alcance zero como vemos na Fig. 4.4 no caso de  $\rho_0 = 1$  fm (curvas azuis sólidas). Esses resultados mostram que quando os nêutrons do halo têm ligação suficientemente fraca, os efeitos dos detalhes do potencial a curtas distâncias

desaparecem totalmente quando  $\rho_0 = 1$  fm.

O mesmo tipo de análise pode ser feita quando  $S_{2n} = 250$  keV. Nesse caso as curvas correspondentes na Fig.4.4 e Fig.4.5 são dadas pelas curvas tracejadas. Quando o potencial de três corpos é dado pela força de três corpos com uma dependência numa potência de  $\rho$ , o potencial adiabático efetivo (curvas tracejadas na Fig.4.5a) muda muito de  $\rho_0 = 1$  fm (azul tracejada) para  $\rho_0 = 5$  fm (vermelha tracejada). Além disso, mesmo se  $\rho_0 = 1$  fm, a força de três corpos modifica a cauda do potencial adiabático puro (curva preta). Como resultado disso, as densidades de um nêutron do halo correspondentes (linhas tracejadas na Fig.4.4a) são muito diferentes entre si, até mesmo a grandes distâncias, afastando-se da forma assintótica de Efimov (especialmente quando  $\rho_0 = 5$  fm). Quando a força de três corpos Gaussiana é escolhida, os potenciais efetivos correspondentes são novamente diferentes entre si (curvas tracejadas na Fig.4.5b), mas quando  $\rho_0 = 1$  fm (linha azul tracejada), o potencial efetivo sobrepõe-se totalmente à curva preta para  $\rho > 3$  fm. A consequência é que a densidade do nêutron do halo para  $\rho_0 = 5$  fm (curva tracejada vermelha na Fig.4.4b) e  $\rho_0 = 1$  fm (azul tracejada) são novamente diferentes entre si, mas esta última não concorda muito bem com o cálculo de alcance zero da curva preta tracejada.

Resumindo, verificou-se que somente o caso correspondente a  $S_{2n} = 250$  keV e  $\rho_0 = 5$  fm não é bem reproduzido pelo modelo de alcance zero. Isso se deve ao fato do potencial hipersférico (curva vermelha tracejada na Fig.4.5) desviar-se para valores de  $\rho$  abaixo de 8 fm da forma obtida somente com o potencial de curto alcance de dois corpos. As densidades obtidas de nêutron do halo para os outros três casos são consistentes com o modelo de alcance zero, e nesse sentido as densidades exibem comportamento universal. Isso é naturalmente relacionado ao domínio da cauda do potencial hipersférico observado na Fig. 4.5, bem representado pelo potencial hipersférico obtido com o modelo de curto alcance de dois corpos.

#### 4.4.1 Geometria do halo

Agora investigaremos a geometria da distribuição do halo de dois nêutrons estudando a dependência do ângulo relativo entre as coordenadas de Jacobi como nas Figs.4.3a e 4.3b. Para construir uma visualização mais simples, ao invés de usarmos o ângulo  $\theta'_x$ , usamos as coorde-



nadas  $r_x^\perp = r_x \sin \theta'_x$ , que é a projeção de  $\vec{r}_x$  na direção perpendicular à  $\vec{r}_y$ , e  $r_x^\parallel = r_x \cos \theta'_x$ , que é a projeção de  $\vec{r}_x$  ao longo de  $\vec{r}_y$ . Nesse sistema de coordenadas, o elemento de volume  $d^3r_x$  pode ser escrito como:

$$d^3r_x = r_x^\perp dr_x^\perp dr_x^\parallel d\varphi'_x, \quad (4.21)$$

e podemos, então, definir a densidade:

$$F(r_x^\perp, r_x^\parallel) = \int r_x^\perp d\varphi'_x d^3r_y |\Psi(\vec{x}, \vec{y})|^2, \quad (4.22)$$

que concorda automaticamente com a Eq.(4.16) satisfazendo a normalização:

$$\int dr_x^\perp dr_x^\parallel F(r_x^\perp, r_x^\parallel) = 1. \quad (4.23)$$

A densidade  $F(r_x^\perp, r_x^\parallel)$  pode ser obtida para cada um dos conjuntos de coordenadas descritos na Fig. 4.3, criando uma visão muito intuitiva da distribuição espacial do sistema.

Consideramos a função de onda do <sup>22</sup>C incluindo ondas parciais com  $\ell_x, \ell_y \leq 8$ , e uma força Gaussiana de três corpos com alcance de 3 fm, próximo ao raio do caroço <sup>20</sup>C. Isso resulta nos triângulos verdes da Fig. 4.2 que seguem próximos dos resultados para o modelo de alcance zero com  $E_{nc} = 0$ .

Nossa análise da densidade de dois nêutrons do halo sugere que  $F(r_x^\perp, r_x^\parallel)$  deve apresentar um comportamento universal aproximando-se dos resultados do modelo de alcance zero, que são representados por uma função de escala universal (ver (FREDERICO *et al.*, 2012)), como:

$$F(r_x^\perp, r_x^\parallel) = \frac{m}{\hbar^2} S_{2n} \mathcal{F}(\bar{r}_x^\perp, \bar{r}_x^\parallel, \pm \varepsilon_{nc}, -\varepsilon_{nn}, A) \quad (4.24)$$

onde as coordenadas são reescaladas:

$$\bar{r}_x^\perp = \frac{m}{\hbar^2} S_{2n}^{\frac{1}{2}} r_x^\perp, \quad \bar{r}_x^\parallel = \frac{m}{\hbar^2} S_{2n}^{\frac{1}{2}} r_x^\parallel \quad (4.25)$$

e as energias reescaladas foram definidas na Eq. (4.14), em que +/- indica estado ligado/virtual

dos subsistemas. Para o caso extremo de  $\varepsilon_{nc} = \varepsilon_{nn} = 0$  a função de escala reduz-se a:

$$F(r_x^\perp, r_x^\parallel) = \frac{m^2}{\hbar^4} S_{2n}^{-1} \mathcal{F}(\bar{r}_x^\perp, \bar{r}_x^\parallel, 0, 0, A). \quad (4.26)$$

A função de escala  $\mathcal{F}(\bar{r}_x^\perp, \bar{r}_x^\parallel, 0, 0, A)$  é invariante sob transformação de escala  $S_{2n} \rightarrow \lambda^{-2} S_{2n}$ ,  $r_x^\perp \rightarrow \lambda r_x^\perp$  e  $r_x^\parallel \rightarrow \lambda r_x^\parallel$  isto implica que a distribuição geométrica deve ser mantida por essa transformação de escala quando a energia de separação de dois nêutrons é alterada. Tal comportamento deve ser encontrado na região de  $r$ 's menores que  $|a_{nn}|$  (17 fm), quando  $|a_{nc}| > |a_{nn}|$ . Esta propriedade é verificada qualitativamente por nossos cálculos com potenciais de alcance finito de dois e três corpos para  $r$ 's menores que 17 fm. Nessa região, a geometria do halo é universal e essencialmente determinada pela razão de massa entre o nêutron e caroço.

Primeiro consideramos o conjunto de coordenadas da Fig. 4.3a. Os gráficos de contorno da densidade  $F$  definida pela Eq.(4.22), com o potencial de alcance finito com  $\rho_0 = 5$  fm, são apresentados na Fig. 4.6. Na figura 4.7 temos a estrutura espacial da densidade de dois nêutrons para o potencial de alcance zero e na Fig. 4.8 a densidade como na Fig. 4.6, porém agora com o ângulo polar definido na Fig. 4.3b. Nas três Figuras 4.6, 4.7 e 4.8, os painéis (a), (b), (c) e (d) correspondem à energias de separação de dois nêutrons de 1000 keV, 500 keV, 250 keV e 50 keV, respectivamente. Em todos os casos, os máximos de  $F$  aparecem para um ângulo de aproximadamente  $\theta'_x = 50$  graus, embora, obviamente, o sistema torna-se mais e mais espacialmente estendido quando a energia de separação diminui. Esse comportamento universal da geometria mostra na prática, a dominância aproximada da propriedade de escala na distribuição de densidade como expressa pela função de escala universal dada na Eq.(4.26). Podemos notar que a estrutura espacial observada na Fig. 4.6 não é simétrica com relação ao eixo  $r_x^\parallel = 0$ . Isso se deve à distribuição ser triangular, como vemos na Fig. 4.8.

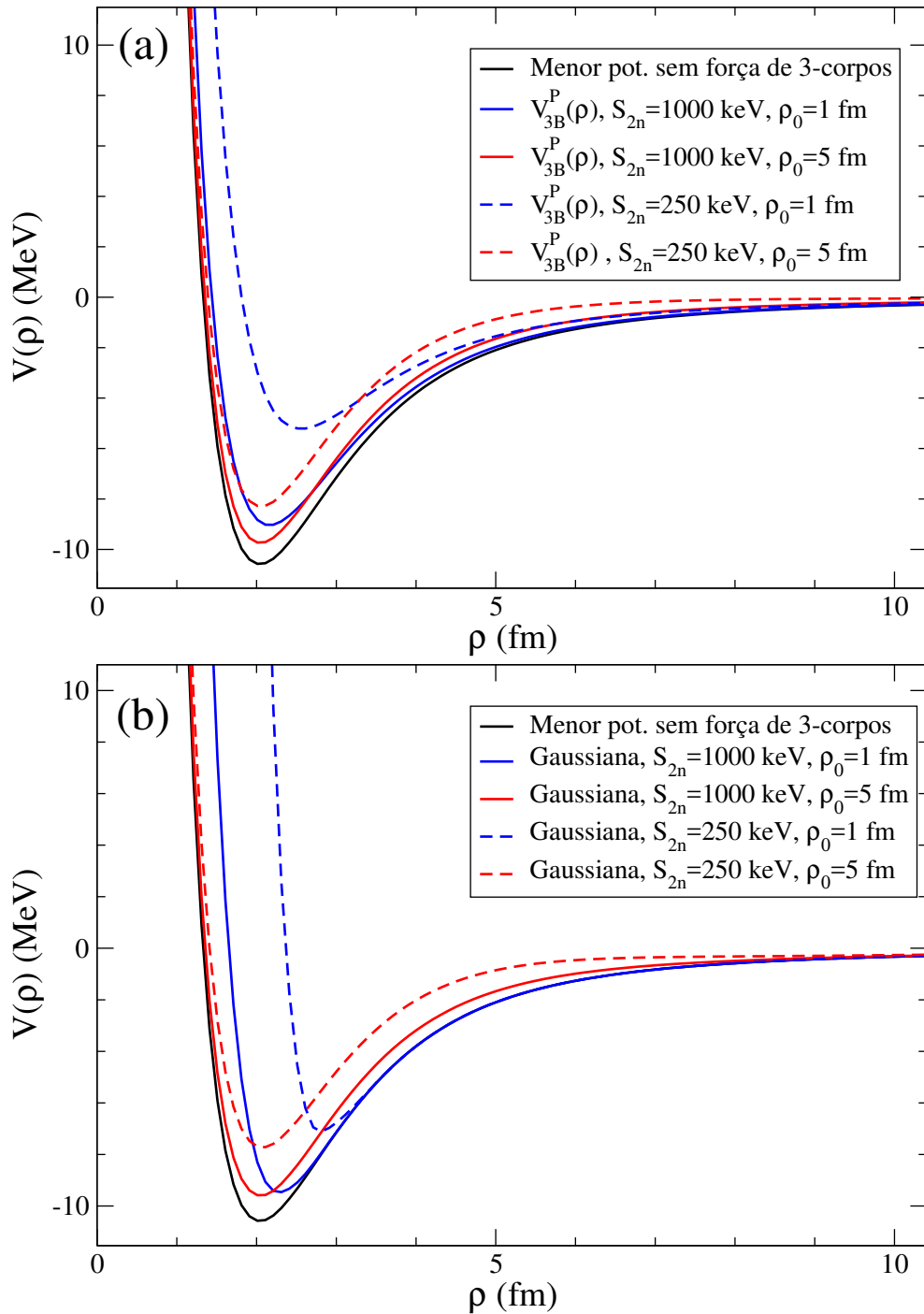


FIGURA 4.5 – Curvas Pretas: O mais baixo potencial efetivo adiabático  $V(\rho)$  (como dado na Eq.(4.8)) para o  $^{22}\text{C}$  quando  $E_{nc} = 0$  e  $\ell_x = \ell_y = 0$ . Curvas Sólidas: O mais baixo potencial efetivo somando as forças de três corpos produzindo um estado  $^{22}\text{C}$  com  $S_{2n} = 1000$  keV. Curvas tracejadas: O mais baixo potencial efetivo somando as forças de três corpos produzindo um estado  $^{22}\text{C}$  com  $S_{2n} = 250$  keV. Dois diferentes alcances são considerados para a força de três corpos,  $\rho_0 = 1$  fm (curvas azuis), e  $\rho_0 = 5$  fm (curvas vermelhas). Em (a) a força de três corpos corresponde à dependência de uma potência na Eq.(4.9), e em (b) a força de três corpos tem uma forma Gaussiana dada na Eq.(4.10).

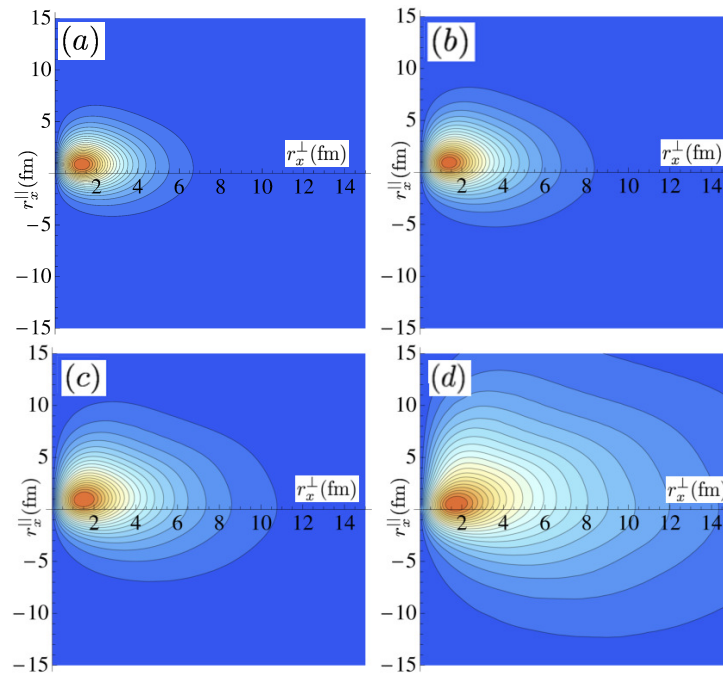


FIGURA 4.6 – Gráficos dos contornos para a densidade  $F(r_x^\perp, r_x^\parallel)$  definida na Eq.(4.22) para o ângulo polar  $\theta'_x$  definido na Fig.4.3a e um alcance do potencial de  $\rho_0=5$  fm. Os painéis (a), (b), (c), e (d) correspondem às energias  $S_{2n}$  de 1000 keV, 500 keV, 250 keV, and 50 keV, respectivamente.

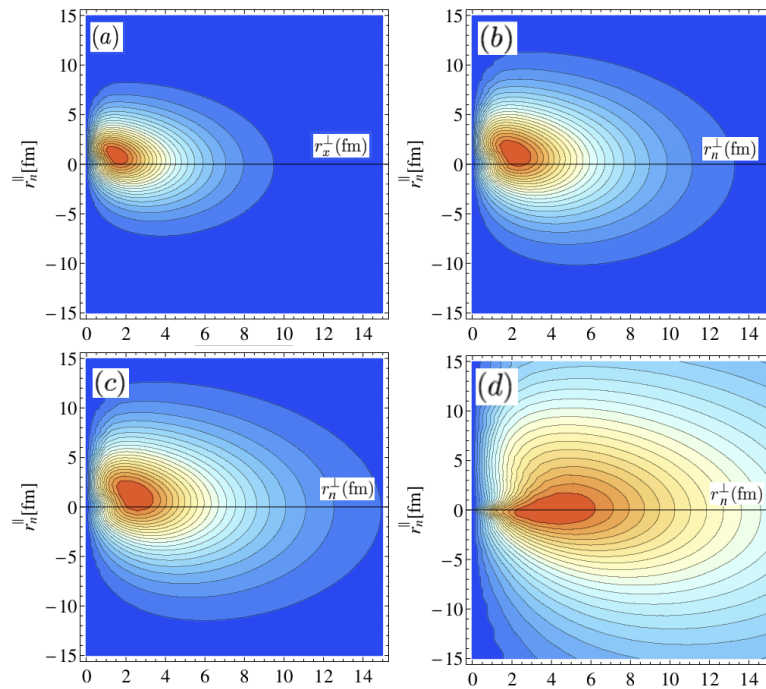


FIGURA 4.7 – Estrutura do halo referente ao potencial de alcance zero. As colunas separam os painéis referentes a diferentes energias de separação de dois nêutrons, sendo os painéis (a), (b), (c) e (d) com  $S_{2n}$  de 1000 keV, 500 keV 250 keV e 50 keV, respectivamente.

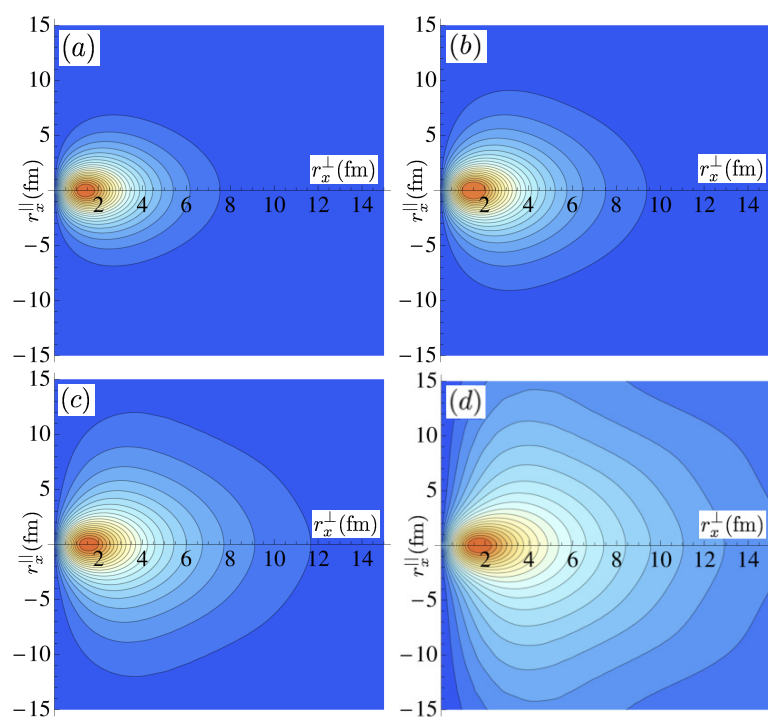


FIGURA 4.8 – Densidade  $F(r_x^\perp, r_x^\parallel)$  como na Figura 4.6 mas com o ângulo polar  $\theta'_x$  definido em Fig.4.3b.

# 5 Conclusões e perspectivas

## 5.1 Conclusões

Apresentamos a derivação das equações de Faddeev e as equações integrais correspondentes para o estado ligado de três corpos utilizando potenciais de dois corpos do tipo  $\delta$ -Dirac. Testamos os nossos métodos numéricos resolvendo a equação integral do estado ligado, para obter as energias dos estados ligados do sistema de três bósons idênticos com estados de energias do estado ligado/virtual do sistema de dois corpos na onda  $S$  próximos à zero. Os resultados reproduzem a trajetória dos estados Efimov em função da energia de ligação de dois corpos, sendo esse o ponto de partida para o estudo das correlações universais entre observáveis de baixa energia de poucos corpos. O programa computacional foi estendido para resolver numericamente as equações integrais homogêneas acopladas no caso mais geral de três partículas, onde duas são idênticas e um terceiro corpo distinto, a fim de explorarmos sistemas de nucleares exóticos com halo de dois nêutrons e um caroço nuclear mais compacto. Foi possível, então, investigar a função de onda nêutron-nêutron-caroço e assim analisar as relações entre as escalas relevantes do sistema e os observáveis associados à estrutura do halo de dois nêutrons.

A partir do modelo de três corpos, nos focamos em cálculos de observáveis associados à distribuição espacial dos dois nêutrons do halo de núcleos exóticos leves ricos em nêutrons distantes da linha de estabilidade. Construimos a função de onda no espaço de momentos com o potencial de alcance zero na onda  $S$ , o que nos permitiu estudar, por exemplo, a distribuição de momentos de recuo do caroço em relação ao centro de massa do par de nêutrons. Levando-se em conta os parâmetros de baixa energia, encontramos uma grande consistência do nosso modelo

com as distribuições de momento do  $^{11}\text{Li}$  e  $^{14}\text{Be}$  experimentais. Esse estudo e o referente às distribuições de momento de recuo do caroço na quebra do  $^{20}\text{C}$  e  $^{22}\text{C}$  foram objetos das publicações (SOUZA *et al.*, 2016b) e (SOUZA *et al.*, 2016a).

