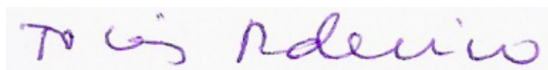


Tese apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Física Nuclear.

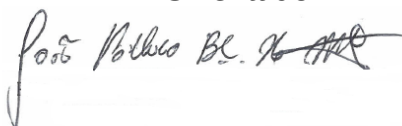
**Clayton Santos Mello**

**A ESTRUTURA ELETROMAGNÉTICA DO PÍON  
COM AUTOENERGIA DOS QUARKS**

Tese aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:



Prof. Dr. Tobias Frederico  
Orientador



Prof. Dr. João Pacheco Bicudo Cabral de Melo  
Coorientador

Prof. Dr. Luiz Carlos Sandoval Góes  
Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa

Campo Montenegro  
São José dos Campos, SP – Brasil  
2017

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)**  
**Divisão de Informação e Documentação**

Mello, Clayton Santos

A estrutura eletromagnética do pión com autoenergia dos quarks / Clayton Santos Mello.  
São José dos Campos, 2017.  
113f.

Tese de doutorado – Curso de Pós-graduação em Física – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2017.  
Orientador: Prof. Dr. Tobias Frederico. Coorientador: Prof. Dr. João Pacheco Bicudo Cabral de Melo.

1. Amplitude de Bethe-Salpeter. 2. Mésons Leves. 3. Fator de forma eletromagnético, 4. Constante de decaimento, 5. Quarks constituintes, 6. Massa running. I. Centro Técnico Aeroespacial. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Divisão de Ciências Fundamentais. II. Título

## **REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA**

MELLO, Clayton Santos. **A estrutura eletromagnética do pión com autoenergia dos quarks.** 2017. 113f. Tese de doutorado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

## **CESSÃO DE DIREITOS**

NOME DO AUTOR: Clayton Santos Mello

TÍTULO DO TRABALHO: A estrutura eletromagnética do pión com autoenergia dos quarks.

TIPO DO TRABALHO/ANO: Tese / 2017

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta tese e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese pode ser reproduzida sem a sua autorização do autor.

---

Clayton Santos Mello  
Praça Marechal Eduardo Gomes, 50  
12.228-900 – São José dos Campos - SP.

# A ESTRUTURA ELETROMAGNÉTICA DO PÍON

## COM AUTOENERGIA DOS QUARKS

**Clayton Santos Mello**

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr.	Manuel Máximo Bastos Malheiro de Oliveira	Presidente	- ITA
Prof. Dr.	Tobias Frederico	Orientador	- ITA
Prof. Dr.	João Pacheco Bicudo Cabral de Mello	Coorientador	- UNICSUL
Prof. Dr.	Wayne Leonardo Silva de Paula	Membro interno	- ITA
Prof. Dr.	Odilon Lourenço da Silva Filho	Membro externo	- UFRJ
Prof. Dra.	Marina Nielsen	Membro externa	- USP

**ITA**

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a todas as divindades que contribuíram espiritualmente durante esta jornada de trabalho. Segundo, aos meus pais pelo apoio espiritual, moral e sobretudo por acreditarem que tudo isto seria possível. Agradeço minha mãe, Genilda, que é tudo para mim. Ela que sempre garantiu o meu alimento de cada dia. Meu pai, Jorge, que é um grande amigo. Uma de suas frases que sempre me marcou: “sempre que se propor a fazer algo, o faça com dedicação, trabalho e sobre tudo com responsabilidade”. Não poderia me esquecer do meu irmão Kleber, que sempre com suas palavras de apoio me motivou bastante, além de minha cunhada Evelyn que torce por mim. Falar de minhas irmãs, também é muito especial para mim, a Claudia que me proporcionou uma sobrinha muito querida, a Brenda, também o Isac e um sobrinho que é só sorriso, o Luan que é uma criança adorável. Este garoto “puxou” ao pai, meu cunhado Rodrigo, uma pessoa que proporciona bem estar a todos por onde passa com sua alegria. A minha irmã Cristiane que sempre me apoiou juntamente com meu cunhado Alex e meus sobrinhos Enzo e Natasha, uma moça muito inteligente. Vejo que esta menina tem um futuro brilhante pela frente. Agradeço também a minha irmã Kelly e meu cunhado Álvaro que sempre conversavam comigo sobre meu trabalho. E a minha irmã Patrícia, que me proporcionou três sobrinhos maravilhosos: Katheleen, Kauan e Kamilly. Sem contar que devo agradecer ao meu cunhado Evandro, que sempre tem uma conversa agradável e especialmente por ser uma das poucas pessoas a aturar meus discursos sobre Física. Somente da família tenho muito a agradecer.

Agradeço aos Professor Dr. Manuel Malheiro pela sua capacidade de conduzir as atividades dentro do programa de doutoramento, sua coordenação trouxe aos estudantes uma segurança de que o curso sempre vise seu aprimoramento e que mantenha sua excelência. Também agradeço ao professor Dr. Wayne de Paula pelas contribuições desde a Qualificação do Doutorado em 2015, suas recomendações me ajudaram a organizar melhor o texto. Aqui faço minhas considerações ao professor Dr. Orlando Oliveira, que compôs minha banca de Qualificação, assim como o professor Wayne me orientou na forma de apresentação e na escrita do trabalho. Ao professor Dr. Brett Carlson agradeço pelo quanto aprendi no curso de Eletrodinâmica, ao qual me esclaceu muito a respeito do assuntos tratados aqui. Além do fato do professor Brett ser uma pessoa compreensiva e muito dedicado para

---

com os estudantes. Ao professor Dr. Odilon Lourenço agradeço pelas imprescindíveis contribuições em meu trabalho e pela sua simpatia e humildade ao conversar com todo mundo. A professora Marina Nielsen pelas suas contribuições e recomendações para este trabalho. Agradecimentos sinceros também ao professor Dr. Kazuo Tsushima que sempre me deu dicas de como organizar os cálculos e tratar dos assuntos na tese e por ser uma pessoa altamente dedicada, sendo um profissional que muito contribui para nosso país se tornar excelência em Física. Agradeço aos professores citados que honrosamente são membros de minha banca, pela paciência e as imprescindíveis contribuições referentes ao meu trabalho.

Um carinho muito especial aos meus amigos, Adriano e Alexandre que desde a graduação me acompanham nesta jornada. O Alexandre que sempre se preocupou comigo e acreditou em mim desde sempre. Ao meu amigo Paulo que me mostrou o mundo de possibilidades no manejo de computadores. Um cara “fora de sério” quando o assunto é tecnologia. Não poderia me esquecer do Anacé um rapaz estrovertido e um grande amigo. Também agradeço as minhas amigas Mariana, Afia e Grazielle, que acompanham e torcem por mim. Agradeço aos amigos do mestrado: Marjory, Iara, Enio e Edson. O Edson foi quem me iniciou no projeto de mestrado, e que é meu colega de doutorado também só tenho agradecê-lo. Aos amigos do doutorado Vitor Gigante que me ajudou muito com os cálculos e referências bibliográficas e principalmente por compartilhar sua experiência. Sempre que eu precisei pude contar com ele, uma pessoa excepcional. Além do Vitor, agradeço aos amigos Maurício, Tiago Jesus, Flaviano e Jorge pelas discussões, não só sobre física, que contribuíram para minha formação. Não poderia me esquecer do George, que conheci no período de seu mestrado, é uma pessoa muito atenciosa para com os amigos. A Gerline é uma moça muito legal tem sempre uma conversa agradável e motivacional. Sem contar os amigos da outra sala do ITA: Ronaldo e Emanuel, que sempre me ajudaram com o manejo de computadores, a Flávia, Geanderson e o Armando que sempre tínhamos uma conversa descontraída e também muito produtiva quando falávamos sobre ciências. Estes meus amigos agradeço em especial pela hospitalidade de me acolherem em sua casa durante minha estadia no doutorado no ITA. Também agradeço aos novos amigos que tive a oportunidade de conhecer durante minha estadia na Universidade Cruzeiro do Sul durante o período de doutorado sob a coorientação do Prof. Dr. João Pacheco. São eles: Jonathan, Samuel, Radi (o cara de Tocantins), Andrew, David, Círia (uma pessoa muito profissional), Jéssica (uma física comunicativa), Gislaine (uma moça muito legal e sincera), Felipe (o astrofísico que “esbanja” simpatia) e claro que não poderia me esquecer da homem do Piauí, o grande amigo Rômulo, pessoa extremamente dedicada e que muito contribuiu durante a realização deste trabalho.

Meus sincéros agradecimentos ao Prof. Dr. Tobias Frederico pela paciência e por ter tornado tudo isto possível. Sua orientação fez com que me tornasse uma pessoa melhor

com o nível de aprendizagem com a qual tive a oportunidade de desenvolver com sua imprecindível ajuda.

Agradeço ao Prof. Dr. João Pacheco Bicudo Cabral de Melo por ter me aturado durante estes últimos 6 anos desde o mestrado. Sob sua coorientação tive a oportunidade de compartilhar de sua experiência com cálculo numérico no desenvolvimento desta tese. Além de ser uma pessoa sensível e muito humano que dividiu comigo os momentos de acertos e fracassos durante esta jornada.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro durante o doutorado. Organizações como esta permitem que a dedicação para o desenvolvimento científico do Brasil possa ser cada vez mais eficaz, tendo em vista que nós estudantes podemos nos dedicar exclusivamente a pesquisa.

# Resumo

Neste trabalho estudamos a função de onda de valência do pión na Frente de Luz, começando com parametrizações analíticas da função de vértice e da função de massa do quark, fitados dos cálculos da Cromodinâmica Quântica (QCD) na rede. Também investigamos a estrutura eletromagnética do pión, o méson pseudoescalar, composto de um estado ligado quark-antiquark com spin zero e paridade negativa. Obtemos, a partir da amplitude de Bethe-Salpeter, projetada na Frente de Luz, uma função de onda de valência, que descreve a estrutura interna do pión. Em particular, calculamos observáveis como o fator de forma eletromagnético, o raio quadrático médio e a constante de decaimento eletrofraca. Calculamos a função de onda utilizando um modelo com a massa dos quarks constituintes variando em função do momento do quark. Especificamente, realizamos os cálculos no formalismo da Frente de Luz (FL) com a amplitude de Bethe-Salpeter (ABS) com um modelo de quarks constituintes, que forma o estado do pión composto. Nos cálculos foi utilizado a função de massa dinâmica do quark para vestir o vértice. Consideramos as contribuições pseudoescalar e pseudovetorial da função de onda, através da decomposição espinorial das matrizes de Dirac da amplitude de Bethe-Salpeter. Numa primeira aproximação, descartamos a estrutura de Dirac, e fizemos as primeiras estimativas para a função de onda. Para esta proposta analisamos os pólos da amplitude de Bethe-Salpeter no quadrimomento, que são projetados na Frente de Luz para eliminar o tempo relativo entre os quarks, e desta forma obter a função de onda de valência do pión.

# Abstract

In this work, we study the pion valence light-front wave function by starting with an analytic parametrizations of the vertex function and running quark mass fitted to Lattice-QCD results. We also investigate the pion electromagnetic structure, which is a pseudoscalar meson composed by a quark-antiquark bound state, with total spin zero and negative parity. We obtain, from the Bethe-Salpeter Amplitude, projected on the Light-Front, a valence wave function, which describes the internal structure of the pion. In particular we calculate observables like the electromagnetic form factor, mean square radius and electroweak decay constant. We compute the wave function by using a model with a running constituent quark mass. Specifically, we performed calculations in the Light-Front formalism with a Bethe-Salpeter (BS) amplitude with a model constituent quarks, which forms the pion bound state. In the calculations it was used the quark dynamic mass function to dress the vertex. We consider the pseudoscale and pseudo-vectorial contributions of the wave function, through the Dirac matrices decomposition of the Bethe-Salpeter amplitude. In a first approximation, we disregarded the Dirac structure, and make the first estimates for the wave function. For this purpose, we analyzed the poles of the Bethe-Salpeter amplitude in the momentum, which are projected on the light-front coordinates to eliminate the relative light-front time between the quarks, and obtain the valence wave function.



# Lista de Figuras

FIGURA 2.1 – Vértice quark-píon. . . . .	24
FIGURA 2.2 – Auto-energia do quark. . . . .	24
FIGURA 2.3 – Função de massa dinâmica do quark em função do quadrimomento $p$ . Os resultados da QCD na rede são da referência (PARAPPILLY <i>et al.</i> , 2006). . . . .	28
FIGURA 3.1 – Posição dos pólos, no intervalo (i) em $k^+$ , para o termo de valência. . . . .	42
FIGURA 3.2 – Posição dos pólos, no intervalo (ii) em $k^+$ , para o termo de valência. . . . .	42
FIGURA 3.3 – Função de onda de valência em função da fração de momento $x$ . Contribuição pseudoescalar, linha contínua. Contribuição pseudovetorial: componente “+”, linha tracejada, componente “-”, linha pontilhada e componente “ $\perp$ ”, linha ponto-tracejada. . . . .	48
FIGURA 3.4 – Função de onda de valência em função do momento transversal $k_{\perp}$ . Contribuição pseudoescalar, linha contínua. Contribuição pseudovetorial: componente “+”, linha tracejada, componente “-”, linha pontilhada e componente “ $\perp$ ”, linha ponto-tracejada. . . . .	49
FIGURA 3.5 – Função de onda de valência do píon pseudoescalar, (painel superior) e componente “+” da pseudovetorial (painel inferior), em função do momento transversal $k_{\perp}$ e da fração de momento $x$ . . . . .	50
FIGURA 3.6 – Função de onda de valência do píon pseudovetorial componente “-”, (painel superior) e componente “ $\perp$ ” (painel inferior), em função do momento transversal $k_{\perp}$ e da fração de momento $x$ . . . . .	51
FIGURA 3.7 – Função de distribuição. Contribuição pseudoescalar: linha contínua. Contribuição pseudovetorial: componente “+”, linha tracejada, componente “-”, linha pontilhada e componente “ $\perp$ ”, linha ponto-tracejada. Função de distribuição assintótica: linha duplo-ponto-tracejada. . . . .	53

FIGURA 4.1 – Diagrama de Feynman na aproximação de impulso. . . . .	58
FIGURA 4.2 – Posição dos pólos para o termo de valência da corrente eletromagnética do pión. . . . .	62
FIGURA 4.3 – Posição dos pólos para o termo de par. . . . .	64
FIGURA 4.4 – Decaimento do méson $\pi$ . . . . .	66
FIGURA 5.1 – Fator de forma eletromagnético do pión normalizado em função do momento quadrático transferido $q^2$ . Presente modelo, linha contínua. . . . .	72
FIGURA 5.2 – Fator de forma eletromagnético do pión normalizado, multiplicado por $q^2$ , em função do momento quadrático transferido $q^2$ . Este modelo, linha contínua. . . . .	73
FIGURA 5.3 – Fator de forma eletromagnético do pión normalizado em função do momento quadrático transferido $q^2$ e dividido pela <i>vector meson dominance</i> . Modelo linha contínua. Representação em escala logarítmica no eixo horizontal do gráfico. Com $0.01 < q^2 < 20 [GeV/c]^2$ . . . . .	74
FIGURA 5.4 – Raio eletromagnético do pión, $r_\pi = \sqrt{\langle r^2 \rangle}$ , em função da massa constituinte $M_q = M(p=0)$ . . . . .	75
FIGURA 5.5 – Constante de decaimento eletrofraca do pión, $f_\pi$ , em função da massa constituinte $M_q = M(p=0)$ . . . . .	76
FIGURA 5.6 – Termos de valência do fator de forma eletromagnético do pión normalizado em função do momento quadrático transferido $q^2$ . Calculado com vários referenciais. . . . .	77
FIGURA 5.7 – Termos de pares do fator de forma eletromagnético do pión normalizado em função do momento quadrático transferido $q^2$ . Calculado com vários referenciais. . . . .	78

# Lista de Tabelas

TABELA 5.1 – Raio de carga e a constante de decaimento do pión. . . . .	71
TABELA A.1 – Números quânticos para os quarks e antiquarks. . . . .	92

# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	14
2	MODELO PARA O PÍON . . . . .	19
2.1	Modelo para o pión no espaço de Minkowski . . . . .	19
2.2	Definição do vértice quark-pión . . . . .	23
2.3	Modelo de propagador para o quark . . . . .	26
2.4	Amplitude de Bethe-Salpeter . . . . .	29
2.5	Representação de Källen-Lehmann . . . . .	31
2.6	Representação integral da amplitude de Bethe-Salpeter . . . . .	33
3	FUNÇÃO DE ONDA NA FRENTE DE LUZ . . . . .	35
3.1	Decomposição espinorial da função de onda . . . . .	37
3.2	Função de onda de valência . . . . .	39
3.2.1	Componente pseudoescalar . . . . .	44
3.2.2	Componente pseudovetorial . . . . .	45
3.3	Resultado numérico da função de onda . . . . .	46
3.4	Função distribuição . . . . .	52
4	ESTRUTURA ELETROMAGNÉTICA DO PÍON . . . . .	54
4.1	Pión, quark e fator de forma . . . . .	55
4.2	Corrente eletromagnética do pión . . . . .	57
4.3	Termos de pares . . . . .	63
4.4	Dependência do referencial para $J_{\pi}^{+V}(k; P, P')$ e $J_{\pi}^{+Z}(k; P, P')$ . . . . .	65
4.5	Constante de decaimento eletrofraca do pión . . . . .	66

---

5	OBSERVÁVEIS ELETROFRACOS DO PÍON . . . . .	69
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	80
	REFERÊNCIAS . . . . .	83
	APÊNDICE A – REVISÃO BREVE DA CROMODINÂMICA QUÂNTICA . . . . .	91
	APÊNDICE B – COORDENADAS NA FRENTE DE LUZ . . . . .	97
	<b>B.1</b> Breve revisão da cinemática e dinâmica na frente de Luz . . . . .	97
	APÊNDICE C – A IDENTIDADE DE WARD-TAKAHASHI . . . . .	100
	<b>C.1</b> Vértice quark-fóton . . . . .	100
	APÊNDICE D – TRAÇO DA CORRENTE ELETROMAGNÉTICA . . . . .	103
	APÊNDICE E – SUPRESSÃO DOS TERMOS DE PARES . . . . .	108

# 1 Introdução

O tema da presente tese de doutorado versa sobre a estrutura eletromagnética de hádrons com graus de liberdade de quarks, onde propomos o *ansatz* no vértice da amplitude de Bethe-Salpeter (CLOET *et al.*, 2013) e em resultados de Cromodinâmica Quântica (QCD) na rede no espaço Euclidiano. Esses resultados de QCD na rede quando disponíveis poderão ser utilizados como base de parametrizações fenomenológicas das amplitudes de Bethe-Salpeter na Frente de Luz (FL).

O presente doutorado consistiu na utilização da teoria quântica de campos e o formalismo da frente de luz, com o objetivo de descrever e prever propriedades eletrofracas de hádrons baseados na cromodinâmica quântica (QCD) no regime não-perturbativo. A proposta da tese é a inclusão da auto-energia dos quarks como prevista por cálculos de QCD na rede no espaço Euclidiano, em modelos fenomenológicos de mésons leves, em particular do pión, onde modelamos a amplitude de Bethe-Salpeter, para em seguida obtermos seus observáveis. Dentre os mésons leves que pretendemos estudar no futuro, estão os pseudoescalares, káon, os vetoriais, como o méson  $\rho$  e generalizar o modelo para bárions, em particular para o próton. Especificamente, estudamos o pión, construindo um modelo a quarks constituintes com auto-energia nos quarks e no vértice pseudoescalar. A obtenção dos resultados para a função de onda de valência e do fator de forma eletromagnético do pión é difícil se considerarmos termos logarítmicos, que naturalmente aparecem com estrutura perturbativa da QCD para a função de massa dos quarks em grandes momentos. Considerando essas contribuições logarítmicas, a integração analítica torna-se difícil, e a simplicidade de apenas lidarmos com pólos dos propagadores dos quarks no plano complexo é perdida (ROJAS *et al.*, 2013). Apesar destas simplificações, verificamos que os cálculos para os observáveis do pión, tais como fator de forma eletromagnético,  $F_\pi(q^2)$ , raio quadrático médio,  $\langle r^2 \rangle$ , e constante de decaimento eletrofraco,  $f_\pi$ , estão de acordo com os resultados experimentais, onde a função de massa dos quarks,  $M(p)$ , descreve a massa do quark no regime não-perturbativo da QCD, assim podemos remover os termos logarítmicos em  $M(p)$  (DUDAL *et al.*, 2013; DUDAL *et al.*, 2016) presentes na descrição da massa do quark no regime da QCD perturbativa. Os parâmetros de  $M(p)$  foram ajustados através dos resultados proveniente da QCD na rede (PARAPPILLY *et al.*, 2006).

Neste trabalho, incluímos a parte escalar da auto-energia do pión no vértice da am-

plitude de Bethe-Salpeter , a qual descreve a estrutura interna do pión. De modo que possamos, em particular, calcular seus observáveis, como citados anteriormente, em energias baixas e intermediárias. Utilizamos um modelo com quarks constituintes (MELO, 1998; SILVA *et al.*, 2012; MELLO *et al.*, 2015; MELLO *et al.*, 2013) para descrever os observáveis do pión. O presente modelo incorpora a dependência com o momento da massa dinâmica do quark (*running mass*) como já sugerido nas referências (DUDAL *et al.*, 2013; MARIS; ROBERTS., 2003; ROJAS *et al.*, 2013).

Os cálculos realizados utilizam as técnicas de outros modelos da literatura (MELO *et al.*, 2002; MELO, 1998; SILVA *et al.*, 2012; CHUNG *et al.*, 1988; CLOET *et al.*, 2013; DUDAL *et al.*, 2013; ROJAS *et al.*, 2013; FANELLI *et al.*, 2016), que utilizam diferentes amplitudes de Bethe-Salpeter para o pión. Tais modelos utilizam a regularização de Pauli-Villars no vértice pión-quark-antiquark (MELO *et al.*, 2002; CHUNG *et al.*, 1988) e técnicas de Schwinger-Dyson (CLOET *et al.*, 2013; ROJAS *et al.*, 2013). No caso de partículas de spin-0, como o pión, pode-se obter sua função de onda de valência com as respectivas contribuições pseudoescalar e pseudovetoriais, decompondo-a em termos das matrizes de Dirac (decomposição espinorial). Verificamos que o modelo proposto nesta amplitude de Bethe-Salpeter, resulta em uma estrutura de Dirac da função de onda de valência contendo termos pseudoescalar e pseudovetorial.

Como explicamos anteriormente, mantivemos apenas uma estrutura com pólos e desconsideramos a contribuição de logaritmos na auto-energia dos quarks bem como na amplitude de Bethe-Salpeter do pión. Por esta razão, fazemos a amplitude de Bethe-Salpeter no formalismo da frente de luz (MELO, 1998), ao qual vamos integrar em termos da energia na frente de luz, via teorema de Cauchy (ITZYKZON; ZUBER, 1980), e assim obter analiticamente a componente de valência da função de onda.

A equação de Bethe-Salpeter é uma importante ferramenta para se investigar o regime não-perturbativo, em muitos casos na física em termos relativísticos (CHANG *et al.*, 2013). O desafio tem sido obter a solução desta equação com diferentes graus de aproximação, e com um ferramental matemático apropriado. Uma maneira de se obter a solução da equação de Bethe-Salpeter evitando a presença de pólos (BAKKER, 2011), é por exemplo, explorar a classe de rotações de Wick (DORKIN *et al.*, 2011). Utilizando a rotação de Wick, também é possível resolver as equações de Schwinger-Dyson para a auto-energia para momentos do tipo-espaço (veja ex. (DUDAL *et al.*, 2013; ROJAS *et al.*, 2013)).

Para descrevermos o estado ligado dos hádrons, como no caso do pión, os principais ingredientes do modelo de quarks constituintes (MELO, 1998), são o *ansatz* para a amplitude de Bethe-Salpeter dos mésons e a fórmula de tipo-Mandelstam (MANDELSTAM, 1955) para o fator de forma eletromagnético. Também podemos contar com teorias efetivas utilizadas para descrever hádrons, inspiradas na QCD (DUDAL *et al.*, 2013), e que podem ser úteis para mostrar a correlação direta entre diferentes propriedades hadrônicas. Desta

maneira, é possível fixar a dependência relevante dos observáveis com algumas escalas físicas, por exemplo, num modelo fenomenológico com resultados obtidos pela QCD na rede (DUDAL *et al.*, 2013; CLOET *et al.*, 2013). Um aspecto importante é a dependência da constante de decaimento eletrofraca de mésons pseudoescalares com relação a massa do estado ligado. Para mésons leves, como o pión, a constante de decaimento tende a aumentar com o aumento da massa (SILVA *et al.*, 2012; YABUSAKI *et al.*, 2015). Estudos baseados nas equações de Schwinger-Dyson, no limite de quarks pesados, mostram que a constante de decaimento eletrofraca é inversamente proporcional a massa do estado ligado (SALCEDO *et al.*, 2004).

Nos cálculos dos fatores de forma eletromagnéticos com a aproximação de impulso elástico, a qual se mostrou adequada para descrever a estrutura interna de mésons pseudoescalares, calculamos, através do diagrama triangular de Feynman, a componente “+” da corrente eletromagnética  $J^+ = J^0 + J^3$  do pión, de acordo com as referências (MELO, 1998; SILVA *et al.*, 2012). Escrevemos este modelo de quarks constituintes na Frente de Luz e assim podemos extrair os observáveis do pión explicitando o termo de valência da corrente eletromagnética.

Em geral, observamos que, utilizando apenas o termo de valência da corrente eletromagnética, obtem-se o fator de forma eletromagnético completo no referencial de Breit, onde o momento transferido  $q^\mu = (0, q^x, 0, 0)$  em  $F_\pi(q^2)$  e com a condição de Drell-Yan,  $q^+ = q^0 + q^z = 0$ , satisfeita. Enquanto que em outros referenciais a condição de Drell-Yan é violada,  $q^+ \neq 0$ , assim o fator de forma completo do pión apresenta, além de termo de valência, outros termos, sendo estes os termos de pares ou de não-valência que preservam a covariância (MELO, 1998; MELO *et al.*, 2004b; MELO *et al.*, 1999a; MELO; FREDERICO, 1997). Os termos de pares estão normalmente associados, do ponto de vista técnico, à presença de  $k^-$  oriundos, no caso de férmions, nos propagadores de Dirac e nos vértices quark-pión e quark-fóton quando obtemos a corrente eletromagnética,  $J_\pi^\mu$ , do pión. A presença desses termos de  $k^-$  em  $J_\pi^\mu$  indicam a existência de termos de pares em determinados referenciais, quando a condição de Drell-Yan não é satisfeita. A supressão desses termos é maior quando calculamos, com a fórmula de Mandelstam, o elemento de matriz da corrente eletromagnética do pión no referencial de Breit, com momento transferido apenas na direção “x”:  $q^\mu = (0, q^x, 0, 0)$ , que satisfaz a condição de Drell-Yan  $q^+ = 0$ , em que não há momento transferido ao pión na direção longitudinal. Considerando apenas a contribuição de valência a quebra de simetria rotacional do fator de forma, no referencial descrito acima, que inclusive já foi discutida nas referências (MELO *et al.*, 1999a; MELO *et al.*, 2006), no caso da componente  $J^- = J^0 - J^3$  da corrente eletromagnética do pión e também  $J^+ = J^0 + J^3$  (MELO, 1998).

O trabalho de (CHUNG *et al.*, 1988) foi generalizado para mésons pseudoescalares como para partículas de spin-1 (MELO, 1998; MELO; FREDERICO, 1997; MELLO *et al.*, 2014;



MELO *et al.*, 2015; MELLO *et al.*, 2015). Esse arcabouço teórico foi utilizado no contexto nuclear, em particular, para o cálculo dos fatores de forma do dêuteron. Neste contexto, a função de onda na frente de luz é construída como autofunção do operador de massa e a dependência cinemática nas coordenadas da frente de luz é facilmente obtida, assim como a separação das coordenadas do centro de massa (BRODSKY *et al.*, 1998).

As vantagens da descrição dos sistemas físicos na frente de luz foram discutidas em (NAMYSLOWSKI, 1985; HARINDRANATH, 1996). Primeiramente, uma partícula e a antipartícula na camada de massa podem ser distinguidas cinematicamente, pelo sinal do momento  $k^+$ , que implica no sinal da energia  $k^-$ . Outra propriedade é a supressão de pares virtuais produzidos pelo vácuo, conhecido como o vácuo trivial na frente de luz (BRODSKY *et al.*, 1998), embora contribuições de modo-zero podem ser relevantes, por exemplo na quebra espontânea da simetria quiral. Podemos construir operadores de criação e aniquilação de partículas definidas no plano nulo  $x^+ = 0$ , que atuam no espaço de Fock da frente de luz. Assim, no espaço de Fock considerando graus de liberdade de quarks e glúons, podemos descrever, em princípio, os hádrons. A teoria de perturbação é construída com estados intermediários que são caracterizados pelo número de partículas, que por sua vez encontram na sua camada de massa.

É importante observar, que sete, dos dez geradores de Poincaré são cinemáticos, ou seja, eles mantêm a dinâmica no plano nulo,  $x^+ = x^0 + x^3 = 0$ , invariante, e portanto há estabilidade do truncamento no espaço de Fock sob as transformações associadas a esses geradores (ARAÚJO *et al.*, 1995; ARAÚJO *et al.*, 2000). As interações entre as partículas que se encontram fora da região da camada de massa, são descritas pelo operador de massa quadrático  $M^2(m_a, m_b)$ , onde  $m_a$  e  $m_b$ , são as respectivas massas das partículas interagentes. Um aspecto relevante para a construção de modelos fenomenológicos é a possibilidade de adotar o referencial no centro de massa, e o concomitante uso do momento relativo de uma destas partículas, mediante a utilização do momento relativo,  $x = \frac{k^+}{P^+}$  (fração de momento de Bjorken) (NAMYSLOWSKI, 1985), onde  $k^+$  é o momento de um dos constituintes da partícula e  $P^+$  é o momento total.

A componente de valência da função de onda do estado ligado na frente de luz é obtida após a integração em  $k^-$  (energia na frente de luz) da amplitude de Bethe-Salpeter e é escrita em função do momento transversal  $k_\perp$  e da fração do momento  $x = \frac{k^+}{P^+}$  (NAMYSLOWSKI, 1985). A conexão com a função de onda não-relativística usual, surge quando a terceira componente do momento dos constituintes do méson é definida a partir do operador de massa livre,  $M_0(m_a, m_b)$ , do sistema de dois corpos. A diferença mais importante entre a abordagem relativística e a não-relativística vem do acoplamento com o momento angular e o spin. O acoplamento é realizado em termo dos espinores na frente de luz (NAMYSLOWSKI, 1985).