Baseando-se no fato de que o modelo de alcance zero fornece uma descrição válida do cálculo de distribuições de momento de recuo do caroço para núcleos halo de dois nêutrons na onda  $S$ , procedemos com a análise dos resultados experimentais recentes do  $^{22}\text{C}$ , dados na Referência (KOBAYASHI *et al.*, 2012). A partir desse estudo da distribuição de momento de recuo do caroço do  $^{22}\text{C}$ , sugerimos que a energia de separação de dois nêutrons encontra-se numa janela de valores de  $100 \text{ keV} \lesssim S_{2n} \lesssim 400 \text{ keV}$ . Mostramos que, variando-se a energia de dois corpos  $E_{nc}$  do estado virtual  $n-c$  entre 0 e 1 MeV, observa-se apenas uma dependência pequena na distribuição de momento de recuo do caroço para uma dada energia fixa  $S_{2n}$ . A partir da energia de separação de dois nêutrons, foi estimado o raio de matéria do  $^{22}\text{C}$  compreendido entre 3.5 e 4.5 fm. Portanto, esse intervalo indica valores menores para o raio de matéria em relação ao resultado para a raiz do raio quadrático médio de  $5.4 \pm 0.9 \text{ fm}$  deduzido do experimento do RIKEN (TANAKA *et al.*, 2010). De fato, o resultado mais recente de  $3.44 \pm 0.08 \text{ fm}$  obtido no RIKEN (TOGANO *et al.*, 2016), através da medida da seção de choque de interação do  $^{22}\text{C}$  em algumas centenas de MeV por núcleon mostra um halo menor, como sugerido pela nossa análise da distribuição de momento de recuo do caroço do  $^{22}\text{C}$ . Os resultados obtidos para distribuições de momento de recuo do caroço no contexto de física nuclear de poucos corpos, para os núcleos de  $^{11}\text{Li}$  e  $^{14}\text{Be}$  correspondem aos dados experimentais sugerindo ainda pequenas correções para o  $^{22}\text{C}$ .

A comparação entre os resultados para a função de onda do halo de dois nêutrons do  $^{22}\text{C}$  obtidos com potenciais diferentes nos auxiliou a entender um pouco mais da sua estrutura, investigada por meio de um modelo com potencial de alcance finito pelo usual modelo de alcance zero renormalizado. Os cálculos para os potenciais de alcance finito foram feitos no espaço de configurações por meio do método de expansão adiabática hiperesférica, e o modelo de alcance zero renormalizado é o mesmo revisto em (FREDERICO *et al.*, 2012), onde é utilizado o método de subtração no espaço dos momentos. Nesse último modelo realizamos a transformada de Fourier na função de onda do espaço dos momentos para o espaço das coordenadas. Os mode-

los de potenciais de alcance finito e alcance zero são parametrizados através de observáveis de baixa energia, sendo eles os comprimentos de espalhamento de dois corpos e a energia de separação de dois nêutrons. Além de escolher um potencial de dois corpos do tipo Wood-Saxon, o subsistema  $n$ - $^{20}\text{C}$  formando o  $^{21}\text{C}$  da Ref. (KUCUK; TOSTEVIN, 2014), consideramos uma força repulsiva de três corpos para investigar a possibilidade de um halo de dois nêutrons muito fracamente ligado ao caroço. Investigamos também, a estrutura do halo com valores da energia de separação de dois nêutrons entre 50 keV e 1000 keV (SOUZA *et al.*, 2016c), obtidas com uma força repulsiva de três corpos com diferentes dependências no hiper-raio ( $\sim [1 + (\rho/\rho_0)^3]^{-1}$ ), exponencial ( $\exp -(\rho/\rho_0)$ ) e Gaussiana ( $\exp -(\rho/\rho_0)^2$ ), para alcances de  $\rho_0 = 1, 3$  e 5 fm. Os resultados dos modelos de alcance finito e alcance zero para o sistema nêutron-nêutron-caroço foram comparados a fim de verificar a emergência das relações universais de escala, aproveitando o fato de poder usar diferentes valores para a força de três corpos e o alcance do potencial.

Três funções de escala associadas à estrutura do halo de nêutrons do  $^{22}\text{C}$  foram abordadas: (i) a correlação entre  $S_{2n}$  e  $r_n$  (distância do nêutron com relação ao centro de massa); (ii) a densidade do nêutron do halo; e (iii) a geometria do halo considerando o ângulo entre as coordenadas de Jacobi. Essas quantidades foram calculadas com diferentes forças de três corpos, parâmetros de baixa energia e energias de separação de dois nêutrons. A geometria do halo foi investigada por meio da densidade de nêutrons com uma força Gaussiana de três corpos com alcance de 3 fm (próximo ao raio de matéria observado para o  $^{20}\text{C}$ ) com valores de  $S_{2n}$  compreendidos entre 50 e 1000 keV. Esse estudo explorou a dependência angular da densidade de nêutrons. Com esse objetivo em mente, calculamos a distribuição de probabilidade nas coordenadas relativas do nêutron-caroço e nêutron-nêutron projetadas nas componentes transversa e paralela em relação a coordenada de Jacobi remanescente. No limite unitário quando o comprimento de espalhamento vai para o infinito, as funções de escala expressam as densidades onde a distribuição espacial preserva sua forma quando as coordenadas são reescaladas com  $1/\sqrt{S_{2n}}$ , dessa forma os ângulos são preservados pela transformação de escala. Observamos que as densidades calculadas para os potenciais de alcance finito adaptados ao sistema  $n$ - $n$ - $^{20}\text{C}$  preservam as propriedades de escala universais. A distribuição de nêutrons tem um máximo num ângulo de 50 graus entre a coordenada relativa de Jacobi nêutron-caroço e nêutron-(nêutron-caroço),



sendo independente da energia de separação. Na outra configuração de coordenadas relativas, nêutron-nêutron e caroço-(nêutron-nêutron), observamos que uma forma triangular é preferencial e a distribuição espacial de nêutrons escala aproximadamente com  $1/\sqrt{S_{2n}}$ .

O comportamento universal na distribuição de nêutron-caroço e sua geometria, investigados no modelo de alcance zero dominado pela física universal de Efimov, exibem resultados consistentes com aqueles obtidos com potenciais de alcance próximo ao tamanho do caroço. Devemos salientar que, enquanto os observáveis de baixa energia de dois corpos e a energia de separação de dois nêutrons são parâmetros do modelo, os efeitos da estrutura do caroço, como por exemplo sua excitação interna, são incluídos implicitamente pelas forças efetivas de três corpos escolhidas para fornecer um dado valor de  $S_{2n}$ .

## 5.2 Perspectivas Futuras

Temos o objetivo de dar continuidade ao estudo das propriedades de núcleos exóticos investigando sua estrutura, e também incluir nosso modelo em reações nucleares. Daremos prosseguimento ao estudo das distribuições de momento de recuo do caroço incluindo funções de ondas distorcidas a fim de avaliar qual é sua contribuição aos resultados que obtivemos. Esse estudo parte da análise das distribuições de momento com projéteis de núcleos halo de um nêutron (BERTULANI; HANSEN, 2004), como mostrado resumidamente no Apêndice E. Motivados por esse trabalho estamos estudando a extensão para projéteis constituídos por três corpos para calcular a distribuição de momento de recuo do caroço incluindo as ondas distorcidas do fragmento na aproximação eikonal.

Outra possibilidade é estudar como efeitos da estrutura do halo de dois nêutrons e dos estados Efimov podem aparecer em reações nucleares. Em particular, estamos construindo o potencial de polarização próton- $^{20}\text{C}$ , oriundo da excitação virtual de um estado Efimov, mesmo que fictício. A equação inicial a ser resolvida é dada por:

$$F(\vec{Q}) = \int d^3r_{pc} V_{pc}(\vec{r}_{pc}) F_{pc}(\vec{Q}, \vec{r}_{pc}) + \int d^3r_{pn} 2 V_{pn}(\vec{r}_{pn}) F_{pn}(\vec{Q}, \vec{r}_{pn}), \quad (5.1)$$

onde as funções  $F_{pc}(\vec{Q}, \vec{r}_{pc})$  e  $F_{pn}(\vec{Q}, \vec{r}_{pn})$  são os fatores de forma da transição entre o estado fundamental e primeiro estado excitado de Efimov, e são escritos como,

$$F_{pc}(\vec{Q}, \vec{r}_{pc}) = e^{-i\vec{Q}\cdot\vec{r}_{pc}} \int d^3p_{nn,c} d^3p_{nn} \Phi_1^*(\vec{p}_{nn}, \vec{p}_{nn,c}) \Phi_0(\vec{p}_{nn}, \vec{q}_{pnn,c} + \vec{p}_{nn,c}), \quad (5.2)$$

e,

$$F_{pn}(\vec{Q}, \vec{r}_{pn}) = e^{-i\frac{A+3}{A+1}\vec{Q}\cdot\vec{r}_{pn}} \int d^3p_{nn,c} d^3p_{nn} \Phi_1^*(\vec{p}_{nn}, \vec{p}_{nn,c}) \times \Phi_0\left(\vec{p}_{nn} - \frac{A+3}{A+1}\vec{Q}, \vec{p}_{nn,c} + \frac{A(A+3)}{(A+2)(A+1)}\vec{Q}\right). \quad (5.3)$$

Os detalhes da derivação do potencial de polarização são mostrados no Apêndice F.

Uma terceira possibilidade de estudo é a reação de quebra de um núcleo-halo de dois nêutrons com um alvo pesado como mostra o Apêndice G. O foco da análise é a seção de choque de quebra inclusiva onde o fragmento  $b$  é observado. Essa seção de choque foi derivada em (CARLSON *et al.*, 2017) com base em uma descrição de quatro corpos, onde o projétil é formado pelos fragmentos  $b$ ,  $x_1$  e  $x_2$ . Essa seção de choque inclusiva é dada por:

$$\frac{d^2\sigma_b}{dE_b d\Omega_b} = \frac{d^2\sigma_b^{EB}}{dE_b d\Omega_b} + \frac{d^2\sigma_b^{INEB}}{dE_b d\Omega_b} \quad (5.4)$$

onde a contribuição da quebra elástica é dada por

$$\frac{d^2\sigma_b^{EB}}{dE_b d\Omega_b} = \frac{2\pi}{\hbar v_a} \rho_b(E_b) \sum_{\vec{k}_x} |\langle \chi_X^{3B(-)} \chi_b^{(-)} | (V_{bx_1} + V_{bx_2}) | \psi_0^{4B(+)} \rangle|^2 \delta(E - E_B - E_{\vec{k}_x}), \quad (5.5)$$

e a parte da seção de choque da quebra inelástica é dada pela expressão:

$$\frac{d^2\sigma_b^{INEB}}{dE_b d\Omega_b} = \frac{2}{\hbar v_a} \rho_b(E_b) \langle \hat{\rho}_X | (W_{x_1} + W_{x_2} + W_{3B}) | \hat{\rho}_X \rangle, \quad (5.6)$$

onde  $\rho_b(E_b) = \mu_b k_b / [(2\pi)^3 \hbar^2]$  é a densidade de estados do fragmento observado,  $b$ . Os termos  $W$  são as partes imaginárias do potencial óptico. A função de fonte  $\hat{\rho}_b(\vec{r}_x) = (\chi^{(-)} | \Psi_{3B}^{(+)} \rangle$  pode

ser escrita como,

$$\hat{\rho}_X(\vec{r}_{x_1}, \vec{r}_{x_2}) = \int d\vec{r}_b (\chi_b^{(-)}(\vec{r}_b))^\dagger \psi_0^{4B(+)}(\vec{r}_b, \vec{r}_{x_1}, \vec{r}_{x_2}), \quad (5.7)$$

como discutido em detalhes na Ref. (CARLSON *et al.*, 2017), a Equação 5.7 da função  $\hat{\rho}$  mostra um termo dado por

$$\langle \vec{r}_{x_1}, \vec{r}_{x_2} | \hat{\rho}_{HM}^{4B} \rangle = \int d\vec{r}_b \phi_{x_1, x_2, b}(\vec{r}_b, \vec{r}_{x_1}, \vec{r}_{x_2}) \langle \chi_b^- | \chi_b^+ \rangle(\vec{r}_b) \chi_{x_1}^{(+)}(\vec{r}_{x_1}) \chi_{x_2}^{(+)}(\vec{r}_{x_2}), \quad (5.8)$$

que carrega a função de onda do estado ligado do núcleo halo de dois nêutrons,  $\phi$ , e as ondas distorcidas  $\chi$ . Esse termo contém a contribuição das correlações dos constituintes do halo no estado inicial do projétil. Esse termo exemplifica como eventualmente a física de Efimov pode estar presente e indiretamente contribuir para seções de choque passíveis de serem medidas.

Apontar onde os conceitos de universalidade e da Física de Efimov podem contribuir para o entendimento de reações envolvendo núcleos exóticos com halo de dois nêutrons fracamente ligados é um grande desafio, tanto do ponto de vista teórico, como experimental, que acreditamos estar cada vez mais próximo de tornar-se realidade. Esperamos que essa tese possa ter contribuído um pouco para abrir esse caminho.

# Referências

ACHARYA, B.; JI, C.; PHILLIPS, D. Implications of a matter-radius measurement for the structure of carbon-22. **Physics Letters B**, v. 723, n. 1, p. 196 – 200, 2013. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269313003444>>.

ADHIKARI, S. K.; DELFINO, A.; FREDERICO, T.; GOLDMAN, I. D.; TOMIO, L. Efimov and thomas effects and the model dependence of three-particle observables in two and three dimensions. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 37, p. 3666–3673, May 1988. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.37.3666>>.

ADHIKARI, S. K.; DELFINO, A.; FREDERICO, T.; TOMIO, L. Model independence of scattering of three identical bosons in two dimensions. **Phys. Rev. A**, v. 47, p. 1093, 1993.

ADHIKARI, S. K.; FREDERICO, T. Renormalization group in potential scattering. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 74, p. 4572–4575, Jun 1995. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.74.4572>>.

AL-KHALILI, J. S.; TOSTEVIN, J. A.; THOMPSON, I. J. Radii of halo nuclei from cross section measurements. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 54, p. 1843–1852, Oct 1996. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.54.1843>>.

AMORIM, A. E. A.; FREDERICO, T.; TOMIO, L. Universal aspects of efimov states and light halo nuclei. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 56, p. R2378–R2381, Nov 1997. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.56.R2378>>.

AUDI, G.; WANG, M.; WAPSTRA, A.; KONDEV, F.; MACCORMICK, M.; XU, X.; PFEIFFER, B. The ame2012 atomic mass evaluation. **Chinese Physics C**, v. 36, n. 12, p. 1287, 2012. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1674-1137/36/i=12/a=002>>.

AUDI, G.; WAPSTRA, A.; THIBAUT, C. The ame2003 atomic mass evaluation: (ii). tables, graphs and references. **Nuclear Physics A**, v. 729, n. 1, p. 337 – 676, 2003. ISSN 0375-9474. The 2003 {NUBASE} and Atomic Mass Evaluations. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947403018098>>.

BARONTINI, G.; WEBER, C.; RABATTI, F.; CATANI, J.; THALHAMMER, G.; INGUSCIO, M.; MINARDI, F. Observation of Heteronuclear Atomic Efimov Resonances. **Physical Review Letters**, v. 103, 2009. ISSN 00319007.

BEDAQUE, P. F.; HAMMER, H.-W.; KOLCK, U. van. Renormalization of the three-body system with short-range interactions. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 82, p. 463–467, Jan 1999. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.463>>.

- BERTULANI, C. A.; CANTO, L.; HUSSEIN, M. S. The structure and reactions of neutron-rich nuclei. **Physics Reports**, v. 226, n. 6, p. 281 – 376, 1993. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037015739390128Z>>.
- BERTULANI, C. A.; HANSEN, P. G. Momentum distributions in stripping reactions of radioactive projectiles at intermediate energies. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 70, p. 034609, Sep 2004. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.70.034609>>.
- BRAATEN, E.; HAMMER, H.-W. Universality in few-body systems with large scattering length. **Physics Reports**, v. 428, n. 5, p. 259 – 390, 2006. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157306000822>>.
- CANHAM, D. L.; HAMMER, H. W. Universal properties and structure of halo nuclei. **The European Physical Journal A**, v. 37, n. 3, p. 367–380, 2008. ISSN 1434-601X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1140/epja/i2008-10632-4>>.
- CARLSON, B.; FREDERICO, T.; HUSSEIN, M. Inclusive breakup of three-fragment weakly bound nuclei. **Physics Letters B**, p. –, 2017. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269317300667>>.
- DANILOV, G. S. On the three-body problem with short-range forces. **J. Exptl. Theoret. Phys. (U.S.S.R.)**, v. 40, 1961.
- DANILOV, G. S. The role of short-range three-particle forces in processes with the generation of three particles near threshold. **J. Exptl. Theoret. Phys. (U.S.S.R.)**, v. 43, 1962.
- DELTUVA, A. Efimov physics in bosonic atom-trimer scattering. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 82, p. 040701, Oct 2010. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.82.040701>>.
- DOBROVOLSKY, A.; ALKHAZOV, G.; ANDRONENKO, M.; BAUCHET, A.; EGELHOF, P.; FRITZ, S.; GEISSEL, H.; GROSS, C.; KHANZADEEV, A.; KOROLEV, G.; KRAUS, G.; LOBODENKO, A.; M. G. Study of the nuclear matter distribution in neutron-rich Li isotopes. **Nuclear Physics A**, v. 766, p. 1 – 24, 2006. ISSN 0375-9474. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947405012017>>.
- EFIMOV, V. Energy levels arising from resonant two-body forces in a three-body system. **Physics Letters B**, v. 33, n. 8, p. 563 – 564, 1970. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269370903497>>.
- EFIMOV, V. N. Low-energy properties of three resonantly interacting particles. **Sov. J. Nucl. Phys**, v. 29, p. 546, 1979. Disponível em: <<http://www.uibk.ac.at/exphys/ultracold/projects-/levt/efimov/SovJNucPhys29.546.efimov.pdf>>.
- ENOMOTO, K.; KASA, K.; KITAGAWA, M.; TAKAHASHI, Y. Optical feshbach resonance using the intercombination transition. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 101, p. 203201, Nov 2008. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.203201>>.

- ERSHOV, S. N.; VAAGEN, J. S.; ZHUKOV, M. V. Binding energy constraint on matter radius and soft dipole excitations of  $^{22}\text{C}$ . **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 86, p. 034331, Sep 2012. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.86.034331>>.
- FEDOROV, D. V.; GARRIDO, E.; JENSEN, A. S. Three-body halos. iii. effects of finite core spin. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 51, p. 3052–3065, Jun 1995. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.51.3052>>.
- FEDOROV, D. V.; JENSEN, A. S. Efimov effect in coordinate space faddeev equations. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 71, p. 4103–4106, Dec 1993. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.71.4103>>.
- FEDOROV, D. V.; JENSEN, A. S.; RIISAGER, K. Efimov states in halo nuclei. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 73, p. 2817–2820, Nov 1994. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.73.2817>>.
- Ferlaino, F; Grimm, R. Trend: Forty years of efimov physics: How a bizarre prediction turned into a hot topic. **Physics**, v. 3, p. 9, 2010. Disponível em: <<https://physics.aps.org/articles/v3/9>>.
- FESHBACH, H. **A unified theory of nuclear reactions. II**. 1962. 287–313 p.
- FORTUNE, H. T.; SHERR, R. Binding energy of  $^{22}\text{C}$ . **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 85, p. 027303, Feb 2012. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.85.027303>>.
- FREDERICO, T. Universal aspects of neutron halos in light exotic nuclei. **Few-Body Systems**, v. 55, n. 8, p. 651–657, 2014. ISSN 1432-5411. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00601-014-0874-7>>.
- FREDERICO, T.; DELFINO, A.; TOMIO, L.; YAMASHITA, M. Universal aspects of light halo nuclei. **Progress in Particle and Nuclear Physics**, v. 67, n. 4, p. 939 – 994, 2012. ISSN 0146-6410. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0146641012000907>>.
- FREDERICO, T.; TOMIO, L.; DELFINO, A.; AMORIM, A. E. A. Scaling limit of weakly bound triatomic states. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 60, p. R9–R12, Jul 1999. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.60.R9>>.
- GARRIDO, E.; GUERRA, E. Moya de. Electron scattering on two neutron halo nuclei: The Case of He-6. **Nucl. Phys.**, A650, p. 387–417, 1999.
- GAUDEFROY, L.; MITTIG, W.; ORR, N. A.; VARET, S.; CHARTIER, M.; ROUSSEL-CHOMAZ, P.; EBRAN, J. P.; FERNÁNDEZ-DOMÍNGUEZ, B.; FRÉMONT, G.; GANGNANT, P.; GILLIBERT, A.; GRÉVY, S.; LIBIN, J. F.; MASLOV, V. A.; PASCHALIS, S.; PIETRAS, B.; PENIONZHKEVICH, Y.-E.; SPITAEELS, C.; VILLARI, A. C. C. Direct mass measurements of  $^{19}\text{B}$ ,  $^{22}\text{C}$ ,  $^{29}\text{F}$ ,  $^{31}\text{Ne}$ ,  $^{34}\text{Na}$  and other light exotic nuclei. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 109, p. 202503, Nov 2012. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.202503>>.
- GŁAZEK, S. D.; WILSON, K. G. Limit cycles in quantum theories. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 89, p. 230401, Nov 2002. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.89.230401>>.

- HADIZADEH, M. R.; YAMASHITA, M. T.; TOMIO, A. D. L.; FREDERICO, T. Scaling Properties of Universal Tetramers. **Phys. Rev. Lett.**, v. 107, p. 135304, 2011.
- HANSEN, P. G.; JENSEN, A. S.; JONSON, B. Nuclear halos. **Annual Review of Nuclear and Particle Science**, v. 45, n. 1, p. 591–634, 1995. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1146/annurev.ns.45.120195.003111>>.
- HENCKEN, K.; BERTSCH, G.; ESBENSEN, H. Breakup reactions of the halo nuclei  $^{11}\text{Be}$  and  $^8\text{B}$ . **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 54, p. 3043–3050, Dec 1996. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.54.3043>>.
- JENSEN, A. S.; RIISAGER, K.; FEDOROV, D. V.; GARRIDO, E. Structure and reactions of quantum halos. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 76, p. 215–261, Feb 2004. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.76.215>>.
- KELLEY, J. H.; KWAN, E.; PURCELL, J. E.; SHEU, C. G.; WELLER, H. R. Energy levels of light nuclei. **Nucl. Phys.**, A880, p. 88–195, 2012.
- KOBAYASHI, N.; NAKAMURA, T.; TOSTEVIN, J. A.; KONDO, Y.; AOI, N.; BABA, H.; DEGUCHI, S.; GIBELIN, J.; ISHIHARA, M.; KAWADA, Y.; KUBO, T.; MOTOBAYASHI, T.; OHNISHI, T.; ORR, N. A.; OTSU, H.; SAKURAI, H.; SATOU, Y.; SIMPSON, E. C.; SUMIKAMA, T.; TAKEDA, H.; TAKECHI, M.; TAKEUCHI, S.; TANAKA, K. N.; TANAKA, N.; TOGANO, Y.; YONEDA, K. One- and two-neutron removal reactions from the most neutron-rich carbon isotopes. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 86, p. 054604, Nov 2012. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.86.054604>>.
- KRAEMER M. MARK, P. W. J. G. D. C. C. B. E. A. D. L. K. P. A. J. H.-C. N. T.; GRIMM, R. Evidence for efimov quantum states in an ultracold gas of caesium atoms. **Nature**, v. 440, p. 315–318, 2006.
- KUCUK, Y.; TOSTEVIN, J. A. Intermediate-energy four-body breakup calculations for  $^{22}\text{C}$ . **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 89, p. 034607, Mar 2014. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.89.034607>>.
- MARCELIS, B.; KEMPEN, E. G. M. van; VERHAAR, B. J.; KOKKELMANS, S. J. J. M. F. Feshbach resonances with large background scattering length: Interplay with open-channel resonances. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 70, p. 012701, Jul 2004. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.70.012701>>.
- MOSBY, S.; BADGER, N.; BAUMANN, T.; BAZIN, D.; BENNETT, M.; BROWN, J.; CHRISTIAN, G.; DEYOUNG, P.; FINCK, J.; GARDNER, M.; HINNEFELD, J.; HOOK, E.; LUNDERBERG, E.; LUTHER, B.; MEYER, D.; MOSBY, M.; PEASLEE, G.; ROGERS, W.; SMITH, J.; SNYDER, J.; SPYROU, A.; STRONGMAN, M.; THOENNESSEN, M. Search for  $21\text{c}$  and constraints on  $22\text{c}$ . **Nuclear Physics A**, v. 909, p. 69 – 78, 2013. ISSN 0375-9474. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947413004843>>.
- NIELSEN, E.; FEDOROV, D.; JENSEN, A.; GARRIDO, E. The three-body problem with short-range interactions. **Physics Reports**, v. 347, n. 5, p. 373 – 459, 2001. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157300001071>>.
- NIEMANN, P.; HAMMER, H.-W. Limit cycles from the similarity renormalization group. **Few-Body Systems**, v. 56, n. 11, p. 869–879, 2015. ISSN 1432-5411. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00601-015-1001-0>>.

NNDC. **Chart of Nuclides**. 2017. Disponível em: <<http://www.nndc.bnl.gov/chart/>>.

OZAWA, A.; BOCHKAREV, O.; CHULKOV, L.; CORTINA, D.; GEISSEL, H.; HELLSTR M. Measurements of interaction cross sections for light neutron-rich nuclei at relativistic energies and determination of effective matter radii. **Nuclear Physics A**, v. 691, n. 3, p. 599 – 617, 2001. ISSN 0375-9474. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947401005632>>.

PETROV, A.; TIESINGA, E.; KOTOCHIGOVA, S. Anisotropy-induced feshbach resonances in a quantum dipolar gas of highly magnetic atoms. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 109, p. 103002, Sep 2012. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.103002>>.

RIISAGER, K. Halos and related structures. **Physica Scripta**, v. 2013, n. T152, p. 014001, 2013. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1402-4896/2013/i=T152/a=014001>>.

ROBICHEAUX, F. Simple asymptotic potential model for finding weakly bound negative ions. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 60, p. 1706–1709, Aug 1999. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.60.1706>>.

ROGEL-SALAZAR, J. The gross-pitaevskii equation and bose-einstein condensates. **European J. of Physics**, v. 34, n. 2, p. 247, 2013. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0143-0807/34/i=2/a=247>>.

SAKURAI, J. J. **Modern Quantum Mechanics**. 1986. 668 p.

SERBER, R. The production of high energy neutrons by stripping. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 72, p. 1008–1016, Dec 1947. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.72.1008>>.

SHULGINA, N.; JONSON, B.; ZHUKOV, M.  $^{11}\text{Li}$  structure from experimental data. **Nuclear Physics A**, v. 825, n. 3, p. 175 – 199, 2009. ISSN 0375-9474. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947409002401>>.

SKORNIAKOV, G.; TE-MARTIROSIAN, K. The three-body problem with short-range forces. scattering of low-energy neutrons by deuterons. **Zh. Eksp. Teor. Fiz. 31 (1956) 775, Sov. Phys. JETP**, v. 4, 1957.

SMITH, M.; BRODEUR, M.; BRUNNER, T.; ETTENAUER, S.; LAPIERRE, A.; RINGLE, R.; RYJKOV, V. L.; AMES, F.; BRICAULT, P.; DRAKE, G. W. F.; DELHEIJ, P.; LUNNEY, D.; SARAZIN, F.; DILLING, J. First penning-trap mass measurement of the exotic halo nucleus  $^{11}\text{Li}$ . **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 101, p. 202501, Nov 2008. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.202501>>.

SOUZA, L.; BELLOTTI, F.; YAMASHITA, M.; FREDERICO, T.; TOMIO, L. Core momentum distribution in two-neutron halo nuclei. **Physics Letters B**, v. 757, p. 368 – 375, 2016. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269316300685>>.

SOUZA, L. A.; BELLOTTI, F. F.; FREDERICO, T.; YAMASHITA, M. T.; TOMIO, L. Scaling limit analysis of borromean halos. **Few-Body Systems**, v. 57, n. 5, p. 361–370, 2016. ISSN 1432-5411. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00601-016-1086-0>>.



- SOUZA, L. A.; GARRIDO, E.; FREDERICO, T. Emergent universality in the two-neutron halo structure of  $^{22}\text{C}$ . **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 94, p. 064002, Dec 2016. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.94.064002>>.
- STIPANOVIĆ, P.; MARKIĆ, L. V.; BESLIĆ, I.; BORONAT, J. Universality in molecular halo clusters. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 113, p. 253401, Dec 2014. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.253401>>.
- TABAKIN, F. Short-Range Correlations and the Three-Body Binding Energy. **Physical Review**, v. 137, 1965.
- TANAKA, K.; YAMAGUCHI, T.; SUZUKI, T.; OHTSUBO, T.; FUKUDA, M.; NISHIMURA, D.; TAKECHI, M.; OGATA, K.; OZAWA, A.; IZUMIKAWA, T.; AIBA, T.; AOI, N.; BABA, H.; HASHIZUME, Y.; INAFUKU, K.; IWASA, N.; KOBAYASHI, K.; KOMURO, M.; KONDO, Y.; KUBO, T.; KUROKAWA, M.; MATSUYAMA, T.; MICHIMASA, S.; MOTOBAYASHI, T.; NAKABAYASHI, T.; NAKAJIMA, S.; NAKAMURA, T.; SAKURAI, H.; SHINODA, R.; SHINOHARA, M.; SUZUKI, H.; TAKESHITA, E.; TAKEUCHI, S.; TOGANO, Y.; YAMADA, K.; YASUNO, T.; YOSHITAKE, M. Observation of a large reaction cross section in the drip-line nucleus  $^{22}\text{C}$ . **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 104, p. 062701, Feb 2010. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.062701>>.
- TANIHATA, I. Neutron halo nuclei. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, v. 22, n. 2, p. 157, 1996. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0954-3899/22/i=2/a=004>>.
- TANIHATA, I.; HAMAGAKI, H.; HASHIMOTO, O.; SHIDA, Y.; YOSHIKAWA, N.; SUGIMOTO, K.; YAMAKAWA, O.; KOBAYASHI, T.; TAKAHASHI, N. Measurements of interaction cross sections and nuclear radii in the light  $p$ -shell region. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 55, p. 2676–2679, Dec 1985. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.55.2676>>.
- THEIS, M.; THALHAMMER, G.; WINKLER, K.; HELLWIG, M.; RUFF, G.; GRIMM, R.; DENSCHLAG, J. H. Tuning the scattering length with an optically induced feshbach resonance. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 93, p. 123001, Sep 2004. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.123001>>.
- THOMAS, L. H. The interaction between a neutron and a proton and the structure of  $h^3$ . **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 47, p. 903–909, Jun 1935. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.47.903>>.
- TOGANO, Y.; NAKAMURA, T.; KONDO, Y.; TOSTEVIN, J.; SAITO, A.; GIBELIN, J.; ORR, N.; ACHOURI, N.; AUMANN, T.; BABA, H.; DELAUNAY, F.; DOORNENBAL, P.; FUKUDA, N.; HWANG, J.; INABE, N.; ISOBE, T.; KAMEDA, D.; KANNO, D.; KIM, S.; KOBAYASHI, N.; KOBAYASHI, T.; KUBO, T.; LEBLOND, S.; LEE, J.; MARQUÃ©S, F.; MINAKATA, R.; MOTOBAYASHI, T.; MURAI, D.; MURAKAMI, T.; MUTO, K.; NAKASHIMA, T.; NAKATSUKA, N.; NAVIN, A.; NISHI, S.; OGOSHI, S.; OTSU, H.; SATO, H.; SATOU, Y.; SHIMIZU, Y.; SUZUKI, H.; TAKAHASHI, K.; TAKEDA, H.; TAKEUCHI, S.; TANAKA, R.; TUFF, A.; VANDEBROUCK, M.; YONEDA, K. Interaction cross section study of the two-neutron halo nucleus  $^{22}\text{C}$ . **Physics Letters B**, v. 761, p. 412 – 418, 2016. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269316304890>>.

- TUSNSKI, D.; YAMASHITA, M.; FREDERICO, T.; TOMIO, L. Continuum resonances with shielded coulomb-like potential and efimov effect. **Physics of Atomic Nuclei**, Pleiades Publishing, v. 77, n. 4, p. 504–508, 2014. ISSN 1063-7788. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1134/S1063778814040152>>.
- WILSON, K. G. Renormalization group and strong interactions. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 3, p. 1818–1846, Apr 1971. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.3.1818>>.
- YAMASHITA, M.; CARVALHO, R. M. de; FREDERICO, T.; TOMIO, L. Constraints on two-neutron separation energy in the borromean  $^{22}\text{C}$  nucleus. **Physics Letters B**, v. 697, n. 1, p. 90 – 93, 2011. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269311000773>>.
- YAMASHITA, M.; FREDERICO, T.; CARVALHO, R. Marques de; TOMIO, L. Radii of weakly bound three body systems: Halo nuclei and molecules. 2003.
- YAMASHITA, M.; FREDERICO, T.; DELFINO, A.; TOMIO, L. Scaling limit of virtual states of triatomic systems. **Phys. Rev. A**, v. 66, p. 052702, 2002.
- YAMASHITA, M.; TOMIO, L.; FREDERICO, T. Radii in weakly-bound light halo nuclei. **Nuclear Physics A**, v. 735, n. 1â2, p. 40 – 54, 2004. ISSN 0375-9474. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947404001885>>.
- YAMASHITA, M. T. Sistemas fracamente ligados de três corpos: Moléculas e núcleos exóticos leves. **doutorado, IFUSP**, 2004.
- YAMASHITA, M. T.; BELLOTTI, F. F.; FREDERICO, T.; FEDOROV, D. V.; JENSEN, A. S.; ZINNER, N. T. Single-particle momentum distributions of efimov states in mixed-species systems. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 87, p. 062702, Jun 2013. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.87.062702>>.
- YAMASHITA, M. T.; CARVALHO, R. S. Marques de; TOMIO, L.; FREDERICO, T. Scaling predictions for radii of weakly bound triatomic molecules. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 68, p. 012506, Jul 2003. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.68.012506>>.
- YAMASHITA, M. T.; FREDERICO, T.; TOMIO, L. Trajectory of virtual, bound and resonant efimov states. **Few-Body Systems**, Springer-Verlag, v. 44, n. 1-4, p. 191–193, 2008. ISSN 0177-7963. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00601-008-0288-5>>.
- YAN, M.; DESALVO, B. J.; HUANG, Y.; NAIDON, P.; KILLIAN, T. C. Rabi oscillations between atomic and molecular condensates driven with coherent one-color photoassociation. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 111, p. 150402, Oct 2013. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.150402>>.
- ZAHAR, M.; BELBOT, M.; KOLATA, J. J.; LAMKIN, K.; THOMPSON, R.; ORR, N. A.; KELLEY, J. H.; KRYGER, R. A.; MORRISSEY, D. J.; SHERRILL, B. M.; WINGER, J. A.; WINFIELD, J. S.; WUOSMAA, A. H. Momentum distributions for  $^{12,14}\text{Be}$  fragmentation. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 48, p. R1484–R1487, Oct 1993. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.48.R1484>>.

- ZHUKOV, M.; DANILIN, B.; FEDOROV, D.; BANG, J.; THOMPSON, I.; VAAGEN, J. Bound state properties of borromean halo nuclei:  $^6\text{He}$  and  $^{11}\text{Li}$ . **Physics Reports**, v. 231, n. 4, p. 151 – 199, 1993. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037015739390141Y>>.
- ZINNER, N. T.; JENSEN, A. S. Comparing and contrasting nuclei and cold atomic gases. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, v. 40, n. 5, p. 053101, 2013. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0954-3899/40/i=5/a=053101>>.

# Apêndice A - Coordenadas e momentos relativos de Jacobi

Devido a quantidade de variáveis e as dimensões do potencial, aplicamos uma transformação para coordenadas de Jacobi as quais formam uma base ortogonal e permitem reescrever em termos de coordenadas internas do sistema, como mostrado na Figura A.1. Do lado esquerdo da figura a posição das partículas é configurada de maneira a se ter um sistema de coordenadas com relação ao centro de massa de três corpos no espaço das configurações. Do lado direito podemos notar o sistema na configuração dos momentos de Jacobi.

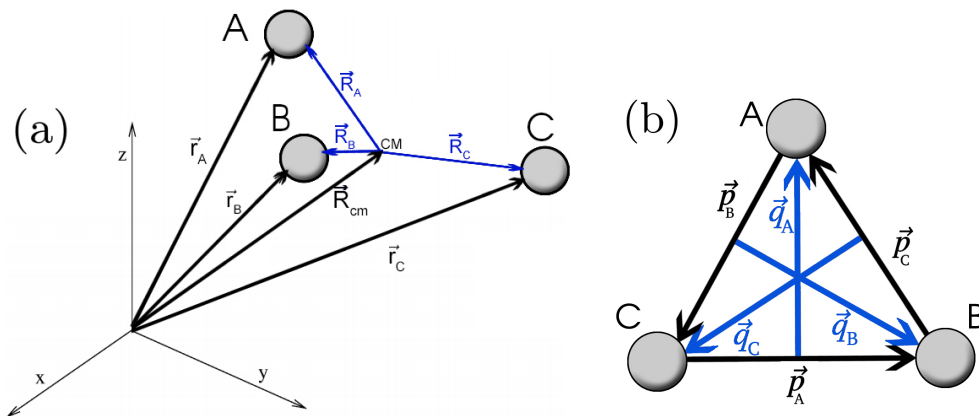


FIGURA A.1 – Sistema de coordenadas para um sistema de três corpos. À esquerda (a) temos o esquema da posição das três partículas (A, B e C) com relação ao centro de massa do sistema de três corpos no espaço das configurações. Do lado direito o esquema dos momentos relativos de Jacobi das três partículas.

As massas das partículas são dadas por  $m_\alpha$ . As velocidades das partículas são dadas por  $\vec{v}_\alpha = \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt}$  e seus momentos,  $\vec{k}_\alpha = m_\alpha \vec{v}_\alpha$ . Assim a parte livre do hamiltoniano é dado pela soma das energias cinéticas das partículas,

$$H_0 = \frac{\vec{k}_A^2}{2m_A} + \frac{\vec{k}_B^2}{2m_B} + \frac{\vec{k}_C^2}{2m_C}. \quad (\text{A.1})$$

No problema de três corpos podemos escrever, como mostra a figura A.1, a posição do

centro de massa,

$$\vec{R}_{cm} = \frac{m_A \vec{r}_A + m_B \vec{r}_B + m_C \vec{r}_C}{m_A + m_B + m_C} = \frac{m_A \vec{r}_A + m_B \vec{r}_B + m_C \vec{r}_C}{M}, \quad (\text{A.2})$$

e sua velocidade por,

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{R}_{cm}}{dt} = \frac{m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B + m_C \vec{v}_C}{M}, \quad (\text{A.3})$$

As coordenadas das posições e das velocidades de cada partícula com relação ao centro de massa são dadas,

$$\vec{R}_\alpha = \vec{r}_\alpha - \vec{R}_{cm}, \quad (\text{A.4})$$

$$\vec{V}_\alpha = \vec{v}_\alpha - \vec{V}_{cm}. \quad (\text{A.5})$$

No centro de massa, o momento de uma partícula qualquer  $\alpha = A, B$  ou  $C$  é dado por,

$$\vec{k}_\alpha = m_\alpha \vec{V}_\alpha \quad (\text{A.6})$$

Substituindo  $\vec{V}_\alpha$  acima temos,

$$\vec{k}_\alpha = m_\alpha \left( \vec{v}_\alpha - \frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha + m_\beta \vec{v}_\beta + m_\gamma \vec{v}_\gamma}{M} \right) \quad (\text{A.7})$$

Podemos recombina os termos como,

$$\vec{k}_\alpha = m_\alpha \left( \vec{v}_\alpha - \frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha}{M} - \frac{m_\beta \vec{v}_\beta + m_\gamma \vec{v}_\gamma}{M} \right), \quad (\text{A.8})$$

$$\vec{k}_\alpha = m_\alpha \left[ \left( 1 - \frac{m_\alpha}{M} \right) \vec{v}_\alpha - \frac{m_\beta \vec{v}_\beta + m_\gamma \vec{v}_\gamma}{M} \right]. \quad (\text{A.9})$$

Logo,

$$\vec{k}_\alpha = \frac{m_\alpha (m_\beta + m_\gamma)}{m_\alpha + m_\beta + m_\gamma} \left[ \vec{v}_\alpha - \frac{m_\beta \vec{v}_\beta + m_\gamma \vec{v}_\gamma}{m_\beta + m_\gamma} \right], \quad (\text{A.10})$$

sendo  $\alpha, \beta, \gamma = A, B, C$  e  $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ .

Assim podemos escrever os momentos das três partículas com relação ao centro de massa como,

$$\vec{k}_A = \frac{m_A (m_B + m_C)}{m_A + m_B + m_C} \left[ \vec{v}_A - \frac{m_B \vec{v}_B + m_C \vec{v}_C}{m_B + m_C} \right], \quad (\text{A.11})$$

$$\vec{k}_B = \frac{m_B (m_A + m_C)}{m_A + m_B + m_C} \left[ \vec{v}_B - \frac{m_A \vec{v}_A + m_C \vec{v}_C}{m_A + m_C} \right], \quad (\text{A.12})$$

$$\vec{k}_C = \frac{m_C(m_A + m_B)}{m_A + m_B + m_C} \left[ \vec{v}_C - \frac{m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B}{m_A + m_B} \right]. \quad (\text{A.13})$$

No referencial do centro de massa, podemos ver pela figura A.1 que,

$$\vec{k}_A + \vec{k}_B + \vec{k}_C = 0 \quad (\text{A.14})$$

No referencial do laboratório, podemos escrever as coordenadas das partículas com relação ao centro de massa da partícula  $\alpha$ . Assim as posições ( $\vec{\rho}$ ) e velocidades são dadas por,

$$\vec{\rho} = \vec{r}_\alpha - \vec{R}_{cm_\alpha}, \quad (\text{A.15})$$

$$\vec{\sigma} = \vec{v}_\alpha - \vec{V}_{cm_\alpha}. \quad (\text{A.16})$$

A massa total do sistema com relação ao centro de massa da partícula  $\alpha$  é,

$$M_{cm_\alpha} = m_\beta + m_\gamma, \quad (\text{A.17})$$

e as posições e velocidades do sistema ficam,

$$\vec{R}_{cm_\alpha} = \frac{m_\beta \vec{r}_\beta + m_\gamma \vec{r}_\gamma}{m_\beta + m_\gamma}, \quad (\text{A.18})$$

$$\vec{V}_{cm_\alpha} = \frac{m_\beta \vec{v}_\beta + m_\gamma \vec{v}_\gamma}{m_\beta + m_\gamma}. \quad (\text{A.19})$$

O momento relativo entre a partícula  $\alpha$  e o centro de massa  $cm_\alpha$  pode ser escrito em termos da massa reduzida de 3 corpos e a velocidade  $\vec{\rho}$ ,

$$\vec{q}_\alpha = \mu_\alpha \vec{\rho}_\alpha, \quad (\text{A.20})$$

onde,

$$\mu_\alpha = \frac{m_\alpha(m_\beta + m_\gamma)}{m_\alpha + m_\beta + m_\gamma} = \frac{m_\alpha M_{cm_\alpha}}{m_\alpha + M_{cm_\alpha}}. \quad (\text{A.21})$$

Podemos introduzir a massa efetiva e as velocidades relativas no momento  $\vec{q}_\alpha$  para escrever,

$$\vec{q}_\alpha = \frac{m_\alpha(m_\beta + m_\gamma)}{m_\alpha + m_\beta + m_\gamma} \left[ \vec{v}_\alpha - \frac{m_\beta \vec{v}_\beta + m_\gamma \vec{v}_\gamma}{m_\beta + m_\gamma} \right], \quad (\text{A.22})$$

e concluímos portanto que,

$$\vec{q}_\alpha = \vec{k}_\alpha. \quad (\text{A.23})$$

Os momentos relativos,

$$\vec{p} = \mu \vec{v},$$

podem ser escritos como,

$$\vec{p}_\alpha = \frac{m_\beta m_\gamma}{m_\beta + m_\gamma} \vec{v}_{\beta\gamma} = \frac{m_\beta m_\gamma}{m_\beta + m_\gamma} (\vec{v}_\beta - \vec{v}_\gamma), \quad (\text{A.24})$$

$$\vec{p}_\alpha = \frac{m_\gamma \vec{k}_\beta - m_\beta \vec{k}_\gamma}{m_\beta + m_\gamma}, \quad (\text{A.25})$$

como sabemos que  $\vec{k}_\alpha = \vec{q}_\alpha$ ,

$$\vec{p}_\alpha = \frac{m_\gamma \vec{q}_\beta - m_\beta \vec{q}_\gamma}{m_\beta + m_\gamma}. \quad (\text{A.26})$$

Portanto,

$$\vec{p}_A = \frac{m_C \vec{q}_B - m_B \vec{q}_C}{m_B + m_C}, \quad (\text{A.27})$$

$$\vec{p}_B = \frac{m_A \vec{q}_C - m_C \vec{q}_A}{m_A + m_C}, \quad (\text{A.28})$$

$$\vec{p}_C = \frac{m_B \vec{q}_A - m_A \vec{q}_B}{m_A + m_B}. \quad (\text{A.29})$$

Enfim podemos escrever o hamiltoniano livre do sistema em termos dos momentos relativos ao movimento do centro de massa por,

$$H_0 = \frac{p_\alpha^2}{2m_{\beta\gamma}} + \frac{q_\alpha^2}{2m_{\beta\gamma,\alpha}}, \quad (\text{A.30})$$

onde,

$$m_{\beta\gamma} = \frac{m_\beta m_\gamma}{m_\beta + m_\gamma}, \quad (\text{A.31})$$

e

$$m_{\beta\gamma,\alpha} = \frac{m_\alpha (m_\beta + m_\gamma)}{m_\alpha + m_\beta + m_\gamma}. \quad (\text{A.32})$$

# Apêndice B - Elementos do espalhamento quântico

## B.1 Espalhamento de uma partícula por um potencial - Equação de Lippmann-Schwinger

Para entender como se dão as interações a nível nuclear e subnuclear é preciso saber como extrair informação a respeito dos constituintes fundamentais da matéria. Para isso fazemos análises dos processos de espalhamento. No estudo de espalhamento de uma partícula por um potencial, obteremos a forma integral da Equação de Schrödinger, conhecida por Equação de Lippmann-Schwinger (SAKURAI, 1986).

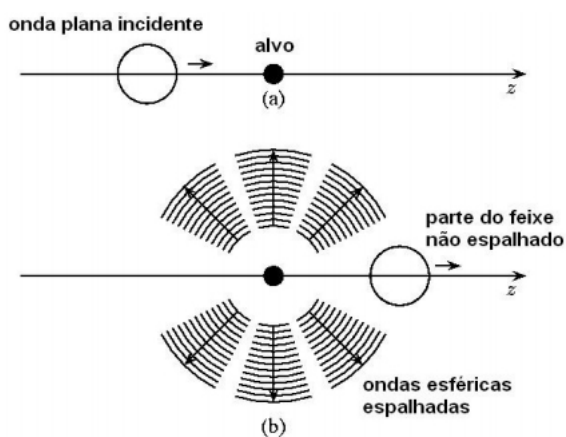


FIGURA B.1 – Espalhamento de uma onda plana incidente por um potencial. (a) antes da colisão e (b) depois da colisão.

### B.1.1 Espalhamento de uma partícula por um potencial

Nessa seção apresentamos o caso do espalhamento, onde consideramos um potencial do tipo central  $V(r)$  em que a variável  $r$  é a distância radial da partícula ao potencial espalhador



esfericamente simétrico. A equação de Schrödinger para o sistema é escrita como,

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right] \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (\text{B.1})$$

Para o caso do potencial de curto alcance temos,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} rV(r) = 0 \quad (\text{B.2})$$

Assim a partícula se torna livre de força assintoticamente. O espectro desta hamiltoniana possui duas partes distintas:

i. *Espectro discreto* ( $E < 0$ ) que é caracterizado pelos valores discretos dos autovalores  $E$  e também por seus autoestados serem normalizáveis ( $\int d^3x \psi^* \psi < \infty$ ). Estes estados representam partículas ligadas ao potencial  $V$ . Aqui requeremos que a função de onda seja de quadrado integrável e conseqüentemente esta deve ir à zero suficientemente rápido no limite  $r \rightarrow \infty$ .

ii. *Espectro contínuo* ( $E \geq 0$ ) cujos autovalores  $E$  formam um conjunto não enumerável e as correspondentes autofunções são não localizadas, i.e. não são normalizáveis. Estes estados descrevem o espalhamento de partículas pelo potencial  $V(r)$ . Nesse caso a condição de contorno depende do problema físico que desejamos analisar. A nossa escolha será que deve representar o espalhamento de uma partícula de momento linear bem definido pelo potencial  $V(r)$  e portanto, deve conter uma onda livre incidente bem como uma onda emergente a grandes distâncias do potencial espalhador.

Nesse limite podemos reescrever a equação B.1 na forma,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) \cong E\psi(\vec{r}) \quad (\text{B.3})$$

onde  $r \rightarrow \infty$ .

A energia  $E$  representa a energia cinética de movimento translacional. Assim,  $E > 0$  e  $E = \frac{\hbar k^2}{2m}$  que é análogo ao problema da partícula livre. Podemos escrever a solução da equação (B.3) como uma combinação linear de ondas planas,

$$\psi(\vec{r}) \cong \sum_{\vec{k}} \left( A(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + B(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) \quad (\text{B.4})$$

onde o  $\vec{k}$  é o vetor de onda dado por

$$\vec{k} = k_x \hat{i} + k_y \hat{j} + k_z \hat{k}.$$

Para um hamiltoniano dependente do tempo, a solução da equação da energia nos dá o fator temporal,

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar}, \quad (\text{B.5})$$

que aplicado à função de onda,

$$e^{-iHt/\hbar} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (\text{B.6})$$

representa a propagação no tempo de uma onda na direção do vetor  $\vec{k}$ .

No lugar de coordenadas Cartesianas, podemos utilizar, a partir do método de separação de variáveis na equação (B.3), as autofunções em coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  como,

$$\psi(\vec{r}) = R(r)Y_{l,m}(\theta, \phi), \quad (\text{B.7})$$

onde  $Y_{l,m}$  são os harmônicos esféricos referentes aos estados  $|l, m\rangle$ . A equação radial da energia no limite proposto  $V(r) \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$  (eq.B.3) pode ser escrita em coordenadas esféricas como,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] = E \psi(r, \theta, \phi). \quad (\text{B.8})$$

Assim, os autoestados da hamiltoniana do sistema satisfazem a,

$$\Psi(\vec{r}) \rightarrow e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (\text{B.9})$$

Na expressão acima, o termo  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$  refere-se a onda plana incidente,  $e^{ikr}/r$  a onda esférica emergindo do alvo. A função  $f(\theta, \phi)$  é chamada amplitude de espalhamento, ela depende da direção  $\vec{r} = (\theta, \phi)$  e da energia  $k$ . Note que a condição de espalhamento imposta pelo limite só pode ser utilizada para potenciais que se anulem no infinito mais rapidamente que  $1/r$ . A amplitude de espalhamento será melhor tratada, bem como sua relação com a seção de choque na seção a seguir.

### B.1.2 Seção de Choque

A seção de choque é a área que mede a probabilidade de que uma interação entre um feixe de partículas e outro feixe ocorra. É uma medida de superfície de unidade metros quadrados ou mais adequadamente às dimensões dos sistemas atômicos e nucleares, medida em barns ( $1b = 10^{-24} \text{cm}^2$ ). Os estudos experimentais de interações dão resultados para o espalhamento de partículas através da medição da seção de choque. O número total de partículas espalhadas durante a duração do experimento  $N$  é proporcional a razão entre o número de eventos observados por fluxo de partículas incidentes e por número de espalhador. Se o número de partículas espalhadas por unidade de tempo atravessam um pequeno ângulo sólido  $\Delta\Omega$  e é proporcional a

$\Delta\Omega$  e ao fluxo incidente  $F$  podemos escrever,

$$N = \frac{d\sigma}{d\Omega} \Delta\Omega F, \quad (\text{B.10})$$

onde a constante de proporcionalidade  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  é a seção de choque diferencial deste processo, a qual possui dimensão de área. A seção de choque total é então definida por,

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (\text{B.11})$$

É necessário assumir que a densidade do feixe incidente seja suficientemente baixa para podermos desprezar as interações entre as partículas incidentes e também para que estas não interajam simultaneamente com o centro espalhador. Se isto não for satisfeito, deveremos resolver um problema de muitos corpos interagindo entre si e com o potencial espalhador  $V$ . A partir dessa definição temos,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N}{F\Delta\Omega}. \quad (\text{B.12})$$

Para obter  $F$  e  $N$  é conveniente escrever a condição de contorno da equação (B.9) como,

$$\Psi = \Psi_{inc} + \Psi_{esp}, \quad (\text{B.13})$$

onde  $\Psi_{inc}$  representa a onda incidente e  $\Psi_{esp}$  representa a solução espalhada.

A corrente de probabilidade associada a equação de Schrödinger é,

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2mi} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*). \quad (\text{B.14})$$

Substituindo a expressão (B.9), na expressão (B.14), obtemos a corrente radial correspondente para os valores grandes de  $r$  para a onda espalhada,

$$\begin{aligned} \vec{J}_{esp} &= \frac{\hbar}{2mi} \left( f^* \frac{e^{-ikr}}{r} \nabla f \frac{e^{ikr}}{r} - c.c. \right) \\ &= \frac{\hbar}{m} \frac{|f|^2}{r^2} \hat{e}_r, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

e a corrente incidente é dada por,

$$\begin{aligned} \vec{J}_{inc} &= \frac{\hbar}{2mi} \left( e^{-ikz} \nabla e^{ikz} - e^{ikz} \nabla e^{-ikz} \right) \\ &= \frac{\hbar k}{m} \hat{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

O fluxo de saída por unidade do ângulo sólido é, justamente,  $(\vec{J}_{esp} r^2 d\Omega)/d\Omega$ , assim podemos

escrever a seção de choque diferencial como,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \right|^2, \quad (\text{B.17})$$

onde usamos aparte incidente da expressão (B.9) para o fluxo incidente. Onde os termos de ordem mais alta em  $1/r$  são desprezados temos a relação da seção de choque com a amplitude de espalhamento como,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2. \quad (\text{B.18})$$

A seção de choque total para o espalhamento elástico é dada pela integração sobre os ângulos como,

$$\begin{aligned} \sigma_{tot} &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi |f(\theta, \phi)|^2 \sin\theta d\theta. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

## B.2 Cálculo da Amplitude de Espalhamento

No caso com  $V \neq 0$ , temos que encontrar a solução de  $(H_0 + V)|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ . Partimos da técnica utilizada em teoria de perturbação de inverter  $(E - H_0)$  e obter uma equação para  $|\psi\rangle$  que tenha a condição de contorno embutida. No caso em que  $V = 0$  a solução deve ser a aquela para partícula livre, portanto devemos somá-la ao que foi feita na inversão citada acima, ou seja,

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle + G_0^{(+)} V |\psi\rangle, \quad (\text{B.20})$$

onde

$$G_0^{(+)} = \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon}$$

é o propagador livre de três corpos. Quando  $V = 0$ , temos  $|\psi\rangle = |\phi\rangle$ . Esse dado pode ser considerado como a condição de contorno do problema, em que, na ausência de  $V$  a partícula é livre e descrita por uma onda plana com momento linear  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ . Como a energia  $E$  deve ser a mesma, com e sem potencial, temos um infinito devido ao zero no denominador. Essa divergência é removida utilizando estratégia semelhante a que usamos em teoria de perturbação dependente do tempo onde foi somado  $i\epsilon$  no denominador de  $G_0$  e a equação de Lippmann-Schwinger pode ser escrita,

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} V |\psi\rangle, \quad (\text{B.21})$$

onde o fator de convergência  $\epsilon$  além de remover o infinito, permite definir as condições assimp-tóticas adequadas ao problema de espalhamento.

A equação de Lippmann-Schwinger, é válida em qualquer representação, já que o forma-lismo de Dirac é geral. Na representação das coordenadas, temos,

$$\langle \vec{x} | \psi^{(\pm)} \rangle = \langle \vec{x} | \phi \rangle + \int d^3 x' \langle \vec{x} | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | \vec{x}' \rangle \langle \vec{x}' | V | \psi^{(\pm)} \rangle \quad (\text{B.22})$$

Essa expressão pode ser escrita na representação dos momentos como a seguir,

$$\langle \vec{p} | \psi^{(\pm)} \rangle = \langle \vec{p} | \phi \rangle + \int d^3 p' \langle \vec{p} | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | \vec{p}' \rangle \langle \vec{p}' | V | \psi^{(\pm)} \rangle. \quad (\text{B.23})$$

Definiremos o núcleo da equação de Lippmann-Schwinger de  $G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}')$  como,

$$G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{\hbar^2}{2m'} \langle \vec{x} | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | \vec{x}' \rangle. \quad (\text{B.24})$$

Os autoestados de  $H_0$  podem ser mais facilmente calculados na base de momentos. Assim é conveniente introduzir um conjunto completo de estados  $|\vec{k}\rangle$  com auxílio do operador unidade, ficando,

$$G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{\hbar^2}{2m'} \int d^3 k' \int d^3 k'' \langle \vec{x} | \vec{k}' \rangle \langle \vec{k}' | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | \vec{k}'' \rangle \langle \vec{k}'' | \vec{x}' \rangle, \quad (\text{B.25})$$

onde,

$$\langle \vec{k}' | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | \vec{k}'' \rangle = \frac{1}{E - \frac{\hbar^2 \vec{k}'^2}{2m'} \pm i\epsilon} \langle \vec{k}' | \vec{k}'' \rangle. \quad (\text{B.26})$$

e,

$$\langle \vec{k}' | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | \vec{k}'' \rangle = \frac{\delta(\vec{k}' - \vec{k}'')}{E - \frac{\hbar^2 \vec{k}'^2}{2m'} \pm i\epsilon}, \quad (\text{B.27})$$

temos,

$$G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{\hbar^2}{2m'} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}' \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}}{E - \frac{\hbar^2 \vec{k}'^2}{2m'} \pm i\epsilon} \quad (\text{B.28})$$

Usando,

$$E = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m'}$$

e

$$\vec{k}' = \mathbf{q},$$

$$G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 q \frac{e^{i\mathbf{q} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}}{k^2 - q^2 \pm i\epsilon'} \quad (\text{B.29})$$

onde  $\epsilon$  foi redefinido. A integral acima pode ser resolvida tomando  $d^3q = q^2 \sin\theta d\theta d\phi dq$ ,

$$G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dq q^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \frac{e^{iq|\vec{x}-\vec{x}'|\cos\theta}}{k^2 - q^2 \pm i\epsilon}. \quad (\text{B.30})$$

Onde,

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi, \quad (\text{B.31})$$

e conhecendo a paridade da função na integral de  $\sin\theta$ ,

$$\int_1^{-1} -d(\cos\theta) = \int_{-1}^1 d(\cos\theta), \quad (\text{B.32})$$

$$G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dq \frac{q^2}{k^2 - q^2 \pm i\epsilon} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\zeta e^{iq|\vec{x}-\vec{x}'|\zeta}, \quad (\text{B.33})$$

$$\begin{aligned} G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dq \frac{q^2}{k^2 - q^2 \pm i\epsilon} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\zeta e^{iq|\vec{x}-\vec{x}'|\zeta} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dq \left( \frac{q^2}{k^2 - q^2 \pm i\epsilon} \right) \left( \frac{e^{iq|\vec{x}-\vec{x}'|\zeta}}{iq|\vec{x}-\vec{x}'|\zeta} \right) \Big|_{-1}^{+1} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{i|\vec{x}-\vec{x}'|} \int_0^{\infty} dq \left( \frac{q^2}{k^2 - q^2 \pm i\epsilon} \right) (e^{iq|\vec{x}-\vec{x}'|} - e^{-iq|\vec{x}-\vec{x}'|}). \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

As duas funções nos parênteses da integral acima são ímpares resultando num integrando par em  $q$ . Assim podemos trocar,

$$\int_0^{2\pi} \rightarrow \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty}$$

e então,

$$G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{i|\vec{x}-\vec{x}'|} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \left( \frac{q^2}{q^2 - k^2 \mp i\epsilon} \right) (e^{iq|\vec{x}-\vec{x}'|} - e^{-iq|\vec{x}-\vec{x}'|}). \quad (\text{B.35})$$

A integral pode ser resolvida usando-se a integração no plano complexo onde os pólos do integrando são definidos em  $q^2 - k^2 \mp i\epsilon = 0 \rightarrow q^2 = k^2 \pm i\epsilon$ , ou ainda,  $q = \pm \sqrt{k^2 \pm i\epsilon} = \pm k \sqrt{1 \pm i\frac{\epsilon}{k^2}} = \pm(k \pm i\epsilon')$ , onde  $\epsilon' = \frac{\epsilon}{k^2}$ . A parte da integral em  $e^{+iq|\vec{x}-\vec{x}'|} = e^{+i\text{Re}(q)|\vec{x}-\vec{x}'|} e^{-i\text{Im}(q)|\vec{x}-\vec{x}'|}$  refere-se a parte de cima da integração, pois a exponencial com  $\text{Im}(q)$  garante contribuição zero. Assim, também, a parte,

$$e^{-iq|\vec{x}-\vec{x}'|} = e^{-i\text{Re}(q)|\vec{x}-\vec{x}'|} e^{+i\text{Im}(q)|\vec{x}-\vec{x}'|},$$

deve ser fechada na parte de baixo.

$$\begin{aligned}
 G_+(\vec{x}, \vec{x}') &= -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{i|\vec{x} - \vec{x}'|} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \left( \frac{q^2}{q^2 - k^2 \mp i\epsilon} \right) \left( e^{iq|\vec{x} - \vec{x}'|} - e^{-iq|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \\
 &= -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{i|\vec{x} - \vec{x}'|} \left[ \oint_{C_1} dq \frac{q^2}{q^2 - k^2 - i\epsilon} e^{+iq|\vec{x} - \vec{x}'|} \right. \\
 &\quad \left. - \oint_{C_2} dq \frac{q^2}{q^2 - k^2 - i\epsilon} e^{-iq|\vec{x} - \vec{x}'|} \right]. \quad (\text{B.36})
 \end{aligned}$$

Podemos escrever parte da fração do integrando como,

$$\frac{1}{q^2 - k^2} = \frac{1}{(q - k)(q + k)} = \left( \frac{1}{q - k} + \frac{1}{q + k} \right) \frac{1}{2q}. \quad (\text{B.37})$$

E então,

$$\begin{aligned}
 G_+(\vec{x}, \vec{x}') &= -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{i|\vec{x} - \vec{x}'|} \oint_{C_1} dq \frac{q}{q^2 - k^2 - i\epsilon} e^{+iq|\vec{x} - \vec{x}'|} \\
 &\quad + \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{i|\vec{x} - \vec{x}'|} \oint_{C_2} dq \frac{q}{q^2 - k^2 - i\epsilon} e^{-iq|\vec{x} - \vec{x}'|} \\
 &= -\frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{i|\vec{x} - \vec{x}'|} \oint_{C_1} dq \frac{e^{+iq|\vec{x} - \vec{x}'|}}{q - k} + \oint_{C_1} dq \frac{e^{+iq|\vec{x} - \vec{x}'|}}{q + k} + \\
 &\quad + \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{i|\vec{x} - \vec{x}'|} \oint_{C_2} dq \frac{e^{-iq|\vec{x} - \vec{x}'|}}{q - k} + \oint_{C_2} dq \frac{e^{-iq|\vec{x} - \vec{x}'|}}{q + k}. \quad (\text{B.38})
 \end{aligned}$$

Para o caso  $+i\epsilon$ , temos,

$$G_+(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{+ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (\text{B.39})$$

e para  $-i\epsilon$ ,

$$G_-(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (\text{B.40})$$

A equação de Lippman-Schwinger pode ser escrita como,

$$\langle \vec{x} | \psi^{(\pm)} \rangle = \langle \vec{x} | \phi \rangle - \frac{2m'}{\hbar^2} \int d^3x' \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \langle \vec{x}' | V | \psi^{(\pm)} \rangle. \quad (\text{B.41})$$

Como na expressão (B.9), na equação acima observa-se que o estado  $\langle \vec{x} | \psi^{(\pm)} \rangle$ , que descreve o estado de espalhamento, é soma da função de estados  $\langle \vec{x} | \phi \rangle$  (estado da partícula incidente) com um termo que representa o efeito do espalhamento. Este termo para grandes distâncias será proporcional a  $e^{\pm ikr}/r$  e, se o potencial tiver um alcance finito, podemos interpretar a função de espalhamento como a soma de uma onda plana com uma onda esférica como discutido

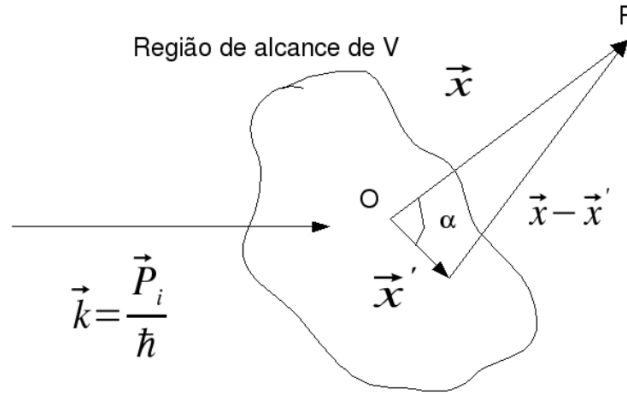


FIGURA B.2 – Relação de variáveis no espalhamento por um potencial.

anteriormente. Se o potencial for do tipo local,  $\langle \vec{x} | V | \vec{x}' \rangle = V(\vec{x}') \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$ ,

$$\langle \vec{x} | \psi^{(\pm)} \rangle = \langle \vec{x} | \phi \rangle - \frac{2m'}{\hbar^2} \int d^3x' \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} e^{-ik|\vec{x} - \vec{x}'|} V(\vec{x}') \langle \vec{x}' | \psi^{(\pm)} \rangle. \quad (\text{B.42})$$

e, observando essa equação, podemos fazer as seguintes considerações (ver a Figura B.2):

a) o vetor  $\vec{x}$  é dirigido ao ponto de observação onde determinamos a função de estado;

b) sendo  $V$  um potencial de alcance finito, tem-se que a região para integração é limitada no espaço.