Os modelos mais simples da estrutura dos hádrons leves, além de um parâmetro de

escala, apresentam quark constituinte massivos (MELO, 1998; MELLO, 2013; MELLO *et al.*, 2014; MELLO *et al.*, 2015; MELLO *et al.*, 2013; MELLO *et al.*, 2015; MELO *et al.*, 2015). Assim o parâmetro de escala em baixas energias é de  $1 \text{ GeV}$  (gigaeletronvolt) e a massa dos quarks constituintes da ordem de  $0.330 \text{ GeV}$ , ou seja,  $\frac{1}{3}$  da massa do nucleon (GODFREY; ISGUR, 1985).

Após essa introdução geral, na qual mencionamos as características gerais do modelo da amplitude de Bethe-Salpeter do pión, que será estudado na tese, e inserindo nossa ideia no contexto de modelos fenomenológicos com quarks constituintes na frente de luz, vamos descrever brevemente o conteúdo dos capítulos a seguir.

No capítulo 2, estudamos a estrutura interna do méson  $\pi$ , partícula esta constituída de um quark “up”  $u$  e um antiquark “down”  $\bar{d}$ , com spin-0. Através de um modelo a quarks constituintes, podemos descrever a estrutura interna desta partícula no regime não-perturbativo.

No capítulo 3 projetamos a amplitude de Bethe-Salpeter na frente de luz e integramos em  $k^-$  (energia na frente de luz) e assim, obtemos a função de onda de valência do pión.

No capítulo 4, descrevemos a estrutura eletromagnética do pión através de seus observáveis eletrofracos como: o fator de forma eletromagnético, a constante de decaimento eletrofraca e o raio de carga. Analisamos os efeitos da auto-energia na obtenção de tais observáveis.

No capítulo 5, variamos os parâmetros das massas dos quarks constituintes do méson  $\pi$  de modo a obtermos um valor que não somente satisfizesse a condição para o estado ligado, mas que também permitisse os cálculos dos observáveis do pión.

No capítulo 6, apresentamos as considerações finais, as conclusões e algumas perspectivas de aplicações e generalização do modelo apresentado nesta tese.

## 2 Modelo para o pión

### 2.1 Modelo para o pión no espaço de Minkowski

Um dos objetivos fundamentais da física de partículas, tanto em teoria quanto em experimentos, é explorar a estrutura não-perturbativa dos hádrons. Experimentos serão realizados cuidadosamente para investigar a estrutura do nucleon no TJLAB (Thomas Jefferson Laboratory) com  $12\text{ GeV}$  (DUDEK *et al.*, 2012), em particular focando no estudo da estrutura eletromagnética, inclusiva e semi-inclusiva do espalhamento inelástico profundo com o elétron. Pelo lado teórico, a pesquisa será desenvolvida para as propriedades hadrônicas no regime não-perturbativo da interação forte. Essas propriedades são estudadas no espaço Euclidiano pelos cálculos de QCD na rede (MONTVAY; MUNSTER, 1997; STERMAN; STOLER, 1997; MUELLER, 1999; BEANE *et al.*, 2011) e pelos métodos de Schwinger-Dyson em QCD (CLOET; ROBERTS, 2014). No espaço de Minkowski, a diagonalização da hamiltoniana da QCD na Frente de Luz (BRODSKY *et al.*, 1998), vem sendo feita usando uma expansão na base do oscilador harmônico, pelo grupo de Iowa (VARY *et al.*, 2014; CHAKRABARTI *et al.*, 2014; WIECKI *et al.*, 2015a; WIECKI *et al.*, 2015b; LI *et al.*, 2016; ADHIKARI *et al.*, 2016). Além do espectro, esse grupo obtém a função de onda hadrônica no espaço de Fock na frente de luz, explorada através de observáveis tais como a distribuição de partons. Estes trabalhos demandam de alguns observáveis, tais como, fatores de forma eletromagnéticos e as distribuições partônicas em um enorme esforço computacional (VARY *et al.*, 2014) mas estão hoje em dia se tornando cada vez mais viáveis. Contudo, o estudo da QCD não-perturbativa por métodos desenvolvidos diretamente no espaço de Minkowski, ainda é muito desafiador. Com isto, modelos fenomenológicos são requisitados para estudar a estrutura de hádrons e a obtenção de resultados mais detalhados no espaço de Minkowski.

Modelos dinâmicos que incorporam a quebra espontânea da simetria quiral já foram explorados, como na referência (BRONIOWSKI *et al.*, 2010), onde a função de onda do pión a partir de modelos com simetria quiral foram extraídas e comparadas com a QCD na rede. Além disto, as funções de distribuição para o pión (DOROKHOV *et al.*, 2011) também foram estudadas.

Da mesma forma, mas utilizando a teoria espectadora covariante (GROSS, 1969), formulada no espaço de Minkowski com confinamento, foi estudado as massas para os quarks, a quebra espontânea de simetria quiral e a estrutura do pión (BIERNAT *et al.*, 2014b; BIERNAT *et al.*, 2014; PENA *et al.*, 2016) em particular, o fator de forma eletromagnético do pión (BIERNAT *et al.*, 2014a). Outros modelos, que tem uma simetria completa de conjugação de carga, fornecem uma boa aproximação para o fator de forma eletromagnético do pión (BIERNAT *et al.*, 2015).

Um outro exemplo de uma abordagem não-perturbativa, para os espectros de mésons pseudoescalares e vetoriais, com um modelo de quarks constituintes na frente de luz e associado a um tratamento variacional, pode ser encontrado em (CHOI *et al.*, 2015). Em um tratamento covariante, com o modelo de Nambu e Jona-Lasinio, a dependência do momento transversal do pión na distribuição de partons foi abordado em (NOGUERA; SCOPETTA, 2015).

Por outro lado, temos a opção de tratar diretamente os observáveis eletrofracos com a frente de luz ou com modelos covariantes. A literatura sobre este assunto é muito rica e começou a muito tempo (KONDRATYUK; TARENTÉV, 1980; FREDERICO; MILLER, 1994), que apesar de sua simplicidade, implementa corretamente os *boosts* cinemáticos às propriedades das amplitudes correspondentes em processos exclusivos (BRODSKY *et al.*, 1998).

Na física hadrônica, podemos usar modelos formulados na frente de luz, com graus de liberdade de quarks constituintes, obtendo-se uma forma analítica, com a fórmula de Mandelstam, da amplitude de Bethe-Salpeter (ABS). Assim podemos calcular os fatores de forma eletromagnéticos, como no caso do méson  $\rho$  (MELO; FREDERICO, 1997; BERNARD *et al.*, 2002; MELO *et al.*, 2015), e mésons pseudoescalares (MELO *et al.*, 1999a; MELO *et al.*, 2002; SILVA *et al.*, 2012; YABUSAKI *et al.*, 2015), fatores de forma de transição entre mésons pseudoescalares e vetoriais (BAKKER *et al.*, 2003), além das distribuição de partons generalizadas (FREDERICO *et al.*, 2009; FANELLI *et al.*, 2016).

Uma característica comum entre estes modelos, é que a massa dos quarks constituintes são independentes do momento. Por outro lado, os cálculos da QCD na rede, usando o espaço Euclidiano, predizem para os quarks leves, uma auto-energia variando com o momento (*running*), que na escala do infravermelho dá um valor compatível com a massa dos quarks constituintes, ou seja, da ordem de  $0.3 \text{ GeV}$ .

Portanto, modelos fenomenológicos definidos no espaço de Minkowski, podem, a partir da utilização de uma massa para os quarks *running*, ser compatíveis com os cálculos da QCD na rede no espaço Euclidiano para o momento tipo-espaço (PARAPPILLY *et al.*, 2006).

O progresso na construção da ponte entre os espaços Euclidiano e de Minkowski foi estendida analiticamente utilizando-se a representação integral de Nakanishi (RIN) (CHANG

*et al.*, 2013). Nesta linha de trabalho, a distribuição de momentos (*distribution amplitude*) foi obtida utilizando cálculos de QCD na rede (CLOET *et al.*, 2013).

De um ponto de vista geral, as representações integrais de funções de dois e três pontos, como a representação espectral de Källén-Lehmann (ITZYKZON; ZUBER, 1980) e a representação integral de Nakanishi (NAKANISHI, 1971) respectivamente, são uma ferramenta útil para ampliar a aplicabilidade dos cálculos no espaço Euclidiano, como os obtidos por exemplo, com QCD na rede, para construir as amplitudes no espaço de Minkowski. De fato, recentemente foi utilizado a representação de Källén-Lehmann (KL) para obter a densidade espectral do propagador do glúon a partir da QCD na rede com este propagador na região tipo-espaço (DUDAL *et al.*, 2014). Foi verificado que a violação da restrição da positividade da densidade espectral acontece, como poderia ser esperado desde que os glúons têm cor e não correspondem a um estado físico da QCD. Conclusão similar foi encontrada a partir das soluções das equações de Schwinger-Dyson para o propagador do glúon (STRAUSS *et al.*, 2012).

Com relação a amplitude de Bethe-Salpeter (ABS), a representação integral de Nakanishi (RIN) associada com a projeção na frente de luz foi aplicada para resolver problemas não-perturbativos no espaço de Minkowski, como a solução do estado ligado da equação de Bethe-Salpeter em modelos escalares (KARMANOV; CARBONELL, 2006; FREDERICO *et al.*, 2014; GIGANTE, 2014), para dois férmions (CARBONELL; KARMANOV, 2010; GIGANTE *et al.*, 2017) e o espalhamento (FREDERICO *et al.*, 2012; FREDERICO *et al.*, 2015). Também foi utilizada para explicar a estrutura do estado ligado no espaço de Minkowski, utilizando as ABS's (GUTIERREZ *et al.*, 2016), onde em particular a extensão analítica da representação integral para o espaço Euclidiano foi cuidadosamente feita. Deste modo, podemos estudar a estrutura hadrônica utilizando a representação de Nakanishi das ABS's, estendendo os cálculos no espaço Euclidiano para o espaço de Minkowski com um ganho na compreensão dos observáveis associados.

Neste trabalho, estudamos a estrutura eletromagnética do pión no espaço de Minkowski descrito em termos de um modelo cuja ABS permite obtermos uma expressão analítica para a função de onda de valência, combinados com os cálculos da QCD na rede no espaço Euclidiano (ROJAS *et al.*, 2013). O presente modelo leva em conta a massa dos quarks variando (uma massa *running*), que é ajustada aos dados da QCD na rede para o momento tipo-espaço (PARAPPILLY *et al.*, 2006). O *ansatz* da função para massa do quark, tem um único pólo adicionado à massa do quark de corrente (ROJAS *et al.*, 2013; DUDAL *et al.*, 2016), com isso foi construído o propagador do quark, que será analisado através da representação KL. Mostramos que as restrições de positividade são violadas neste caso.

Após isto, a ABS para o pión, foi construída baseando-se na componente pseudoescalar do vértice deste méson, o que está diretamente relacionado com a função de massa do quark, consistente com os requisitos impostos pela dinâmica de quebra espontânea da

simetria quiral no limite de massa do quark de corrente nula. Essa relação origina-se da identidade de Ward-Takahashi quiral para a corrente axial-vetor (CLOET; ROBERTS, 2014).

Além disso, construímos a representação integral de Nakanishi da amplitude de Bethe-Salpeter do pión considerando a massa *running* do quark, o que generaliza o modelo proposto em (FANELLI *et al.*, 2016). A performance do *ansatz* foi testada com respeito aos dados experimentais para a constante de decaimento do pión e o fator de forma eletromagnético. Neste modelo, impomos a identidade de Ward-Takahashi para o quark, o qual é suficiente para assegurar a conservação da corrente eletromagnética do pión.

A proposta do presente trabalho, vai além de modelos anteriores, (MELO *et al.*, 1999a; MELO *et al.*, 2002; FREDERICO *et al.*, 2009; MELO *et al.*, 2004b), por considerar a auto-energia do quark no vértice do pión-quark-antiquark e nos propagadores. Acreditamos que é importante para outras aplicações, tais como calcular observáveis no espaço de Minkowski associados com a função de onda do pión na frente de luz, como por exemplo a distribuição generalizada de partons (FANELLI *et al.*, 2016) e a distribuição de momento transversal do pión (NOGUERA; SCOPETTA, 2015; LORCÉ *et al.*, 2016). Nós poderíamos fornecer previsões para a distribuição de partons dependente do momento transversal não-polarizado (TMD) e discutirmos sua propriedade tanto na escala do modelo quanto após a evolução da TMD para escalas mais altas que são relevantes para as próximas medições experimentais.

Para obter a função de onda de valência para o pión, utilizamos o *ansatz* que inclui a parte escalar da auto-energia do pión no vértice quark-pión. Assim a função de massa do quark na ABS representa a parte escalar da auto-energia do quark nos propagadores dos quarks, conforme iremos observar, segundo as condições definidas no modelo, e também para descrever a estrutura do vértice pión-quark-antiquark (CHANG *et al.*, 2013; ROJAS *et al.*, 2013). Para que a Identidade de Ward-Takahashi quiral seja satisfeita, no limite quiral, no vértice quark-pión deve-se incluir a função de massa dinâmica do quark, onde propomos que a massa do quark de corrente seja nula no vértice, a fim de atender a convergência da integração no *loop* de momento na função de três pontos (representado pelo diagrama triangular de Feynman) durante a integração para obter a corrente eletromagnética do pión, e ao mesmo tempo ter a invariância de Lorentz preservada.

Para obter uma expressão analítica para o propagador dos quarks, efetuamos uma simplificação do mesmo com relação a auto-energia do quark, desconsiderando termos logarítmicos e incluindo apenas um pólo simples. Neste propagador fazemos uso apenas da função de massa ajustada a resultados de QCD na rede (DUDAL *et al.*, 2013).

No entanto, verificamos que esta restrição deve-se ao fato de incluirmos a estrutura logarítmica na função de massa dos quarks, e proveniente de contribuições perturbativas

da QCD, isto por sua vez, permite calcular a função da auto-energia do quark para grandes momentos (veja por exemplo (ROJAS *et al.*, 2013)). Segundo a referência (DUDAL *et al.*, 2013), podemos retirar a estrutura logarítmica para descrever a auto-energia do quark. Desta maneira conseguimos obter uma expressão analítica para a função de onda do pión com a auto-energia nos propagadores dos quarks e considerando a estrutura do vértice, uma vez que a projeção na frente de luz da amplitude de Bethe-Salpeter, feita através da integração analítica no momento  $k^-$ , é possível com a função de massa dos quarks sem a estrutura logarítmica, que consistentemente é também desconsiderada no vértice quark-pión, como será discutido a seguir.

## 2.2 Definição do vértice quark-pión

O pión é um méson formado por um par quark-antiquark no estado  $0^-$ . Nesse caso, podemos escrever a seguinte forma geral para o vértice (CHANG *et al.*, 2013; HALZEN, 1984):

$$\begin{aligned} \Gamma_\pi(k, P) = & \gamma_5 [iE_\pi(k, P) + \not{P}F_\pi(k, P) + k^\mu P_\mu \not{k}G_\pi(k, P) \\ & + \sigma_{\mu,\nu} k^\mu P^\nu H_\pi(k, P)] , \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde  $\sigma_{\mu,\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu]$ ,  $\not{k}$  representa a contração  $\gamma^\mu k_\mu$  e  $\not{P}$  idem. O quadrimomento é  $P^\mu$ . Os momentos individuais nas “pernas” externas do vértice, estão na Fig. (2.1), e associados aos quarks são  $k^\mu \pm \frac{P^\mu}{2}$ .

O vértice quark-pión, tendo a massa do estado ligado do pión, para massa de corrente do quark,  $m_0$ , igual a zero, tem um termo proporcional a  $\gamma^5$ , com  $E_\pi(k, 0)$  completamente determinado pela parte escalar da auto-energia (CLOET; ROBERTS, 2014). Deste modo, podemos considerar apenas a parte pseudoescalar da estrutura de Dirac, uma vez que  $F_\pi$ ,  $G_\pi$  e  $H_\pi$ , que são diferentes de zero em geral não contribuem quando  $m_\pi = 0$ , devido a necessidade da amplitude do pión de satisfazer a identidade de Ward-Takahashi (CLOET; ROBERTS, 2014). A quebra de simetria quiral, é portanto uma condição suficiente e necessária para aparecimento de constituintes massivos, que no limite quiral  $m_0 = 0$  dominam a componente axial do vértice. O pión é o bóson de Goldstone, oriundo da quebra espontânea da simetria quiral, e lembramos que nesse caso,  $m_\pi^2 \propto m_0$  de acordo com a relação de Gellman-Oakes-Renner (FREDERICO; MILLER, 1992). Desta forma, a massa do pión é proporcional ao termo que quebra explicitamente a simetria quiral na Lagrangenana da QCD, como ditado pelo teorema de Dashen (DASHEN; WEINSTEIN, 1969), no limite em que  $m_0 \rightarrow 0$ .

Temos que  $\Gamma_\pi(k, P)$ , Fig. (2.1), é o vértice quark-pión,  $k$  é o momento interno (mo-



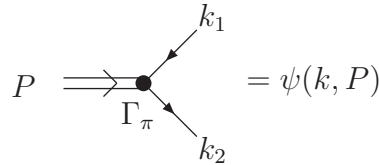


FIGURA 2.1 – Vértice quark-píon.

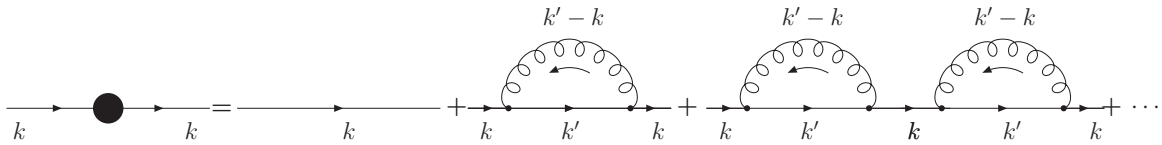


FIGURA 2.2 – Auto-energia do quark.

mento relativo entre o par quark e antiquark), os quais podemos decompor como:

$$k_1 = k - \frac{P}{2} \quad ; \quad k_2 = k + \frac{P}{2} . \quad (2.2)$$

Como discutimos acima, no limite quirral, ou seja, quando  $m_\pi = 0$ , somente a contribuição da componente pseudoescalar do vértice é diferente de zero, temos,

$$\Gamma_\pi(k, 0) = i\gamma_5 E_\pi(k, 0) . \quad (2.3)$$

Assim, podemos relacioná-la com o termo escalar da auto-energia no propagador dos quarks,

$$f_\pi E_\pi(k, 0) = \bar{B}(k) \Rightarrow \Gamma_\pi(k, 0) = i\gamma_5 \frac{\bar{B}(k)}{f_\pi} , \quad (2.4)$$

colocando desta forma,  $\bar{B}(k)$ , no vértice  $\Gamma_\pi(k, P)$ , e construir um modelo para a amplitude de Bethe-Salpeter do píon. Através desta quantidade obtemos a componente de valência da função de onda do píon na frente de luz.

A amplitude de Bethe-Salpeter é construída como:

$$\psi(k, k_1, k_2) = S(k_1)\Gamma_\pi(k, k_1, k_2)S(k_2) , \quad (2.5)$$

O propagador do quark, por exemplo na aproximação de escada “arco-íris” (CLOET; ROBERTS, 2014) é representado na Fig. (2.2), e a série geométrica é representada por:

$$S(k) = Z(k) \frac{i}{\not{k} - m_0 - \Sigma(k)} . \quad (2.6)$$



onde a função escalar,  $Z(k) \equiv Z(k^2)$ , é o fator de renormalização da função de onda do quark. Na região do ultravioleta seu valor é  $Z(k^2 = 0) = 0.8$ . Conforme analisado na Ref. (DUDAL *et al.*, 2013), podemos aproximar  $Z(k^2) = 1$  para todo valor de  $k^2$ , sem que haja perda significativa de informação do propagador do quark. Este recurso se faz necessário para obtenção de uma função de onda com solução analítica. Podemos observar que a forma Eq. (2.6) é geral, indo além da aproximação de escada “arco-íris”, e é simplesmente a forma covariante mais geral para o propagador de quarks.

Dando prosseguimento à construção do propagador de férmions adotado neste trabalho, temos que:

$$S(k) = \frac{i}{\bar{A}(k)\not{k} - \bar{B}(k)} = iZ(k) \frac{\not{k} + M(k)}{k^2 - M^2(k) + i\epsilon}, \quad (2.7)$$

onde,

$$M(k) = Z(k)\bar{B}(k) \Rightarrow Z(k) := 1 \rightarrow \bar{B}(k) = M(k), \quad (2.8)$$

é a auto-energia para os quarks,  $\Sigma(k) \equiv \Sigma(k^2)$ , (CHANG *et al.*, 2013), com valor dado por  $Z(k) = [\bar{A}(k)]^{-1}$  e  $\Sigma(k) \equiv \Sigma(k^2)$ , onde  $\bar{A}(k) \equiv \bar{A}(k^2)$ , implica em  $\Sigma(k) + m_0 = \bar{B}(k)$ , onde  $\bar{B}(k) \equiv \bar{B}(k^2)$ , com a renormalização da função de onda,  $Z(k) := 1$ , quando a parte vetorial da função vestida dos quarks é igual a  $\bar{A}(k) := 1$ . Esta aproximação permite simplificar os cálculos da função de onda do pión e seus observáveis com,

$$M(k) = m_0 - \frac{m^3}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon}, \quad (2.9)$$

$Z(k)$  é a renormalização da função de onda do quark,  $\lambda$  e  $m$  são parâmetros de massa que permitem ajustar a função de massa dinâmica do quark,  $M(k) \equiv M(k^2)$ , com os dados da QCD na rede (PARAPPILLY *et al.*, 2006).

Para obtenção dos observáveis eletrofracos do pión, primeiro transformamos o momento quadrático na função de massa dinâmica do quark, do espaço Euclidiano (E) para o espaço de Minkowski (M), mediante transformação de  $k^2 \rightarrow -k^2$  em

$$M(k^2)_E = m_0 + \frac{m^3}{k^2 + \lambda^2 - i\epsilon} \Rightarrow M(k^2)_M = m_0 - \frac{m^3}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon}, \quad (2.10)$$

de maneira que os observáveis e a função de onda do pión sejam obtidas no espaço de Minkowski.

Esta definição para  $\bar{B}(k)$  também se aplica para a Eq. (2.4). Portanto temos,

$$\Gamma_\pi(k) = i\gamma_5 \left. \frac{M(k)}{f_\pi \sqrt{Z(k)}} \right|_{m_0=0}, \quad (2.11)$$

sendo este o vértice pión-quark-antiquark proposto no presente modelo. Note que no vértice quark-pión, a massa de corrente é anulada na expressão para a massa constituinte. Isso faz com que, tanto o fator de forma eletromagnético como a constante de decaimento sejam finitas, eliminando a necessidade da introdução de outra escala de regularização nos “*loops*” de momento.

Nas próximas seções, discutiremos em detalhes o modelo adotado para o propagador dos quarks e amplitude de Bethe-Salpeter do pión. Utilizaremos os resultados da QCD na rede, no calibre de Landau, para obter os parâmetros da função de massa dos quarks constituintes e desta forma a amplitude de Bethe-Salpeter do pión, que será utilizada na construção da componente de valência da função de onda e nos observáveis eletrofracos. Lembramos que os observáveis devem ser independentes do calibre utilizado, enquanto o propagador, que por sua vez depende do calibre, é obtido, bem como o vértice quark-pión.

## 2.3 Modelo de propagador para o quark

Em geral os propagadores de férmions podem ser escritos como:

$$S_F(k) = i Z(k^2) [\not{k} - M(k^2) + i\epsilon]^{-1} . \quad (2.12)$$

No presente modelo, não consideramos a dependência do momento do fator de normalização da função de onda do quark,  $Z(k^2)$ , e adotamos o propagador do quark vestido,

$$S_F(k) = i (\not{k} - M(k^2) + i\epsilon)^{-1} , \quad (2.13)$$

onde utilizamos  $Z(k^2) = 1$ .

Este *ansatz* sugerido ao longo dos anos (PAGELS; STOKAR, 1979; CORNWALL, 1980; PAGELS; STOKAR, 1980; CORNWALL, 1982), simplifica nossos cálculos dos observáveis eletrofracos do pión no espaço de Minkowski.

Observamos que os resultados da QCD na rede (PARAPPILLY *et al.*, 2006), mostram a dependência do momento em  $Z(k^2)$ , o qual tem um valor cerca de 0.8 para  $k^2 = 0$ . Utilizamos a seguinte parametrização da função de massa,

$$M(k^2) = m_0 - m^3 [k^2 - \lambda^2 + i\epsilon]^{-1} , \quad (2.14)$$

já feito ao ajuste dos cálculos da QCD na rede no calibre de Landau (DUDAL *et al.*, 2016).

Os parâmetros da função de massa *running* são dados por

$$m_0 = 0.014 \text{ GeV}, \quad m = 0.574 \text{ GeV} \quad \text{e} \quad \lambda = 0.846 \text{ GeV} , \quad (2.15)$$

---

modificados dentro a margem de erro da referência (ROJAS *et al.*, 2013; DUDAL *et al.*, 2016).

Os parâmetros apresentados acima, foram utilizados para calcular o raio de carga do pión,  $r_\pi = \sqrt{\langle r^2 \rangle}$ , e a constante de decaimento eletrofraca (OLIVE *et al.*, 2014),  $f_\pi$ , como nós apresentaremos nas seções a seguir.

### Função de massa dinâmica do quark

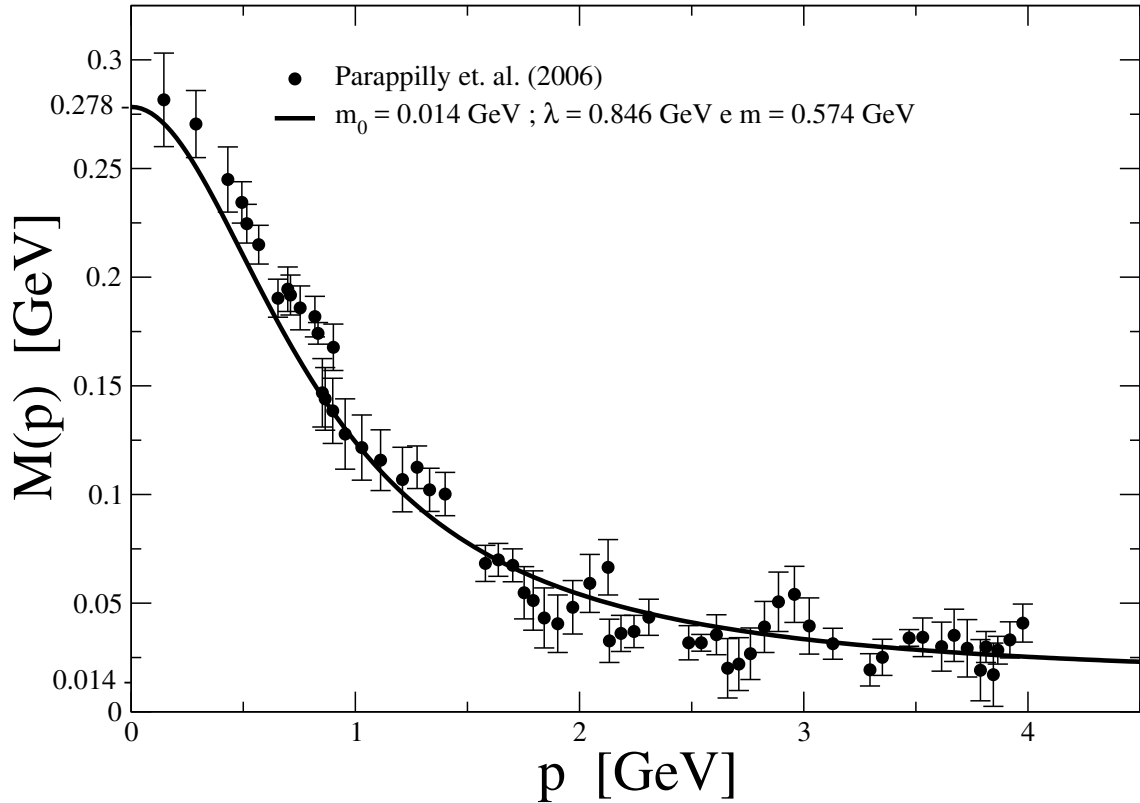


FIGURA 2.3 – Função de massa dinâmica do quark em função do quadrimomento  $p$ . Os resultados da QCD na rede são da referência (PARAPPILLY *et al.*, 2006).

Os parâmetros da QCD na rede no calibre de Landau na função da massa dinâmica dos quarks foram calculados a partir dos dados apresentados na Fig. (2.3). Podemos também ajustá-la pela constante de decaimento do pión.

A função de massa *running*, com a nossa escolha de parâmetros, é mostrado na Fig. (2.3) e comparada com os cálculos da QCD na rede no calibre de Landau (PARAPPILLY *et al.*, 2006). Observamos que os resultados obtidos estão de acordo com os resultados da QCD na rede considerando as barras de erros (PARAPPILLY *et al.*, 2006).

Podemos comparar com a referência. (ROJAS *et al.*, 2013), que tem uma parametrização sofisticada incluindo os log's, que no presente modelo nós não consideramos para simplificar as integrações no *loop* no espaço de Minkowski associados com os observáveis eletrofracos do pión.

## 2.4 Amplitude de Bethe-Salpeter

O pión é um méson pseudoescalar, composto principalmente por um quark e um antiquark, tendo três estados possíveis, sendo dois polarizados,  $\pi^+$  e  $\pi^-$ , e um neutro,  $\pi^0$ . Estados com spin total igual a zero e paridade negativa. O ingrediente chave do modelo, que inclui a auto-energia do pión no vértice quark-pión, é o limite quiral, onde a massa do quark de corrente desaparece e a auto-energia está relacionada com o vértice de Bethe-Salpeter (BS) do pión.

O vértice do pión-quark-antiquark, denotado por  $\Gamma_\pi(k, P)$ , com as “pernas” dos quarks externas removidas. No canal isovetorial e pseudoescalar o vértice de BS tem a forma geral descrito na Eq. (2.1) com  $P^2 = m_\pi^2$ . Em nossos cálculos consideramos o limite quiral, em que a massa do quark de corrente é adotada como  $m_0 = 0$  e  $m_\pi = 0$ . Neste caso o vértice do pión pode ser escrito como na Eq. (2.11) (veja exemplo em (CLOET; ROBERTS, 2014; CHANG *et al.*, 2013)):

$$f_\pi E_\pi(k, P) = M(k)|_{m_0=0} , \quad (2.16)$$

onde  $f_\pi$  é a constante eletrofraca do pión e somente a parte escalar da auto-energia aparece na igualdade acima.

A ABS do pión para o presente modelo, que incorpora os efeitos do quark vestido através da massa *running*, é escrito como visto na Eq. (2.5):

$$\psi_\pi(k; P) = S_F(k + P/2)\Gamma_\pi(k; P)S(k - P/2) , \quad (2.17)$$

onde os quarks estão em uma escala sem cor e  $k$  é o momento relativo.