Um dos pontos de interesse na teoria de espalhamento está no estudo do centro espalhador (potencial de alcance finito) considerando um ponto distante da região de alcance do potencial. Temos, de acordo com a Figura B.2 que  $|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$ .

Introduzindo a notação  $r = |\vec{x}|$  e  $r' = |\vec{x}'|$ , o que leva a  $|r| \gg |r'|$ , segue que,

$$|\vec{x} - \vec{x}'| \simeq r - \hat{r} \cdot \vec{x}', \quad (\text{B.43})$$

onde  $\hat{r} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ . Definindo,

$$\vec{k}' = k \hat{r}, \quad (\text{B.44})$$

com  $\vec{k}$  representando o vetor de propagação da onda que atinge o ponto de observação, e usando (B.43) e (B.44) para  $r$  grande, pode-se reescrever a exponencial da Eq. (B.42), como

$$e^{\pm ik|\vec{x} - \vec{x}'|} = e^{\pm ikr} e^{\mp i\vec{k}' \cdot \vec{x}'}. \quad (\text{B.45})$$



Por outro lado, substituindo  $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$  por  $\frac{1}{r}$  e, no lugar de  $\vec{p}$  usar  $\vec{k} = \frac{\vec{p}_i}{\hbar}$ , da relação de completiza,

$$\langle \vec{x} | \vec{p} \rangle = \frac{e^{\frac{i\vec{p}\cdot\vec{x}}{\hbar}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}, \quad (\text{B.46})$$

com

$$\langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle = \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (\text{B.47})$$

onde o momento da partícula incidente é  $\vec{p}_i$ . Utilizando esses resultados constatamos,

$$\langle \vec{x} | \psi^{(\pm)} \rangle \longrightarrow \langle \vec{x} | \phi \rangle - \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' \frac{e^{-ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \langle \vec{x}' | V | \psi^{(\pm)} \rangle, \quad (\text{B.48})$$

ou

$$\langle \vec{x} | \psi^{(\pm)} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[ e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\vec{k}', \vec{k}) \right] \quad (\text{B.49})$$

onde,

$$\begin{aligned} f(\vec{k}', \vec{k}) &= -\frac{(2\pi)^{3/2} 2m}{4\pi\hbar^2} \int d^3x' e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}'} V(x') \langle \vec{x}' | \psi^\pm \rangle \\ &= -\frac{(2\pi)^{3/2} 2m}{4\pi\hbar^2} \int d^3x' e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}'} \langle \vec{x}' | V | \psi^\pm \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

ou ainda,

$$f(\vec{k}', \vec{k}) = -2\pi^2 \frac{2m}{\hbar^2} \langle \phi | V | \psi^\pm \rangle. \quad (\text{B.51})$$

Analogamente à expressão (B.9), temos a equação (B.49) onde o primeiro termo da soma corresponde a onda da partícula livre (partícula incidente) e a função de onda espalhada correspondente ao segundo termo. A função  $f(\vec{k}', \vec{k})$  aqui é a mesma amplitude de espalhamento que tem um papel central na teoria de espalhamento para determinar a seção de choque como mostrado na seção anterior.

# Apêndice C - Método numérico para solução das equações integrais

A solução numérica para a energia de ligação de três corpos da equação do estado ligado ( $E_3$ ) deve ser obtida numericamente. Foram usadas técnicas numéricas como a quadratura de Gauss-Legendre para a discretização da equação integral, e o método de Newton-Raphson para encontrar os zeros do determinante da matriz, bem como uma subrotina para se encontrar o determinante.

## C.1 Solução numérica da equação do estado ligado de três corpos idênticos (AAA)

No caso Efimov em que temos três bósons idênticos as equações acopladas se resumem a apenas uma equação para o estado ligado. fazendo  $m_A = m_B = m_C = 1$  temos,

$$f(\vec{q}) = \frac{\pi^{-2}}{\mu_2 - \sqrt{-(E_3 - \frac{3}{4}q^2)}} \int d^3q' \left( \frac{1}{E_3 - q^2 - q'^2 - \vec{q}' \cdot \vec{q}} - \frac{1}{-\mu_3^2 - q^2 - q'^2 - \vec{q}' \cdot \vec{q}} \right) f(\vec{q}') \quad (C.1)$$

Analisando a equação (C.1), onde a interação na onda-s sobressai, fazendo  $\vec{k} = \vec{q}'$  nós podemos reescrever essa equação na forma compacta como,

$$f(q) = \int_0^\infty K(E_3, q, q') f(q') dq', \quad (C.2)$$

onde o *kernel*  $K$  é escrito como,

$$K(E_3, q, q') = \frac{\pi^{-2} \times 2\pi}{\mu_2 - \sqrt{(\frac{3}{4}q^2 - E_3)}} \int_0^\infty q'^2 d \cos \theta \left( \frac{1}{E_3 - q^2 - q'^2 - q'q \cos \theta} - \frac{1}{-1 - q^2 - q'^2 - q'q \cos \theta} \right), \quad (C.3)$$

onde  $\mu_2 = \pm \sqrt{E_2}$  e escalamos a energia em unidades de  $\mu_{(3)}^2 = 1$ .

A integração numérica é feita através do método Gauss-Legendre onde os pontos de Gauss

serão definidos para discretizar os momentos relativos  $q$  e  $q'$  e definimos também os pesos de Gauss-Legendre ( $w_i$ ). Os pontos e pesos são generalizados para cálculos de integral com limites entre -1 e 1. Transformamos os limites de integração para a discretização de  $q$  e  $q'$  válida no intervalo de 0 à infinito. Chamando de  $x_i$  e  $w_i$  os pontos e pesos, respectivamente, a mudança na variável de integração é feita da forma,

$$\tilde{x}_i = \frac{1 + x_i}{1 - x_i},$$

e os pesos são dados por,

$$\tilde{w}_i = \frac{2}{\sqrt{1 - x_i}} w_i,$$

O número de pontos de Gauss  $N$  é definido pela quantidade de zeros dos polinômios de Legendre. A integral da equação (C.2) pode ser discretizada como,

$$f(q_i) = \sum_{j=1}^N K(E_3, q_i, q_j) f(q_j) w_j, \quad (C.4)$$

$$f(q_i) - \sum_{j=1}^N K(E_3, q_i, q_j) f(q_j) w_j = 0, \quad (C.5)$$

$$\left( \delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K(E_3, q_i, q_j) w_j \right) f(q_j) = 0 \quad (C.6)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker e a variação do índice  $1 \leq i \leq N$  onde  $N$  é o número de pontos da integração numérica. A discretização da equação (C.2) nos momentos pode ser escrita como,

$$K(E_3, q_i, q_j) = \frac{2\pi^{-1}}{\mu_2 - \sqrt{\left(\frac{3}{4}q_i^2 - E_3\right)}} \int q_j^2 d\theta \left( \frac{1}{E_3 - q_i^2 - q_j^2 - q_i q_j \cos \theta} - \frac{1}{-1 - q_i^2 - q_j^2 - q_i q_j \cos \theta} \right), \quad (C.7)$$

O *kernel* pode ser escrito na forma de matriz como,

$$\begin{pmatrix} 1 - K(E_3, q_1, q_1)w_1 & -K(E_3, q_1, q_2)w_2 & \dots & -K(E_3, q_1, q_N)w_N \\ -K(E_3, q_2, q_1)w_1 & 1 - K(E_3, q_2, q_2)w_2 & \dots & -K(E_3, q_2, q_N)w_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -K(E_3, q_N, q_1)w_1 & -K(E_3, q_N, q_2)w_2 & \dots & 1 - K(E_3, q_N, q_N)w_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(q_1) \\ f(q_2) \\ \vdots \\ f(q_N) \end{pmatrix} = 0, \quad (C.8)$$

admitindo solução não trivial quando,

$$\det \left( \delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K(E_3, q_i, q_j) w_j \right) = 0 \quad (C.9)$$

O determinante da matriz (C.8) é calculado pelo método de Gauss e fixamos o resultado com

uma função de escala da energia de ligação de três corpos  $E_3$ ,

$$F(E_3^n) = \det \left( \delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K(E_3, q_i, q_j) w_j \right) \quad (C.10)$$

onde  $n$  denomina o  $n$ -ésimo estado excitado para a energia de três corpos.

Usamos o método de Newton-Raphson expandindo  $F(E_3^n)$  em primeira ordem ao redor de  $E_3$  como,

$$F(E_3^n) = F(E_3) + (E_3^n - E_3)F'(E_3) = 0 \quad (C.11)$$

$$E_3^n = E_3 - \frac{F(E_3^n)}{F'(E_3)} \quad (C.12)$$

em que

$$F'(E_3) = \left. \frac{d}{dE_3^n} F(E_3^n) \right|_{E_3^n = E_3} .$$

## C.2 Solução Numérica da Equação do Estado Ligado de 3 corpos Distintos (ABC)

No caso com três bósons de massas distintas a energia de ligação de três corpos  $E_3$  é encontrada como a solução das equações acopladas para o estado ligado calculadas na seção anterior. Assim como foi feito para a equações de três corpos idênticos (C.1) discretizando as equações (2.78), (2.79) e (2.80), temos,

$$f_A(q_i) = \sum_{j=1}^N K_{BA}(E_3, q_i, q_j) w_j f_C(q_j) + \sum_{j=1}^N K_{CA}(E_3, q_i, q_j) w_j f_B(q_j), \quad (C.13)$$

$$f_B(q_i) = \sum_{j=1}^N K_{AB}(E_3, q_i, q_j) w_j f_C(q_j) + \sum_{j=1}^N K_{CB}(E_3, q_i, q_j) w_j f_A(q_j), \quad (C.14)$$

$$f_C(q_i) = \sum_{j=1}^N K_{AC}(E_3, q_i, q_j) w_j f_B(q_j) + \sum_{j=1}^N K_{BC}(E_3, q_i, q_j) w_j f_A(q_j), \quad (C.15)$$

Podemos reescrever essas expressões como,

$$f_A(q_i) - \sum_{j=1}^N K_{BA}(E_3, q_i, q_j) w_j f_C(q_j) - \sum_{j=1}^N K_{CA}(E_3, q_i, q_j) w_j f_B(q_j) = 0, \quad (C.16)$$

$$f_B(q_i) - \sum_{j=1}^N K_{AB}(E_3, q_i, q_j) \omega_j f_C(q_j) - \sum_{j=1}^N K_{CB}(E_3, q_i, q_j) \omega_j f_A(q_j) = 0 \quad (C.17)$$

$$f_C(q_i) - \sum_{j=1}^N K_{AC}(E_3, q_i, q_j) \omega_j f_B(q_j) - \sum_{j=1}^N K_{BC}(E_3, q_i, q_j) \omega_j f_A(q_j) = 0 \quad (C.18)$$

Podemos introduzir o delta de Kronecker como feito no caso de bósons idênticos e as expressões (C.16), (C.17) e (C.18) ficam dadas por,

$$\left( \delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K_{BA}(E_3, q_i, q_j) \omega_j - \sum_{j=1}^N K_{CA}(E_3, q_i, q_j) \omega_j \right) \begin{pmatrix} f_A(q_i) \\ f_B(q_i) \\ f_C(q_i) \end{pmatrix} = 0, \quad (C.19)$$

$$\left( \delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K_{AB}(E_3, q_i, q_j) \omega_j - \sum_{j=1}^N K_{CB}(E_3, q_i, q_j) \omega_j \right) \begin{pmatrix} f_A(q_i) \\ f_B(q_i) \\ f_C(q_i) \end{pmatrix} = 0, \quad (C.20)$$

$$\left( \delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K_{AC}(E_3, q_i, q_j) \omega_j - \sum_{j=1}^N K_{BC}(E_3, q_i, q_j) \omega_j \right) \begin{pmatrix} f_A(q_i) \\ f_B(q_i) \\ f_C(q_i) \end{pmatrix} = 0, \quad (C.21)$$

e as soluções não triviais das expressões são dadas por,

$$\det \left( \delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K_{BA}(E_3, q_i, q_j) \omega_j - \sum_{j=1}^N K_{CA}(E_3, q_i, q_j) \omega_j \right) = 0, \quad (C.22)$$

$$\det \left( \delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K_{AB}(E_3, q_i, q_j) \omega_j - \sum_{j=1}^N K_{CB}(E_3, q_i, q_j) \omega_j \right) = 0, \quad (C.23)$$

$$\det \left( \delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K_{AC}(E_3, q_i, q_j) \omega_j - \sum_{j=1}^N K_{BC}(E_3, q_i, q_j) \omega_j \right) = 0, \quad (C.24)$$

Podemos escrever as expressões como uma matriz  $3 \times 3$  onde cada elemento será uma matriz  $N \times N$  por,

$$M = \begin{pmatrix} \hat{1} & (\delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K_{BA}(E_3, q_i, q_j) \omega_j) & (\delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K_{CA}(E_3, q_i, q_j) \omega_j) \\ (\delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K_{AB}(E_3, q_i, q_j) \omega_j) & \hat{1} & (\delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K_{CB}(E_3, q_i, q_j) \omega_j) \\ (\delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K_{AC}(E_3, q_i, q_j) \omega_j) & (\delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K_{BC}(E_3, q_i, q_j) \omega_j) & \hat{1} \end{pmatrix}. \quad (C.25)$$

## APÊNDICE C. MÉTODO NUMÉRICO PARA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS 36

onde  $\hat{1}$  é a matriz identidade. Assim devemos implantar uma rotina que calcule uma energia  $E_3$  que satisfaça,

$$\det M = 0. \quad (\text{C.26})$$

Assim finalmente encontramos a energia de três corpos que será usada para escrever as funções de onda.

# Apêndice D - Transformada de Fourier da função de onda

A Figura D.1 ilustra as duas possibilidades do sistema de coordenadas de Jacobi no espaço dos momentos e das configurações para facilitar visualizar os vetores vindos da transformada de Fourier. A Figura D.2 mostra a configuração do sistema de coordenadas das posições das três partículas com relação ao centro de massa do sistema nêutron-nêutron-carço, onde a função de onda será escrita em termos dos módulos dos vetores  $\vec{r}_n, \vec{r}_{n'}$  e o ângulo entre eles  $\theta$ .

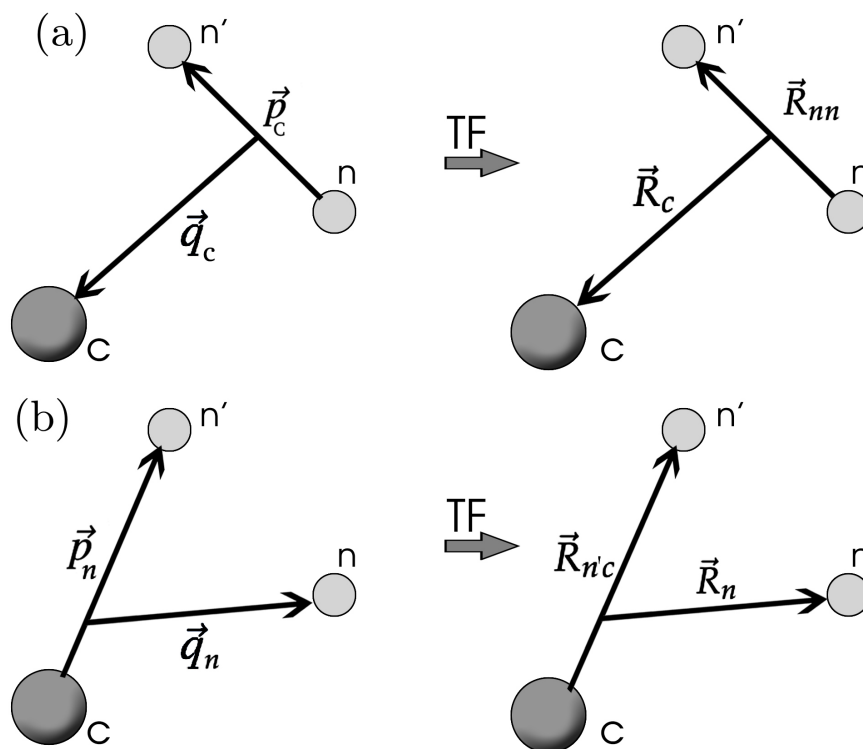
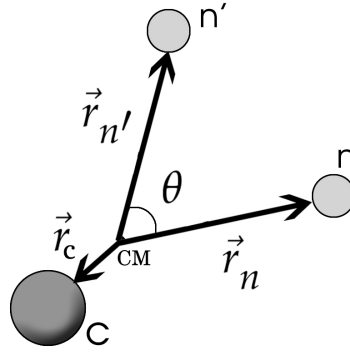


FIGURA D.1 – Transformada de Fourier do sistema de coordenadas de Jacobi do espaço dos momentos à esquerda e seus referentes vetores no espaço das coordenadas à direita.

Podemos reescrever a equação da função de onda no espaço dos momentos (3.3) evidenciando os propagadores em cada função espectadora como,


 FIGURA D.2 – Sistema de coordenadas de  $n - n - c$  com relação ao centro de massa.

$$\langle \vec{q}_c \vec{p}_c | \Psi \rangle = \frac{f_{nn}(q_c)}{S_{2n} + \frac{p_c^2}{2m_{nn}} + \frac{q_c^2}{2m_{nn,c}}} + \frac{f_{nc}(|\vec{p}_c - \frac{\vec{q}_c}{2}|)}{S_{2n} + \frac{p_c^2}{2m_{nn}} + \frac{q_c^2}{2m_{nn,c}}} + \frac{f_{nc}(|\vec{p}_c + \frac{\vec{q}_c}{2}|)}{S_{2n} + \frac{p_c^2}{2m_{nn}} + \frac{q_c^2}{2m_{nn,c}}}; \quad (\text{D.1})$$

e também nas coordenadas de Jacobi  $\vec{q}_n$  e  $\vec{p}_n$ , como,

$$\langle \vec{q}_n \vec{p}_n | \Psi \rangle = \frac{f_{nn}(|\vec{p}_n - \frac{A}{A+1}\vec{q}_n|)}{S_{2n} + \frac{p_n^2}{2m_{nc}} + \frac{q_n^2}{2m_{nc,n}}} + \frac{f_{nc}(|\vec{p}_n + \frac{1}{A+1}\vec{q}_n|)}{S_{2n} + \frac{p_n^2}{2m_{nc}} + \frac{q_n^2}{2m_{nc,n}}} + \frac{f_{nc}(q_n)}{S_{2n} + \frac{p_n^2}{2m_{nc}} + \frac{q_n^2}{2m_{nc,n}}}. \quad (\text{D.2})$$

É importante definirmos os vetores  $\vec{R}_c$ ,  $\vec{R}_n$ ,  $\vec{R}_{nc}$  e  $\vec{R}_{nn}$  em termos dos vetores relativos ao centro de massa dos três corpos. Onde  $\vec{r}_n$  e  $\vec{r}_{n'}$  são os vetores posição dos nêutrons com relação ao centro de massa dos três corpos, podemos escrever,

$$\vec{r}_c = -\frac{\vec{r}_n + \vec{r}_{n'}}{A},$$

$$\vec{R}_{nc} = \frac{(A+1)\vec{r}_n + \vec{r}_{n'}}{A},$$

$$\vec{R}_n = \frac{A+2}{A+1}\vec{r}_n,$$

e,

$$\vec{R}_{nn} = \vec{r}_n - \vec{r}_{n'},$$

$$\vec{R}_c = \frac{A+2}{2A}(\vec{r}_n + \vec{r}_{n'}).$$

Devemos fazer a transformada de Fourier da Equação (D.1), onde a transformada dos propagadores nos lembra transformada de Fourier de um potencial do tipo Yukawa dada como,

$$V(\mathbf{r}) = \frac{-g^2}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{4\pi}{k^2 + m^2} d^3k, \quad (\text{D.3})$$



e o potencial é,

$$V_{\text{Yukawa}}(r) = -g^2 \frac{e^{-mr}}{r}.$$

Na Equação (D.1), o primeiro termo da soma é a função espectadora do caroço com relação ao centro de massa do par de nêutrons. Fazendo uma analogia do potencial Yukawa, podemos transformar o primeiro termo em (D.1) para o espaço das configurações, como,

$$\psi_{nn}(\vec{q}_c, \vec{p}_c) \rightarrow \psi_{nn}(\vec{R}_c, \vec{R}_{nn}) = \int \int e^{i\vec{p}_c \cdot \vec{R}_{nn}} e^{i\vec{q}_c \cdot \vec{R}_c} \psi_{nn}(\vec{q}_c, \vec{p}_c) d^3 p_c d^3 q_c \quad (\text{D.4})$$

onde denotamos  $\psi_{nn}$  como a parte da função de onda (D.1) correspondente à função espectadora  $f_{nn}$ .

Assim,

$$\begin{aligned} \psi_{nn}(\vec{R}_c, \vec{R}_{nn}) &= \int \int \frac{f_{nn}(q_c)}{S_{2n} + \frac{p_c^2}{2m_{nn}} + \frac{q_c^2}{2m_{nn,c}}} e^{i\vec{p}_c \cdot \vec{R}_{nn}} e^{i\vec{q}_c \cdot \vec{R}_c} d^3 p_c d^3 q_c \\ &= \int \int \frac{f_{nn}(q_c)}{S_{2n} + p_c^2 + \frac{q_c^2}{2m_{nn,c}}} e^{i\vec{p}_c \cdot \vec{R}_{nn}} e^{i\vec{q}_c \cdot \vec{R}_c} d^3 p_c d^3 q_c, \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

onde,

$$\int \frac{1}{S_{2n} + p_c^2 + \frac{q_c^2}{2m_{nn,c}}} e^{i\vec{p}_c \cdot \vec{R}_c} d^3 p_c = 2\pi^2 \frac{e^{-R_{nn} \sqrt{S_{2n} + \frac{q_c^2}{2m_{nn,c}}}}}{R_{nn}}. \quad (\text{D.6})$$

Substituindo a equação (D.6) na expressão (D.5) temos,

$$\psi_{nn}(\vec{R}_c, \vec{R}_{nn}) = 2\pi^2 \int \frac{e^{-R_{nn} \sqrt{S_{2n} + \frac{q_c^2}{2m_{nn,c}}}}}{R_{nn}} e^{i\vec{q}_c \cdot \vec{R}_c} f_{nn}(q_c) d^3 q_c. \quad (\text{D.7})$$

Para resolver a parte da função de onda correspondente às partes das funções espectadoras dos subsistemas  $nc$  e  $n'c$ , fazemos o processo acima porém no terceiro termo da soma da direita da igualdade da Eq. D.2. Para a função espectadora do subsistema  $nc$  a contribuição da função de onda no espaço das coordenadas,  $\psi_{nc}$  será,

$$\psi_{nc}(\vec{q}_n, \vec{p}_n) \rightarrow \psi_{nc}(\vec{R}_n, \vec{R}_{n'c}) = \int \int e^{i\vec{p}_n \cdot \vec{R}_{n'c}} e^{i\vec{q}_n \cdot \vec{R}_n} \psi_{nc}(\vec{q}_n, \vec{p}_n) d^3 p_n d^3 q_n, \quad (\text{D.8})$$

e assim devemos resolver a integração nos momentos em,

$$\psi_{nc}(\vec{R}_n, \vec{R}_{n'c}) = \int \int \frac{f_{nc}(q_n)}{S_{2n} + \frac{p_n^2}{2m_{nc}} + \frac{q_n^2}{2m_{nc,n}}} e^{i\vec{p}_n \cdot \vec{R}_{n'c}} e^{i\vec{q}_n \cdot \vec{R}_n} d^3 p_n d^3 q_n. \quad (D.9)$$

Fazendo da mesma forma que em (D.1) identificando a analogia com Yukawa, a integral em  $d^3 p$  pode ser resolvida e a expressão acima é escrita como,

$$\psi_{nc}(\vec{R}_n, \vec{R}_{n'c}) = 2\pi^2 \int \frac{e^{-R_{n'c}} \sqrt{2m_{nc}(S_{2n} + q^2/2m_{nc,n})}}{R_{n'c}} 2m_{nc} e^{i\vec{q}_n \cdot \vec{R}_n} f_{nc}(q_n) d^3 q_n. \quad (D.10)$$

Por simetria os nêutrons podem ser trocados e a contribuição da função de onda do subsistema  $n'c$  é análogo à  $nc$ . Trocando  $n$ , por  $n'$  na expressão D.10,

$$\psi_{n'c}(\vec{R}_{n'}, \vec{R}_{nc}) = 2\pi^2 \int \frac{e^{-R_{nc}} \sqrt{2m_{nc}(S_{2n} + q_n^2/2m_{nc,n})}}{R_{nc}} 2m_{nc} e^{i\vec{q}_{n'} \cdot \vec{R}_{n'}} f_{nc}(q_{n'}) d^3 q_{n'}, \quad (D.11)$$

e por fim podemos escrever a função de onda total no espaço das coordenadas como,

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}_n, \vec{r}_{n'}) = 2\pi^2 \left[ \int \frac{e^{-R_{nn}} \sqrt{S_{2n} + q_c^2/2m_{nn,c}}}{R_{nn}} e^{i\vec{q}_c \cdot \vec{R}_c} f_{nn}(q_c) d^3 q_c + \right. \\ \left. + 2m_{nc} \int \frac{e^{-R_{n'c}} \sqrt{2m_{nc}(S_{2n} + q_n^2/2m_{nc,n})}}{R_{n'c}} e^{i\vec{q}_n \cdot \vec{R}_n} f_{nc}(q_n) d^3 q_n + \right. \\ \left. + 2m_{nc} \int \frac{e^{-R_{nc}} \sqrt{2m_{nc}(S_{2n} + q_{n'}^2/2m_{nc,n})}}{R_{nc}} e^{i\vec{q}_{n'} \cdot \vec{R}_{n'}} f_{nc}(q_{n'}) d^3 q_{n'} \right]. \quad (D.12) \end{aligned}$$

Em termos dos vetores posição dos nêutrons temos,

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}_n, \vec{r}_{n'}) = 2\pi^2 \left[ \int \frac{e^{-|\vec{r}_n - \vec{r}_{n'}| \sqrt{S_{2n} + q_c^2/2m_{nn,c}}}}{|\vec{r}_n - \vec{r}_{n'}|} e^{i\vec{q}_c \cdot (\frac{A+2}{2A})(\vec{r}_n + \vec{r}_{n'})} f_{nn}(q_c) d^3 q_c + \right. \\ \left. + 2m_{nc} \int \frac{e^{-|(A+1)\vec{r}_n + \vec{r}_{n'}|/A} \sqrt{2m_{nc}(S_{2n} + q_n^2/2m_{nc,n})}}{|((A+1)\vec{r}_{n'} + \vec{r}_n)/A|} e^{i\frac{A+2}{A+1}\vec{q}_n \cdot \vec{r}_n} f_{nc}(q_n) d^3 q_n + \right. \\ \left. + 2m_{nc} \int \frac{e^{-|(A+1)\vec{r}_{n'} + \vec{r}_n|/A} \sqrt{2m_{nc}(S_{2n} + q_{n'}^2/2m_{nc,n})}}{|((A+1)\vec{r}_n + \vec{r}_{n'})/A|} e^{i\frac{A+2}{A+1}\vec{q}_{n'} \cdot \vec{r}_{n'}} f_{nc}(q_{n'}) d^3 q_{n'} \right]. \quad (D.13) \end{aligned}$$

Podemos escrever a função de onda em termos de  $r_n$ ,  $r_{n'}$  e o cosseno do ângulo entre esses

vetores  $\theta$ , resolvendo os módulos dos vetores de posição na equação acima por,

$$\begin{aligned}
 \Psi(r_n, r_{n'}, \cos \theta) = & \int \frac{e^{-(r_n^2 + r_{n'}^2 - 2r_n r_{n'} \cos \theta)^{1/2} \sqrt{S_{2n} + q_c^2 / 2m_{nc}}} (r_n^2 + r_{n'}^2 - 2r_n r_{n'} \cos \theta)^{1/2}}{e^{i\vec{q}_c \cdot (\frac{A+2}{2A})(\vec{r}_n + \vec{r}_{n'})}} f_{nm}(q_c) d^3 q_c + \\
 & + 2m_{nc} \int \frac{e^{-\frac{1}{A}((A+1)^2 r_n^2 + r_{n'}^2 + 2(A+1)r_n r_{n'} \cos \theta)^{1/2} \sqrt{2m_{nc}(S_{2n} + q_n^2 / 2m_{nc,n})}}}{((A+1)^2 r_n^2 + r_{n'}^2 + 2(A+1)r_n r_{n'} \cos \theta)^{1/2} / A} e^{i\frac{A+2}{A+1}\vec{q}_n \cdot \vec{r}_n} f_{nc}(q_n) d^3 q_n + \\
 & + 2m_{nc} \int \frac{e^{-\frac{1}{A}((A+1)^2 r_{n'}^2 + r_n^2 + 2(A+1)r_{n'} r_n \cos \theta)^{1/2} \sqrt{2m_{nc}(S_{2n} + q_{n'}^2 / 2m_{nc,n})}}}{((A+1)^2 r_{n'}^2 + r_n^2 + 2(A+1)r_{n'} r_n \cos \theta)^{1/2} / A} e^{i\frac{A+2}{A+1}\vec{q}_{n'} \cdot \vec{r}_{n'}} f_{nc}(q_{n'}) d^3 q_{n'}. \quad (D.14)
 \end{aligned}$$

Escrevendo a integração angular explicitamente,

$$\begin{aligned}
 \Psi(r_n, r_{n'}, \cos \theta) = & \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \frac{e^{-(r_n^2 + r_{n'}^2 - 2r_n r_{n'} \cos \theta) \sqrt{S_{2n} + q_c^2 / 2m_{nc}}}{(r_n^2 + r_{n'}^2 - 2r_n r_{n'} \cos \theta)^{1/2}} \times \\
 & \times f_{nm}(q_c) \int_0^\pi e^{i q_c R_c \cos \alpha} \text{sen} \alpha d\alpha d q_c^2 d q_c + \\
 & + 2m_{nc} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{A}((A+1)^2 r_n^2 + r_{n'}^2 + 2(A+1)r_n r_{n'} \cos \theta)^{1/2} \sqrt{2m_{nc}(S_{2n} + q_n^2 / 2m_{nc,n})}}}{((A+1)^2 r_n^2 + r_{n'}^2 + 2(A+1)r_n r_{n'} \cos \theta)^{1/2} / A} \times \\
 & \times f_{nc}(q_n) \int_0^\pi e^{i\frac{A+2}{A+1} q_n r_n \cos \alpha} \text{sen} \alpha d\alpha q_n^2 d q_n + \\
 & + 2m_{nc} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{A}((A+1)^2 r_{n'}^2 + r_n^2 + 2(A+1)r_{n'} r_n \cos \theta)^{1/2} \sqrt{2m_{nc}(S_{2n} + q_{n'}^2 / 2m_{nc,n})}}}{((A+1)^2 r_{n'}^2 + r_n^2 + 2(A+1)r_{n'} r_n \cos \theta)^{1/2} / A} \times \\
 & \times f_{nc}(q_{n'}) \int_0^\pi e^{i\frac{A+2}{A+1} q_{n'} r_{n'} \cos \alpha} \text{sen} \alpha d\alpha; q_{n'}^2 d q_{n'}, \quad (D.15)
 \end{aligned}$$

ou,

$$\begin{aligned}
 \Psi(r_n, r_{n'}, \cos \theta) = & \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \frac{e^{-(r_n^2 + r_{n'}^2 - 2r_n r_{n'} \cos \theta)^{1/2} \sqrt{S_{2n} + q_c^2 / 2m_{m,c}}}}{(r_n^2 + r_{n'}^2 - 2r_n r_{n'} \cos \theta)^{1/2}} \times \\
 & \times f_{nn}(q_c) \int_{+1}^{-1} e^{i q_c R_c z} dz q_c^2 dq_c + \\
 & + 2m_{nc} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{A}((A+1)^2 r_n^2 + r_{n'}^2 + 2(A+1)r_n r_{n'} \cos \theta)^{1/2} \sqrt{2m_{nc}(S_{2n} + q_n^2 / 2m_{nc,n})}}}{((A+1)^2 r_n^2 + r_{n'}^2 + 2(A+1)r_n r_{n'} \cos \theta)^{1/2} / A} \times \\
 & \times f_{nc}(q_n) \int_{+1}^{-1} e^{i \frac{A+2}{A+1} q_n r_n z} dz q_n^2 dq_n + \\
 & + 2m_{nc} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{A}((A+1)^2 r_{n'}^2 + r_n^2 + 2(A+1)r_{n'} r_n \cos \theta)^{1/2} \sqrt{2m_{nc}(S_{2n} + q_{n'}^2 / 2m_{nc,n})}}}{((A+1)^2 r_{n'}^2 + r_n^2 + 2(A+1)r_{n'} r_n \cos \theta)^{1/2} / A} \times \\
 & \times f_{nc}(q_{n'}) \int_{+1}^{-1} e^{i \frac{A+2}{A+1} q_{n'} r_{n'} z} dz q_{n'}^2 dq_{n'}. \quad (D.16)
 \end{aligned}$$

Onde,

$$\begin{aligned}
 \int_{+1}^{-1} e^{iBz} dz &= \left. \frac{e^{iBz}}{iB} \right|_{+1}^{-1} \\
 &= -\frac{2}{B} \text{sen} B,
 \end{aligned}$$

sendo  $B$  real, as integrações em  $\alpha$  na Expressão (D.16) podem ser resolvidas:

$$\begin{aligned}
 \int_{+1}^{-1} e^{i q_c R_c z} dz &= \left. \frac{e^{i q_c R_c z}}{i q_c R_c} \right|_{+1}^{-1} \\
 &= \frac{e^{-i q_c R_c} - e^{i q_c R_c}}{i q_c R_c} \\
 &= -\frac{2}{q_c R_c} \text{sen}(q_c R_c) \\
 &= -\frac{2 \text{sen}\left(\frac{A+2}{2A} q_c (r_n^2 + r_{n'}^2 + r_n r_{n'} \cos \theta)\right)^{1/2}}{\frac{A+2}{2A} q_c (r_n^2 + r_{n'}^2 + r_n r_{n'} \cos \theta)^{1/2}}, \quad (D.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{+1}^{-1} e^{i \frac{A+2}{A+1} q_n r_n z} dz &= \left. \frac{e^{i \frac{A+2}{A+1} q_n r_n z}}{i \frac{A+2}{A+1} q_n r_n} \right|_{+1}^{-1} \\
 &= \frac{e^{-i \frac{A+2}{A+1} q_n r_n} - e^{i \frac{A+2}{A+1} q_n r_n}}{i \frac{A+2}{A+1} q_n r_n} \\
 &= -\frac{2(A+1)}{(A+2) q_n r_n} \text{sen}\left(\frac{A+2}{A+1} q_n r_n\right). \quad (D.18)
 \end{aligned}$$

Substituindo as Eqs. (D.17) e (D.18) na Expressão (D.16) com as massas reduzidas

$$m_{nn} = \frac{m_n}{2} = \frac{1}{2}, m_{nn,c} = \frac{2A}{A+2}, m_{nc} = \frac{A}{A+1} \text{ e } m_{nc,n} = \frac{A+1}{A+2},$$

$$\begin{aligned} \Psi(r_n, r_{n'}, \cos \theta) = & \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty q_c^2 dq_c \frac{e^{-(r_n^2+r_{n'}^2-2r_n r_{n'} \cos \theta) \sqrt{S_{2n}+q_c^2 \frac{A+2}{4A}}}}{r_n^2 + r_{n'}^2 - 2r_n r_{n'} \cos \theta} \times \\ & \times \frac{2 \operatorname{sen}\left(q_c \frac{A+2}{2A} (r_n^2 + r_{n'}^2 + 2r_n r_{n'} \cos \theta)^{1/2}\right)}{q_c \left(\frac{A+2}{2A}\right) (r_n^2 + r_{n'}^2 + 2r_n r_{n'} \cos \theta)^{1/2}} f_{nn}(q_c) + \\ & + \frac{2A}{A+1} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty q_n^2 dq_n \frac{e^{-\frac{1}{A}((A+1)^2 r_n^2 + r_{n'}^2 + 2(A+1)r_n r_{n'} \cos \theta) \sqrt{\frac{2A}{A+1}(S_{2n}+q_n^2 \frac{A+2}{2(A+1)})}}}{((A+1)^2 r_n^2 + r_{n'}^2 + 2(A+1)r_n r_{n'} \cos \theta) / A} + \times \\ & \times \frac{2(A+1)}{(A+2)q_n r_n} \operatorname{sen}\left(\frac{A+2}{A+1} q_n r_n\right) f_{nc}(q_n) \\ & + \frac{2A}{A+1} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty q_{n'}^2 dq_{n'} \frac{e^{-\frac{1}{A}((A+1)^2 r_{n'}^2 + r_n^2 + 2(A+1)r_{n'} r_n \cos \theta)^{1/2} \sqrt{\frac{2A}{A+1}(S_{2n}+q_{n'}^2 \frac{A+2}{2(A+1)})}}}{((A+1)^2 r_{n'}^2 + r_n^2 + 2(A+1)r_{n'} r_n \cos \theta)^{1/2} / A} + \times \\ & \times \frac{2(A+1)}{(A+2)q_{n'} r_{n'}} \operatorname{sen}\left(\frac{A+2}{A+1} q_{n'} r_{n'}\right) f_{nc}(q_{n'}), \quad (\text{D.19}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(r_n, r_{n'}, \cos \theta) = & \frac{4A}{A+2} 2\pi \int_0^\infty q_c^2 dq_c \frac{e^{-(r_n^2+r_{n'}^2-2r_n r_{n'} \cos \theta)^{1/2} \sqrt{S_{2n}+q_c^2 \frac{A+2}{4A}}}}{(r_n^2 + r_{n'}^2 - 2r_n r_{n'} \cos \theta)^{1/2}} \times \\ & \times \frac{\operatorname{sen}\left(q_c \frac{A+2}{2A} (r_n^2 + r_{n'}^2 + 2r_n r_{n'} \cos \theta)^{1/2}\right)}{q_c (r_n^2 + r_{n'}^2 + 2r_n r_{n'} \cos \theta)^{1/2}} f_{nn}(q_c) + \\ & + \frac{4A}{A+2} 2\pi \int_0^\infty q_n^2 dq_n \frac{e^{-\frac{1}{A}((A+1)^2 r_n^2 + r_{n'}^2 + 2(A+1)r_n r_{n'} \cos \theta)^{1/2} \sqrt{\frac{2A}{A+1}(S_{2n}+q_n^2 \frac{A+2}{2(A+1)})}}}{((A+1)^2 r_n^2 + r_{n'}^2 + 2(A+1)r_n r_{n'} \cos \theta)^{1/2} / A} \times \\ & \times \frac{1}{q_n r_n} \operatorname{sen}\left(\frac{A+2}{A+1} q_n r_n\right) f_{nc}(q_n) + \\ & + \frac{4A}{A+2} 2\pi \int_0^\infty q_{n'}^2 dq_{n'} \frac{e^{-\frac{1}{A}((A+1)^2 r_{n'}^2 + r_n^2 + 2(A+1)r_{n'} r_n \cos \theta)^{1/2} \sqrt{\frac{2A}{A+1}(S_{2n}+q_{n'}^2 \frac{A+2}{2(A+1)})}}}{((A+1)^2 r_{n'}^2 + r_n^2 + 2(A+1)r_{n'} r_n \cos \theta)^{1/2} / A} \times \\ & \times \frac{1}{q_{n'} r_{n'}} \operatorname{sen}\left(\frac{A+2}{A+1} q_{n'} r_{n'}\right) f_{nc}(q_{n'}). \quad (\text{D.20}) \end{aligned}$$