Considerando o limite quiral, que satisfaz a identidade de Wark-Takahashi quiral, e adotando que a massa do quark de corrente desaparece no vértice quark-pión  $m_0 = 0$  e  $m_\pi = 0$ , onde somente a contribuição pseudoescalar sobrevive no vértice, o que simplifica ainda mais o modelo,

$$\Gamma_\pi(k; P) = iN\gamma^5 M(k)|_{m_0=0} , \quad (2.18)$$

onde  $N$  é a constante de normalização encontrada ao impor ao fator de forma eletromagnético a condição que seja igual a 1 para momento transferido,  $q = P' - P = 0$ , zero. Em seguida, introduzindo a forma fatorizada do propagador de quarks (CLOET; ROBERTS, 2014) e a função do vértice (BIERNAT *et al.*, 2014b) na ABS do pión (PENA *et al.*, 2016),

no presente modelo lê-se:

$$\psi_\pi(k; P) = - \frac{\left[ \left( k + \frac{P}{2} \right)^2 - \lambda^2 \right]^2 \left( \not{k} + \frac{\not{P}}{2} - m_0 \right) - \left[ \left( k + \frac{P}{2} \right)^2 - \lambda^2 \right]^2 m^3}{\prod_{i=1}^3 \left[ \left( k + \frac{P}{2} \right)^2 - m_i^2 + i\epsilon \right]} \times \frac{N\gamma^5 m^3}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \frac{\left[ \left( k - \frac{P}{2} \right)^2 - \lambda^2 \right]^2 \left( \not{k} - \frac{\not{P}}{2} - m_0 \right) - \left[ \left( k - \frac{P}{2} \right)^2 - \lambda^2 \right]^2 m^3}{\prod_{i=1}^3 \left[ \left( k - \frac{P}{2} \right)^2 - m_i^2 + i\epsilon \right]}. \quad (2.19)$$

A posição dos pólos tipo-tempo, ou seja,  $m_i$  são calculados a partir dos parâmetros do modelo, sendo  $m$ ,  $m_0$  e  $\lambda$ , determinados a partir do ajuste dos cálculos da QCD na rede para a massa *running* do quark para o momento tipo-espaço, como mostrado na Fig. (2.3).

Destacamos que a escolha da função do vértice (BIERNAT *et al.*, 2014b), torna as integrais de *loop* para o fator de forma eletromagnético e a constante de decaimento finitas e elimina as divergências tipo-logaritmos para o momento na região do ultravioleta, que aparece quando a massa do quark e o vértice vão para valores constantes. Embora a massa *running* do quark vá a  $m_0$  (veja Fig. (2.3)), quando para grandes momentos, a função do vértice diminui rapidamente para  $\approx \frac{1}{k^2}$ , o que elimina as divergências logarítmicas nas integrais. Pode-se observar que os modelos apresentados a seguir, utilizam a regularização de Pauli-Villars (MELO *et al.*, 2002; FREDERICO *et al.*, 2009; FANELLI *et al.*, 2016) no vértice quark-píon, assim pode-se obter a convergência da corrente eletromagnética do píon. Esses modelos do píon são resumidos na fórmula:

$$\psi_\pi(k; P) = - \frac{\not{k} + \frac{\not{P}}{2} + M_q}{\left( k + \frac{P}{2} \right)^2 - M_q^2 + i\epsilon} \gamma^5 \Lambda_\pi(k; P) \frac{\not{k} - \frac{\not{P}}{2} + M_q}{\left( k - \frac{P}{2} \right)^2 - M_q^2 + i\epsilon}, \quad (2.20)$$

onde  $M_q$  é a massa do quark constituinte, e a componente do momento do vértice,  $\Lambda_\pi(k; P)$  é definido em termos dos reguladores de Pauli-Villars:

$$\Lambda_\pi(k; P) = N \left[ \frac{1}{\left( k + \frac{P}{2} \right)^2 - m_R + i\epsilon} + \frac{1}{\left( k - \frac{P}{2} \right)^2 - m_R + i\epsilon} \right], \quad (2.21)$$

para o *ansatz* da referência (MELO *et al.*, 2002), e

$$\Lambda_\pi(k; P) = N \frac{1}{\left[ \left( k + \frac{P}{2} \right)^2 - m_R + i\epsilon \right]} \frac{1}{\left[ \left( k - \frac{P}{2} \right)^2 - m_R + i\epsilon \right]}, \quad (2.22)$$

para o produto, utilizado na referência (FREDERICO *et al.*, 2009) e recentemente na (FANELLI *et al.*, 2016) para calcular a distribuição de partons generalizada do píon.

Neste trabalho, utilizamos a representação de Nakanishi (NAKANISHI, 1971), utilizada

como uma ferramenta para explorar as soluções da equação de Bethe-Salpeter para o estado ligado de bósons no estado fundamental (KARMANOV; CARBONELL, 2006; FREDERICO *et al.*, 2014) e estados excitados (GUTIERREZ *et al.*, 2016), para estado ligado de férmions (CARBONELL; KARMANOV, 2010; GIGANTE *et al.*, 2017) e estados excitados (FREDERICO *et al.*, 2012; FREDERICO *et al.*, 2015).

## 2.5 Representação de Källen-Lehmann

O presente modelo, tem pólos no propagador do quark,  $m_i^2 = M^2(m_i^2)$  ( $i$  indica a posição do pólo), que são obtidos ao resolvermos a equação cúbica:

$$m_i (m_i^2 - \lambda^2) = \pm [m_0 (m_i^2 - \lambda^2) - m^3] \quad (2.23)$$

o que permite fatorar o denominador do propagador do quark do modelo como:

$$S_F(k) = i \frac{(k^2 - \lambda^2)^2 (\not{k} + m_0) - (k^2 - \lambda^2) m^3}{\prod_{i=1,3} (k^2 - m_i^2 + i\epsilon)}. \quad (2.24)$$

Com parâmetros dados na Eq. (2.15), os pólos são reais e com valores de  $m_1 = 0.327 \text{ GeV}$ ,  $m_2 = 0.644 \text{ GeV}$  e  $m_3 = 0.954 \text{ GeV}$ , obtidos resolvendo-se a Eq. (2.23). Embora o propagador do quark do modelo tenha pólos reais, e  $m_1$  assemelha-se a massa constituinte, ou alternativamente  $M(k^2 = 0) = m_0 + m^3/\lambda^2 = 0.278 \text{ GeV}$ . Vale salientar que o confinamento dos quarks, está associado com a ausência de estados assintóticos de quarks livres na QCD.

O nosso modelo simplificado, apresenta pólos para momentos tipo-tempo, enquanto que a solução das equações de Schwinger-Dyson para o propagador do quark no espaço Euclidiano, sugere pares de pólos no plano complexo (CLOET; ROBERTS, 2014), evitando assim que os quarks possam propagar-se livremente. Apesar disso, vamos proceder com este modelo simplificado, que é bastante prático para a construção dos observáveis do pión no espaço de Minkowski, ou seja, as integrações do *loop* associadas com os observáveis são realizadas analiticamente. O propagador do quark pode ser escrito como

$$S_F(k) = i [A(k^2) \not{k} + B(k^2)]. \quad (2.25)$$

A decomposição espectral (ITZYKZON; ZUBER, 1980):

$$A(k^2) = \int_0^\infty d\mu^2 \frac{\rho_A(\mu^2)}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \quad \text{e} \quad B(k^2) = \int_0^\infty d\mu^2 \frac{\rho_B(\mu^2)}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}, \quad (2.26)$$

onde as densidades espectrais são:

$$\rho_A(\mu^2) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} [A(\mu^2)] \quad \text{e} \quad \rho_B(\mu^2) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} [B(\mu^2)] . \quad (2.27)$$

Para uma partícula, que pertence a representação da matriz- $S$ , e que portanto é um estado observável, as densidades espectrais na representação de Källen-Lehmann (KL) satisfazem as restrições da positividade (ITZYKZON; ZUBER, 1980):

$$\mathcal{P}_a = \rho_A(\mu^2) \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_b = \mu \rho_A(\mu^2) - \rho_B(\mu^2) \geq 0 . \quad (2.28)$$

Como o quark carrega cor, ele não é um estado assintótico observável na representação da matriz- $S$ , portanto não temos garantia que seu propagador deva ter uma representação de KL. Contudo, se for possível, ela deveria ser violada quanto as restrições de positividade para a densidade espectral, já que o quark colorido não pode ser um estado físico. Na verdade este é o caso, como discutiremos a seguir. Na realidade o propagador do glúon a partir dos cálculos da QCD na rede no calibre de Landau, mostram uma violação da restrição da positividade da representação de KL (DUDAL *et al.*, 2016).

Para o presente modelo, podemos computar facilmente as densidades espectrais pela decomposição do propagador do quark, Eq. (2.24), em frações parciais como:

$$A(k^2) = \frac{H_2(m_1, m_2, m_3)}{k^2 - m_1^2 + i\epsilon} + \frac{H_2(m_2, m_1, m_3)}{k^2 - m_2^2 + i\epsilon} + \frac{H_2(m_3, m_2, m_1)}{k^2 - m_3^2 + i\epsilon} , \quad (2.29)$$

e

$$B(k^2) = \frac{H_1(m_1, m_2, m_3)}{k^2 - m_1^2 + i\epsilon} + \frac{H_1(m_2, m_1, m_3)}{k^2 - m_2^2 + i\epsilon} + \frac{H_1(m_3, m_2, m_1)}{k^2 - m_3^2 + i\epsilon} + m_0 A(k^2) , \quad (2.30)$$

onde

$$H_n(m_1, m_2, m_3) = \frac{(-m^3)^{2-n} (m_1^2 - \lambda^2)^n}{(m_1^2 - m_2^2)(m_1^2 - m_3^2)} \quad (2.31)$$

que nos conduz a:

$$\rho_A(\mu^2) = H_2(m_1, m_2, m_3) \delta(\mu^2 - m_1^2) + H_2(m_2, m_1, m_3) \delta(\mu^2 - m_2^2) + H_2(m_3, m_2, m_1) \delta(\mu^2 - m_3^2) , \quad (2.32)$$

e

$$\rho_B(\mu^2) = H_1(m_1, m_2, m_3) \delta(\mu^2 - m_1^2) + H_1(m_2, m_1, m_3) \delta(\mu^2 - m_2^2) + H_1(m_3, m_2, m_1) \delta(\mu^2 - m_3^2) + m_0 \rho_A(\mu^2) . \quad (2.33)$$



As restrições na Eq. (2.28), são traduzidos para os coeficientes das funções delta, que utilizamos (veja em (2.32) e (2.33)), são dados por:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_a^\delta(m_1, m_2, m_3) &= H_2(m_1, m_2, m_3) \text{ e} \\ \mathcal{P}_b^\delta(m_1, m_2, m_3) &= H_1(m_1, m_2, m_3) + m_0 H_2(m_1, m_2, m_3) , \end{aligned} \quad (2.34)$$

Como  $m_1 < m_2 < m_3$ , um que possui  $\mathcal{P}_a^\delta(m_2, m_1, m_3) < 0$  e  $\rho_A(\mu^2)|_{\mu^2=m_2^2} < 0$ .

Os valores atuais são  $\mathcal{P}_a^\delta(m_1, m_2, m_3) = 1.49$ ,  $\mathcal{P}_a^\delta(m_2, m_1, m_3) = -0.580$  e  $\mathcal{P}_a^\delta(m_3, m_2, m_1) = 0.095$ . A outra restrição de positividade da Eq. (2.28), traduzidos pelos coeficientes das funções delta passa a ser:

$$\mathcal{P}_b^\delta(m_1, m_2, m_3) = -\frac{(\lambda^2 - m_1^2)[m^3 + (m_0 - m_1)(\lambda^2 - m_1^2)]}{(m_1^2 - m_2^2)(m_1^2 - m_3^2)} . \quad (2.35)$$

A expressão acima para ser calculada para cada um dos três pólos dos propagadores do quarks, ou seja,  $m_1, m_1 \leftrightarrow m_2$  e  $m_1 \leftrightarrow m_3$ . Levando em conta os valores atuais dos pólos e parâmetros correspondentes que resulta em  $\mathcal{P}_b^\delta(m_1, m_2, m_3) \approx 0.001$ ,  $\mathcal{P}_b^\delta(m_2, m_1, m_3) \approx 0.001$  e  $\mathcal{P}_b^\delta(m_3, m_2, m_1) = 0.183$ .

Em suma, descobrimos que o presente modelo viola as restrições de positividade para a densidade espectral, sugerindo com isto que o quark não pode ser um estado físico.

## 2.6 Representação integral da amplitude de Bethe-Salpeter

Nesta seção vamos apresentar a forma integral de Nakanishi (NAKANISHI, 1969) para representar a amplitude de Bethe-Salpeter, assim como desenvolvido na Ref. (FREDERICO *et al.*, 2012), no caso para descrever a interação entre um par quark-antiquark. Para obtenção desta representação integral em nosso modelo utilizamos a identidade:

$$\frac{1}{\left[ \left( k + \frac{P}{2} \right)^2 - \mu'^2 + i\epsilon \right] (k - \lambda^2 + i\epsilon) \left[ \left( k - \frac{P}{2} \right)^2 - \mu^2 + i\epsilon \right]} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\gamma \int_{-1}^{+1} dz \frac{g(\gamma, z; \mu', \mu, P)}{(k^2 + zk \cdot P + \gamma + i\epsilon)^3} , \quad (2.36)$$

onde

$$g(\gamma, z; \mu', \mu, P) = \frac{\theta(\alpha)\theta(1-\alpha)}{\frac{1}{2} - \alpha} [\theta(1 - 2\alpha - z)\theta(z) - \theta(z - 1 + 2\alpha)\theta(-z)] , \quad (2.37)$$

e

$$\alpha = \frac{\frac{P^2}{4} + \lambda^2 - \mu^2 - z^{-1}(\lambda^2 + \gamma)}{\mu^2 - \mu'^2 + 2z^{-1}(\lambda^2 + \gamma)}. \quad (2.38)$$

Os valores de  $\gamma$  são limitados, implicitamente, a partir das funções theta's em  $\alpha$  como expreso na função peso de Nakanishi, Eq. (2.37).

A amplitude de Bethe-Salpeter do pión pode ser escrita alternativamente como:

$$\psi_\pi(k; P) = - [A(k_q^2) \not{k}_q + B(k_q^2)] \frac{\mathcal{N} \gamma_5}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} [A(k_{\bar{q}}^2) \not{k}_{\bar{q}} + B(k_{\bar{q}}^2)] , \quad (2.39)$$

onde  $k_q = k + P/2$  e  $k_{\bar{q}} = k - P/2$ . Observando que o modelo de propagador dos quarks pode ser escrito através da representação espectral dado nas Eqs. (2.26), onde o denominador tem uma forma simples onde a amplitude de Bethe-Salpeter pode ser facilmente manipulada Eq. (2.39) para tê-la escrita na representação integral de Nakanishi. Quatro termos com a forma dado pela identidade auxiliar Eq. (2.36) aparece e assim podemos escrever:

$$\psi_\pi(k; P) = \gamma_5 \chi_1(k, P) + \not{k}_q \gamma_5 \chi_2(k, P) + \gamma_5 \not{k}_{\bar{q}} \chi_3(k, P) + \not{k}_q \gamma_5 \not{k}_{\bar{q}} \chi_4(k, P) , \quad (2.40)$$

onde

$$\chi_i(k, P) = \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma \int_{-1}^1 dz \frac{g_i(\gamma, z; P)}{(k^2 + z k \cdot P + \gamma + i\epsilon)^3} . \quad (2.41)$$

As funções peso de Nakanishi são dadas por:

$$g_i(\gamma, z; P) = -\mathcal{N} \int_0^\infty d\mu^2 \int_0^\infty d\mu'^2 \rho_{C'_i}(\mu'^2) \rho_{C_i}(\mu^2) g(\gamma, z; \mu', \mu, P) , \quad (2.42)$$

onde  $(C'_1, C_1) = (B, B)$ ,  $(C'_2, C_2) = (A, B)$ ,  $(C'_3, C_3) = (B, A)$  e  $(C'_4, C_4) = (A, A)$ . Embora tenhamos expressado a RIN, Eq. (2.41), o suporte em  $\gamma$  é limitado (conforme Eq. (2.37)). Os quatro termos da ABS, Eq. (2.40), podem ser reescritos com os operadores ortogonais de Dirac, que já foram utilizados para resolver a equação de Bethe-Salpeter na aproximação escada (CARBONELL; KARMANOV, 2010).

### 3 Função de onda na frente de luz

Os hádrons por serem compostos de quarks e glúons, podem ser descritos por função de onda no espaço de Fock, isto é, cada componente no espaço de Fock corresponde a um estado com várias partículas (BRODSKY *et al.*, 1998). A função de onda de um hádron pode ser escrita como  $|\text{hádron}\rangle = \sum |\text{componente de Fock}\rangle$ , e em particular para mésons temos,

$$|\text{méson}\rangle = |q\bar{q}\rangle + |q\bar{q}g\rangle + |q\bar{q}q\bar{q}\rangle + \dots \quad (3.1)$$

onde  $|q\bar{q}\rangle$  é a componente mais baixa da função de onda no espaço de Fock ou a componente de valência da função de onda. Na QCD cada componente da função de onda possui graus de liberdade associados a um estado com quarks, antiquarks e glúons (veja apêndice A). Cada uma destas componentes tem os números quânticos do estado mesônico. Utilizar teorias efetivas com quarks constituintes, significa truncar a função de onda dos mésons na componente de valência. Esta componente, em geral tem probabilidade próxima de 1 em modelos efetivos com graus de liberdade de quarks constituintes (MELO *et al.*, 1999a; MELO *et al.*, 2002; MELO *et al.*, 2004a), ou seja, temos um estado composto por quark-antiquark.

Uma das vantagens em descrevermos os mésons no plano nulo, é que no cálculo dos elementos de matriz da corrente eletromagnética,  $J^+$ , a criação de pares na condição de Drell-Yan,  $q^+ \rightarrow 0$ , é suprimida ( $q^+$  é a componente “+” do momento transferido entre o elétron e o méson devido à interação eletromagnética). Os estados inicial e final do hádron estão relacionados por uma transformação cinemática que também não mistura diferentes componentes do espaço de Fock, e em geral o operador da corrente  $J^+$  para  $q^+ = 0$  é diagonal no espaço de Fock (BRODSKY *et al.*, 1998). Esta mistura acontece quando descrevemos o sistema na forma instantânea, o que introduz complexidade no tratamento matemático do problema em questão.

No entanto, conforme mostrado nas referências (MELO, 1998), temos situações em que os termos de pares tem que ser levados em conta para termos a covariância dos fatores de forma electromagnéticos respeitada, quando realizamos o cálculo destes no formalismo da frente de luz. Em modelos suficientemente simples, tais como um que apresente um vértice constante para o sistema composto de dois bósons carregados, a integração mencionada

na *loop* de momento na integral que define o fator de forma eletromagnético associado a componente  $J^+$  e para  $q^+ = 0$ , temos que apenas a componente de valência contribui, e isso é suficiente para que o fator de forma seja um escalar de Lorentz (NAUS *et al.*, 1998). Em geral isso não acontece, e podem aparecer contribuições de todas as componentes de Fock (MELO, 1998; BRODSKY *et al.*, 1998).

A componente de valência da função de onda hadrônica no espaço de Fock é invariante sob transformações cinemáticas, (MELO, 1998; ARAÚJO, 2001), isto é, quando realizamos transformações do tipo,

$$x' = x \quad \text{e} \quad \vec{k}'_{\perp} = \vec{k}_{\perp} + x\vec{p}_{\perp} , \quad (3.2)$$

a transformação da função de onda é dada por,

$$\Psi'(x', \vec{k}'_{\perp}) = \Psi(x, \vec{k}_{\perp}) . \quad (3.3)$$

Isto permite relacionar de uma forma simples as funções de onda inicial e final em processos elásticos de absorção de momento e energia como é o caso da absorção de um fóton virtual. A função de onda pode ser descrita em dois referenciais inerciais diferentes associados por uma transformação cinemática, como ocorre no caso do cálculo do fator de forma eletromagnético do méson  $\pi$ .

Quando projetamos a amplitude de Bethe-Salpeter, Eq. (2.5), na frente de luz e integrando-a em  $k^-$  (energia na frente de luz), obtemos a função de onda  $\Psi(k, P)$  (FREDERICO; MILLER, 1992; FREDERICO; MILLER, 1994; FREDERICO; SALMÈ, 2011), no nosso caso, para o méson  $\pi$ . No caso de dois férmions ligados, a projeção na frente de luz, que resulta na componente de valência desse estado composto, deve ser feita através da integração em  $k^-$  da amplitude de BS, após a eliminação dos termos instantâneos do propagadores de Dirac nas “pernas” externas (SALES *et al.*, 2001). A função de onda escrita na frente de luz, tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Psi(k, k_1, k_2) &= \int \frac{dk^-}{2\pi} \psi(k, k_1, k_2) \\ &= -C \int \frac{dk^-}{2\pi} \frac{[k_1 + M(k_1)] \Gamma_{\pi}(k) [k_2 + M(k_2)]}{[k_1^2 - M^2(k_1) + i\epsilon] [k_2^2 - M^2(k_2) + i\epsilon]} , \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde  $k_1 = k_q$ ,  $k_2 = k_{\bar{q}}$  e  $C$  é a normalização:

$$C = \frac{1}{\sqrt{F_{\pi}(q^2 = 0)}} , \quad (3.5)$$

onde  $F_{\pi}(q^2 = 0)$  é o fator de forma eletromagnético do pión, que será estudado no capítulo 4. Para resolvermos a integração em  $k^-$  na Eq. (3.4), ou mesmo achar a normalização,

Eq. (3.5), precisamos detalhar a estrutura de Dirac no vértice de  $\Psi(k, k_1, k_2)$ .

Definimos o operador abaixo,

$$\mathcal{O}(k, k_1, k_2) = [\not{k}_1 + M(k_1)] \gamma^5 [\not{k}_2 + M(k_2)] , \quad (3.6)$$

para em seguida, efetuarmos a decomposição da estrutura de Dirac, a fim de obtermos a função de onda para o pión. Como desenvolveremos na seção a seguir.

A projeção da amplitude de Bethe-Salpeter na frente de luz, é feita através da integração analítica em  $k^-$  com a aplicação do teorema de Cauchy, e para isso é necessário identificarmos a posição dos pólos no plano complexo de  $k^-$ . Para simplificarmos esse procedimento, fazemos a seguinte mudança de variáveis:

$$k_1 = k \text{ e } k_2 = k - P ,$$

sem que haja perda de generalidade na Eq. (3.4).

Isto implica,

$$\Psi(k, k_1, k_2) = \Psi(k, k - P) \text{ ou } \Psi(k, P) .$$

Portanto a função de onda é função de  $k$  e  $P$ .

### 3.1 Decomposição espinorial da função de onda

Na decomposição da função de onda em termos das matrizes de Dirac identificamos as contribuições pseudoescalar e pseudovetorial, A nível de traço, na decomposição espinorial, a contribuição tensorial  $\tilde{\mathbb{A}}^{\text{C}}$  nula (PAULA *et al.*, 2016).

Vejamos a seguir como realizamos esta decomposição segundo a referência (DRELL; BJORKEN, 1964):

$$\begin{aligned} \Psi(k, P) &= \Psi(k, P)_{\mathcal{I}} \mathcal{I} + \Psi(k, P)^{PS} [\gamma^5] + \Psi(k, P)^V [\gamma_\mu] \\ &+ \Psi(k, P)^{PV} [\gamma_\mu \gamma^5] + \Psi(k, P)^T [\sigma_{\mu\nu}] . \end{aligned} \quad (3.7)$$

Escrevendo-se a estrutura de Dirac como,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(k, P) &= [\not{k}_1 + M(k_1)] \gamma^5 [\not{k}_2 + M(k_2)] \\ &= \gamma^5 [-\not{k}_1 \not{k}_2 - \not{k}_1 M(k_2) + \not{k}_2 M(k_1) + M(k_1) M(k_2)] . \end{aligned} \quad (3.8)$$

A parte pseudoescalar da estrutura de Dirac,  $\mathcal{O}(k.P)^{PS}$ , da função de onda é:

$$\text{Tr} [\mathcal{O}(k.P)\gamma^5] = 4\mathcal{O}(k.P)^{PS} , \quad (3.9)$$

onde,

$$\mathcal{O}(k, P)^{PS} = -k_1 \cdot k_2 + M(k_1)M(k_2) . \quad (3.10)$$

A parte pseudovetorial,  $\mathcal{O}^\mu(k.P)^{PV}$ , fica:

$$\text{Tr} [\mathcal{O}^\mu(k.P)\gamma^\mu\gamma^5] = 4\mathcal{O}^\mu(k.P)^{PV} , \quad (3.11)$$

onde,

$$\mathcal{O}^\mu(k.P)^{PV} = -k_1^\mu M(k_2) + k_2^\mu M(k_1) . \quad (3.12)$$

As contribuições escalar,  $\Psi_{\mathcal{I}}(k, P)$ , vetorial,  $\Psi^V(k, P)$ , e tensorial,  $\Psi^T(k, P)$ , da função de onda são iguais a zero, fazendo-se o traço das matrizes de Dirac.

Para escrevermos as contribuições pseudoescalar,  $\Psi^{PS}(k, P)$  e pseudovetorial,  $\Psi^{PV}(k, P)$ , da função de onda, temos que separar os termos instantâneos (MELO *et al.*, 2002), da estrutura de Dirac,  $\mathcal{O}(k.P)$ . Esta técnica permite obtermos a função de onda do presente modelo, análogo ao que foi feito na referência (MELO *et al.*, 2002).

Para que possamos efetuar a separação dos termos instantâneos, temos que analisar o propagador de Feynman na frente de luz. A partir da seguinte equação, escrita nas coordenadas da frente de luz:

$$k^2 = k^+k^- - k_\perp^2 , \quad (3.13)$$

onde  $k^+$  é o momento longitudinal,  $k^-$  é a energia na frente de luz e  $k_\perp$  é o momento transversal (veja apêndice B). Quando temos uma partícula na sua camada de massa, obtemos,

$$k_{\text{cm}}^- = \frac{k_\perp^2 + M^2(k)}{k^+} . \quad (3.14)$$

É possível separar os termos instantâneos do propagador de férmions (MELO, 1998), na frente de luz. No caso de bósons, o propagador de Feynman na frente de luz, é dado por (MELO, 1998):

$$S(k) = \frac{1}{k^2 - M^2(k) + i\epsilon} , \quad (3.15)$$

onde  $k^2$  é escrito como na Eq. (3.13), e com a condição de camada de massa, Eq. (3.14). No caso de férmions, utilizamos a seguinte decomposição:

$$\gamma^\mu k_\mu = \frac{1}{2} (\gamma^+ k^- + \gamma^- k^+) - \gamma_\perp k_\perp, \quad (3.16)$$

onde  $\gamma^+ = \gamma^0 + \gamma^3$ ,  $\gamma^- = \gamma^0 - \gamma^3$  e  $\gamma_\perp \equiv (\gamma^1, \gamma^2)$  (veja apêndice C). Com isso podemos separar o termo instantâneo, correspondente à última contribuição na expressão a seguir, como:

$$\frac{\not{k} + M(k)}{k^2 - M^2(k) + i\epsilon} = \frac{\not{k}_{\text{cm}} + M(k)}{k^2 - M^2(k) + i\epsilon} + \frac{1}{2} \gamma^+ \frac{k^- - k_{\text{cm}}^-}{k^2 - M^2(k) + i\epsilon}. \quad (3.17)$$

Com as relações das Eqs. (3.16) e (3.17), obtemos:

$$\frac{1}{2} \gamma^+ \frac{k^- - k_{\text{cm}}^-}{k^+ \left( k^- - \frac{k_\perp^2 - M^2(k)}{k^+} \right)} = \frac{1}{2} \gamma^+ \frac{k^- - \frac{k_\perp^2 - M^2(k)}{k^+}}{k^+ \left( k^- - \frac{k_\perp^2 - M^2(k)}{k^+} \right)} = \frac{\gamma^+}{2k^+}. \quad (3.18)$$

Portanto, o propagador de Feynman para férmions no formalismo da frente de luz, é escrito como (MELO, 1998):

$$-iS(k) = \frac{\not{k}_{\text{cm}} + M(k)}{k^+ \left( k_{\text{cm}}^- - \frac{k_\perp^2 + M^2(k)}{k^+} \right)} + \frac{\gamma^+}{2k^+}. \quad (3.19)$$

O termo  $\frac{\gamma^+}{2k^+}$  está associado a uma contribuição não-propagante na frente de luz. No formalismo da frente de luz a não inclusão destes termos, causa a quebra de simetria rotacional dos fatores de forma eletromagnéticos, e no referencial no qual  $q^+ = 0$  estão associados a contribuições conhecidas como termo de par (MELO, 1998; MELO *et al.*, 1999a; MELO, 2013; MELO *et al.*, 2004a).

Seguindo os mesmos procedimentos da Eq. (3.14), temos que,

$$(k - P)_{\text{cm}}^- = \frac{(k - P)_\perp^2 + M^2(k - P)}{k^+ - P^+}. \quad (3.20)$$

## 3.2 Função de onda de valência

Nesta seção definimos os momentos individuais dos quarks como  $k_1 = k$  e  $k_2 = k - P$ . A função de massa dinâmica do quark, Eq. (2.9), para cada um dos quarks escreve-se nas

coordenadas da frente de luz como:

$$\begin{aligned} M(k) &= m_0 - \frac{m^3}{a_n}, \quad a_n = k^+ \left( k_n^- - \frac{f_a - i\epsilon}{k^+} \right), \\ M(P - k) &= m_0 - \frac{m^3}{b_n}, \quad b_n = (P^+ - k^+) \left( P^- - k_n^- - \frac{f_b - i\epsilon}{P^+ - k^+} \right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde,  $f_a = k_\perp^2 + \lambda^2$  e  $f_b = (P - k)_\perp^2 + \lambda^2$ .

Assim concluímos que a estrutura de Dirac no caso pseudoescalar, sem termos instantâneos,  $\mathcal{O}_n(k, P)^{PS}$ , tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_n(k, P)^{PS} &= -k_{\text{cm}} \cdot (k - P)_{\text{cm}} + M(k)M(P - k) \\ &= -\frac{k^+}{2} \left( \frac{(k - P)_\perp^2 + M^2(P - k)}{k^+ - P^+} \right) - \left( \frac{k_\perp^2 + M^2(k)}{k^+} \right) \frac{(k - P)^+}{2} \\ &\quad + k_\perp^2 + \vec{k}_\perp \cdot \vec{P}_\perp + \left( m_0 - \frac{m^3}{b_n} \right) \left( m_0 - \frac{m^3}{a_n} \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

A parte pseudovetorial da estrutura de Dirac sem termos instantâneos,  $\mathcal{O}_n(k, P)^{PV}$ , comparada à Eq. (3.12), é descrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_n(k, P)^{PV} &= -k_{\text{cm}}^\mu M(k - P) + (k - P)_{\text{cm}}^\mu M(k) \\ &= -k_{\text{cm}}^\mu \left( m_0 - \frac{m^3}{b_n} \right) + (k - P)_{\text{cm}}^\mu \left( m_0 - \frac{m^3}{a_n} \right), \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde  $\mu = +, -$  e  $\perp$ , e  $k_{\text{cm}}^+ = k^+$ ,  $(k - P)_{\text{cm}}^+ = (k - P)^+$ ,  $k_{\text{cm}}^\perp = k_\perp$ ,  $(k - P)_{\text{cm}}^\perp = (k - P)_\perp$  e  $k_{\text{cm}}^-$  é apresentado na Eq. (3.14) e  $(k - P)_{\text{cm}}^-$  na Eq. (3.20). Portanto a Eq. (3.23) na frente de luz é escrita, para a componente negativa, como:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_n^-(k, P)^{PV} &= -k_{\text{cm}}^- \left( m_0 - \frac{m^3}{b_n} \right) + (k - P)_{\text{cm}}^- \left( m_0 - \frac{m^3}{a_n} \right) \\ &= -\frac{1}{k^+} \left[ k_\perp^2 + \left( m_0 - \frac{m^3}{a_n} \right)^2 \right] \left( m_0 - \frac{m^3}{b_n} \right) \\ &\quad + \frac{1}{(k - P)^+} \left[ (k - P)_\perp^2 + \left( m_0 - \frac{m^3}{b_n} \right)^2 \right] \left( m_0 - \frac{m^3}{a_n} \right), \end{aligned} \quad (3.24)$$

para a componente positiva,

$$\mathcal{O}_n^+(k, P)^{PV} = -k^+ \left( m_0 - \frac{m^3}{b_n} \right) + (k - P)^+ \left( m_0 - \frac{m^3}{a_n} \right), \quad (3.25)$$



e a componente transversal,

$$\mathcal{O}_n^\perp(k, P)^{PV} = \left[ -k_\perp \left( m_0 - \frac{m^3}{b_n} \right) + (k - P)_\perp \left( m_0 - \frac{m^3}{a_n} \right) \right], \quad (3.26)$$

Os resultados dos traços nas Eqs. (3.22), (3.24), (3.25) e (3.26) foram obtidos mediante o descarte dos termos instantâneos,  $\frac{\gamma^+}{2k^+}$ , do propagador do quark, como explicitamente separado na Eq. (3.19).

Antes de construirmos as partes da função de onda pseudoescalar e pseudovetorial, vamos analisar quais são os pólos que contribuem para integração em  $k^-$  da amplitude de Bethe-Salpeter,  $\psi(k, P)$ .

A parte comum da função de onda,  $\Psi_c(k, P)$ , entre as componentes pseudoescalar,  $\Psi(k, P)^{PS}$  e pseudovetorial,  $\Psi(k, P)^{PV}$ , é dada por:

$$\Psi_c(k, P) = i \frac{C}{f_\pi^{\text{exp}}} \int \frac{dk^- m^3}{2\pi \mathcal{D}_1} \frac{(y - \lambda^2)^2 (z - \lambda^2)^2}{(y - m_1^2 - i\epsilon)(y - m_2^2 - i\epsilon)(y - m_3^2 - i\epsilon)} \frac{1}{(z - m_1^2 - i\epsilon)(z - m_2^2 - i\epsilon)(z - m_3^2 - i\epsilon)}, \quad (3.27)$$

onde definimos  $k^2 := y$  e  $(P - k)^2 := z$  e

$$\mathcal{D}_1 = \left( \frac{P^+}{2} - k^+ \right) \left( \frac{P^-}{2} - k_n^- - \frac{f_1 - i\epsilon}{\frac{P^+}{2} - k^+} \right), \quad (3.28)$$

em que  $f_1 = \frac{P_\perp^2}{2} + \lambda^2$ . Na Eq. (3.27) utilizamos a decomposição do propagador do quark dado na Eq. (2.24). Deste modo temos que a parte comum da função de onda,  $\Psi_c(k, P)$ , é escrita como:

$$\Psi_c(k, P) = i \frac{C}{f_\pi^{\text{exp}}} \int \frac{dk^- m^3 a_n^2 b_n^2}{2\pi \prod_{j=1}^7 \mathcal{D}_j}, \quad (3.29)$$

cujos denominadores são,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_2 &= (P^+ - k^+) \left( P^- - k_n^- - \frac{f_2 - i\epsilon}{P^+ - k^+} \right), \quad \mathcal{D}_3 = k^+ \left( k_n^- - \frac{f_3 - i\epsilon}{k^+} \right), \\ \mathcal{D}_4 &= (P^+ - k^+) \left( P^- - k_n^- - \frac{f_4 - i\epsilon}{P^+ - k^+} \right), \quad \mathcal{D}_5 = k^+ \left( k_n^- - \frac{f_5 - i\epsilon}{k^+} \right), \\ \mathcal{D}_6 &= (P^+ - k^+) \left( P^- - k_n^- - \frac{f_6 - i\epsilon}{P^+ - k^+} \right), \quad \mathcal{D}_7 = k^+ \left( k_n^- - \frac{f_7 - i\epsilon}{k^+} \right), \end{aligned}$$

onde:  $f_2 = (P - k)_\perp^2 + m_1^2$ ,  $f_3 = k_\perp^2 + m_1^2$ ,  $f_4 = (P - k)_\perp^2 + m_2^2$ ,  $f_5 = k_\perp^2 + m_2^2$ ,  $f_6 = (P - k)_\perp^2 + m_3^2$ ,  $f_7 = k_\perp^2 + m_3^2$  e  $\mathcal{D}_1$  foi definido na Eq. (3.28). Os valores de  $m_1 =$

$0.327 \text{ GeV}$ ,  $m_2 = 0.644 \text{ GeV}$  e  $m_3 = 0.954 \text{ GeV}$ , (MELLO *et al.*, 2017) foram obtidos no capítulo 2 pela Eq. (2.23).

Identificamos os seguintes pólos nas Eqs. (3.21) e (3.29):

$$\begin{aligned}
k_a^- &= \frac{f_a}{k^+} - \frac{i\epsilon}{k^+}, & k_b^- &= P^- - \frac{f_b}{P^+ - k^+} + \frac{i\epsilon}{P^+ - k^+}, \\
k_1^- &= \frac{P^-}{2} - \frac{f_1}{\frac{P^+}{2} - k^+} + \frac{i\epsilon}{\frac{P^+}{2} - k^+}, & k_2^- &= P^- - \frac{f_2}{P^+ - k^+} + \frac{i\epsilon}{P^+ - k^+}, \\
k_3^- &= \frac{f_3}{k^+} - \frac{i\epsilon}{k^+}, & k_4^- &= P^- - \frac{f_4}{P^+ - k^+} + \frac{i\epsilon}{P^+ - k^+}, \\
k_5^- &= \frac{f_5}{k^+} - \frac{i\epsilon}{k^+}, & k_6^- &= P^- - \frac{f_6}{P^+ - k^+} + \frac{i\epsilon}{P^+ - k^+}, \\
k_7^- &= \frac{f_7}{k^+} - \frac{i\epsilon}{k^+}, & &
\end{aligned} \tag{3.30}$$

para  $k_n^-$  com  $n = a, b, 1 \dots 7$ . Sendo  $k_a^-$  e  $k_b^-$  os possíveis pólos provenientes da função de massa dos quarks contida nos propagadores da Eq. (3.27). Para analisarmos a posição dos pólos, utilizamos o plano de Argand-Gauss, Figs. (3.1) e (3.2). Identificamos duas situações diferentes: (i)  $0 < k^+ < \frac{P^+}{2}$  e (ii)  $\frac{P^+}{2} < k^+ < P^+$ , ambos os intervalos contribuem para o termo de valência da função de onda.

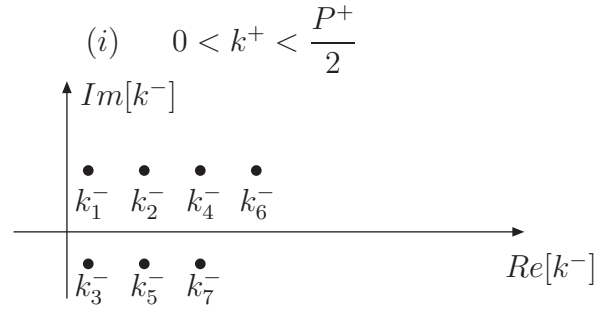


FIGURA 3.1 – Posição dos pólos, no intervalo (i) em  $k^+$ , para o termo de valência.

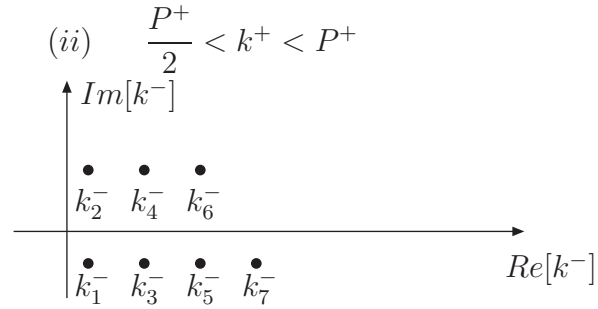


FIGURA 3.2 – Posição dos pólos, no intervalo (ii) em  $k^+$ , para o termo de valência.

A integração analítica em  $k^-$ , na Eq. (3.29), via o teorema dos resíduos de Cauchy, é realizada separando-se os intervalos de momento “+”, (i) e (ii) ilustrados nas Figs. (3.1)

e (3.2), respectivamente. Essa integração elimina o tempo relativo  $k^+$  entre o quark e antiquark, e com a amplitude BS acessamos diretamente a função de onda de valência. Em seguida, reescrevemos o momento “+” do quark em termos da fração de Bjorken,  $x = \frac{k^+}{P^+}$ , onde no referencial no centro de massa,  $P^\mu = (P^0, \vec{0})$ , temos que  $P^+ = P^- = m_\pi$ ,  $P_\perp = 0$ , e sendo as funções  $f_n$  são proporcionais à  $k_\perp^2$ . Desta forma obtemos para o intervalo (i):

$$\Psi_c^{(i)}(x, k_\perp) = -\frac{C}{f_\pi^{\text{exp}}} \sum_{n=1}^3 \frac{m^3 a_{2n+1}^2 b_{2n+1}^2 \mathcal{D}_{2n+1}}{x P^+ \prod_{j=1}^7 \mathcal{D}_j} \theta(1/2 - x) \theta(x), \quad (3.31)$$

onde as funções  $a_{2n+1}$ ,  $b_{2n+1}$  e  $\mathcal{D}_{1\dots 7}$  são,

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= f_{2n+1} - f_a, \quad b_{2n+1} = (1-x) \left( m_\pi^2 - \frac{f_{2n+1}}{x} - \frac{f_b}{1-x} \right), \\ \mathcal{D}_1 &= \left( \frac{1}{2} - x \right) \left( \frac{m_\pi^2}{2} - \frac{f_{2n+1}}{x} - \frac{f_1}{\frac{1}{2} - x} \right), \\ \mathcal{D}_2 &= (1-x) \left( m_\pi^2 - \frac{f_{2n+1}}{x} - \frac{f_2}{1-x} \right), \quad \mathcal{D}_3 = f_{2n+1} - f_3, \\ \mathcal{D}_4 &= (1-x) \left( m_\pi^2 - \frac{f_{2n+1}}{x} - \frac{f_4}{1-x} \right), \quad \mathcal{D}_5 = f_{2n+1} - f_5, \\ \mathcal{D}_6 &= (1-x) \left( m_\pi^2 - \frac{f_{2n+1}}{x} - \frac{f_6}{1-x} \right), \quad \mathcal{D}_7 = f_{2n+1} - f_7. \end{aligned} \quad (3.32)$$

E para o intervalo (ii), temos que:

$$\Psi_c^{(ii)}(x, k_\perp) = \frac{C}{f_\pi^{\text{exp}}} \sum_{n=1}^3 \frac{m^3 a_{2n}^2 b_{2n}^2 \mathcal{D}_{2n}}{(1-x) P^+ \prod_{j=1}^7 \mathcal{D}_j} \theta(1-x) \theta(1-x/2), \quad (3.33)$$

onde  $a_{2n}$ ,  $b_{2n}$  e os denominadores são dados por,

$$\begin{aligned} a_{2n} &= x \left( m_\pi^2 - \frac{f_{2n}}{1-x} - \frac{f_a}{x} \right), \quad b_{2n} = f_{2n} - f_b, \\ \mathcal{D}_1 &= \left( \frac{1}{2} - x \right) \left( \frac{m_\pi^2}{2} - \frac{f_{2n}}{1-x} + \frac{f_1}{\frac{1}{2} - x} \right), \\ \mathcal{D}_2 &= f_{2n} - f_2, \quad \mathcal{D}_3 = x \left( m_\pi^2 - \frac{f_{2n}}{1-x} - \frac{f_3}{x} \right), \\ \mathcal{D}_4 &= f_{2n} - f_4, \quad \mathcal{D}_5 = x \left( m_\pi^2 - \frac{f_{2n}}{1-x} - \frac{f_5}{x} \right), \\ \mathcal{D}_6 &= f_{2n} - f_6, \quad \mathcal{D}_7 = x \left( m_\pi^2 - \frac{f_{2n}}{1-x} - \frac{f_7}{x} \right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Podemos estudar a simetria da função de onda, pela troca dos momentos longitudinais dos quarks, fazendo a seguinte mudança de variável,  $\Psi(x, k_\perp) \rightarrow \Psi(1-x, k_\perp)$ , desta

maneira podemos verificar que:

$$\begin{aligned}
\Psi_c(x, k_\perp) &= \Psi_c^{(i)}(x, k_\perp) + \Psi_c^{(ii)}(x, k_\perp) , \\
\Psi_c^{(i)}(x, k_\perp) &= \Psi_c^{(i)}(1-x, k_\perp) , \\
\Psi_c^{(ii)}(x, k_\perp) &= \Psi_c^{(ii)}(1-x, k_\perp) , \\
\Psi_c(x, k_\perp) &= \Psi_c(1-x, k_\perp) .
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Note que também

$$\Psi_c(x, k_\perp) = \Psi_c(x, -k_\perp) , \tag{3.36}$$

portanto a função é simétrica pela troca de momentos entre os quarks. Mas as Eqs. (3.31) e (3.33) são apenas parte da função de onda e falta ainda incluir a estrutura de Dirac. Esta última vai caracterizar a parte pseudoescalar e pseudovetorial da função de onda, como veremos nas subseções seguintes.

### 3.2.1 Componente pseudoescalar

A componente pseudoescalar da função de onda do pión neste modelo, é calculada no referencial do centro de massa,  $P^\mu = (m_\pi, \vec{0})$ , e além da componente de momento, esta função é composta pela estrutura de Dirac, oriunda da Eq. (3.22). Note que devemos considerar para o cálculo dos resíduos a dependência da função de massa com  $k^-$  no operador espinorial o qual define a componente pseudoescalar da função de onda, e que mais adiante será apresentada explicitamente. A parte pseudoescalar da função de onda do pión,  $\Psi(k, P)^{PS}$ , é quem mais contribui para composição da função de onda completa  $\Psi(k, P)$ , veja Eq. (3.4).

A estrutura de Dirac  $\mathcal{O}(k, P)^{PS}$ , segundo as definições dadas nas Eqs. (3.21) e (3.22), fica escrita no referencial do centro de massa, como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_n(x, k_\perp)^{PS} &= \frac{x}{2(1-x)} \left[ k_\perp^2 + \left( m_0 - \frac{m^3}{b_n} \right)^2 \right] + \frac{(1-x)}{2x} \left[ k_\perp^2 + \left( m_0 - \frac{m^3}{a_n} \right)^2 \right] + \\
&+ k_\perp^2 + \left( m_0 - \frac{m^3}{b_n} \right) \left( m_0 - \frac{m^3}{a_n} \right) .
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Verifica-se que  $\mathcal{O}_n(x, k_\perp)^{PS}$  é simétrico pela troca de  $x \rightarrow (1-x)$ . A partir das definições nas Eqs. (3.31) e (3.33), a função de onda de valência pseudoescalar é dada no primeiro intervalo de integração,

$$\Psi^{(i)}(x, k_\perp)^{PS} = -\frac{C}{f_\pi^{\text{exp}}} \sum_{n=1}^3 \frac{m^3 a_{2n+1}^2 b_{2n+1}^2 \mathcal{D}_{2n+1}}{x P^+ \prod_{j=1}^7 \mathcal{D}_j} \mathcal{O}_{2n+1}^{(i)}(x, k_\perp)^{PS} \theta(1/2-x) \theta(x) , \tag{3.38}$$

e para o segundo intervalo, temos que

$$\Psi^{(ii)}(x, k_{\perp})^{PS} = \frac{C}{f_{\pi}^{\text{exp}}} \sum_{n=1}^3 \frac{m^3 a_{2n}^2 b_{2n}^2 \mathcal{D}_{2n}}{(1-x)P^+ \prod_{j=1}^7 \mathcal{D}_j} \mathcal{O}_{2n}^{(ii)}(x, k_{\perp})^{PS} \theta(1-x) \theta(1-x/2). \quad (3.39)$$

Assim podemos escrever a função de onda pseudoescalar da forma dada a seguir:

$$\Psi(x, k_{\perp})^{PS} = \Psi^{(i)}(x, k_{\perp})^{PS} + \Psi^{(ii)}(x, k_{\perp})^{PS}. \quad (3.40)$$

### 3.2.2 Componente pseudovetorial

No presente modelo, a função de onda pseudovetorial demonstrou ter uma contribuição pequena para composição da função de onda completa do pión, quando comparado com a parte pseudoescalar.

A estrutura de Dirac pseudovetorial,  $\mathcal{O}(x, k_{\perp})^{PV}$ , no centro de massa  $P^{\mu} = (P^0, \vec{0})$ , de acordo com as definições da Eq. (3.23), da qual extraímos a componente negativa, é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_n^{-}(x, k_{\perp})^{PV} &= -\frac{1}{xP^+} \left[ k_{\perp}^2 + \left( m_0 - \frac{m^3}{a_n} \right)^2 \right] \left( m_0 - \frac{m^3}{b_n} \right) \\ &\quad - \frac{1}{(1-x)P^+} \left[ k_{\perp}^2 + \left( m_0 - \frac{m^3}{b_n} \right)^2 \right] \left( m_0 - \frac{m^3}{a_n} \right), \end{aligned} \quad (3.41)$$

e a componente positiva,

$$\mathcal{O}_n^{+}(x, k_{\perp})^{PV} = -P^+ \left[ x \left( m_0 - \frac{m^3}{b_n} \right) + (1-x) \left( m_0 - \frac{m^3}{a_n} \right) \right], \quad (3.42)$$

e por fim a componente transversal,

$$\mathcal{O}_n^{\perp}(x, k_{\perp})^{PV} = m^3 k_{\perp} \left( \frac{1}{b_n} - \frac{1}{a_n} \right). \quad (3.43)$$

Para o primeiro intervalo de integração, obtemos o resultado a seguir

$$\Psi_{(i)}^{\mu}(x, k_{\perp})^{PV} = -\frac{C}{f_{\pi}^{\text{exp}}} \sum_{n=1}^3 \frac{m^3 a_{2n+1}^2 b_{2n+1}^2 \mathcal{D}_{2n+1}}{xP^+ \prod_{j=1}^7 \mathcal{D}_j} \mathcal{O}_{2n+1}^{\mu}(x, k_{\perp})_{(i)}^{PV} \theta(1/2-x) \theta(x), \quad (3.44)$$

e para o segundo intervalo, temos que

$$\Psi_{(ii)}^\mu(x, k_\perp)^{PV} = \frac{C}{f_\pi^{\text{exp}}} \sum_{n=1}^3 \frac{m^3 a_{2n}^2 b_{2n}^2 \mathcal{D}_{2n}}{(1-x)^{P^+} \prod_{j=1}^7 \mathcal{D}_j} \mathcal{O}_{2n}^\mu(x, k_\perp)_{(ii)}^{PV} \theta(1-x) \theta(1-x/2). \quad (3.45)$$

Assim podemos escrever a função de onda pseudovetorial da seguinte forma:

$$\Psi(x, k_\perp)^{PV} = \Psi^{(i)}(x, k_\perp)^{PV} + \Psi^{(ii)}(x, k_\perp)^{PV}. \quad (3.46)$$

Assim, no presente modelo, temos duas contribuições para função de onda do pión. Note que as partes escalar, vetorial e tensorial não contribuem para a função de onda do pión.

### 3.3 Resultado numérico da função de onda

Primeiro apresentamos o resultado da função de onda dependendo da fração de momento em  $x$ ,  $0 < x < 1$ , Fig. (3.3), e em relação ao momento transversal  $0 < k_\perp < 10.0 \text{ GeV}$ , Fig. (3.4). Finalmente plotamos a função de onda em três dimensões, Figs. (3.5) e (3.6), em função de  $x$  e  $k_\perp$ .

A normalização da função de onda é obtida como mostrado na Eq. (3.5).

Verificamos que o valor máximo da função de onda, Figs. (3.3) a (3.6), se dá quando  $x = 0.5$  e  $k_\perp = 0$ . Temos a contribuição pseudoescalar é  $\Psi(x = 0.5, k_\perp = 0)^{PS} = 1.06$  e para a componente positiva da contribuição pseudovetorial  $\Psi^+(x = 0.5, k_\perp = 0)^{PV} = 0.54$ .

A componente menos tem o mesmo valor  $\Psi^-(x = 0.5, k_\perp = 0)^{PV} = 0.54$ , enquanto que a componente transversal, segundo gráfico na Fig. (3.6), tem seu valor máximo em  $\Psi^\perp(x = 0.5, k_\perp = 0.2)^{PV} = 0.39$ . Esta componente da função de onda é zero,  $\Psi^\perp(x, k_\perp = 0)^{PV} = 0$  para todo valor de  $x$  quando  $k_\perp$  é zero, uma vez que ela é proporcional a  $k_\perp$  como podemos verificar no traço na Eq. (3.43), aplicado à Eq. (3.46). A contribuição pseudovetorial é  $\Psi(x, k_\perp)^{PV} \ll 1$  para valores acima de  $k_\perp > 3 \text{ GeV}$ , Fig. (3.4). Enquanto que a componente pseudoescalar torna-se  $\Psi(x, k_\perp)^{PS} \ll 1$  a partir de  $k_\perp > 10 \text{ GeV}$ .

Observamos que as únicas contribuições para a função de onda de valência do pión são, a pseudoescalar e pseudovetorial. A primeira responde pela maior parte da contribuição para a função de onda completa. Verificamos que a parte pseudoescalar é aproximadamente o dobro da parte pseudovetorial, e cai mais lentamente.

A fim de verificar a ordem de grandeza da função de onda, fizemos um exercício teórico ao dividirmos  $\Psi^\mu(x, k_\perp)^{PV} / \Psi(x, k_\perp)^{PS}$  para cada componente pseudovetorial. Assim observamos que a razão  $\Psi^+(x = 0.5, k_\perp = 0)^{PV}$  e  $\Psi^-(x, k_\perp)^{PV}$  correspondem a 51 % de

$\Psi(x = 0.5, k_{\perp} = 0)^{PS}$ . E  $\Psi^{\perp}(x = 0.5, k_{\perp} = 0.2)^{PV}$  é 37% de  $\Psi(x = 0.5, k_{\perp} = 0)^{PS}$ . A partir de  $k_{\perp} = 1.0 \text{ GeV}$ , a parte pseudovetorial é irrelevante para a função de onda.

Nas figuras em três dimensões, Figs. (3.5) e (3.6), vemos que o valor mínimo destas funções nos pontos finais são  $\Psi(x = 0, k_{\perp} = 0)^{PS} = \Psi(x = 1, k_{\perp} = 0)^{PS} = 0$  e  $\Psi^{\mu}(x = 0, k_{\perp} = 0)^{PV} = \Psi^{\mu}(x = 1, k_{\perp} = 0)^{PV} = 0$ . Este comportamento satisfaz o que se espera da função de onda de valência para o estado ligado de dois férmions (MELO *et al.*, 1999a; FREDERICO *et al.*, 2009).

Um aspecto da parte pseudoescalar que não é visível na Fig. (3.3), refere-se a descontinuidade da derivada da função de onda em  $x = 0.5$ , em relação a  $x$  para  $k_{\perp}$  diferente de zero. Podemos visualizar este fato, melhor, ao analisarmos a função de distribuição na seção a seguir. A razão da descontinuidade da derivada reside na separação dos dois termos (i) e (ii) no intervalos de momento,  $0 < x < 1/2$  e  $1/2 < x < 1$ , respectivamente, quando da integração em  $k^{-}$  (veja nas Eqs. (3.38) e (3.39), para a componente pseudoescalar, e as Eqs. (3.44) e (3.45) para a componente pseudovetorial).

## Função de onda do pión

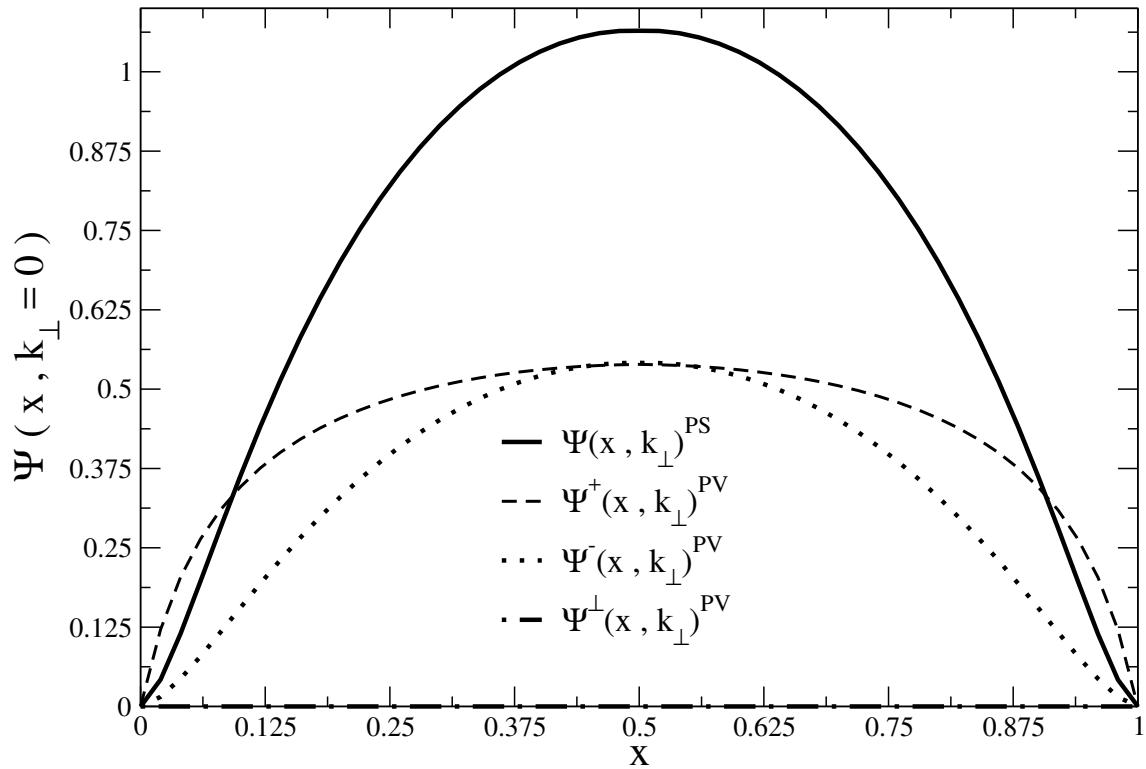


FIGURA 3.3 – Função de onda de valência em função da fração de momento  $x$ . Contribuição pseudoescalar, linha contínua. Contribuição pseudovetorial: componente “+”, linha tracejada, componente “-”, linha pontilhada e componente “ $\perp$ ”, linha ponto-tracejada.



## Função de onda do pión

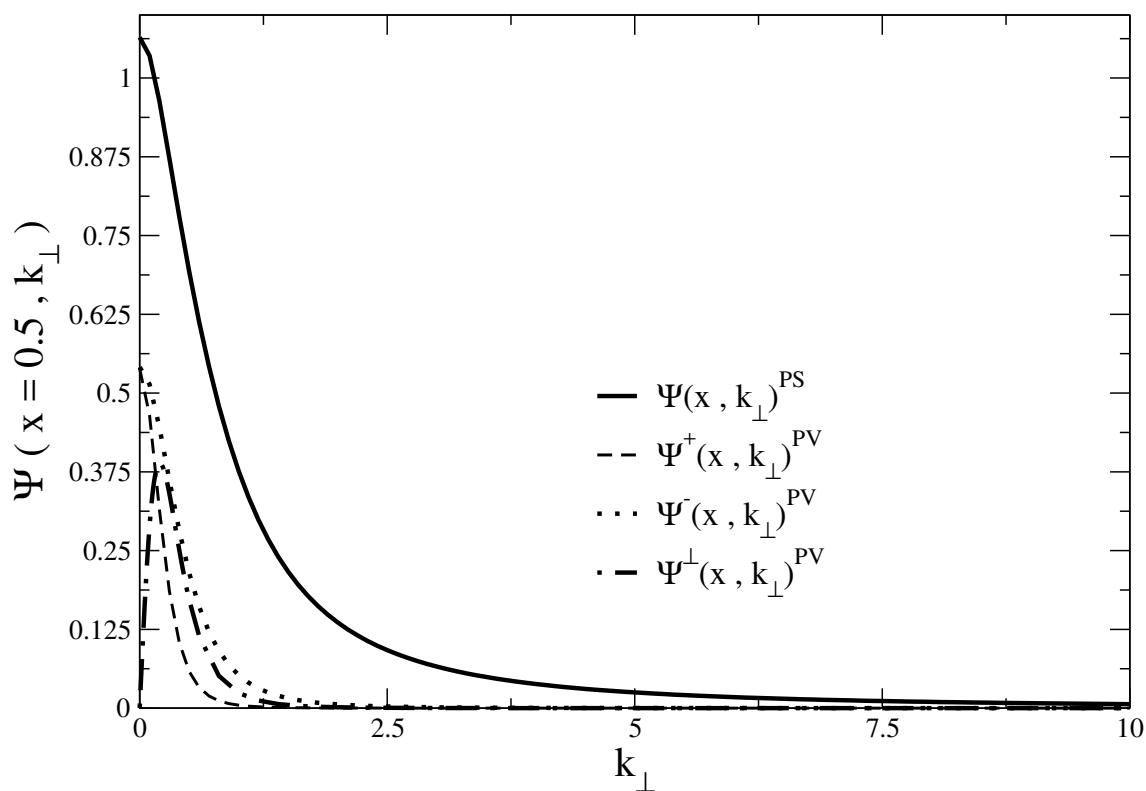


FIGURA 3.4 – Função de onda de valência em função do momento transversal  $k_{\perp}$ . Contribuição pseudoescalar, linha contínua. Contribuição pseudovetorial: componente “+”, linha tracejada, componente “-”, linha pontilhada e componente “ $\perp$ ”, linha ponto-tracejada.