E finalmente, rearranjando temos,

$$\begin{aligned}
 \Psi(r_n, r_{n'}, \cos \theta) = & \int_0^\infty q_c dq_c \frac{\exp \left\{ -(r_n^2 + r_{n'}^2 - 2r_n r_{n'} \cos \theta)^{1/2} \sqrt{S_{2n} + q_c^2 \frac{A+2}{4A}} \right\}}{(r_n^2 + r_{n'}^2 - 2r_n r_{n'} \cos \theta)^{1/2}} \times \\
 & \times \frac{\text{sen} \left( q_c \frac{A+2}{2A} (r_n^2 + r_{n'}^2 + 2r_n r_{n'} \cos \theta)^{1/2} \right)}{(r_n^2 + r_{n'}^2 + 2r_n r_{n'} \cos \theta)^{1/2}} f_{nm}(q_c) + \\
 & + \int_0^\infty q_n dq_n \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{A} \left( (A+1)^2 r_n^2 + r_{n'}^2 + 2(A+1)r_{n'} r_n \cos \theta \right)^{1/2} \sqrt{\frac{2A}{A+1} \left( S_{2n} + q_n^2 \frac{A+2}{2(A+1)} \right)} \right\}}{r_n \left( (A+1)^2 r_n^2 + r_{n'}^2 + 2(A+1)r_{n'} r_n \cos \theta \right)^{1/2} / A} \times \\
 & \times \text{sen} \left( \frac{A+2}{A+1} q_n r_n \right) f_{nc}(q_n) + \\
 & + \int_0^\infty q_{n'} dq_{n'} \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{A} \left( (A+1)^2 r_{n'}^2 + r_n^2 + 2(A+1)r_{n'} r_n \cos \theta \right)^{1/2} \sqrt{\frac{2A}{A+1} \left( S_{2n} + q_{n'}^2 \frac{A+2}{2(A+1)} \right)} \right\}}{r_{n'} \left( (A+1)^2 r_{n'}^2 + r_n^2 + 2(A+1)r_{n'} r_n \cos \theta \right)^{1/2} / A} \times \\
 & \times \text{sen} \left( \frac{A+2}{A+1} q_{n'} r_{n'} \right) f_{nc}(q_{n'}). \quad (\text{D.21})
 \end{aligned}$$

Podemos também escrever a função de onda da Eq. D.12 em termos dos vetores  $\vec{R}_{nc}$  e  $\vec{R}_{n'c}$  usando  $\vec{R}_c = \frac{\vec{R}_{nc} + \vec{R}_{n'c}}{2}$  e  $\vec{R}_n = \frac{1}{A+1} \vec{R}_{n'c} + \vec{R}_{nc}$  temos,

$$\begin{aligned}
 \Psi(\vec{R}_{nc}, \vec{R}_{n'c}) = & \int \frac{e^{-R_{nm}} \sqrt{S_{2n} + q_c^2 / 2m_{nm,c}}}{R_{nm}} e^{\frac{1}{2} i \vec{q}_c \cdot (\vec{R}_{nc} + \vec{R}_{n'c})} f_{nm}(q_c) d^3 q_c + \\
 & + 2m_{nc} \int \frac{e^{-R_{n'c}} \sqrt{2m_{nc} (S_{2n} + q_n^2 / 2m_{nc,n})}}{R_{n'c}} e^{i \vec{q}_n \cdot \left( \vec{R}_{nc} + \frac{\vec{R}_{n'c}}{A+1} \right)} f_{nc}(q_n) d^3 q_n + \\
 & + 2m_{nc} \int \frac{e^{-R_{nc}} \sqrt{2m_{nc} (S_{2n} + q_{n'}^2 / 2m_{nc,n})}}{R_{nc}} e^{i \vec{q}_{n'} \cdot \left( \vec{R}_{n'c} + \frac{\vec{R}_{nc}}{A+1} \right)} f_{nc}(q_{n'}) d^3 q_{n'}. \quad (\text{D.22})
 \end{aligned}$$

Assim temos a função de onda escrita em termos dos módulos dos vetores referentes às

distâncias dos nêutrons ao caroço como,

$$\begin{aligned}
 \Psi(R_{nc}, R_{n'c}, \cos \phi) = & \int \frac{e^{-R_{nm} \sqrt{S_{2n} + q_c^2 / 2m_{nn,c}}}}{R_{nm}} \frac{2 \operatorname{sen} \left( \frac{q_c (R_{nc}^2 + R_{n'c}^2 + 2R_{nc}R_{n'c} \cos \phi)^{1/2}}{2} \right)}{\frac{q_c}{2} (R_{nc}^2 + R_{n'c}^2 + 2R_{nc}R_{n'c} \cos \phi)^{1/2}} f_{nm}(q_c) q_c^2 dq_c + \\
 & + 2m_{nc} \int \frac{e^{-R_{n'c} \sqrt{2m_{nc} (S_{2n} + q_n^2 / 2m_{nc,n})}}}{R_{n'c}} \frac{2 \operatorname{sen} \left( q_n (R_{nc}^2 + \frac{R_{n'c}^2}{(A+1)^2} + \frac{2R_{nc}R_{n'c}}{A+1} \cos \phi)^{1/2} \right)}{q_n (R_{nc}^2 + \frac{R_{n'c}^2}{(A+1)^2} + \frac{2R_{nc}R_{n'c}}{A+1} \cos \phi)^{1/2}} f_{nc}(q_n) q_n^2 dq_n + \\
 & + 2m_{nc} \int \frac{e^{-R_{nc} \sqrt{2m_{nc} (S_{2n} + q_{n'}^2 / 2m_{nc,n})}}}{R_{nc}} \frac{2 \operatorname{sen} \left( q_{n'} (R_{n'c}^2 + \frac{R_{nc}^2}{(A+1)^2} + \frac{2R_{n'c}R_{nc}}{A+1} \cos \phi)^{1/2} \right)}{q_{n'} (R_{n'c}^2 + \frac{R_{nc}^2}{(A+1)^2} + \frac{2R_{n'c}R_{nc}}{A+1} \cos \phi)^{1/2}} f_{nc}(q_{n'}) q_{n'}^2 dq_{n'}.
 \end{aligned}
 \tag{D.23}$$

# Apêndice E - Distribuições de momento na aproximação eikonal

## E.1 Distribuições de momento na aproximação eikonal

Nas reações de *stripping* um núcleon é transferido do projétil ao alvo. A Figura E.1 retirada de (BERTULANI; HANSEN, 2004) mostra as coordenadas de um sistema em que um projétil de dois corpos (caroço-nêutron) reage com um alvo (T).

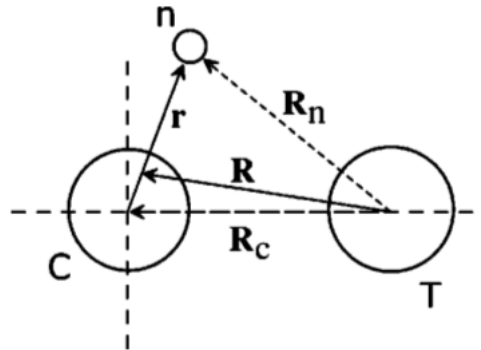


FIGURA E.1 – Coordenadas do sistema

A reação descrita acima é do tipo  $(c + n) + A \rightarrow c + X$ , (HENCKEN *et al.*, 1996) onde  $c$  corresponde ao estado final do caroço e assim a sessão de choque diferencial é dada por,

$$\frac{d\sigma_{str}}{d^3k_c} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2l+1} \sum_m \int d^2b_n [1 - |S_n(b_n)|^2] \left| \int d^3r e^{i\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{r}} S_c(b_c) \psi_{lm}(\mathbf{r}) \right|^2, \quad (\text{E.1})$$

onde  $b_c$  e  $b_n$  denotam os módulos dos vetores  $\mathbf{b}_c$  e  $\mathbf{b}_n$  que por sua vez são vetores bidimensionais respectivamente referentes as componentes transversais dos vetores  $\mathbf{R}_c$  e  $\mathbf{R}_n$  da Figura E.1. Visto que  $\mathbf{r} = (\rho, z, \theta) = \mathbf{R}_n - \mathbf{R}_c$ , o módulo de  $\mathbf{b}_c$  é dado por,

$$b_c = |\rho - \mathbf{b}_n| = \sqrt{\rho^2 + b_n^2 - 2\rho b_n \cos(\phi - \phi_n)} = \sqrt{r^2 \sin^2 \theta + b_n^2 - 2r \sin \theta b_n \cos(\phi - \phi_n)}. \quad (\text{E.2})$$

$S_c$  e  $S_n$  são as matrizes de espalhamento do caroço+alvo e nêutron+alvo. As funções de onda



do estado ligado aqui são definidas para o sistema (n+c) como  $\psi_{lm} = R_l(\mathbf{r})Y_{lm}(\mathbf{r})$  onde  $R_l(\mathbf{r})$  é a função de onda radial.

Para calcular as distribuições de momento transverso e longitudinal nós devemos obter as componentes da sessão de choque nas duas direções. Para obter a distribuição de momento longitudinal basta integrarmos a equação da sessão de choque em E.1 sobre a componente transversa do momento do caroço  $\mathbf{k}_c$ , ou seja, sobre  $\mathbf{k}_c^\perp$  e assim temos,

$$\frac{d\sigma_{str}}{d^3k_z} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2l+1} \sum_m \int d^2b_n [1 - |S_n(b_n)|^2] \int_0^\infty d^2\rho |S_c(b_n)|^2 \left| \int_{-\infty}^\infty dz \exp[-ik_z z] \psi_{lm}(\mathbf{r}) \right|^2, \quad (\text{E.3})$$

onde  $k_z$  é a componente longitudinal de  $\mathbf{k}_c$  e usamos,

$$\int d^2\mathbf{k}_c^\perp \exp[-i\mathbf{k}_c \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')] = (2\pi)^2 \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'), \quad (\text{E.4})$$

Para a distribuição de momento transverso nós usamos a componente transversa de  $\mathbf{k}_c$  em coordenadas cilíndricas  $k_\perp = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  e a equação E.1 integrada em  $\mathbf{k}_z$  se torna,

$$\frac{d\sigma_{str}}{d^3k_\perp} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2l+1} \sum_m \int_0^\infty d^2b_n [1 - |S_n(b_n)|^2] \int_{-\infty}^\infty dz |d^2\rho \exp[-i\mathbf{k}_c \cdot \boldsymbol{\rho}] S_c(b_n) \psi_{lm}(\mathbf{r})|^2, \quad (\text{E.5})$$

As matrizes  $S$  são obtidas usando a aproximação eikonal para as funções de onda. Nessa aproximação, a onda de um fragmento com número de onda  $\mathbf{k}$  é dada por,

$$\langle \mathbf{r} | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle = \exp \left\{ i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \frac{i}{\hbar v} \int_z^\infty dz' V(r') \right\}. \quad (\text{E.6})$$

e o *overlap* das funções de onda de entrada e saída torna-se,

$$\langle \Psi_{\mathbf{k}}^{(-)} | \Psi_{\mathbf{k}'}^{(+)} \rangle = S(b) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}). \quad (\text{E.7})$$

onde  $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$  é o momento transferido e  $S(b)$  é a matriz de espalhamento dada por,

$$S(b) = \exp i\chi(b), \quad (\text{E.8})$$

com,

$$\chi(b) = -\frac{1}{\hbar v} \int_{-\infty}^\infty dz V(r), \quad (\text{E.9})$$

e  $V(\mathbf{r})$  é o potencial apropriado entre caroço+alvo e o nêutron+alvo espalhado.  $\chi(b)$  é a fase eikonal com  $r = \sqrt{b^2 + z^2}$  e  $b$  é o parâmetro de impacto. No limite  $\chi(b) = 0$  com  $S(b) = 1$  tem-se o modelo de Serber (SERBER, 1947).

# Apêndice F - Dinâmica do fator de forma do potencial de polarização de Efimov

## F.1 Cinemática do Fator de Forma do Potencial de Polarização

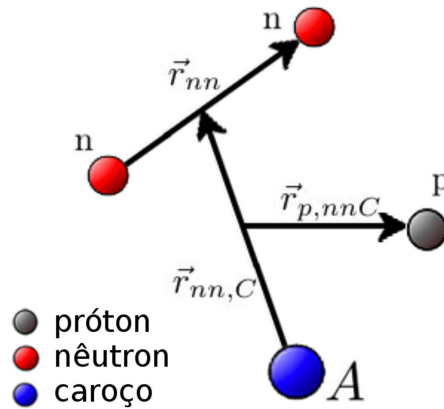


FIGURA F.1 – Coordenadas de Jacobi para o sistema de quatro corpos.

Da figura F.1 podemos notar que,

$$\vec{r}_{m,c} = \vec{r}_c - \frac{\vec{r}_n + \vec{r}_{n'}}{2}, \quad (\text{F.1})$$

onde  $\vec{r}_{m,c}$  é a coordenada relativa do caroço  $c$  com relação ao centro de massa do subsistema nêutron-nêutron  $nn$ . Para a posição relativa do próton com relação ao centro de massa do subsistema de três corpos  $nnC$  temos

$$\vec{r}_{p,nnC} = \vec{r}_p - \frac{A\vec{r}_c + \vec{r}_n + \vec{r}_{n'}}{A+2}. \quad (\text{F.2})$$

Estamos trabalhando com o sistema de unidade  $m_n = m_p = \hbar = 1$  e  $A$  é a massa do caroço.

As massas reduzidas são,

$$m_{nn} = \frac{m_n m_n}{m_n + m_n} = \frac{1}{2}, \quad (\text{F.3})$$

$$m_{nn,c} = \frac{(m_n + m_n)A}{A + m_n + m_n} = \frac{2A}{A + 2}, \quad (\text{F.4})$$

$$m_{p,nn,c} = \frac{(A + m_n + m_n)m_p}{A + m_p + 2m_n} = \frac{A + 2}{A + 3}. \quad (\text{F.5})$$

As outras cordenadas relativas são dadas por,

$$\vec{r}_{nn} = \vec{r}_{n'} - \vec{r}_n, \quad (\text{F.6})$$

e,

$$m_p \vec{r}_p + m_n \vec{r}_{n'} + m_n \vec{r}_n + A\vec{r}_c = 0, \quad (\text{F.7})$$

$$\vec{r}_p + \vec{r}_{n'} + \vec{r}_n + A\vec{r}_c = 0. \quad (\text{F.8})$$

Então,

$$\vec{r}_p = -A\vec{r}_c - \vec{r}_n - \vec{r}_{n'} \quad (\text{F.9})$$

$$\vec{r}_{p,nn,c} = -\frac{A + 3}{A + 2} (\vec{r}_c + \vec{r}_n + \vec{r}_{n'}) = \frac{A + 3}{A + 2} \vec{r}_p. \quad (\text{F.10})$$

A partir da expressão (F.10) temos,

$$\vec{r}_p = \frac{A + 2}{A + 3} \vec{r}_{p,nn,c}, \quad (\text{F.11})$$

e,

$$\vec{r}_{pc} = \vec{r}_p - \vec{r}_c. \quad (\text{F.12})$$

E ainda,

$$\vec{r}_p + A\vec{r}_c = -\vec{r}_n - \vec{r}_{n'} = 2\vec{r}_{nn,c} - 2\vec{r}_c. \quad (\text{F.13})$$

$$(A + 2)\vec{r}_c = 2\vec{r}_{nn,c} - \vec{r}_p = 2\vec{r}_{nn,c} - \frac{A + 2}{A + 3} \vec{r}_{p,nn,c}, \quad (\text{F.14})$$

então,

$$\vec{r}_c = \frac{2\vec{r}_{nn,c}}{A + 2} - \frac{\vec{r}_{p,nn,c}}{A + 3}, \quad (\text{F.15})$$

e,

$$\vec{r}_p - \vec{r}_c = \vec{r}_{p,nn,c} - \frac{2\vec{r}_{nn,c}}{A + 2}. \quad (\text{F.16})$$

Definimos,

$$\vec{r}_{pn} = \vec{r}_p - \vec{r}_n, \quad (\text{F.17})$$

e como,

$$\vec{r}_n - \vec{r}_{n'} = \vec{r}_{nn'}, \quad (\text{F.18})$$

e,

$$\vec{r}_n + \vec{r}_{n'} = 2(\vec{r}_c - \vec{r}_{nn,c}) = 2\left(-\frac{A}{A+2}\vec{r}_{nn,c} + \frac{\vec{r}_{nn,c}}{A+3}\right), \quad (\text{F.19})$$

$$\vec{r}_n = \frac{1}{2}\vec{r}_{nn} + \frac{\vec{r}_{p,nn,c}}{A+3} - \frac{A}{A+2}\vec{r}_{nn,c}, \quad (\text{F.20})$$

A equação (F.18) torna,

$$\vec{r}_{pn} = \frac{A+2}{A+3}\vec{r}_{p,nn,c} - \frac{\vec{r}_{p,nn,c}}{A+3} + \frac{A}{A+2}\vec{r}_{nn,c} - \frac{1}{2}\vec{r}_{nn}. \quad (\text{F.21})$$

Simplificando,

$$\vec{r}_{pn} = \frac{A+1}{A+3}\vec{r}_{p,nn,c} + \frac{A}{A+2}\vec{r}_{nn,c} - \frac{1}{2}\vec{r}_{nn}, \quad (\text{F.22})$$

e,

$$\vec{r}_{pc} = \vec{r}_{p,nn,c} - \frac{2\vec{r}_{nn,c}}{A+2}. \quad (\text{F.23})$$

Podemos escrever

$$\vec{r}_{p,nn,c} = \vec{r}_{pc} + \frac{2\vec{r}_{nn,c}}{A+2} = \frac{A+3}{A+1}\left(\vec{r}_{pn} + \frac{1}{2}\vec{r}_{nn} - \frac{A}{A+2}\vec{r}_{nn,c}\right). \quad (\text{F.24})$$

## F.2 Fator de Forma

A equação para o fator de forma é dada da forma,

$$F(\vec{Q}) = \int d^3r_{pc} V_{pc}(\vec{r}_{pc}) F_{pc}(\vec{Q}, \vec{r}_{pc}) + \int d^3r_{pn} 2 V_{pn}(\vec{r}_{pn}) F_{pn}(\vec{Q}, \vec{r}_{pn}), \quad (\text{F.25})$$

onde as funções para os fatores de forma  $F_{pc}(\vec{Q}, \vec{r}_{pc})$  e  $F_{pn}(\vec{Q}, \vec{r}_{pn})$  são dadas por,

$$F_{pc}(\vec{Q}, \vec{r}_{pc}) = e^{-i\vec{Q}\cdot\vec{r}_{pc}} \int d^3p_{nn,c} d^3p_{nn} \Phi_1^*(\vec{p}_{nn}, \vec{p}_{nn,c}) \Phi_0(\vec{p}_{nn}, \vec{q}_{pnn,c} + \vec{p}_{nn,c}), \quad (\text{F.26})$$

e,

$$\begin{aligned}
 F_{pn}(\vec{Q}, \vec{r}_{pn}) = e^{-i\frac{A+3}{A+1}\vec{Q}\cdot\vec{r}_{pn}} \int d^3p_{nn,c} d^3p_{nn} \Phi_1^*(\vec{p}_{nn}, \vec{p}_{nn,c}) \\
 \times \Phi_0\left(\vec{p}_{nn} - \frac{A+3}{A+1}\vec{Q}, \vec{p}_{nn,c} + \frac{A(A+3)}{(A+2)(A+1)}\vec{Q}\right), \quad (\text{F.27})
 \end{aligned}$$

em que,

$$\vec{q}_{pnn,c} = \frac{2}{A+2}\vec{Q}. \quad (\text{F.28})$$

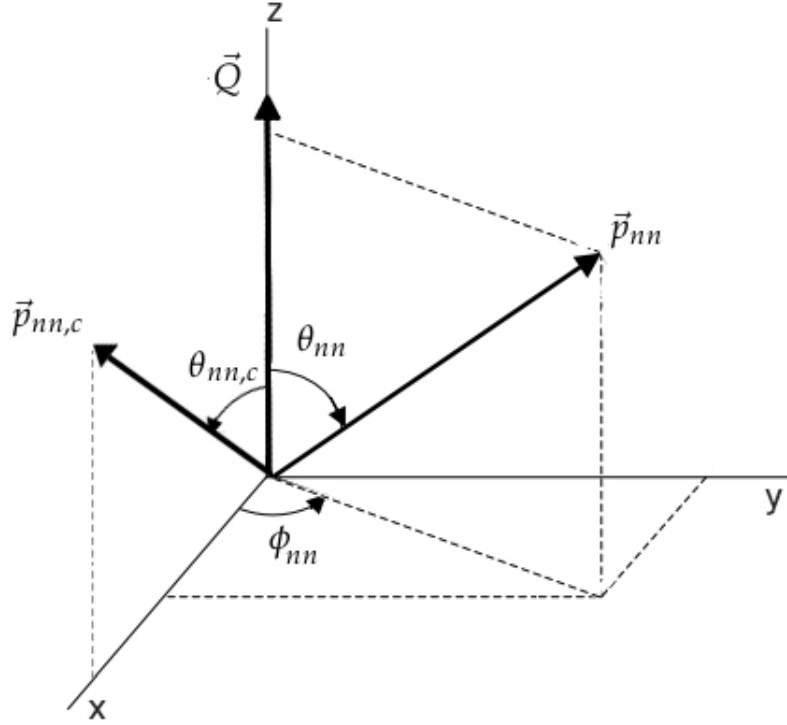


FIGURA F.2 – Ilustração do esquema angular para integração.