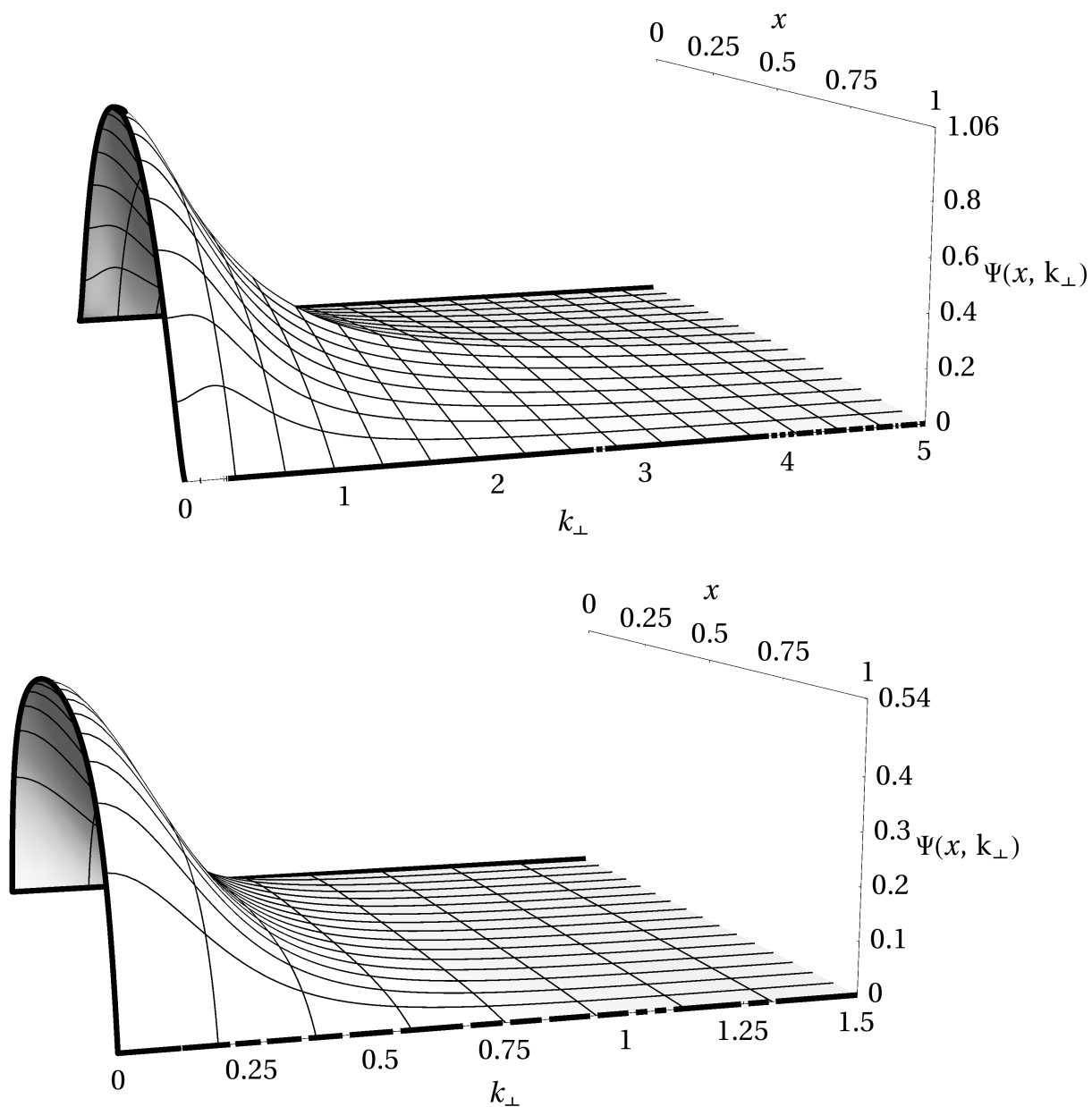


FIGURA 3.5 – Função de onda de valência do pión pseudoescalar, (painel superior) e componente “+” da pseudovetorial (painel inferior), em função do momento transversal  $k_{\perp}$  e da fração de momento  $x$ .

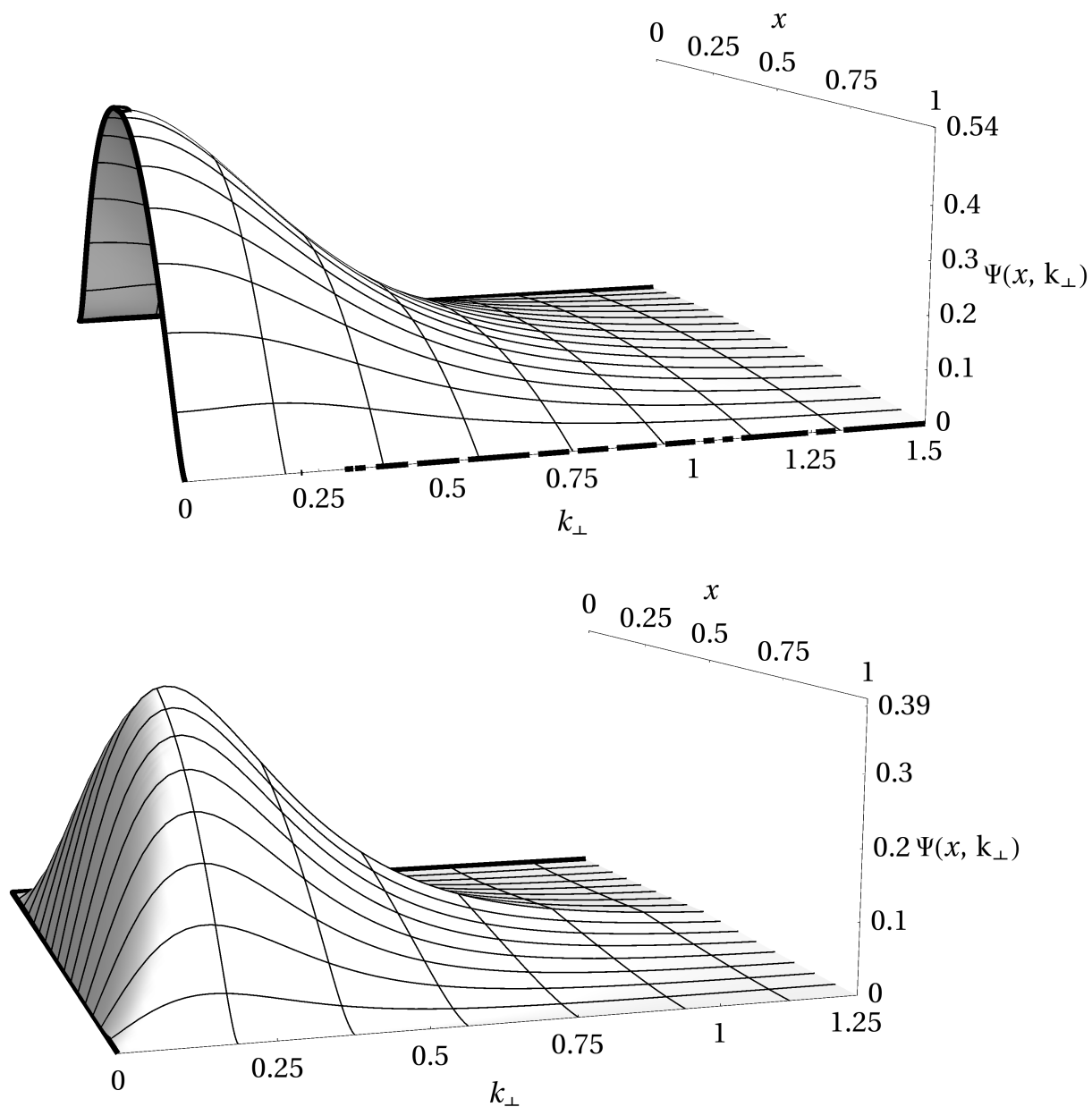


FIGURA 3.6 – Função de onda de valência do pión pseudovetorial componente “-”, (painel superior) e componente “ $\perp$ ” (painel inferior), em função do momento transversal  $k_{\perp}$  e da fração de momento  $x$ .

### 3.4 Função distribuição

A função de distribuição assintótica é (CHANG *et al.*, 2013; CHAKRABARTI *et al.*, 2014; ADHIKARI *et al.*, 2016; NOGUERA; SCOPETTA, 2015; FREDERICO *et al.*, 2009; FANELLI *et al.*, 2016; MELO *et al.*, 2016):

$$\phi^{\text{as}} = 6x(1 - x) . \quad (3.47)$$

No presente trabalho, obtivemos a função de distribuição do pión ao integrarmos a função de onda em relação ao momento transversal,  $k_{\perp}$ , no referencial de centro de massa,  $P = (m_{\pi}, \vec{0})$ .

$$\phi(x) \propto \int \frac{d^2 k_{\perp}}{2\pi} \Psi(x, k_{\perp}) , \quad (3.48)$$

cuja normalização dá-se da seguinte forma (HUANG *et al.*, 2013):

$$\int_0^1 dx \phi(x) = 1 , \quad (3.49)$$

Na figura a seguir, Fig. (3.7), comparamos a função de distribuição do nosso modelo com a função de distribuição assintótica. Analisamos a parte pseudoescalar e pseudovetorial. Para a função de distribuição do pión, verificamos que a parte pseudovetorial é quem contribui menos para composição desta função. Ao compararmos os valores máximos, vemos que a parte pseudoescalar tem valor máximo em  $\phi(0.5)^{PS} = 1.24$ ,  $\phi^+(0.5)^{PV} = 0.15$ ,  $\phi^-(0.5)^{PV} = 0.28$  e  $\phi^{\perp}(0.5)^{PV} = 0$ . O valor mínimo encontra-se nos pontos finais, reflexo do que ocorre com a função de onda.

Na Fig. (3.7), podemos verificar a descontinuidade da derivada da função de distribuição, como já mencionado na seção anterior. Em outros modelos também ocorre essa descontinuidade, como no caso da Ref. (CHOI *et al.*, 2015).

Ao comparar a função de distribuição deste modelo com a assintótica, podemos verificar que a parte pseudoescalar corresponde a 76% do valor da assintótica e que a parte pseudovetorial responde por 11%. Estes valores são para os valores máximos da função de distribuição.

## Função de distribuição do pión

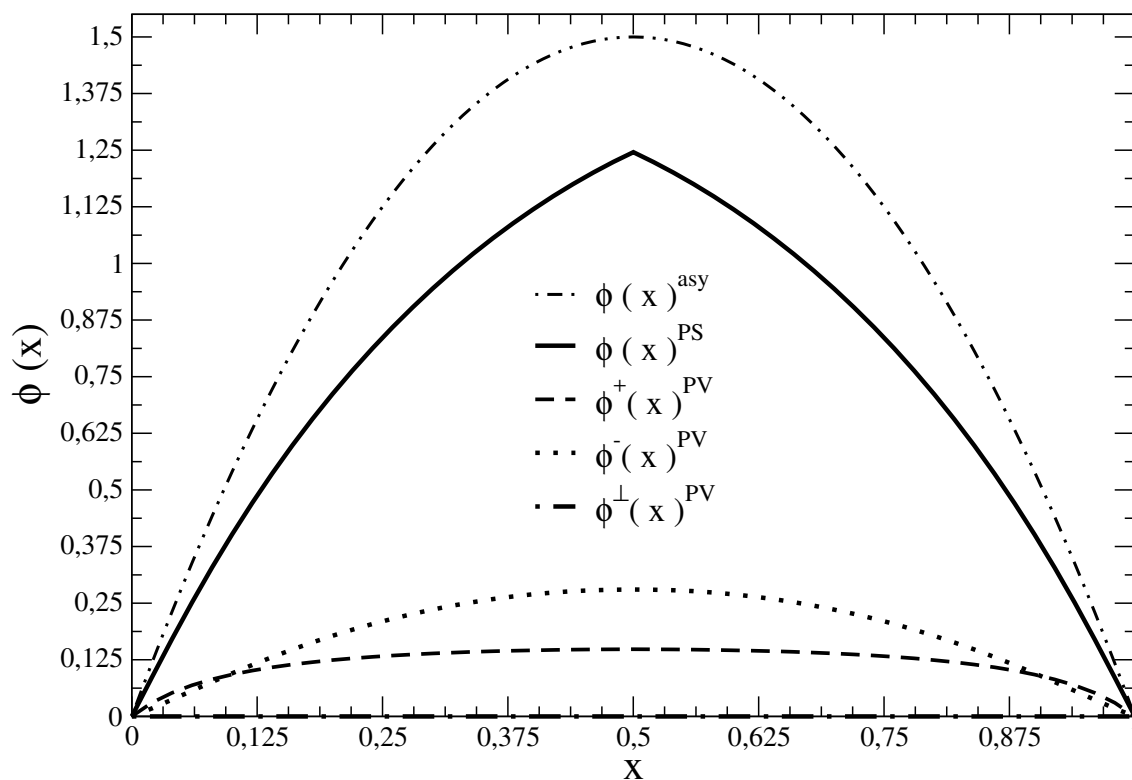


FIGURA 3.7 – Função de distribuição. Contribuição pseudoescalar: linha contínua. Contribuição pseudovetorial: componente “+”, linha tracejada, componente “-”, linha pontilhada e componente “ $\perp$ ”, linha ponto-tracejada. Função de distribuição assintótica: linha duplo-ponto-tracejada.

## 4 Estrutura eletromagnética do pión

Neste capítulo, estudamos a estrutura eletromagnética do méson  $\pi$  (píon) em termos de um modelo a quarks constituintes no formalismo da frente de luz, levando-se em conta a auto-energia dos quarks. Foram calculados alguns observáveis para o caso do méson  $\pi$ , tais como o fator de forma eletromagnético, o raio eletromagnético e a constante de decaimento do pión.

Neste capítulo iremos construir a corrente eletromagnética do pión, partindo do vértice quark-fóton, obtido de forma a satisfazer a identidade de Ward-Takahashi (apêndice C). Quando a identidade de Ward-Takahashi é satisfeita, a corrente eletromagnética é conservada. Desta forma a corrente do pión é conservada, quando a identidade de Ward-Takahashi é satisfeita. No presente modelo, utilizando o vértice quark-fóton vestido e a amplitude de Bethe-Salpeter do modelo que já foi descrita nos capítulos anteriores, obtemos a corrente eletromagnética para esse estado composto, utilizando a fórmula de Mandelstam (aproximação de impulso) (FREDERICO; MILLER, 1992). Isso resulta em uma expressão contendo uma integral de um *loop* quadridimensional. Para reduzir o problema numérico a três dimensões, integramos em  $k^-$ , no referencial de Breit, com a condição de Drell-Yan, onde a componente de momento transferido “+” ( $q^+$ ) é nula (veja o artigo de revisão (BRODSKY *et al.*, 1998)). Além disso é escolhida a componente de momento “+” da corrente para a extração do fator de forma. A vantagem deste referencial e componente “+” da corrente, é que o operador é diagonal no espaço de Fock (BRODSKY *et al.*, 1998), e em geral contribuições de pares associados ao modo zero ( $q^+ = 0$ ) são suprimidas pelo anulamento da função de onda nos pontos finais. Porém dependendo do modelo, tais contribuições podem ter importância, como no caso da corrente eletromagnética de estados vetoriais, por exemplo do méson  $\rho$  (MELO; FREDERICO, 2012).

O modo zero corresponde a contribuições de pares de partícula-antipartícula, por exemplo ao vácuo virtual na frente de luz, com momentos individuais positivos e tendendo a zero, que eventualmente não podem ser desconsiderados na presença de campos de fundo (BRODSKY *et al.*, 2015; MELO *et al.*, 1999a; MELO, 1998; NAUS *et al.*, 1998). Desta forma

neste capítulo também analisamos a possibilidade do modo zero contribuir para a corrente “+” do pión no limite em que  $q^+ \rightarrow 0^+$  no presente modelo (MELO *et al.*, 1998; MELO *et al.*, 1997; MELO; FREDERICO, 1997). Como demonstramos no presente trabalho, isto não ocorre. Além disso apresentamos a formulação da constante de decaimento eletrofraca do pión para o nosso modelo. Os cálculos para os observáveis são apresentados no próximo capítulo, onde também comparamos com os resultados experimentais.

## 4.1 Pión, quark e fator de forma

Nesta seção, estudamos a estrutura eletromagnética do méson  $\pi$ . Para isto, utilizamos o formalismo da frente de luz (DIRAC, 1949; HARINDRANATH, 1996; HARINDRANATH, 2000; BRODSKY *et al.*, 1998) e o modelo de quarks constituintes desenvolvidos nas referências (FREDERICO; MILLER, 1992; MELO *et al.*, 2002; MELO, 2005). No entanto, no presente trabalho, a fim de implementarmos a massa dinâmica do quark incluímos os efeitos da auto-energia nos quarks (DUDAL *et al.*, 2013; PAGELS; STOKAR, 1979; MELLO *et al.*, 2017; MELLO *et al.*, 2015).

No formalismo da frente de luz, o principal objetivo para problemas de auto-estados ligados é resolver a equação de autovalores (BRODSKY *et al.*, 1998) para o operador massa:

$$H_{CL} = M^2 |\Psi\rangle . \quad (4.1)$$

Na equação acima, o operador massa, escrito no formalismo da frente de luz, cujo hamiltoniano no cone de luz  $H_{CL}$ , tem os auto-valores dados pelo quadrado da massa invariante  $M^2$ , onde seus auto-valores são associados às partículas físicas, que por sua vez são associados a auto-estados de  $H_{CL}$  (MELO, 2005).

A componente de valência da função de onda hadrônica está relacionada com a amplitude de Bethe-Salpeter (ABS), (MELO *et al.*, 2002). Com as funções de onda na frente de luz, é possível calcular os elementos de matriz da corrente entre os estados ligados hadrônicos. Na frente de luz a função de onda de estado ligado do méson é uma superposição para todos estados de Fock, assim sendo são dados por (BRODSKY *et al.*, 1998):

$$|\Psi_{\text{méson}}\rangle = \Psi_{q\bar{q}} |q\bar{q}\rangle + \Psi_{q\bar{q}q\bar{q}} |q\bar{q}q\bar{q}\rangle + \dots . \quad (4.2)$$

Com a função de onda hadrônica na frente de luz é possível calcular os fatores de forma eletromagnéticos dos hádrons, através dos elementos de matriz da corrente eletromagnética entre os estados final e inicial,

$$(P + P')^\mu F_\pi(Q^2) = \langle \pi(P') | J_\pi^\mu(k; P, P') | \pi(P) \rangle , \quad Q = P' - P , \quad (4.3)$$

onde,  $Q^2 = -q^2$  e  $J_\pi^\mu(k; P, P')$  é a corrente eletromagnética do pión, a qual pode ser expressa em termos dos campos de quarks  $q_f$  ( $f$  é o sabor do campo de quark) de carga do quark  $e_f$  (MELO, 2005),

$$\sum_f e_f \bar{q}_f \Gamma^\mu q_f , \quad (4.4)$$

onde  $\Gamma^\mu$  é definido na Eq. (4.12). Os elementos de matriz da corrente eletromagnética, podem ser escritos como visto na Eq. (4.14), como explicado na próxima seção.

Outra expressão importante é a Lagrangeana responsável pelo acoplamento entre os campos do pión e dos quarks. Para encontrar esta lagrangeana, à princípio basta aplicar a transformação quirial (MELO, 1998; FREDERICO; MILLER, 1992; MELO *et al.*, 1999a),

$$q' = \exp\left(i \frac{\vec{\pi} \cdot \vec{\tau} \gamma^5}{2f_\pi}\right) q , \quad (4.5)$$

e na lagrangeana livre:

$$\mathcal{L} = \bar{q} (i\gamma^\mu \partial_\mu - \hat{m}) q , \quad (4.6)$$

onde  $\hat{m}$  é a média entre as massas dos quarks up e down. Note que a Eq. (4.5), leva a estrutura do vértice quark-pión utilizado no capítulo anterior, como explicaremos a seguir.

Considerando-se o acoplamento do campo do pión com o dos quarks, obtido pela expansão da transformação quirial citada acima, e mantendo os termos em primeira ordem no campo do pión e segunda ordem no termo escalar  $\langle q\bar{q} \rangle$ , chegamos a (FREDERICO; MILLER, 1992):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{q} (i\gamma^\mu \partial_\mu - \hat{m}) q - i \frac{1}{2f_\pi} \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 \vec{\tau} q \\ & - i \frac{\hat{m}}{f_\pi} \vec{\pi} \cdot \bar{q} \gamma^5 \vec{\tau} q + \frac{\hat{m}}{2f_\pi^2} \vec{\pi}^2 \bar{q} q , \end{aligned} \quad (4.7)$$

Se considerarmos efeitos de quebra espontânea de simetria, é uma boa aproximação considerar  $i\gamma^\mu \partial_\mu q = Mq$ , onde  $\hat{m} = M$  é a massa do quark constituinte no primeiro termo da Eq (4.7). O segundo termo representa o acoplamento pseudoescalar do pión com o par quark-antiquark, quando a massa constituinte  $M$  é usada para os quarks. Esta é a relação Goldberger-Treiman (ITZYKSON; ZUBER, 1980) a nível de quarks. A lagrangeana de interação responsável pelo acoplamento pseudoescalar do pión com os quarks é dado por (FREDERICO; MILLER, 1992):

$$\mathcal{L}_I = -i \frac{M}{f_\pi} \vec{\pi} \cdot \bar{q} \gamma^5 \vec{\tau} q . \quad (4.8)$$

Notamos que o segundo termo da Eq. (4.7), leva a Eq. (4.8) quando o campo do quark é solução da equação de Dirac com a massa do quark constituinte. No entanto o terceiro



termo na Eq. (4.7) é desprezado, pois a massa nua do quark é pequena. E o quarto termo desta mesma equação dá a relação de Gell-Mann, Oakes e Renner para o pión (FREDERICO; MILLER, 1992),

$$m_\pi^2 = \frac{\hat{m}}{f_\pi^2} \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle , \quad (4.9)$$

é o condensado dos quarks no vácuo. O condensado acima, dá uma medida da quebra de simetria quiral.

Na próxima seção, estudaremos a equivalência entre o formalismo covariante e o da frente de luz no presente modelo, cuja proposta é incluir a auto-energia do quark no vértice pión-quark-antiquark e nas “pernas” (termo este que designa a inclusão da auto-energia nos propagadores dos quarks). Na realidade utilizaremos a amplitude de Bethe-Salpeter apresentada no capítulo 2 (MELLO *et al.*, 2017).

Podemos obter a corrente eletromagnética no referencial de Breit, em que  $q^+ = 0$ . Mostramos que o termo de “criação de pares” para a componente  $J_\pi^+$  da corrente eletromagnética é cancelado exatamente e portanto o resultado covariante é obtido também no formalismo da frente de luz (MELO, 1998; MELO *et al.*, 1998).

## 4.2 Corrente eletromagnética do pión

O fator de forma eletromagnético do pión é obtido através do diagrama de um *loop* Fig. (4.1). Escolhemos trabalhar no referencial de Breit onde o momento transferido é  $q = (0, q_\perp, 0)$ , em que  $q_\perp = (q^x, q^y)$  com  $q^y = 0$ . Neste referencial e com a condição de Drell-Yan,  $q^+ = q^0 + q^z = 0$ , usamos a aproximação de impulso no plano-nulo para calcular o fator de forma eletromagnético do pión  $F_\pi(q^2)$  (CHUNG *et al.*, 1988).

A amplitude de Bethe-Salpeter para o pión no cálculo do fator de forma eletromagnético foi aquela discutida em detalhes no capítulo 2. Lembrando que simplificamos o propagador vestido considerando a renormalização da função de onda igual a 1. Esta aproximação simplificou muito a integração analítica em  $k^-$ , que é a primeira etapa no cálculo do *loop* de momento do diagrama na Fig. (4.1).

Para obter a corrente eletromagnética do quark, usamos a identidade de Ward-Takahashi (NAUS *et al.*, 1998; TAKAHASHI, 1957):

$$q_\mu \Gamma^\mu(k; P, P') = S^{-1}(P' - k) - S^{-1}(P - k) . \quad (4.10)$$

Detalhes da construção do vértice fóton-quark satisfazendo a Eq. (4.10), podem ser vistos no apêndice C. A partir desta relação, temos que o vértice que representa o acoplamento entre o quark e o fóton,  $\Gamma^\mu(k; P, P')$ , segundo a identidade de Ward-Takahashi, é dado

por:

$$-i\Gamma^\mu(k; P, P') = \gamma^\mu + \frac{m^3 (P' + P - 2k)^\mu}{[(P' - k)^2 - \lambda^2 + i\epsilon][(P - k)^2 - \lambda^2 + i\epsilon]} . \quad (4.11)$$

Podemos escrever o vértice fóton-quark como:

$$-i\Gamma^\mu(k; P, P') = \gamma^\mu + \Lambda^\mu(k; P, P') , \quad (4.12)$$

onde a função  $\Lambda^\mu(k; P, P')$ , é dada por:

$$\Lambda^\mu(k; P, P') = \frac{m^3 (P' + P - 2k)^\mu}{[(P' - k)^2 - \lambda^2 + i\epsilon][(P - k)^2 - \lambda^2 + i\epsilon]} . \quad (4.13)$$

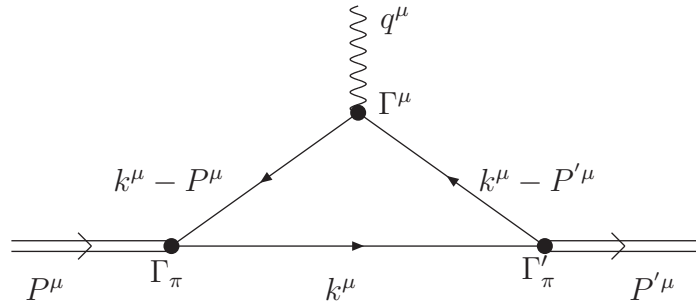


FIGURA 4.1 – Diagrama de Feynman na aproximação de impulso.

Do diagrama triangular de Feynman da Fig. (4.1), obtemos a corrente eletromagnética do pión  $J_\pi^\mu$ ,

$$J_\pi^\mu(k; P, P') = iN^2 N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr [S(k)\Gamma'_\pi(k + P'/2)S(k - P')\Gamma^\mu(k; P, P') \times S(k - P)\Gamma_\pi(k + P/2)] , \quad (4.14)$$

onde  $P' = P + q$ ,  $N$  é a normalização e  $N_c$  é o número de cores da QCD.

No presente modelo, propomos a inserção da parte escalar da auto-energia dos quarks no vértice pión-quark-antiquark,  $\Gamma_\pi(k)$  na Eq. (2.11). Esta relação faz com que o vértice  $\Gamma_\pi(k)$  tenha pólos, quando realizamos a integração na componente  $k^-$  (energia na frente de luz).

Pode-se escrever a estrutura de Dirac da Eq. (4.14) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^\mu(k; P, P') &= [\not{k} + M(k)] \Gamma'_\pi(k + P'/2) [\not{k} - \not{P}' + M(P' - k)] \Gamma^\mu(k; P, P') \times \\ &\quad [\not{k} - \not{P} + M(P - k)] \Gamma_\pi(k + P/2), \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde é utilizado o referencial de Breit, com o momento transferido na direção  $q = (0, q^x, 0, 0)$ . O momento inicial do pión é  $P = (P^0, -q^x/2, 0, 0)$  e momento final é  $P' = (P^0, q^x/2, 0, 0)$ . Também fizemos uso da condição de Drell-Yan,  $q^+ = 0$ , quando não há momento transferido na direção longitudinal. Assim, concluímos que  $P'^0 = P^0$ ,  $P'_\perp = \frac{q_\perp}{2}$  e  $P_\perp = -\frac{q_\perp}{2}$  no referencial de Breit. Calculamos a componente  $J_\pi^+$  da corrente eletromagnética do pión na frente de luz, obtemos o traço da estrutura de Dirac,  $\mathcal{O}^+(k; P, P')$ , como segue:

$$\begin{aligned} Tr[\mathcal{O}^+(k; P, P')] &= \{ -4k^-(k^+ - P^+)(k^+ - P'^+) \\ &\quad + k^+ [4k_x^2 + q^2 - 4M(P - k)M(P' - k) \\ &\quad + M(k)M(P - k) + 4M(k)M(P' - k) \\ &\quad - 2[-2k_x^2(P^+ + P'^+) + k_x(P'^+ - P^+)q^+ \\ &\quad + 2M(k)(P'^+M(P - k) + P^+M(P' - k))] \\ &\quad - \frac{(2k^+ - P^+ - P'^+)}{m^3} [-2k^+P'^-M(P - k) \\ &\quad + 2k_xq(M(P - k) - M(P' - k)) - 2k^+P^-M(P' - k) \\ &\quad - 4k_x^2(M(P - k) + M(P' - k) - M(k)) \\ &\quad + 2k^+P^-M(k) + 2k^+P'^-M(k) - 2P'^-P^+M(k) \\ &\quad - 2P^-P'^+M(k) - q^2M(k) - 4M(P - k)M(P' - k)M(k) \\ &\quad + 2k^-(-P'^+M(P - k) - P^+M(P' - k)) \\ &\quad + 2k^+(M(P - k) + M(P' - k) - M(k)) \\ &\quad + P^+M(k) + P'^+M(k)] \}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Fatoramos as funções  $M(k + P'/2; m_0 = 0)$  e  $M(k + P/2; m_0 = 0)$  provenientes dos vértices inicial  $\Gamma_\pi(k; P')$  e final  $\Gamma'_\pi(k; P)$ , para deixá-las externas ao traço na Eq. (4.18) apenas no que diz respeito a notação.

Podemos escrever a função de massa dinâmica do quark nas coordenadas da frente de

luz como segue,

$$\begin{aligned}
M(k) &= m_0 - \frac{m^3}{a_n}, \quad a_n = k^+ \left( k_n^- - \frac{f_a - i\epsilon}{k^+} \right), \\
M(P - k) &= m_0 - \frac{m^3}{b_n}, \quad b_n = (P^+ - k^+) \left( P^- - k_n^- - \frac{f_b - i\epsilon}{P^+ - k^+} \right), \\
M(P' - k) &= m_0 - \frac{m^3}{c_n}, \quad c_n = (P'^+ - k^+) \left( P'^- - k_n^- - \frac{f_c - i\epsilon}{P'^+ - k^+} \right), \\
M(k + P/2) &= m_0 - \frac{m^3}{d_n}, \quad d_n = \left( \frac{P^+}{2} + k^+ \right) \left( \frac{P^-}{2} + k_n^- - \frac{f_d - i\epsilon}{\frac{P^+}{2} + k^+} \right), \\
M(k + P'/2) &= m_0 - \frac{m^3}{e_n}, \quad e_n = \left( \frac{P'^+}{2} + k^+ \right) \left( \frac{P'^-}{2} + k_n^- - \frac{f_e - i\epsilon}{\frac{P'^+}{2} + k^+} \right).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Os termos  $f_a, f_b, f_c, f_d$  e  $f_e$ , encontram-se na Eq. (4.26) e os pólos nos denominadores  $a_n, b_n, c_n, d_n$  e  $e_n$  estão definidos na Eq. (4.25).

A partir das definições dadas nas Eqs. (4.16) e (4.17), podemos reescrever a Eq. (4.14), da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
J_\pi^+(k; P, P') &= i \frac{N^2 N_c}{f_\pi^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{m^6 \mathcal{P}_n^+(k; P, P') a_n b_n c_n}{[a_n^2 (k^2 + i\epsilon) - (m_0 a_n - m^3)^2] d_n e_n} \times \\
&\quad \frac{1}{[b_n^2 ((P - k)^2 + i\epsilon) - (m_0 b_n - m^3)^2]} \times \\
&\quad \frac{1}{[c_n^2 ((P' - k)^2 + i\epsilon) - (m_0 c_n - m^3)^2]}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Para simplificar a expressão da corrente acima, Eq. (4.18), reescrevemos o traço, Eq. (4.16), como:

$$Tr[\mathcal{O}_n^+(k; P, P')] = \frac{\mathcal{P}_n^+(k; P, P')}{a_n b_n c_n}. \tag{4.19}$$

Os detalhes podem ser verificados na Eq. (D.9) do apêndice D. Também verifica-se que  $\mathcal{P}_n^+(k; P, P')$  apresenta dependências de  $k^-$ , Eq. (D.10), como segue

$$k^2(k^-), \quad a_n(k^-), \quad b_n(k^-), \quad c_n(k^-), \quad d_n(k^-), \quad e_n(k^-), \quad \mathcal{P}_n^+(k^{-4}, k^{-2}, k^-, k^{-1}). \tag{4.20}$$

De modo que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(k^{-3}, k^{-2}, k^{-}) &= a_n^2(k^2 + i\epsilon) - (m_0 a_n - m^3)^2, \\
\mathcal{F}_2(k^{-3}, k^{-2}, k^{-}) &= b_n^2((P - k)^2 + i\epsilon) - (m_0 b_n - m^3)^2 \text{ onde } \mathcal{G}(k^{-}) = (k \cdot P), \\
\mathcal{F}_3(k^{-3}, k^{-2}, k^{-}) &= c_n^2((P' - k)^2 + i\epsilon) - (m_0 c_n - m^3)^2 \text{ onde } \mathcal{H}(k^{-}) = (k \cdot P').
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Assim a contagem de potências de  $k^{-}$  na Eq. (4.18) é:

$$J_{\pi}^{+} = i \int \frac{d^2 k_{\perp} dk^{+} dk^{-}}{2(2\pi)^4 f_{\pi}^2} \frac{N^2 N_c m^6 \mathcal{P}_n^{+}(k^{-4}, k^{-2}, k^{-}, k^{-1}) a_n(k^{-}) b_n(k^{-}) c_n(k^{-})}{\mathcal{F}_1(k^{-3}, k^{-2}, k^{-}) \mathcal{F}_2(k^{-3}, k^{-2}, k^{-}) \mathcal{F}_3(k^{-3}, k^{-2}, k^{-}) d_n(k^{-}) e_n(k^{-})}. \tag{4.22}$$

Logo a integração em  $k^{-}$  resulta numa função logarítmica. A integral é convergente.

Identificamos os pólos em  $k^{-}$ , quando realizamos a mudança de variáveis  $k^2 = y$ ,  $(P - k)^2 = z$  e  $(P' - k)^2 = w$  e desta maneira extraímos as raízes da equação cúbica, Eq. (2.23),

$$J_{\pi}^{+}(k; P, P') = i \frac{N^2 N_c}{f_{\pi}^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{m^6 \mathcal{P}_n^{+}(k; P, P') a_n b_n c_n}{\frac{1}{(z - m_1)(z - m_2)(z - m_3)} \frac{1}{(w - m_1)(w - m_2)(w - m_3)}} \times \tag{4.23}$$

Deste modo, podemos identificar os seguintes denominadores em  $J_{\pi}^{+}$ :

$$J_{\pi}^{+}(k; P, P') = i \frac{N^2 N_c}{f_{\pi}^2} \int \frac{d^2 k_{\perp} dk^{+} dk^{-}}{2(2\pi)^4} \frac{m^6 \mathcal{P}_n^{+}(k; P, P') a_n b_n c_n}{\prod_j \mathcal{D}_j d_n e_n}. \tag{4.24}$$

Onde temos que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1 &= k^{+} \left( k_n^{-} - \frac{f_1 - i\epsilon}{k^{+}} \right), \quad \mathcal{D}_2 = k^{+} \left( k_n^{-} - \frac{f_2 - i\epsilon}{k^{+}} \right), \\
\mathcal{D}_3 &= k^{+} \left( k_n^{-} - \frac{f_3 - i\epsilon}{k^{+}} \right), \quad \mathcal{D}_4 = (P^{+} - k^{+}) \left( P^{-} - k_n^{-} - \frac{f_4 - i\epsilon}{P^{+} - k^{+}} \right), \\
\mathcal{D}_5 &= (P'^{+} - k^{+}) \left( P'^{-} - k_n^{-} - \frac{f_5 - i\epsilon}{P'^{+} - k^{+}} \right), \quad \mathcal{D}_6 = (P^{+} - k^{+}) \left( P^{-} - k_n^{-} - \frac{f_6 - i\epsilon}{P^{+} - k^{+}} \right), \\
\mathcal{D}_7 &= (P'^{+} - k^{+}) \left( P'^{-} - k_n^{-} - \frac{f_7 - i\epsilon}{P'^{+} - k^{+}} \right), \quad \mathcal{D}_8 = (P^{+} - k^{+}) \left( P^{-} - k_n^{-} - \frac{f_8 - i\epsilon}{P^{+} - k^{+}} \right), \\
\mathcal{D}_9 &= (P'^{+} - k^{+}) \left( P'^{-} - k_n^{-} - \frac{f_9 - i\epsilon}{P'^{+} - k^{+}} \right).
\end{aligned}$$

Para os denominadores  $\mathcal{D}_j$  na Eq. (4.24), identificamos os seguintes pólos:

$$\begin{aligned}
k_1^- &= \frac{f_1}{k^+} - \frac{i\epsilon}{k^+}, \quad k_2^- = \frac{f_2}{k^+} - \frac{i\epsilon}{k^+}, \quad k_3^- = \frac{f_3}{k^+} - \frac{i\epsilon}{k^+}, \\
k_4^- &= P^- - \frac{f_4}{P^+ - k^+} + \frac{i\epsilon}{P^+ - k^+}, \quad k_5^- = P'^- - \frac{f_5}{P'^+ - k^+} + \frac{i\epsilon}{P'^+ - k^+}, \\
k_6^- &= P^- - \frac{f_6}{P^+ - k^+} + \frac{i\epsilon}{P^+ - k^+}, \quad k_7^- = P'^- - \frac{f_7}{P'^+ - k^+} + \frac{i\epsilon}{P'^+ - k^+}, \\
k_8^- &= P^- - \frac{f_8}{P^+ - k^+} + \frac{i\epsilon}{P^+ - k^+}, \quad k_9^- = P'^- - \frac{f_9}{P'^+ - k^+} + \frac{i\epsilon}{P'^+ - k^+}, \\
k_d^- &= -\frac{P^-}{2} + \frac{f_d}{\frac{P^+}{2} + k^+} - \frac{i\epsilon}{\frac{P^+}{2} + k^+}, \quad k_e^- = -\frac{P'^-}{2} + \frac{f_e}{\frac{P'^+}{2} + k^+} - \frac{i\epsilon}{\frac{P'^+}{2} + k^+},
\end{aligned} \tag{4.25}$$

onde:

$$\begin{aligned}
f_1 &= k_\perp^2 + m_1, \quad f_2 = k_\perp^2 + m_2, \quad f_3 = k_\perp^2 + m_3, \quad f_a = k_\perp^2 + \lambda^2, \\
f_4 &= (P - k)_\perp^2 + m_1, \quad f_5 = (P' - k)_\perp^2 + m_2, \quad f_6 = (P - k)_\perp^2 + m_3, \\
f_7 &= (P' - k)_\perp^2 + m_1, \quad f_8 = (P - k)_\perp^2 + m_2, \quad f_9 = (P' - k)_\perp^2 + m_3, \\
f_b &= (P - k)_\perp^2 + \lambda^2, \quad f_c = (P' - k)_\perp^2 + \lambda^2, \\
f_d &= \left(\frac{P}{2} + k\right)_\perp^2 + \lambda^2, \quad f_e = \left(\frac{P'}{2} + k\right)_\perp^2 + \lambda^2,
\end{aligned} \tag{4.26}$$

onde  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  são as raízes do polinômio, no denominador da Eq. (4.23), que é derivado dos propagadores, quando incluímos a auto-energia nas “pernas”, como mostramos anteriormente no capítulo 3.

Para o intervalo de valência da corrente eletromagnética do pión, identificamos as contribuições dos seguintes pólos, (veja em Fig. (4.2)):

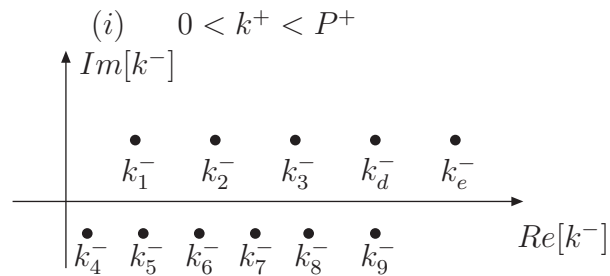


FIGURA 4.2 – Posição dos pólos para o termo de valência da corrente eletromagnética do pión.

Assim temos, que o termo de valência da corrente eletromagnética,  $J_\pi^{+V}(k; P, P')$ , é dado por:

$$\begin{aligned}
J_\pi^{+V}(k; P, P') &= m^6 N_c^2 \frac{N_c}{f_\pi^2} \int \frac{d^2 k_\perp dk^+}{2(2\pi)^3} \left\{ \sum_{n=1}^3 \left[ \frac{\mathcal{P}_n^+(k; P, P') a_n b_n c_n \mathcal{D}_n}{k^+ \prod_{j=1}^9 \mathcal{D}_j d_n e_n} \right] + \right. \\
&+ \left. \left[ \frac{\mathcal{P}_d^+(k; P, P') a_d b_d c_d}{\left(\frac{P^+}{2} + k^+\right) \prod_{j=1}^9 \mathcal{D}_j e_d} + \frac{\mathcal{P}_e^+(k; P, P') a_e b_e c_e}{\left(\frac{P'^+}{2} + k^+\right) \prod_{j=1}^9 \mathcal{D}_j d_e} \right] \right\} \times \\
&\times \theta(P^+ - k^+) \theta(k^+) ,
\end{aligned} \tag{4.27}$$

cujos denominador é,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1 &= f_n - f_1 , \quad \mathcal{D}_2 = f_n - f_2 , \quad \mathcal{D}_3 = f_n - f_3 , \quad a_n = f_n - f_a , \\
\mathcal{D}_4 &= (P^+ - k^+) \left( P^- - \frac{f_n}{k^+} - \frac{f_4}{P^+ - k^+} \right) , \quad \mathcal{D}_5 = (P'^+ - k^+) \left( P'^- - \frac{f_n}{k^+} - \frac{f_5}{P'^+ - k^+} \right) , \\
\mathcal{D}_6 &= (P^+ - k^+) \left( P^- - \frac{f_n}{k^+} - \frac{f_6}{P^+ - k^+} \right) , \quad \mathcal{D}_7 = (P'^+ - k^+) \left( P'^- - \frac{f_n}{k^+} - \frac{f_7}{P'^+ - k^+} \right) , \\
\mathcal{D}_8 &= (P^+ - k^+) \left( P^- - \frac{f_n}{k^+} - \frac{f_8}{P^+ - k^+} \right) , \quad \mathcal{D}_9 = (P'^+ - k^+) \left( P'^- - \frac{f_n}{k^+} - \frac{f_9}{P'^+ - k^+} \right) .
\end{aligned}$$

E temos que,  $b_n$ ,  $c_n$ ,  $d_n$  e  $e_n$  na Eq. (4.27) são,

$$\begin{aligned}
b_n &= (P^+ - k^+) \left( P^- - \frac{f_n}{k^+} - \frac{f_b}{P^+ - k^+} \right) ; \quad c_n = (P'^+ - k^+) \left( P'^- - \frac{f_n}{k^+} - \frac{f_c}{P'^+ - k^+} \right) , \\
d_n &= \left( \frac{P^+}{2} + k^+ \right) \left( \frac{P^-}{2} + \frac{f_n}{k^+} - \frac{f_d}{\frac{P^+}{2} + k^+} \right) ; \quad e_n = \left( \frac{P'^+}{2} + k^+ \right) \left( \frac{P'^-}{2} + \frac{f_n}{k^+} - \frac{f_e}{\frac{P'^+}{2} + k^+} \right) .
\end{aligned}$$

Para o termo de valência da corrente eletromagnética, Eq. (4.27), usamos o referencial em que  $P'^+ = P^+$  e  $P'^- = P^-$ .

### 4.3 Termos de pares

Para descrevermos corretamente os observáveis para o méson  $\pi$ , no formalismo da frente de luz, temos que identificar através da análise dos pólos, Fig. (4.3), na Eq. (4.28), a possibilidade de haver termos de não-valência ou termos de pares que venham a contribuir para a corrente eletromagnética (MELO, 1998; MELO *et al.*, 1998). Os termos de não-valência (ou termos de pares) não são invariantes sob transformações de Lorentz e, quando não incluídos no cálculo do fator de forma causam a quebra da simetria rotacional (MELO, 1998; MELO; FREDERICO, 1997).

Podemos restaurar a covariância no formalismo da frente de luz, adicionando aos termos de valência da corrente eletromagnética, os termos de pares ou de não-valência (MELO *et al.*, 1999a; MELO; FREDERICO, 1997; BAKKER *et al.*, 2001; MELO *et al.*, 1998). Dessa forma é necessário verificar se a contribuição de não-valência para o fator de forma é relevante no presente modelo do pión (MELLO *et al.*, 2017).

Assim analisamos os pólos que contribuem na região  $P^+ < k^+ < P'^+$  na Fig. (4.3), e em seguida utilizar o limite  $P'^+ \rightarrow P^+$ , que corresponde a condição de Drell-Yan.

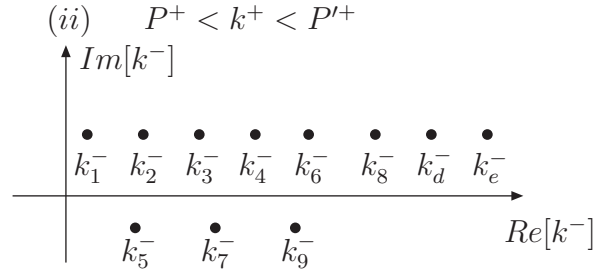


FIGURA 4.3 – Posição dos pólos para o termo de par.

Temos que a corrente eletromagnética no intervalo de integração dado acima, pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 J_{\pi}^{+Z}(k; P, P') &= -m^6 N^2 \frac{N_c}{f_{\pi}^2} \sum_{n=1}^3 \int \frac{d^2 k_{\perp} dk^+}{2(2\pi)^3} \frac{\mathcal{P}_{2n+3}^+(k; P, P') a_{2n+3} b_{2n+3} c_{2n+3} D_{2n+3}}{(P'^+ - k^+) \prod_{j=1}^9 \mathcal{D}_j d_{2n+3} e_{2n+3}} \times \\
 &\times \theta(P'^+ - k^+) \theta(k^+ - P^+) ,
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

cujos denominadores são dados por:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_1 &= k^+ \left( P'^- - \frac{f_{2n+3}}{P'^+ - k^+} - \frac{f_1}{k^+} \right) , \\
 \mathcal{D}_2 &= k^+ \left( P'^- - \frac{f_{2n+3}}{P'^+ - k^+} - \frac{f_2}{k^+} \right) , \\
 \mathcal{D}_3 &= k^+ \left( P'^- - \frac{f_{2n+3}}{P'^+ - k^+} - \frac{f_3}{k^+} \right) , \\
 \mathcal{D}_4 &= (P^+ - k^+) \left( P^- - P'^- + \frac{f_{2n+3}}{P'^+ - k^+} - \frac{f_4}{P^+ - k^+} \right) , \\
 \mathcal{D}_5 &= f_{2n+3} - f_5 , \\
 \mathcal{D}_6 &= (P^+ - k^+) \left( P^- - P'^- + \frac{f_{2n+3}}{P'^+ - k^+} - \frac{f_6}{P^+ - k^+} \right) , \\
 \mathcal{D}_7 &= f_{2n+3} - f_7 , \\
 \mathcal{D}_9 &= (P^+ - k^+) \left( P^- - P'^- + \frac{f_{2n+3}}{P'^+ - k^+} - \frac{f_9}{P^+ - k^+} \right) . \\
 \mathcal{D}_9 &= f_{2n+3} - f_9 ,
 \end{aligned}$$



e as funções  $a_{2n+3}$ ,  $b_{2n+3}$  e  $c_{2n+3}$  que também compõem  $\mathcal{P}_{2n+3}^+(k; P, P')$ , são,

$$\begin{aligned} a_{2n+3} &= k^+ \left( P'^- - \frac{f_{2n+3}}{P'^+ - k^+} - \frac{f_a}{k^+} \right), \\ b_{2n+3} &= (P^+ - k^+) \left( P^- - P'^- + \frac{f_{2n+3}}{P'^+ - k^+} - \frac{f_b}{P^+ - k^+} \right), \\ c_{2n+3} &= f_{2n+3} - f_c, \\ d_{2n+3} &= \left( \frac{P^+}{2} + k^+ \right) \left( \frac{P^-}{2} + P'^- - \frac{f_{2n+3}}{P'^+ - k^+} - \frac{f_d}{\frac{P^+}{2} + k^+} \right), \\ e_{2n+3} &= \left( \frac{P'^+}{2} + k^+ \right) \left( \frac{P'^-}{2} + P'^- - \frac{f_{2n+3}}{P'^+ - k^+} - \frac{f_e}{\frac{P'^+}{2} + k^+} \right). \end{aligned}$$

Concluimos que os termos de pares para a componente  $J_\pi^+$  da corrente eletromagnética, no presente modelo anulam-se, quando estamos no referencial de Breit com a condição de Drell-Yan,  $q^+ = 0$  (MELO *et al.*, 1999a). Isto deve ao fato de,

$$J_\pi^{+Z}(k; P, P') \propto q^+, \quad (4.29)$$

como pode ser visto no apêndice E na Eq. (E.3). Ou seja, quando  $q^+ \rightarrow 0$  temos que  $J_\pi^{+Z}(k; P, P') = 0$ . Portanto os termos de pares para esta componente da corrente é suprimido no presente modelo.

#### 4.4 Dependência do referencial para $J_\pi^{+V}(k; P, P')$ e $J_\pi^{+Z}(k; P, P')$

Um estudo que fizemos foi explorar a situação na qual não temos a condição de Drell-Yan,  $q^+ = 0$ . Assim as contribuições do diagrama  $Z$  passa a ser relevante além da componente de valência mesmo na componente  $J^+$  da corrente eletromagnética do pión. Neste estudo mantivemos o referencial de Breit em nossos cálculos.

$$P^\mu = \left( P^0, -\frac{\sqrt{-q^2}}{2} \cos(\alpha), 0, -\frac{\sqrt{-q^2}}{2} \sin(\alpha) \right), \quad q^\mu = \left( q^0, \sqrt{-q^2} \cos(\alpha), 0, \sqrt{-q^2} \sin(\alpha) \right),$$

para o estado inicial e o momento transferido, respectivamente, e  $P'^\mu = (P + q)^\mu$  é o momento final, e  $P'^0 = P^0 = \sqrt{m_\pi^2 + \frac{q^2}{4}}$ . Depois de efetuada a integração na energia na frente de luz,  $k^-$ , a corrente eletromagnética para o estado ligado do méson  $\pi$ , que segue as mesmas técnicas utilizadas nas referências (MELO *et al.*, 2002; MELO; FREDERICO, 1997), podem ser identificadas duas regiões de integração diferentes de zero, a de valência e a de não-valência. A primeira está associado a região  $0 < k^+ < P^+$ , conhecido como o termo

de valência da corrente eletromagnética  $J_\pi^{+V}$  e a outra, onde podem existir termos de pares  $P^+ < k^+ < P'^+$ , que é o termo de não-valência da corrente ou simplesmente termo de par  $J_\pi^{+Z}$  (MELO, 1998). No próximo capítulo, apresentamos um cálculo exploratório onde iremos mostrar resultados para a contribuição do termo de valência no fator de forma do pión.

## 4.5 Constante de decaimento eletrofraca do pión

Um observável utilizado para fixar os parâmetros do presente modelo é a constante de decaimento eletrofraca,  $f_\pi$ . Ela é definida através dos elementos de matriz da conservação parcial da corrente vetor-axial,  $\langle 0 | A_i^\mu(k, P) | \pi_j \rangle = i P^\mu f_\pi \delta_{ij}$ . Seguindo a referência (FREDERICO; MILLER, 1992), tomamos  $A_i^\mu(k, P) = \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau_i}{2} q$ , e adaptando nosso *ansatz* para a função do pión-quark-antiquark,  $\Gamma_{f_\pi}^\mu(k, P) = A^\mu(k, P) M(k, P)$ , obtemos,

$$i\sqrt{2}P^\mu f_\pi = \frac{NN_c}{f_\pi^{\text{exp}}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \Gamma_{f_\pi}^\mu(k - P/2) S(k) \gamma^5 S(k - P) \right] , \quad (4.30)$$

onde  $f_\pi^{\text{exp}}$  é o valor experimental da constante de decaimento do pión (OLIVE *et al.*, 2014).

Para obtenção da constante de decaimento eletrofraca,  $f_\pi$ , Eq. (4.30), do pión, utilizamos o diagrama, Fig. (4.4),

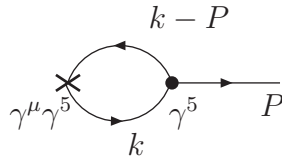


FIGURA 4.4 – Decaimento do méson  $\pi$ .

Calculamos  $f_\pi$  a partir da componente  $A^+(k, P)$  da corrente eletromagnética. Verifica-se que a constante de decaimento deriva da integração em  $k^-$  da componente “+” da parte pseudovetorial da função de onda. Assim da componente “+” da Eq. (3.23), temos:

$$A^\mu(k, P) = \gamma^\mu \gamma^5 [\not{k} + M(k)] \gamma^5 [\not{P} - \not{k} + M(P - k)] . \quad (4.31)$$

Utilizamos a componente “+” da corrente axial para obtenção da constante de decaimento eletrofraca do pión, portanto o traço da estrutura de Dirac na Eq. (4.31), pode ser escrito

como,

$$\begin{aligned}
 A_n^+(k, P) &= -4 [k^+ M(P - k) + (P - k)^+ M(k)] \\
 &= -4 \left[ k^+ \left( m_0 - \frac{m^3}{b_n} \right) + (P - k)^+ \left( m_0 - \frac{m^3}{a_n} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

em termos de  $x = \frac{k^+}{P^+}$ , temos para o primeiro intervalo de integração,  $0 < k^+ < \frac{P^+}{2}$ , da região de valência,

$$\begin{aligned}
 A_{2n+1}^+(x, k_\perp) &= -4xP^+ \left[ m_0 - \frac{m^3}{(1-x) \left( m_\pi^2 - \frac{f_{2n+1}}{x} - \frac{f_b}{1-x} \right)} \right] \\
 &\quad - 4(1-x)P^+ \left[ m_0 - \frac{m^3}{f_{2n+1} - f_a} \right],
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

e para o segundo intervalo de integração,  $\frac{P^+}{2} < k^+ < P^+$ , da região de valência,

$$A_{2n}^+(x, k_\perp) = -4xP^+ \left[ m_0 - \frac{m^3}{f_{2n} - f_b} \right] - 4(1-x)P^+ \left[ m_0 - \frac{m^3}{x \left( m_\pi^2 - \frac{f_{2n}}{1-x} - \frac{f_a}{x} \right)} \right], \tag{4.34}$$

podemos observar que  $A_n^+(x, k_\perp)$  é simétrico pela troca de  $x \rightarrow (1-x)$ . Sendo assim temos que a constante de decaimento é dada no primeiro intervalo de integração por,

$$\sqrt{2}P^\mu f_\pi^{(i)} = -\frac{NN_c}{f_\pi^{\text{exp}}} \int \frac{d^2k_\perp dx}{2(2\pi)^3} \sum_{n=1}^3 \frac{m^3 a_{2n+1}^2 b_{2n+1}^2 A_{2n+1}^{\mu(i)}(x, k_\perp) \mathcal{D}_{2n+1}}{x \prod_{j=1}^7 \mathcal{D}_j} \theta(1/2 - x) \theta(x), \tag{4.35}$$

onde os denominadores são os visto na Eq. (3.32). Para o segundo intervalo,

$$\sqrt{2}P^\mu f_\pi^{(ii)} = \frac{NN_c}{f_\pi^{\text{exp}}} \int \frac{d^2k_\perp dx}{2(2\pi)^3} \sum_{n=1}^3 \frac{m^3 a_{2n}^2 b_{2n}^2 A_{2n}^{\mu(ii)}(x, k_\perp) \mathcal{D}_{2n}}{(1-x) \prod_{j=1}^7 \mathcal{D}_j} \theta(1-x) \theta(1-x/2), \tag{4.36}$$

cujo denominadores são os mesmos da Eq. (3.34). Assim temos que,

$$f_\pi = f_\pi^{(i)} + f_\pi^{(ii)}. \tag{4.37}$$

Para efetuar a normalização  $N$  para a constante de decaimento, precisamos partir da

---

normalização da função de onda completa do pión. Como apenas obtivemos a função de onda de valência, então extraímos  $N$  do fator de forma eletromagnético, normalizado a 1 para o momento transferido nulo.

## 5 Observáveis eletrofracos do pión

A estrutura interna do hádron está refletida em seus observáveis, e o fator de forma eletromagnético é um exemplo de observável. A interação de um fóton virtual com um méson, provém de sua estrutura interna e pode ser observada através de seu fator de forma eletromagnético. Isto nos permite extrair informações da dinâmica não-perturbativa de seus constituintes.

O fator de forma eletromagnético do pión,  $F_\pi(q^2)$ , é dado pela expressão abaixo: (MELO, 1998; MELO *et al.*, 1998; SILVA *et al.*, 2012)

$$(P'^+ + P^+)F_\pi(q^2) = \langle P'^+ | J_\pi^+(k; P, P') | P^+ \rangle , \quad (5.1)$$

onde  $J^+ =$  é a corrente eletromagnética do pión, Eq. (4.18).

A quebra dinâmica da simetria quiral e a estrutura de estados ligados, são altamente dependentes de modelo no regime do acoplamento forte, que não é acessível utilizando a QCD perturbativa (FREDERICO; MILLER, 1994). Neste trabalho, usamos a aproximação de impulso para o vértice méson-fóton, para incorporar efeitos não-perturbativos da quebra dinâmica de simetria quiral na estrutura do estado ligado em nossos cálculos para  $F_\pi(q^2)$ .

Uma outra abordagem, consiste em se usar a equação de Schwinger-Dyson com a equação de Bethe-Salpeter, para descrever a estrutura de estado ligado de mésons, formado de um constituinte par quark-antiquark, vestido não perturbativamente (CHANG *et al.*, 2013; CHANG *et al.*, 2013).

O fator de forma eletromagnético, neste trabalho, está normalizado,  $F_\pi(0) = 1$ , uma vez que,

$$F_\pi(q^2) = e_a F_\pi^a(q^2) + e_{\bar{b}} F_\pi^{\bar{b}}(q^2) , \quad (5.2)$$

onde  $e_a$  e  $e_{\bar{b}}$  são as cargas dos respectivos quarks, cuja soma é  $e_a + e_{\bar{b}} = 1$ . No caso do pión  $a = u$  é o quark up e  $\bar{b} = \bar{d}$  é o antiquark down.

A partir do fator de forma eletromagnético, obtemos o raio de carga (raio quadrático médio). Este está relacionado com o fator de forma pela expressão (ARAÚJO *et al.*, 1995;

ARAÚJO *et al.*, 2000; SCADRON *et al.*, 2004):

$$r_\pi = \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{-6 \left[ \frac{dF(q^2)}{dq^2} \right]_{q^2=0}}. \quad (5.3)$$

A integração da Eq. (4.27), com a definição do fator de forma na Eq. (5.1), pode ser usado para obter o raio do pión, Eq. (5.3).

No limite quiral, em que  $m_\pi = 0$  no vértice quark-pión, a Eq. (5.1) fornece o resultado bem conhecido da referência (TARRACH, 1979),  $\langle r^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{3}/2\pi f_\pi$ , e também estudamos quantitativamente a validade dessa relação para o presente modelo.

Neste capítulo, apresentamos os resultados obtidos com o presente modelo, para o fator de forma eletromagnético para o meson  $\pi$ .

Na Fig. (5.1), apresentamos os cálculos do fator de forma eletromagnético na aproximação de impulso, colocando a auto-energia nos propagadores dos quarks além de comparar com dados experimentais existentes na literatura (BALDINI *et al.*, 2000; VOLMER *et al.*, 2001; HORN *et al.*, 2006; TADEVOSYAN *et al.*, 2007; HUBER *et al.*, 2008).

A identidade de Ward-Takahashi (TAKAHASHI, 1957) é satisfeita incluindo-se a auto-energia dos quarks no propagador. Vestir o propagador dos quarks é essencial para ter a quebra de simetria quiral na QCD, e a inclusão da auto-energia no vértice quark-fóton faz a corrente eletromagnética ser conservada (NAUS *et al.*, 1998; TAKAHASHI, 1957; DUDAL *et al.*, 2013; ROJAS *et al.*, 2013).

Para o raio de carga eletromagnético do pión, que é essencialmente a razão do fator de forma eletromagnético no limite  $q^2 \rightarrow 0$  em relação ao próprio momento  $q^2$ , como visto anteriormente, produz o valor  $r_\pi = 0.672 \text{ fm}$ , o que está próximo do dado experimental,  $r_\pi^{\text{exp}} = 0.672 \pm 0.008 \text{ fm}$  (OLIVE *et al.*, 2014). O valor para a constante de decaimento, obtivemos  $f_\pi = 90.0 \text{ MeV}$ , o qual é comparável com o experimental,  $f_\pi^{(\text{exp})} = 92.42 \pm 0.021 \text{ MeV}$ , (veja a tabela (5.1) (OLIVE *et al.*, 2014)). Neste trabalho, os parâmetros do modelo são consistentes com resultados da QCD na rede para a massa dinâmica dos quarks, Fig. (2.3).