De acordo com a figura F.2, a integração angular em  $d^3p_{nn,c}$  e em  $d^3p_{nn}$  ficam dadas por,

$$\begin{aligned}
 \int d^3p_{nn,c} d^3p_{nn} &= \int_0^{2\pi} d\phi_{nn,c} \int_{-1}^1 d\cos\theta_{nn,c} \int_0^\infty p_{nn,c}^2 dp_{nn,c} \times \\
 &\quad \times \int_0^{2\pi} d\phi_{nn} \int_{-1}^1 d\cos\theta_{nn} \int_0^\infty p_{nn}^2 dp_{nn} = \\
 &= 2\pi \int_{-1}^1 d\cos\theta_{nn,c} \int_0^\infty p_{nn,c}^2 dp_{nn,c} \int_0^{2\pi} d\phi_{nn} \int_{-1}^1 d\cos\theta_{nn} \int_0^\infty p_{nn}^2 dp_{nn}. \quad (\text{F.29})
 \end{aligned}$$

E os vetores são escritos como,

$$\vec{p}_{nn} = \{p_{nn}^x; p_{nn}^y; p_{nn}^z\} = \{p_{nn} \sin \theta_{nn} \cos \phi_{nn}; p_{nn} \sin \theta_{nn} \sin \phi_{nn}; p_{nn} \cos \theta_{nn}\}, \quad (\text{F.30})$$

$$\vec{p}_{nn,c} = \{p_{nn,c}^x; p_{nn,c}^y; p_{nn,c}^z\} = \{p_{nn,c} \sin \theta_{nn,c}; 0; p_{nn,c} \cos \theta_{nn,c}\} \quad (\text{F.31})$$

$$\vec{Q} = \{Q^x; Q^y; Q^z\} = \{0; 0; Q\}. \quad (\text{F.32})$$

A equação (F.26) pode ser escrita em termos dos módulos dos vetores do argumento como,

$$\begin{aligned} F_{pc}(Q, r_{pc}, \cos \alpha_{pc}) &= e^{-iQr_{pc} \cos \alpha_{pc}} \int d^3 p_{nn,c} d^3 p_{nn} \Phi_1^*(\vec{p}_{nn}, \vec{p}_{nn,c}) \Phi(\vec{p}_{nn}, \vec{q}_{pnn,c} + \vec{p}_{nn,c}) \\ &= e^{-iQr_{pc} \cos \alpha_{pc}} 2\pi \int_{-1}^1 d \cos \theta_{nn,c} \int_0^\infty p_{nn,c}^2 dp_{nn,c} \int_0^{2\pi} d\phi_{nn} \int_{-1}^1 d \cos \theta_{nn} \int_0^\infty p_{nn}^2 dp_{nn} \times \\ &\quad \times \Phi_1^*(p_{nn}, p_{nn,c}, \cos \theta_n) \Phi(p_{nn}, (q_{pnn,c}^2 + p_{nn,c}^2 + 2q_{pnn,c} p_{nn,c} \cos \theta_{nn,c})^{1/2}, \cos \theta'), \end{aligned} \quad (\text{F.33})$$

onde  $\theta_n$  é o ângulo entre os vetores  $\vec{p}_{nn}$  e  $\vec{p}_{nn,c}$  e  $\theta_{nn,c}$  o ângulo entre  $\vec{p}_{nn,c}$  e  $\vec{p}_{pnn,c}$ , definimos,

$$F_{pc}(Q, r_{pc}, \cos \alpha_{pc}) = e^{-iQr_{pc} \cos \alpha_{pc}} f_{pc}(Q), \quad (\text{F.34})$$

com,

$$\begin{aligned} f_{pc}(Q) &= 2\pi \int_{-1}^1 d \cos \theta_{nn,c} \int_0^\infty p_{nn,c}^2 dp_{nn,c} \int_0^{2\pi} d\phi_{nn} \int_{-1}^1 d \cos \theta_{nn} \int_0^\infty p_{nn}^2 dp_{nn} \times \\ &\quad \times \Phi_1^*(p_{nn}, p_{nn,c}, \cos \theta_n) \Phi_0(p_{nn}, (q_{pnn,c}^2 + p_{nn,c}^2 + 2q_{pnn,c} p_{nn,c} \cos \theta_{nn,c})^{1/2}, \cos \theta'). \end{aligned} \quad (\text{F.35})$$

Onde,  $\vec{q}_{pnn,c} = \frac{2}{A+2} \vec{Q}$ ,

$$\begin{aligned} f_{pc}(Q) &= 4\pi^3 \int_{-1}^1 d \cos \theta_{nn,c} \int_0^\infty p_{nn,c}^2 dp_{nn,c} \int_0^\infty p_{nn}^2 dp_{nn} \times \\ &\quad \times \Phi_1^*(p_{nn}, p_{nn,c}, \cos \theta_n) \Phi_0\left(p_{nn}, \left(\frac{4}{(A+2)^2} Q^2 + p_{nn,c}^2 + \frac{4}{A+2} Q p_{nn,c} \cos \theta_{nn,c}\right)^{1/2}, \cos \theta'\right). \end{aligned} \quad (\text{F.36})$$

# Apêndice G - Reações de quebra com núcleos halo

## G.1 Função de onda de três corpos nas reações com núcleos halo

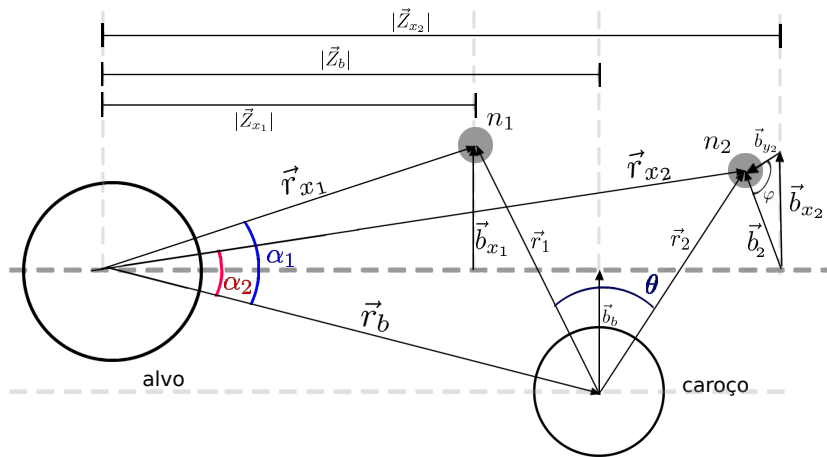


FIGURA G.1 – Coordenadas da reação de quebra de um núcleo-halo de dois nêutrons com um alvo pesado.

De acordo com o sistema de coordenadas mostrado na Fig. G.1 podemos notar que,

$$r_b = \sqrt{Z_b^2 + b_b^2}. \quad (\text{G.1})$$

Escolhemos chamar os vetores relativos  $\vec{A}$  s posições dos nêutrons ao caroço como  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  podendo esses, serem descritos como:

$$\vec{r}_1 = \{\vec{b}_{x1} - \vec{b}_b, 0, \vec{Z}_{x1} - \vec{Z}_b\}, \quad (\text{G.2})$$

e,

$$\vec{r}_2 = \{\vec{b}_{x2} - \vec{b}_b, \vec{b}_{y2}, \vec{Z}_{x2} - \vec{Z}_b\}. \quad (\text{G.3})$$

A função de onda do núcleo-halo dada em termos das posições dos nêutrons será,

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \Psi(r_1, r_2, \cos \theta) \\ &= \Psi(|\vec{r}_{x_1} - \vec{r}_b|, |\vec{r}_{x_2} - \vec{r}_b|, \cos \theta).\end{aligned}\tag{G.4}$$

Podemos ver a partir da Fig. G.1 que  $\cos \theta$  pode ser escrito por,

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_1| |\vec{r}_2|} \\ &= \frac{r_{x_1} r_{x_2} \cos(|\alpha_2 - \alpha_1|) - r_b r_{x_1} \cos \alpha_1 - r_b r_{x_2} \cos \alpha_2 + r_b^2}{\sqrt{r_{x_1}^2 + r_b^2 - 2r_{x_1} r_b \cos \alpha_1} \sqrt{r_{x_2}^2 + r_b^2 - 2r_{x_2} r_b \cos \alpha_2}}.\end{aligned}\tag{G.5}$$

A função de onda se transforma e pode ser escrita em função das coordenadas mostradas na Fig. G.1 como:

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \rightarrow \Psi(Z_{x_1}, Z_{x_2}, Z_b, b_{x_1}, b_{x_2}, \cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \varphi).\tag{G.6}$$



# Anexo A - Trabalhos Publicados

XXXVII Brazilian Meeting on Nuclear Physics  
Journal of Physics: Conference Series 630 (2015) 012043

IOP Publishing  
doi:10.1088/1742-6596/630/1/012043

## Wave function for two-neutron halo states

Lucas A. Souza<sup>1†</sup>, Filipe F. Bellotti<sup>1</sup>, Tobias Frederico<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Física, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, DCTA, 12228-900, São José dos Campos, SP, Brazil

E-mail: <sup>†</sup>lucasufsj@gmail.com

**Abstract.** In this work we investigate the theoretical aspects associated with the few-body universal properties of the weakly-bound two neutron halo in light nuclei. We emphasize that our study of wave functions can be used as inputs in calculations of reaction processes with light exotic nuclei. Starting from the Faddeev decomposition of the wave function for 3-body systems interacting through zero range forces, we calculate two-neutron halo states for large two-body scattering lengths coming closer to what is known today as Efimov's Physics. We report our findings for the wave function for a three-body  $n-n-C$  system, where we consider two neutrons as a halo around a compact core  $C$ . We focus our study on halo structure of Borromean systems like <sup>11</sup>Li, <sup>14</sup>Be, and <sup>22</sup>C.

---

EPJ Web of Conferences 113, 06012 (2016)

DOI: 10.1051/epjconf/201611306012

© Owned by the authors, published by EDP Sciences, 2016

## Momentum distributions in light halo nuclei and structure constraints

L. A. Souza<sup>1,a</sup>, F. F. Bellotti<sup>2,3,b</sup>, T. Frederico<sup>1,c</sup>, M. T. Yamashita<sup>4,d</sup>, and Lauro Tomio<sup>4,5,e</sup>

<sup>1</sup>Instituto Tecnológico de Aeronáutica, DCTA, 12228-900, São José dos Campos, Brazil

<sup>2</sup>Department of Physics and Astronomy, Aarhus University, DK-8000 Aarhus C, Denmark

<sup>3</sup>Instituto de Fomento e Coordenação Industrial, 12228-901, São José dos Campos, SP, Brazil

<sup>4</sup>Instituto de Física Teórica, UNESP, 01156-970, São Paulo, Brazil

<sup>5</sup>CCNH, Universidade Federal do ABC, 09210-580, Santo André, Brazil.

**Abstract.** The core recoil momentum distribution of neutron-rich isotopes of light exotic nuclei is studied within a three-body model, where the nuclei are described by a core and two neutrons, with interactions dominated by the  $s$ -wave channel. In our framework, the two-body subsystems should have large scattering lengths in comparison with the interaction range allowing to use a three-body model with a zero-range force. The ground-state halo wave functions in momentum space are obtained by using as inputs the two-neutron separation energy and the energies of the singlet neutron-neutron and neutron-core virtual states. Within our model, we obtain the momentum probability densities for the Borromean exotic nuclei <sup>11</sup>Li and <sup>22</sup>C. In the case of the core recoil momentum distribution of <sup>11</sup>Li, a fair reproduction of the experimental data was obtained, without free parameters, considering only the two-body low-energies. By analysing the obtained core momentum distribution in face of recent experimental data, we verify that such data are constraining the <sup>22</sup>C two-neutron separation energy to a value between 100 and 400 keV.

Few-Body Syst (2016) 57:361–370  
DOI 10.1007/s00601-016-1086-0

L. A. Souza · F. F. Bellotti · T. Frederico · M. T. Yamashita ·  
Lauro Tomio

## Scaling Limit Analysis of Borromean Halos

Received: 8 January 2016 / Accepted: 8 March 2016 / Published online: 13 April 2016  
© Springer-Verlag Wien 2016

**Abstract** The analysis of the core recoil momentum distribution of neutron-rich isotopes of light exotic nuclei is performed within a model of halo nuclei described by a core and two neutrons dominated by the  $s$ -wave channel. We adopt the renormalized three-body model with a zero-range force, which accounts for the Efimov physics. This model is applicable to nuclei with large two-neutron halos compared to the core size, and a neutron–core scattering length larger than the interaction range. The halo wave function in momentum space is obtained by using as inputs the two-neutron separation energy and the energies of the singlet neutron–neutron and neutron–core virtual states. Within our model, we obtain the momentum probability densities for the Borromean exotic nuclei Lithium-11 ( $^{11}\text{Li}$ ), Beryllium-14 ( $^{14}\text{Be}$ ) and Carbon-22 ( $^{22}\text{C}$ ). A fair reproduction of the experimental data was obtained in the case of the core recoil momentum distribution of  $^{11}\text{Li}$  and  $^{14}\text{Be}$ , without free parameters. By extending the model to  $^{22}\text{C}$ , the combined analysis of the core momentum distribution and matter radius suggest (i) a  $^{20}\text{C}$  virtual state well below 1 MeV; (ii) an overestimation of the extracted matter  $^{22}\text{C}$  radius; and (iii) a two-neutron separation energy between 100 and 400 keV.



Contents lists available at ScienceDirect

Physics Letters B

www.elsevier.com/locate/physletb



### Core momentum distribution in two-neutron halo nuclei

L.A. Souza<sup>a</sup>, F.F. Bellotti<sup>a,b</sup>, M.T. Yamashita<sup>c</sup>, T. Frederico<sup>a,\*</sup>, Lauro Tomio<sup>c,d,a</sup>

<sup>a</sup> Instituto Tecnológico de Aeronáutica, DCTA, 12228-900, S. José dos Campos, Brazil  
<sup>b</sup> Department of Physics and Astronomy, Aarhus University, DK-8000 Aarhus C, Denmark  
<sup>c</sup> Instituto de Física Teórica, UNESP – Universidade Estadual Paulista, 01156-970, São Paulo, Brazil  
<sup>d</sup> Centro de Ciências Naturais e Humanas, Universidade Federal do ABC, 09210-580, Santo André, Brazil



#### ARTICLE INFO

**Article history:**  
Received 26 November 2015  
Received in revised form 25 March 2016  
Accepted 31 March 2016  
Available online 5 April 2016  
Editor: J.-P. Blaizot

**Keywords:**  
Binding energies  
Halo-nuclei  
Three-body system  
Carbon-22  
Faddeev equation

#### ABSTRACT

The core momentum distribution of a weakly-bound neutron–neutron–core exotic nucleus is computed within a renormalized zero-range three-body model, with interactions in the  $s$ -wave channel. The halo wave-function in momentum space is obtained by using as inputs the two-body scattering lengths and the two-neutron separation energy. The core momentum densities are computed for  $^{11}\text{Li}$ ,  $^{14}\text{Be}$  and  $^{20}\text{C}$  and  $^{22}\text{C}$ . The model describes the experimental data for  $^{11}\text{Li}$ ,  $^{14}\text{Be}$  and to some extent  $^{20}\text{C}$ . The recoil momentum distribution of the  $^{20}\text{C}$  from the breakup of  $^{22}\text{C}$  nucleus is computed for different two-neutron separation energies, and from the comparison with recent experimental data the two-neutron separation energy is estimated in the range  $100 \leq S_{2n} \leq 400$  keV. The recoil momentum distribution depends weakly on the neutron– $^{20}\text{C}$  scattering length, while the matter radius is strongly sensitive to it. The expected universality of the momentum distribution width is verified by also considering excited states for the system.

© 2016 The Authors. Published by Elsevier B.V. This is an open access article under the CC BY license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>). Funded by SCDAP<sup>3</sup>.

PHYSICAL REVIEW C **94**, 064002 (2016)

## Emergent universality in the two-neutron halo structure of $^{22}\text{C}$

L. A. Souza,<sup>1</sup> E. Garrido,<sup>2</sup> and T. Frederico<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto Tecnológico de Aeronáutica, DCTA, 12228-900, S. José dos Campos, Brazil

<sup>2</sup>Instituto de Estructura de la Materia, IEM-CSIC, Serrano 123, E-28006 Madrid, Spain

(Received 8 July 2016; revised manuscript received 12 October 2016; published 9 December 2016)

The structure of the two-neutron halo  $^{22}\text{C}$  is investigated by means of a renormalized zero-range three-body model, with interactions in the  $s$ -wave channel, and a finite-range model with two- and three-body forces provided by the hyperspherical adiabatic expansion method. In both models the halo wave function in configuration space is obtained by using as inputs the two-body scattering lengths and the two-neutron separation energy. The halo-matter density is computed for  $^{22}\text{C}$  with different three-body forces and low-energy parameters, with two-neutron separation energy within the range  $50 \text{ keV} \leq S_{2n} \leq 1000 \text{ keV}$ . The halo-neutron density depends weakly on the neutron– $^{20}\text{C}$  scattering length as long as its absolute value is larger than the neutron–neutron one. The halo-neutron density is then analyzed by means of the root-mean-square radius, the probability density, and also the geometry, taking into account the angle between the two Jacobi coordinates. The results of finite-range and zero-range two-neutron–core models are compared. The effects in the halo structure of short-range and long-range three-body forces are studied, and the emergent universal behavior of the halo-neutron density and its geometry is pointed out.

DOI: [10.1103/PhysRevC.94.064002](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.94.064002)

## FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO <b>TD</b>	2. DATA 29 de março de 2017	3. DOCUMENTO Nº DCTA/ITA/TD-004/2017	4. Nº DE PÁGINAS 146
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: Física Nuclear de Poucos Corpos em Núcleos Exóticos Ricos em Nêutrons			
6. AUTOR(ES): <b>Lucas Alves de Souza</b>			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: Física de poucos corpos; Espalhamento quântico; Física nuclear; Núcleos exóticos			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Funções de espalhamento; Núcleos exóticos; Problema de poucos corpos; Equação de Schroedinger; Equações de Faddeev; Física Nuclear; Física			
10. APRESENTAÇÃO: <span style="float: right;"><input checked="" type="checkbox"/> Nacional    <input type="checkbox"/> Internacional</span> ITA, São José dos Campos. Curso de Doutorado. Área de Física Nuclear. Orientador: Tobias Frederico; coorientador: Mahir Saleh Hussein. Defesa em 22/03/2017. Publicada em 2017.			
11. RESUMO: Estados quânticos chamados Efimov são constituídos por três corpos fracamente ligados e aparecem no limite em que as energias dos subsistemas de dois corpos na onda $S$ tendem a zero. A possibilidade da existência desses estados motivou grupos de pesquisa a desenvolverem investigações sobre sistemas de poucos corpos através do formalismo do espalhamento quântico, possibilitando, dessa forma, extrair informações acerca dos observáveis físicos. Três corpos interagindo fracamente na onda $S$ podem ser estudados teoricamente usando equações de Faddeev com potenciais de alcance zero do tipo delta de Dirac. Utilizamos esse formalismo para obter a função de onda de três corpos, onde, partindo da equação de Schrödinger, foi possível a derivação das equações integrais de Faddeev. O ingrediente essencial é a matriz $T$ de dois corpos que é depois estendida para três corpos. As componentes da função de onda de Faddeev são soluções de equações integrais acopladas que são resolvidas numericamente. O método numérico para resolver as equações integrais já vem sendo desenvolvido por nosso grupo de pesquisa onde é possível calcular as energias de ligação de diferentes sistemas de três corpos e suas funções de onda. Investigamos núcleos exóticos (núcleos-halo) estudados como sistemas de três partículas. Esses núcleos são compostos por um caroço compacto, mais núcleons que ocupam uma órbita mais distante. Neste trabalho, investigamos o núcleo possuindo um halo de dois nêutrons. Foram calculados parâmetros importantes tal como a largura da distribuição que está ligada ao desvio padrão das distribuições. Comparamos nossos resultados com alguns núcleos halo de dois nêutrons que possuem dados experimentais e prevemos o comportamento universal das distribuições de momento do caroço que devem ser eventualmente obtidas em trabalhos experimentais futuros. Analisamos o comportamento da função de onda no espaço das configurações, e obtemos informações acerca da distribuição espacial do halo de dois nêutrons de alguns núcleos-halo como o $^{22}\text{C}$ e $^{11}\text{Li}$ que têm ganhado atenção da comunidade científica de física nuclear nos últimos anos. Foi feito um estudo comparando o potencial de alcance-zero com um potencial de alcance finito possibilitando analisar a universalidade de núcleos-halo.			
12. GRAU DE SIGILO: <b>(X) OSTENSIVO</b> <input type="checkbox"/> RESERVADO <input type="checkbox"/> SECRETO			