Na referência (MELLO *et al.*, 2015), foi utilizado os valores de  $m = 0.574 \text{ GeV}$ ,  $\lambda = 0.846 \text{ GeV}$  e  $m_0 = 0.014 \text{ GeV}$ , que ajustam a massa efetiva do quark em função do momento na região tipo-tempo (veja no capítulo 2, Fig (2.3)). Esses parâmetros também foram utilizados na referência (DUDAL *et al.*, 2013).

A escolha destes parâmetros, permitiu obter o fator de forma eletromagnético do pión de acordo com os dados experimentais, (HUBER *et al.*, 2008; TADEVOSYAN *et al.*, 2007; HORN *et al.*, 2006; VOLMER *et al.*, 2001; BALDINI *et al.*, 2000). Contudo ao analisarmos o raio eletromagnético e a constante de decaimento, vemos que os valores obtidos ainda

diferem um pouco dos dados experimentais (OLIVE *et al.*, 2014), como vemos na Tab. (5.1).

	$f_\pi$ [MeV]	$r_\pi$ [fm]	$r_\pi \cdot f_\pi / (\hbar c)$
Este trabalho	90.0	0.672	0.307
PDG	$92.42 \pm 0.021$	$0.672 \pm 0.008$	$0.315 \pm 0.004$

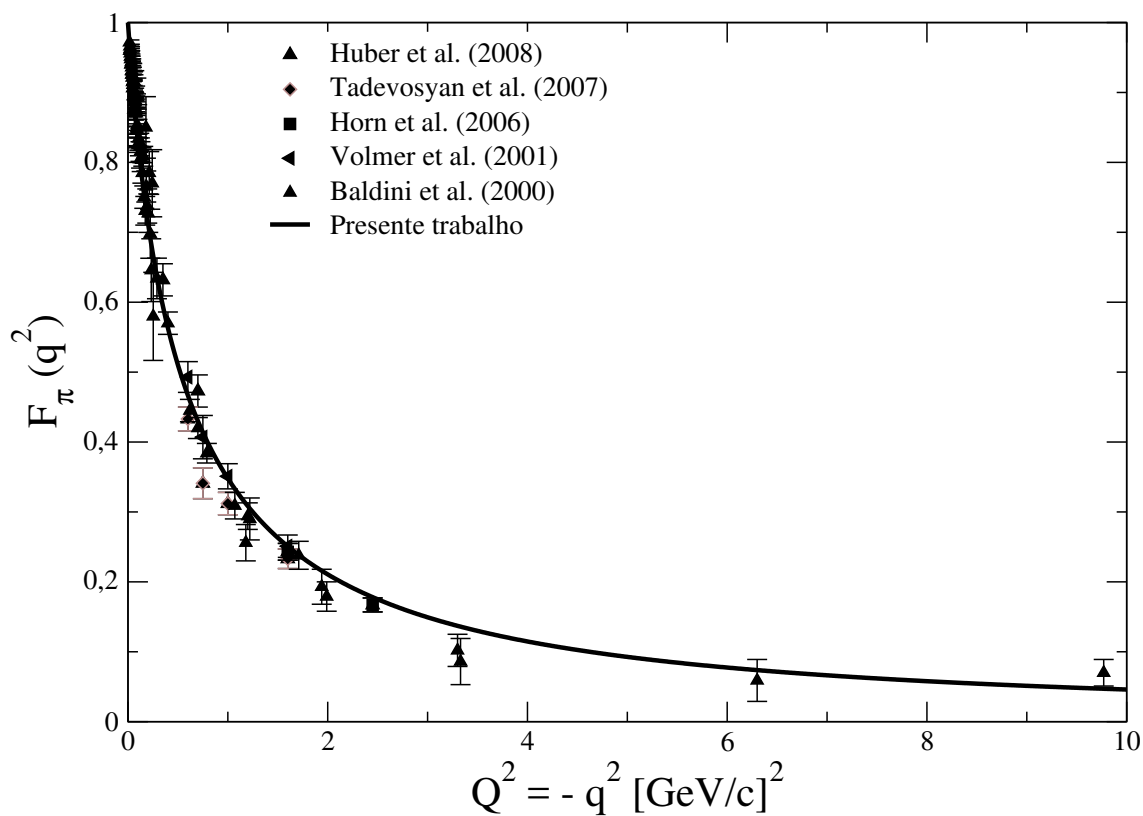
TABELA 5.1 – Raio de carga e a constante de decaimento do pión.

A Fig. (5.1) mostra o fator de forma eletromagnético do pión,  $F_\pi(q^2)$ , em função do momento quadrático transferido  $q^2$ .

Na Fig. (5.2), analisamos o fator de forma multiplicada por  $q^2$  a fim de ampliarmos a comparação com as barras de erros dos dados experimentais. Também apresentamos o fator de forma dividido pelo fator de forma associado a “dominância vetorial” (SAKURAI, 1960) na Fig. (5.3). Desta forma ampliamos ainda mais as discrepâncias entre os nossos resultados teóricos e os dados experimentais. Assim podemos ver melhor a limitação do nosso modelo na descrição do fator de forma experimental. Em seguida, permitimos alguma variação no valor do parâmetro de escala  $m$ , que altera a massa constituinte do quark dado por  $M_q \equiv M(k^2 = 0)$  para estudarmos a sensibilidade de  $r_\pi$  e  $f_\pi$  com escala de massa do modelo. Este parâmetro é alterado na fórmula de massa dinâmica do quark, enquanto os outros dois são mantidos fixos nestes cálculos de  $r_\pi$  e  $f_\pi$  para investigarmos se o comportamento previsto na relação de Tarrach (TARRACH, 1979) é mantido neste modelo. Isto é, a variação de  $r_\pi$  deve ser inversamente proporcional a variação de  $f_\pi$ .

Nas Figs. (5.4) e (5.5) apresentamos, respectivamente os resultados para o raio de carga do pión e a constante de decaimento como função da massa constituinte do quark,  $M_q$ , e os respectivos valores experimentais representados pelas linhas horizontais. Observamos que naturalmente o raio diminui com  $M_q$ , devido ao aumento relativo da escala de massa e a concomitante diminuição da escala de comprimento  $\Delta M_q/M_q \sim \Delta r_\pi/r_\pi$ , que pode ser verificado pelos resultados apresentados na Fig. (5.4). Assim entendemos que a diminuição do raio de carga do pión, está qualitativamente relacionada ao aumento da energia de ligação, que aumenta com a massa constituinte para uma massa fixa do pión. Ao mesmo tempo, o modelo apresenta um aumento simultâneo de  $f_\pi$  com a massa do quark, desde que esperamos intuitivamente que o par  $q\bar{q}$  tenda a estar em uma configuração mais compacta com o aumento da probabilidade dos quarks se encontrarem muito próximos. Os comportamentos descritos acima levam a uma consistência qualitativa com a relação  $r_\pi f_\pi = \sqrt{N_c}/2\pi$  (TARRACH, 1979), obtido no limite no qual o vértice quark-pión não tem estrutura. Lembramos que, modelos relativísticos do pión, aproximadamente seguem esta relação (ver por exemplo (FREDERICO; MILLER, 1992)) bem como para o pión obtido de cálculos de Schwinger-Dyson (ver por exemplo (CLOET; ROBERTS, 2014)).

## Fator de forma eletromagnético do pión

FIGURA 5.1 – Fator de forma eletromagnético do pión normalizado em função do momento quadrático transferido  $q^2$ . Presente modelo, linha contínua.



## Fator de forma eletromagnético do pión

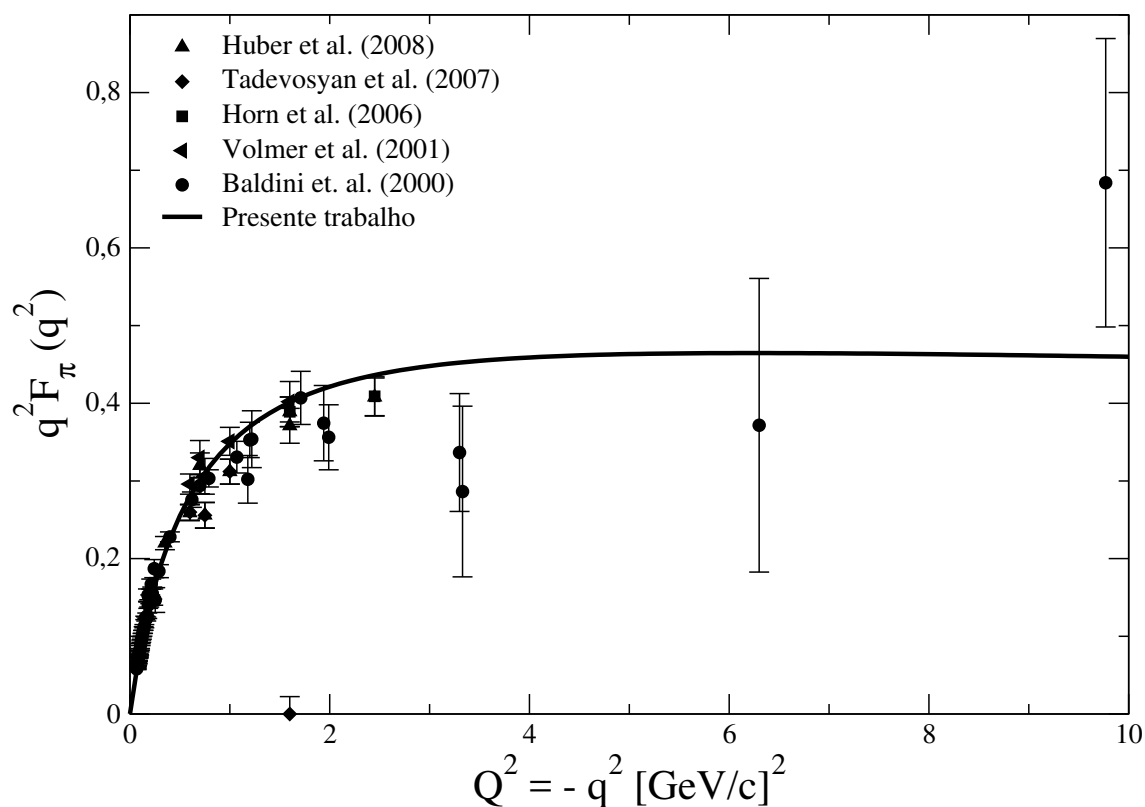


FIGURA 5.2 – Fator de forma eletromagnético do pión normalizado, multiplicado por  $q^2$ , em função do momento quadrático transferido  $q^2$ . Este modelo, linha contínua.

## Fator de forma eletromagnético do pión

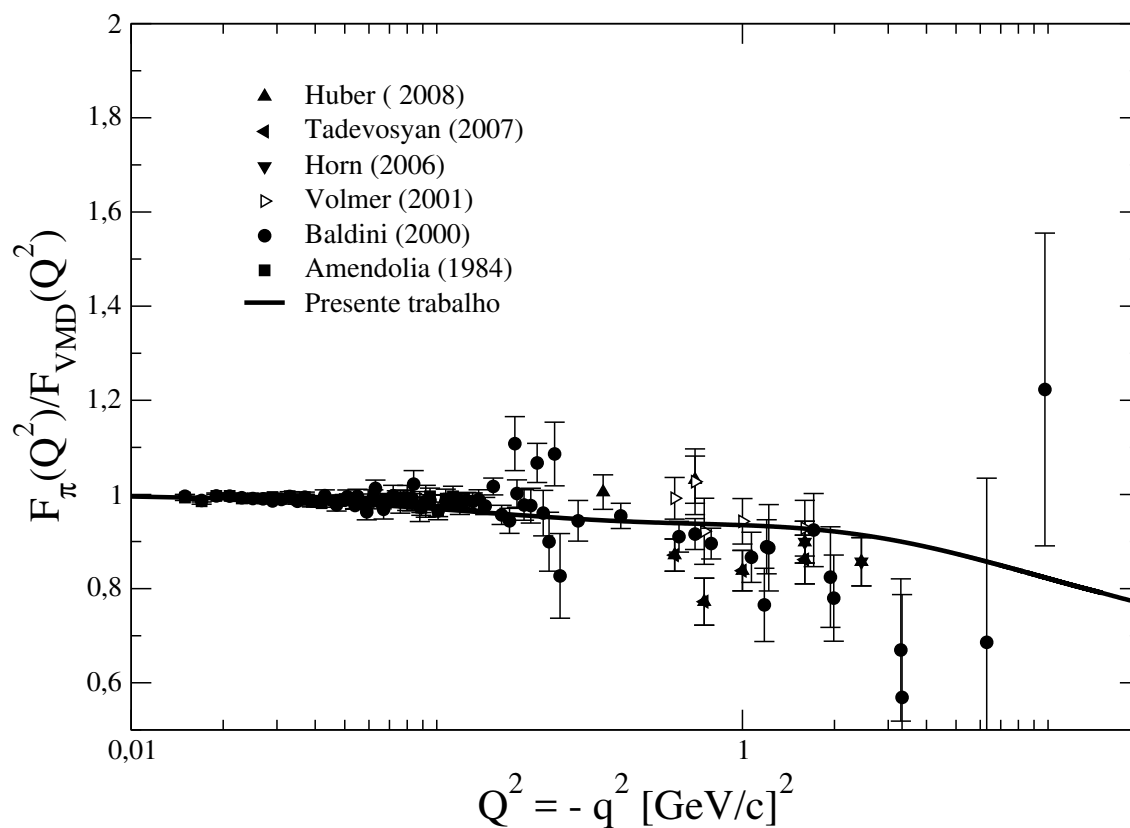


FIGURA 5.3 – Fator de forma eletromagnético do pión normalizado em função do momento quadrático transferido  $q^2$  e dividido pela *vector meson dominance*. Modelo linha contínua. Representação em escala logarítmica no eixo horizontal do gráfico. Com  $0.01 < q^2 < 20$   $[\text{GeV}/c]^2$ .

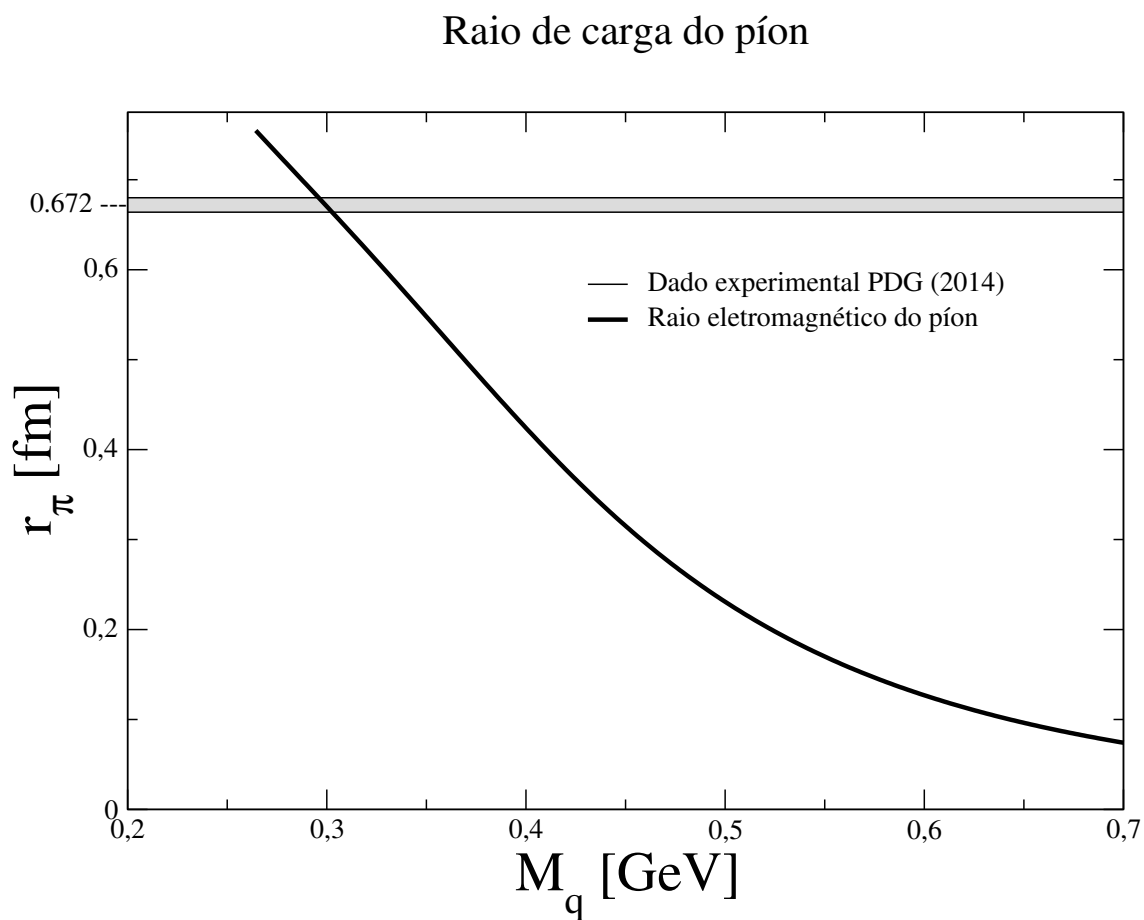
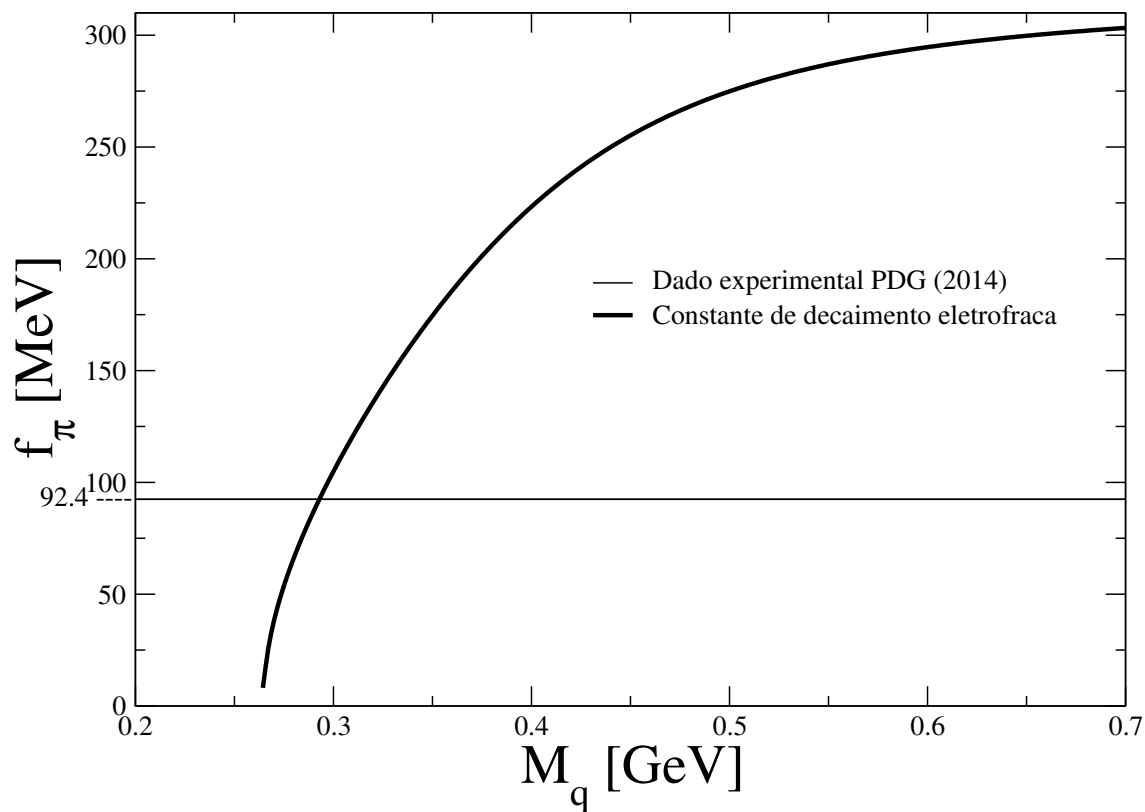


FIGURA 5.4 – Raio eletromagnético do pión,  $r_\pi = \sqrt{\langle r^2 \rangle}$ , em função da massa constituinte  $M_q = M(p = 0)$ .

## Constante de decaimento eletrofraca do pión

FIGURA 5.5 – Constante de decaimento eletrofraca do pión,  $f_\pi$ , em função da massa constituinte  $M_q = M(p = 0)$ .

## Fator de forma eletromagnético do píon

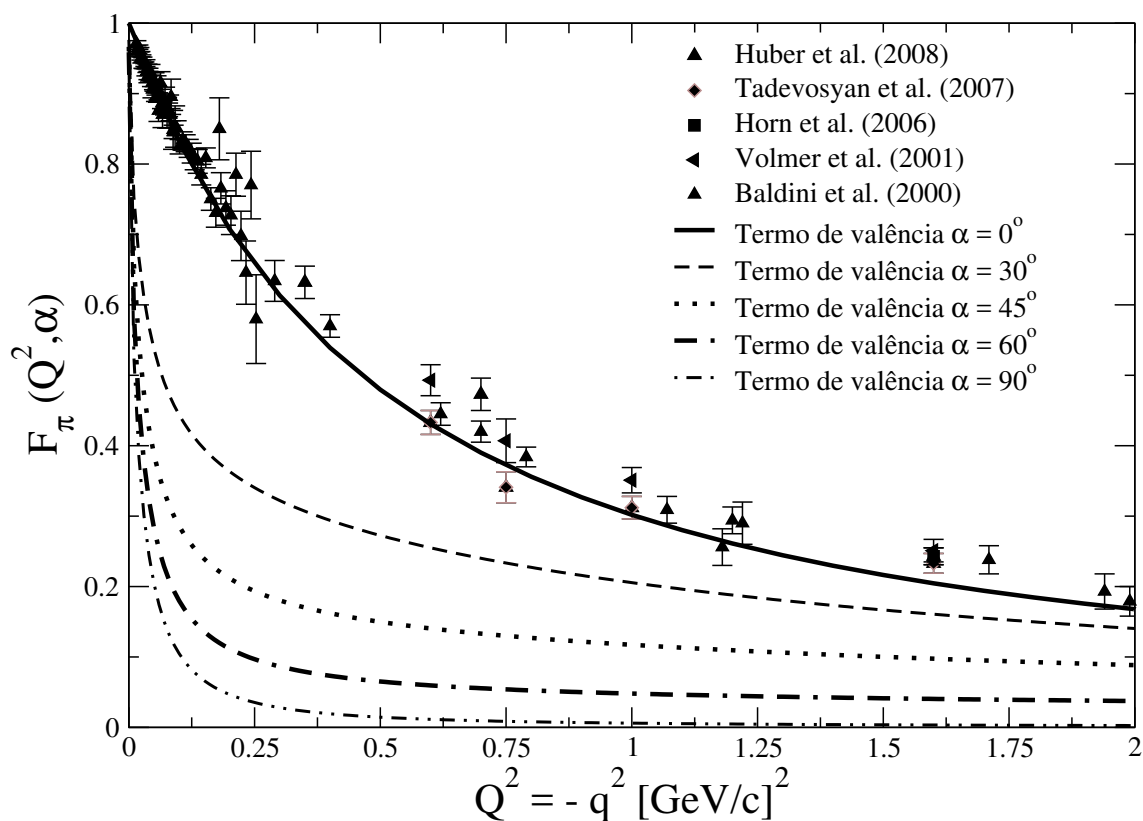


FIGURA 5.6 – Termos de valência do fator de forma eletromagnético do píon normalizado em função do momento quadrático transferido  $q^2$ . Calculado com vários referenciais.

## Fator de forma eletromagnético do pión

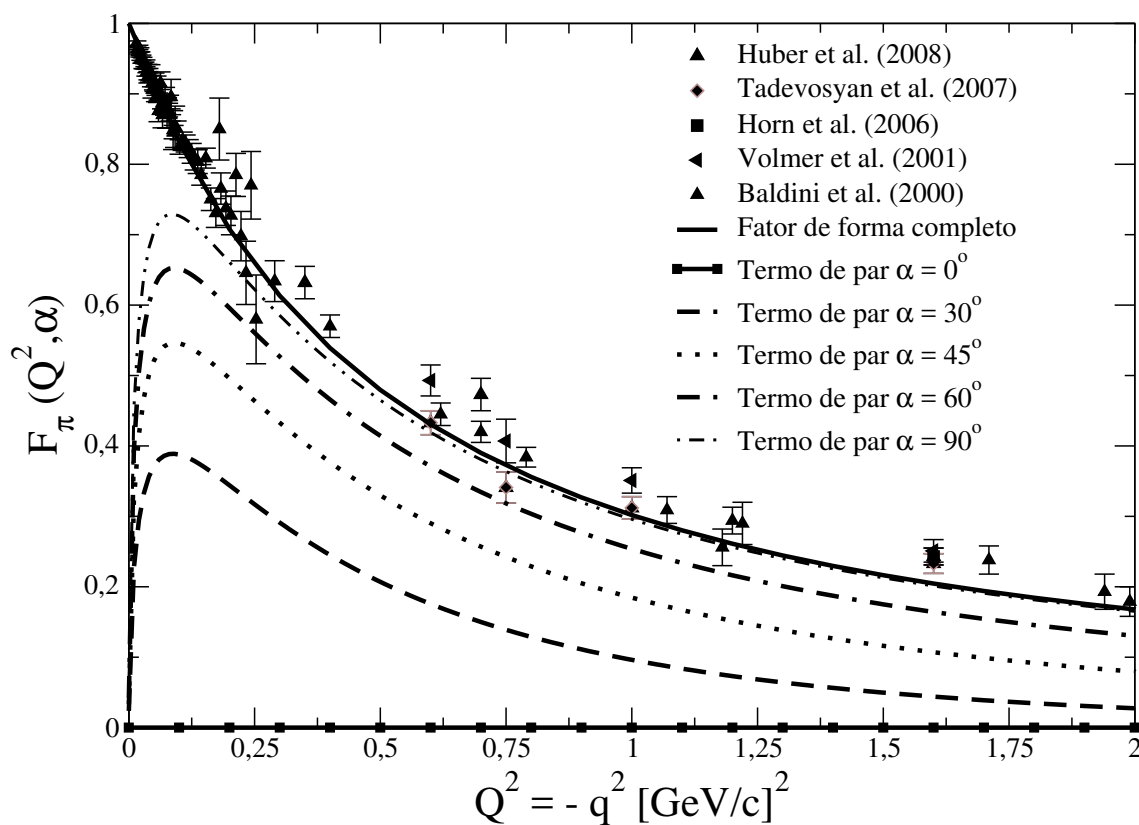


FIGURA 5.7 – Termos de pares do fator de forma eletromagnético do pión normalizado em função do momento quadrático transferido  $q^2$ . Calculado com vários referenciais.

Um último estudo que realizamos foi o cálculo das contribuições de valência e de par (ou não-valência), que aparecem através da rotação do referencial de Breit em torno da direção  $y$  de um ângulo  $\alpha$  (veja seção 4.4). Lembramos que nos cálculos que apresentamos anteriormente para o fator de forma eletromagnético do pión, havíamos escolhido a direção  $x$  para momento transferido no referencial de Breit  $q^0 = 0$ , e desta forma a condição de Drell-Yan  $q^+ = 0$  era válida. A rotação em torno de  $y$ , destrói a condição de Drell-Yan, e agora  $q^+ = \sqrt{-q^2} \sin \alpha$  e  $q_x = \sqrt{-q^2} \cos \alpha$ . Como temos que  $q^+ > 0$ , um par quark-antiquark pode ser produzido pelo fóton virtual. Esse processo contribui como um diagrama  $Z$  ou de par para a amplitude de absorção do fóton virtual, além do termo de valência. Enfatizamos que a soma das duas contribuições, a de valência onde na integral de *loop* de momento  $k^+$  temos que  $0 < k^+ < P^+$ , e a de par onde  $P^+ < k^+ < P'^+$ , resulta no fator de forma eletromagnético obtido com a condição de Drell-Yan (MELO *et al.*, 1999b).

Os resultados para a contribuição de valência e de par são apresentados nas Figs. (5.6) e (5.7) respectivamente. Observamos que para baixos momentos, a contribuição de valência domina, desde que a contribuição de par tende a zero para momento transferido nulo e  $q^+ \rightarrow 0$ . Contudo, quando  $q^2 \rightarrow \infty$  ela divide sua contribuição com a de par, que é nula para momento transferido zero e cresce com  $\sqrt{-q^2}$ , associado ao aumento da região de integração de  $k^+$  no *loop* de momento que defini essa contribuição para o fator de forma. Para  $\alpha$  diferente de zero, o comportamento assintótico do fator de forma eletromagnético recebe contribuição tanto dos termos de pares assim como o de valência. Um resultado extremo acontece para  $\alpha = 90^\circ$ , onde o momento transferido está na direção longitudinal  $z$ , e a condição a violação da condição de Drell-Yan é máxima. Nesta situação a contribuição dos termos de pares é crescente, equanto a do termo de valência decai rapidamente com o crescimento do momento da ordem de  $m_\pi$ , e o termo de par domina. Esse comportamento já foi observado em um modelo fenomenológico e covariante do pión, onde o vértice pión-quark carrega dependência de momento (veja (MELO *et al.*, 2002) e referências citadas).

## 6 Considerações finais

Nessa tese exploramos um modelo para a amplitude de Bethe-Salpeter do pión no espaço de Minkowski, desenvolvido a partir de um modelo para o propagador do quark contendo o termo escalar da auto-energia, onde o fator de renormalização da função de onda do quark foi considerado como a unidade. O termo escalar da auto-energia foi associado a massa *running* do quark. Escolhemos um *ansatz* para a forma analítica da função de massa do quark contendo um pólo (DUDAL *et al.*, 2013) e descrita por três parâmetros obtidos do ajuste de cálculos de QCD na rede para momentos tipo-espaço (PARAPPILLY *et al.*, 2006). Um parâmetro é a posição do pólo na região de momento tipo-tempo e o outro o resíduo, e um terceiro parâmetro, corresponde a massa de corrente  $m_0$  do quark. Essa função de massa do quark, define no limite quirál ( $m_0 = 0$ ), a componente pseudoescalar do vértice do pión, devido a identidade de Ward-Takahashi axial-vetor (veja por exemplo a Ref. (CLOET; ROBERTS, 2014)). Desta forma, utilizando apenas a função de massa dos quarks construímos a amplitude de Bethe-Salpeter do pión baseado em resultados de QCD na rede, que exploramos nessa tese de duas formas estudando observáveis eletrofracos e a componente de valência da função de onda do pión na frente de luz.

A função de massa dos quarks tem um único pólo na região tipo-tempo em  $0.846 \text{ GeV}$ , além da massa de corrente do quark com o valor de  $0.014 \text{ GeV}$ , e o resíduo fornece um valor de  $0.278 \text{ GeV}$  para a massa do quark em momento zero. O propagador do quark com essa função de massa foi decomposto na forma de três pólos simples, um está localizado próximo ao valor da massa constituinte do quark, e os outros dois pólos tem valores cerca do dobro e triplo da massa do quark constituinte. Construímos a decomposição espectral de Källén-Lehmann do propagador do quark, e verificamos que as restrições de positividade para as densidades espectrais são violadas. Este fato é minimamente satisfatório, sugerindo que o modelo tem um quark que não deveria corresponder a um estado físico.

A representação integral de Nakanishi (NAKANISHI, 1971), do presente modelo da amplitude de Bethe-Salpeter foi obtida, e a função peso correspondente derivada da inclusão tanto da estrutura do vértice quark-pión como a auto-energia do quark. Isto generaliza a discussão apresentada em (FANELLI *et al.*, 2016) e introduz o modelo no contexto das recentes aplicações da representação integral de Nakanishi para obter o estado ligado por



meio da solução da equação de Bethe-Salpeter no espaço de Minkowski (veja por exemplo (GUTIERREZ *et al.*, 2016)). Testamos quantitativamente o modelo através do cálculo dos observáveis eletromagnéticos do pión, em particular obtivemos o fator de forma eletromagnético para a região de momentos transferidos tipo-espaço, e também a constante de decaimento eletrofraca. O vértice quark fóton foi construído de modo a satisfazer a identidade de Ward-Takahashi, tendo como base o propagador do quark com auto-energia, de forma a garantir a conservação da corrente eletromagnética do pión.

Do ponto de vista técnico, isto é, para realizar as integrais de *loop* dos momentos internos, utilizamos as variáveis de momento da Frente de Luz, bem como a componente “+” da corrente axial e vetorial para obter a constante de decaimento eletrofraca e o fator de forma eletromagnético com a condição de Drell-Yan ( $q^+ = 0$ ), respectivamente. Escolhemos para os nossos cálculos as componentes “+” da corrente axial e vetorial do pión pois essas são livres de contribuições de modo zero no nosso modelo (veja exemplo na Ref. (MELO *et al.*, 1999a)).

O fator de forma eletromagnético e a constante de decaimento eletrofraca resultantes do presente modelo definido no espaço de Minkowski são consistentes com os resultados experimentais. Além disso observamos que a relação de Tarrach para o produto do raio do pión e constante de decaimento é aproximadamente respeitada em nosso modelo, quando variamos o valor da massa constituinte do quark para momento nulo. Isto sugere que essa relação pode ser válida de forma aproximada para a Cromodinâmica Quântica.

Os resultados do presente trabalho para a estrutura eletromagnética do pión e constante de decaimento eletrofraca dentro do modelo a quarks constituintes proposto aqui consistente com resultados de QCD na rede, como sumarizado acima, foram apresentados em (MELLO *et al.*, 2017). O presente modelo analítico da amplitude de Bethe-salpeter do pión fornece uma função de onda de valência na frente de luz simétrica pela troca do quark e antiquark e generaliza modelos analíticos propostos no passado como discutimos em detalhes, e pode ser inclusive interessante, com a devida generalização, na comparação com resultados obtidos para a componente de valência obtida através da diagonalização da hamiltoniana da frente de luz no espaço de Fock (ADHIKARI *et al.*, 2016). A contribuição desta tese inclui também a análise do fator de forma eletromagnético em diferentes referenciais a partir da corrente “+” do pión quando a condição de Drell-Yan é relaxada e além da contribuição de valência aparece a contribuição do termo de não-valência ou de produção de um par quark-antiquark pelo fóton virtual com  $q^+ > 0$ .

O presente *ansatz* para a amplitude de Bethe-Salpeter do pión generaliza modelos anteriores (MELO *et al.*, 1999a; MELO *et al.*, 2002; FREDERICO *et al.*, 2009; FANELLI *et al.*, 2016) por considerar de modo consistente a auto-energia do quark no vértice do quark-pión e no propagador dos quarks. O nosso modelo pode ser também relevante para estudar outros observáveis do pión tais como as distribuições generalizada de partons (FANELLI *et al.*,

2016) e também a distribuição de momento transverso do pión (NOGUERA; SCOPETTA, 2015; LORCÉ *et al.*, 2016), além das tradicionais funções de estrutura de partons. Devemos enfatizar que no presente modelo do pión construímos a representação integral de Nakanishi da amplitude de Bethe-Salpeter e a função peso associada, que podem ser úteis na comparação com resultados da solução da equação de Bethe-Salpeter para o pión no espaço de Minkowski que eventualmente serão obtidos no futuro. Também o presente modelo pode servir como base para construir as amplitudes de Bethe-Salpeter de outros mésons pseudoescalares, tais como o káon, e vetoriais como o méson  $\rho$ , incluindo também a descrição de mésons pesados, constituídos por exemplo por um quark leve e outro pesado. Dentro de outras aplicações possíveis do presente modelo mencionamos o efeito do meio nuclear na estrutura dos mésons, em particular do pión (MELO *et al.*, 2014).

# Referências

- ADHIKARI, L.; LI, Y.; ZHAO, X.; MARIS, P.; VARY, J. P.; EL-HADY, A. A. Form Factors and Generalized Parton Distributions in Basis Light-Front Quantization. **Phys. Rev.**, C93, n. 5, p. 055202, 2016.
- ARAÚJO, W. R. B.; MELO, J. P. B. C. de; FREDERICO, T. Faddeev null plane model of the nucleon. **Phys. Rev. C**, v. 52, p. 2733, 1995.
- ARAÚJO, W. R. B.; SUISSO, E. F.; FREDERICO, T.; BEYER, M.; WEBER, H. J. Relativistic quark spin coupling effects in the nucleon electromagnetic form-factors. **Physical Letters B**, v. 478, p. 86, 2000.
- ARAÚJO, W. R. B. de. **Modelo de núcleo na frente de luz**. Tese (Doutorado) — IFUSP, 2001.
- BAKKER, B. B.; CHOI, H.-M.; JI, C.-R. Pion form-factor and quark mass evolution in a light front Bethe-Salpeter model. **Phys. Rev. D.**, v. 63, p. 074014, 2001.
- BAKKER, B. L. G. Light-Front Singularities. **Few Body Syst.**, v. 49, 2011.
- BAKKER, B. L. G.; CHOI, H.-M.; JI, C.-R. Transition form-factors between pseudoscalar and vector mesons in light front dynamics. **Phys. Rev.**, D67, p. 113007, 2003.
- BALDINI, R.; PASQUALUCCI, E.; DUBNICKA, S.; GAUZZI, P.; PACETTI, S.; SRIVASTAVA, Y. Determination of nucleon and pion form-factors via dispersion relations. **Nucl. Phys.**, A666, p. 38–43, 2000.
- BEANE, S. R.; DETMOLD, W.; ORGINOS, K.; SAVAGE, M. J. Nuclear Physics from Lattice QCD. **Prog. Part. Nucl. Phys.**, v. 66, p. 1–40, 2011.
- BERNARD, L.; BAKER, G.; CHOI, H.-M.; JI, C. R. *The Vector Meson Form Factor Analysis in Light-Front Dynamics*. **Phys. Rev. D**, v. 65, p. 116001, 2002.
- BIERNAT, E. P.; GROSS, F.; NA, M. T. P.; STADLER, A. Quark mass functions and pion structure in Minkowski space. **Few Body Syst.**, v. 55, p. 705–708, 2014.
- BIERNAT, E. P.; GROSS, F.; NA, M. T. P.; STADLER, A. Charge-conjugation symmetric complete impulse approximation for the pion electromagnetic form factor in the Covariant Spectator Theory. **Phys. Rev.**, D92, n. 7, p. 076011, 2015.

- BIERNAT, E. P.; GROSS, F.; NA, T. P.; STADLER, A. Pion electromagnetic form factor in the Covariant Spectator Theory. **Phys. Rev.**, D89, n. 1, p. 016006, 2014.
- BIERNAT, E. P.; GROSS, F.; PENA, T.; STADLER, A. Confinement, quark mass functions, and spontaneous chiral symmetry breaking in Minkowski space. **Phys. Rev.**, D89, n. 1, p. 016005, 2014.
- BRODSKY, S. J.; PAULI, H.-C.; PINSKY, S. S. Quantum Chromodynamics and Other Field Theories on the Light Cone. **Physical Report**, v. 301, p. 299, 1998.
- BRODSKY, S. J.; TERAMOND, G. F. de; DOSCH, H. G.; ERLICH, J. Light-Front Holographic QCD and Emerging Confinement. **Phys. Rept.**, v. 584, p. 1–105, 2015.
- BRONIOWSKI, W.; PRELOVSEK, S.; SANTELJ, L.; ARRIOLA, E. R. Pion wave function from lattice QCD vs. chiral quark models. **Phys. Lett.**, B686, p. 313–318, 2010.
- CARBONELL, J.; KARMANOV, V. A. Solving Bethe-Salpeter equation for two fermions in Minkowski space. **Eur. Phys. J.**, A46, p. 387–397, 2010.
- CHAKRABARTI, D.; ZHAO, X.; HONKANEN, H.; MANOHAR, R.; MARIS, P.; VARY, J. P. Generalized parton distributions in a light-front nonperturbative approach. **Phys. Rev.**, D89, n. 11, p. 116004, 2014.
- CHANG, L.; CLOET, I. C.; ROBERTS, C. D.; SCHMIDT, S. M.; TANDY, P. C. Pion electromagnetic form factor at spacelike momenta. **Phys. Rev. Lett.**, v. 111, n. 14, p. 141802, 2013.
- CHANG, L.; CLOET, I. C.; COBOS-MARTINEZ, J. J.; ROBERTS, C. D.; SCHMIDT, S. M.; TANDY, P. C. Imaging Dynamical Chiral-Symmetry Breaking: Pion Wave Function on the Light Front. **Physical Review Letters**, v. 110, p. 132001, 2013.
- CHOI, H.-M.; JI, C.-R.; LI, Z.; RYU, H.-Y. Variational analysis of mass spectra and decay constants for ground state pseudoscalar and vector mesons in the light-front quark model. **Phys. Rev.**, C92, n. 5, p. 055203, 2015.
- CHUNG, P. L.; POLYZOU, W. N.; COESTER, F.; KEISTER, B. D. Hamiltonian Light Front Dynamics of Elastic Electron Deuteron Scattering. **Phys. Rev. C**, v. 37, p. 2000–2015, 1988.
- CLOET, I. C.; CHANG, L.; ROBERTS, C. D.; SCHMIDT, S. M.; TANDY, P. C. Pion distribution amplitude from lattice-QCD. **Phys. Rev. Lett.**, v. 111, p. 092001, 2013.
- CLOET, I. C.; ROBERTS, C. D. Explanation and Prediction of Observables using Continuum Strong QCD. **Prog. Part. Nucl. Phys.**, v. 77, p. 1–69, 2014.
- CORNWALL, J. M. Confinement and Chiral Symmetry Breakdown: Estimates of  $f(\pi)$  and of Effective Quark Masses. **Phys. Rev.**, D22, p. 1452, 1980.
- CORNWALL, J. M. Dynamical Mass Generation in Continuum QCD. **Phys. Rev.**, D26, p. 1453, 1982.
- DASHEN, R. F.; WEINSTEIN, M. Soft pions, chiral symmetry, and phenomenological lagrangians. **Phys. Rev.**, v. 183, p. 1261–1291, 1969.

- DIRAC, P. A. M. Forms of Relativistic Dynamics. **Rev. Model Phys.**, v. 21, p. 392, 1949.
- DORKIN, S. M.; KAPTARI, P.; ATTI, C. C. D.; MPIFER, B. A. Solving the Bethe-Salpeter Equation in Euclidean Space. **Few Body Syst.**, v. 49, 2011.
- DOROKHOV, A. E.; BRONIOWSKI, W.; ARRIOLA, E. R. Generalized Quark Transversity Distribution of the Pion in Chiral Quark Models. **Phys. Rev.**, D84, p. 074015, 2011.
- DRELL, S. D.; BJORKEN, J. D. **Relativistic Quantum Mechanics**. [S.l.]: Estados Unidos da América, 1964.
- DUDAL, D.; GUIMARAES, M. S.; PALHARES, L. F.; SORELLA, S. P. From QCD to a dynamical quark model: construction and some meson spectroscopy. **arXiv:1303.7134**, [hep-ph], 2013.
- DUDAL, D.; GUIMARAES, M. S.; PALHARES, L. F.; SORELLA, S. P. Confinement and dynamical chiral symmetry breaking in a non-perturbative renormalizable quark model. **Annals Phys.**, v. 365, p. 155–179, 2016.
- DUDAL, D.; OLIVEIRA, O.; SILVA, P. J. Källen-Lehmann spectroscopy for (un)physical degrees of freedom. **Phys. Rev.**, D89, n. 1, p. 014010, 2014.
- DUDEK, J. *et al.* Physics Opportunities with the 12 GeV Upgrade at Jefferson Lab. **Eur. Phys. J.**, A48, p. 187, 2012.
- FANELLI, C.; PACE, E.; ROMANELLI, G.; SALMÈ, G.; SALMISTRARO, M. Pion Generalized Parton Distributions within a fully covariant constituent quark model. **Eur. Phys. J.**, C76, n. 5, p. 253, 2016.
- FREDERICO, T.; MILLER, G. A. Null Plane Phenomenology for the Pion Decay Constant and Radius. **Phys. Rev. D**, v. 45, p. 4207–4213, 1992.
- FREDERICO, T.; MILLER, G. A. Deep inelastic structure function of the pion in the null plane phenomenology. **Phys. Rev.**, D50, p. 210–216, 1994.
- FREDERICO, T.; PACE, E.; PASQUINI, B.; SALMÈ, G. Pion Generalized Parton Distributions with covariant and Light-front constituent quark models. **Phys. Rev.**, D80, p. 054021, 2009.
- FREDERICO, T.; SALMÈ, G. Projecting the Bethe-Salpeter Equation onto the Light-Front and back: A Short Review. **Few Body Syst.**, v. 49, p. 163–175, 2011.
- FREDERICO, T.; SALMÈ, G.; VIVIANI, M. Two-body scattering states in Minkowski space and the Nakanishi integral representation onto the null plane. **Phys. Rev.**, D85, p. 036009, 2012.
- FREDERICO, T.; SALMÈ, G.; VIVIANI, M. Quantitative studies of the homogeneous Bethe-Salpeter Equation in Minkowski space. **Phys. Rev.**, D89, p. 016010, 2014.
- FREDERICO, T.; SALMÈ, G.; VIVIANI, M. Solving the inhomogeneous Bethe-Salpeter equation in Minkowski space: the zero-energy limit. **Eur. Phys. J.**, C75, n. 8, p. 398, 2015.

- GIGANTE, V. “Equação de Bethe-Salpeter em 2+1 dimensões para estado ligado de duas partículas”. Tese (Doutorado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2014.
- GIGANTE, V.; NOGUEIRA, J. H. A.; YDREFORS, E.; GUTIERREZ, C.; KARMANOV, V. A.; FREDERICO, T. Bound state structure and electromagnetic form factor beyond the ladder approximation. **Phys. Rev.**, D95, n. 5, p. 056012, 2017.
- GODFREY, S.; ISGUR, N. Mesons in a Relativized Quark Model with Chromodynamics. **Phys. Rev. D**, v. 32, p. 189, 1985.
- GROSS, F. Measurements of the deuteron elastic structure function  $A(Q^2)$  for  $0.7 < Q^2 < 6.0 (GeV/c)^2$  at Jefferson laboratory. **Phys. Rev.**, v. 186, p. 1448, 1969.
- GUTIERREZ, C.; GIGANTE, V.; FREDERICO, T.; SALMÈ, G.; VIVIANI, M.; TOMIO, L. Bethe-Salpeter bound-state structure in Minkowski space. **Phys. Lett.**, B759, p. 131–137, 2016.
- HALZEN, A. D. M. e F. **Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics**. 1. ed. [S.l.]: Wiley and Sons, 1984.
- HARINDRANATH, A. An Introduction to Light-Front Dynamics for Pedestrians. **Lectures given at Conference: C96-05-06.1.**, v. 36, maio 1996.
- HARINDRANATH, A. Light Front Quantum Chromodynamics: Towards Phenomenology. **Pramana**, v. 55, p. 141, 2000.
- HORN, T. *et al.* Determination of the Charged Pion Form Factor at  $Q^2 = 1.60$  and  $2.45 - (GeV/c)^2$ . **Phys. Rev. Lett.**, v. 97, p. 192001, 2006.
- HUANG, T.; ZHONG, T.; WU, X.-G. Determination of the pion distribution amplitude. **Phys. Rev.**, D88, p. 034013, 2013.
- HUBER, G. M. *et al.* Charged pion form-factor between  $Q^2 = 0.60 - GeV^2$  and  $2.45 - GeV^2$ . II. Determination of, and results for, the pion form-factor. **Phys. Rev.**, C78, p. 045203, 2008.
- ITZYKZON, C.; ZUBER, J. B. **Quantum Field Theory**. 1. ed. [S.l.]: New York, 1980.
- JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics**. 3. ed. [S.l.]: Wiley and Sons, 1999.
- KARMANOV, V. A.; CARBONELL, J. Solving Bethe-Salpeter equation in Minkowski space. **Eur. Phys. J.**, A27, p. 1–9, 2006.
- KHARZEEV, D. E.; RAUFEISEN, J. High-Energy Nuclear Interactions and QCD: An Introduction. **NUCL-TH/0206073.**, p. 27, julho 2002.
- KONDRATYUK, L. A.; TEREŃTÉV, M. V. The scattering problem for relativistic systems with fixed number of particles. **Sov. J. Nucl. Phys.**, v. 31, p. 561, 1980. [Yad. Fiz.31,1087(1980)].
- LEUTWYLER, H.; STERN, J. Relativistic Dynamics on a Null Plane. **Annals of Physics.**, v. 112, p. 143, 1978.

- LI, Y.; MARIS, P.; ZHAO, X.; VARY, J. P. Heavy Quarkonium in a Holographic Basis. **Phys. Lett.**, B758, p. 118–124, 2016.
- LORCÉ, C.; PASQUINI, B.; SCHWEITZER, P. Transverse pion structure beyond leading twist in constituent models. **Eur. Phys. J.**, C76, n. 7, p. 415, 2016.
- MANDELSTAM, S. Dynamical variables in the Bethe-Salpeter formalism. **Proc. Roy. Soc. Lond.**, A233, p. 248, 1955.
- MARIS, P.; ROBERTS, C. D. Dyson-Schwinger Equations : A Tool for Hadrons Phys. **International Journal of Modern Physics.**, v. 12, 2003.
- MELLO, C. S. **Estudo dos Observáveis do Méson Rho no Formalismo da Frente de Luz**. Dissertação (Mestrado) — UNICSUL, 2013.
- MELLO, C. S.; FILHO, J. P. C.; SILVA, E. O. da; EL-BENNICH, B.; MELO, J. P. B. C. de; FILHO, V. d. S. Electromagnetic structure of pion. **AIP Conf. Proc.**, p. 333, 2013.
- MELLO, C. S.; MELO, J. P. B. C. de; FREDERICO, T. The pion electromagnetic structure with self-energy. **OIP Conf. Proc.**, p. 052008, 2015.
- MELLO, C. S.; MELO, J. P. B. C. de; FREDERICO, T. Minkowski space pion model inspired by lattice QCD running quark mass. **Phys. Lett.**, B766, p. 86–93, 2017.
- MELLO, C. S.; SILVA, A. N.; MELO, J. P. B. C. de; FREDERICO, T. Electromagnetic spin-1 form-factor free of zero modes. **Few Body Syst.**, v. 56, p. 510–514, janeiro 2015.
- MELLO, C. S.; SILVA, A. Nunes da; MELO, J. P. B. C. de; FREDERICO, T. Electromagnetic form factors for spin-1 particles with the light-front. **Nucl. Phys. Proc. Suppl.**, v. 251-252, p. 62–67, 2014.
- MELO, J. P. B. C. de. **Covariância na Frente de Luz**. Tese (Doutorado) — IFUSP, 1998.
- MELO, J. P. B. C. de; AHMED, I.; TSUSHIMA, K. Parton Distribution in Pseudoscalar Mesons with a Light-Front Constituent Quark Model. **AIP Conf. Proc.**, v. 1735, p. 080012, 2016.
- MELO, J. P. B. C. de; FREDERICO, T. Covariant and Light Front Approaches to the Rho Meson Electromagnetic Form-Factors. **Phys. Rev. C.**, v. 55, p. 2043, julho 1997.
- MELO, J. P. B. C. de; FREDERICO, T. Light-Front Projection of Spin-1 Electromagnetic Current and Zero-Modes. **Physics Letters B.**, v. 708, p. 87, 2012.
- MELO, J. P. B. C. de; FREDERICO, T.; PACE, E.; SALMÈ, G. Pair Term in the Electromagnetic Current within the Front Form Dynamics: Spin-0 Case. **Nuclear Physics A.**, v. 707, p. 399, maio 2002.
- MELO, J. P. B. C. de; FREDERICO, T.; PACE, E.; SALMÈ, G. Electromagnetic form-factor of the pion in the space and time - like regions within the front form dynamics. **Phys. Lett.**, B581, p. 75–81, 2004.



- MELO, J. P. B. C. de; FREDERICO, T.; PACE, E.; SALMÈ, G. Electromagnetic form-factor of the pion in the space and time-like regions within the front form dynamics. **Phys. Lett.**, B581, p. 75–81, 2004.
- MELO, J. P. B. C. de; FREDERICO, T.; PACE, E.; SALMÈ, G. Space-like and time-like pion electromagnetic form-factor and Fock space components within the light-front dynamics. **Phys. Rev. D**, C78, p. 074013, 2006.
- MELO, J. P. B. C. de; FREDERICO, T.; TOMIO, L.; DOROKHOV, A. E. Quark - anti-quark correlation in the pion. **Nucl. Phys.**, A623, p. 456–470, 1997.
- MELO, J. P. B. C. de; MELLO, C. S.; SILVA, A. N.; FREDERICO, T. Electromagnetic spin-1 form-factor free of zero modes. **Few Body Syst.**, v. 56, p. 503–508, janeiro 2015.
- MELO, J. P. B. C. de; SALES, J. H. O.; FREDERICO, T.; SAUER, P. U. Pairs in the light front and covariance. **Nuclear Physics A.**, v. 631, p. 574c, 1998.
- MELO, J. P. B. C. de; TSUSHIMA, K.; EL-BENNICH, B.; ROJAS, E.; FREDERICO, T. Pion structure in the nuclear medium. **Phys. Rev.**, C90, n. 3, p. 035201, 2014.
- MELO, J. P. C. B. de. Pion Electromagnetic Form-Factor up to  $[10 \text{ GeV}/c]^2$ . **AIP Conf.Proc.**, v. 768, p. 374, julho 2005.
- MELO, J. P. C. B. de; NAUS, H. W. L.; FREDERICO, T. Pion Electromagnetic Current in the Light Cone Formalism. **Phys. Rev. C**, v. 59, p. 2278–2281, 1999.
- MELO, J. P. C. B. de; NAUS, H. W. L.; FREDERICO, T. Pion Electromagnetic Current in the Light Cone Formalism. **Phys. Rev. C**, v. 59, p. 2278–2281, 1999.
- MONTVAY, I.; MUNSTER, G. **Quantum Fields on a Lattice**. [S.l.]: Cambridge, 1997. 157 p.
- MUELLER, A. H. QCD and nuclear physics. **Nucl. Phys.**, A654, n. 1-2, p. C37–C54, 1999.
- NAKANISHI, N. A General Survey of the Theory of the Bethe-Salpeter Equation. **Supplement of the Progress of Theoretical Physics.**, v. 43, 1969.
- NAKANISHI, N. **Graph Theory and Feynman Integrals**. [S.l.]: New York, 1971. 244 p.
- NAMYSŁOWSKI, J. Light Cone Perturbation Theory and Its Application to Different Fields. **Progress in Particle and Nuclear Physics.**, v. 14, p. 49, 1985.
- NAUS, H. W. L.; MELO, J. P. B. C. de; FREDERICO, T. Ward-Takahashi Identity on the Light Front. **Few Body Syst.**, v. 24, p. 99, 1998.
- NOGUERA, S.; SCOPETTA, S. Pion transverse momentum dependent parton distributions in the Nambu and Jona-Lasinio model. **JHEP**, v. 11, p. 102, 2015.
- OLIVE, K. A.; A; B; C; D; E; F; G. The Review of Particle Physics. **Chin. Phys. C**, v. 38, p. 090001, 2014.



- PAGELS, H.; STOKAR, S. The Pion Decay Constant, Electromagnetic Form-Factor and Quark Electromagnetic Selfenergy in QCD. **Phys. Rev.**, D20, p. 2947, 1979.
- PAGELS, H.; STOKAR, S. Magnitude of the Light Current Quark Masses. **Phys. Rev.**, D22, p. 2876, 1980.
- PARAPPILLY, M. B.; BOWMAN, P. O.; HELLER, U. M.; LEINWEBER, D. B.; WILLIAMS, A. G.; ZHANG, J. B. **Phys. Rev.**, D 73, n. [hep-lat/0511007], p. 2006, 2006.
- PAULA, W. de; FREDERICO, T.; SALMÃO, G.; VIVIANI, M. Advances in solving the two-fermion homogeneous Bethe-Salpeter equation in Minkowski space. **Phys. Rev.**, D94, n. 7, p. 071901, 2016.
- PENA, M. T.; LEITAO, S.; BIERNAT, E. P.; STADLER, A.; RIBEIRO, J. E.; GROSS, F. Covariant Spectator Theory and Hadron Structure. **Few Body Syst.**, v. 57, n. 6, p. 467–472, 2016.
- ROJAS, E.; MELO, J. P. B. C. de; EL-BENNICH, B.; OLIVEIRA, O.; FREDERICO, T. On the Quark-Gluon Vertex and Quark-Ghost Kernel: combining Lattice Simulations with Dyson-Schwinger equations. **JHEP**, v. 10, p. 193, 2013.
- SAKURAI, J. J. Theory of strong interactions. **Ann. Phys.**, p. 11, 1960.
- SALCEDO, L. A. . M.; MELO, J. P. B. C. de; HADJMICHEF, D.; FREDERICO, T. Weak Decay Constant of Pseudoscalar Mesons in QCD-inspired Model. **Brazilian Journal of Physics**, 2004.
- SALES, J. H. O.; FREDERICO, T.; CARLSON, B. V.; SAUER, P. U. Renormalization of the ladder light front Bethe-Salpeter equation in the Yukawa model. **Phys. Rev.**, C63, p. 064003, 2001.
- SCADRON, M. D.; RUPP, G.; KLEEFELD, F.; VAN, B. E. Ground State Scalar anti-q q Nonet: SU(3) Mass Splittings and Strong, Electromagnetic, and Weak Decay Rates. **Phys. Rev. D.**, v. 69, p. 014010, 2004.
- SILVA, E. O. d.; MELO, J. P. B. C. de; EL-BENNICH, B.; FILHO, V. S. Pion and Kaon Elastic Form Factors in a Refined Light-Front Model. **Phys. Rev. C.**, v. 86, p. 038202, 2012.
- STERMAN, G. F.; STOLER, P. Hadronic form-factors and perturbative QCD. **Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.**, v. 47, p. 193–233, 1997.
- STRAUSS, S.; FISCHER, C. S.; KELLERMANN, C. Analytic structure of the Landau gauge gluon propagator. **Phys. Rev. Lett.**, v. 109, p. 252001, 2012.
- TADEVOSYAN, V. *et al.* Determination of the pion charge form-factor for  $Q^2 = 0.60 \text{ GeV}^2 - 1.60 \text{ GeV}^2$ . **Phys. Rev. C**, v. 75, p. 055205, 2007.
- TAKAHASHI, Y. On the generalized Ward identity. **Nuovo Cim.**, v. 6, p. 371, 1957.
- TARRACH, R. Meson Charge Radii and Quarks. **Z. Phys. C**, v. 2, p. 221–223, 1979.

VARY, J. P.; ZHAO, X.; ILDERTON, A.; HONKANEN, H.; MARIS, P.; BRODSKY, S. J. Applications of Basis Light-Front Quantization to QED. **Nucl. Phys. Proc. Suppl.**, v. 251-252, p. 10–15, 2014.

VOLMER, J. *et al.* Measurement of the Charged Pion Electromagnetic Form-Factor. **Phys. Rev. Lett.**, v. 86, p. 1713–1716, 2001.

WIECKI, P.; LI, Y.; ZHAO, X.; MARIS, P.; VARY, J. P. Basis Light-Front Quantization Approach to Positronium. **Phys. Rev.**, D91, n. 10, p. 105009, 2015.

WIECKI, P.; LI, Y.; ZHAO, X.; MARIS, P.; VARY, J. P. Non-perturbative Calculation of the Positronium Mass Spectrum in Basis Light-Front Quantization. **Few Body Syst.**, v. 56, n. 6-9, p. 489–494, 2015.

YABUSAKI, G. H. S.; AHMED, I.; PARACHA, M. A.; MELO, J. P. B. C. de; EL-BENNICH, B. Pseudoscalar mesons with symmetric bound state vertex functions on the light front. **Phys. Rev.**, D92, n. 3, p. 034017, 2015.

# Apêndice A - Revisão breve da cromodinâmica quântica

Neste apêndice A apresentamos alguns elementos da teoria quântica de campos, como os ingredientes fundamentais da Cromodinâmica Quântica (QCD), a qual é a teoria que descreve as interações entre as partículas elementares, ou seja, em termos de quarks e glúons.

Na natureza, existem quatro interações básicas entre as partículas elementares: a interações eletromagnética, gravitacional, fraca e forte. A interação forte é a que ocorre na dinâmica de quarks e glúons, que é descrita pela cromodinâmica quântica. Os quarks apresentam a propriedade de sabor. Há seis sabores, sendo três estados leves, u (up), d (down) e s (strange), e os três estados mais pesados c (charm), b (bottom) e t (top). Estas partículas são os constituintes fundamentais dos bárions (triplete de quarks) e mésons (duplete com um par quark-antiquark). Cada partícula tem a correspondente antipartícula.

Para esta teoria de quarks descrever as interações fortes corretamente, precisou-se adicionar um número quântico adimensional chamado de “cor” (KHARZEEV; RAUFEISEN, 2002), uma propriedade de simetria relacionada com a função de onda dos quarks.

Os estados ligados de quarks formam os bárions e mésons, sendo estes invariâtes sob o grupo  $SU(3)$  para o espaço de cores. Temos as cores vermelho (R), verde (G) e azul (B) para descrever os estados possíveis de cor dos quarks. na cromodinâmica quântica.

Este espaço de estados é representado para os quarks como  $q(x) = (q^R(x), q^G(x), q^B(x))$ . O confinamento dos quarks obriga os estados ligados a serem um singlete de cor, e a função de onda total do bárion deve ser antissimétrica:

$$\begin{aligned} |b\acute{a}rion\rangle &= \epsilon_{abc} q^a q^b q^c \\ |m\acute{e}son\rangle &= \delta_{ab} q^a \bar{q}^b, \end{aligned} \tag{A.1}$$

onde  $\epsilon_{abc}$  é o tensor de Levi-Civita e  $\delta_{ab}$  é o delta de Kronecker. Os quarks também possuem os números quânticos de “estranheza” (S) e “hipercarga” (Y). A hipercarga está

relacionada com a terceira componente do isospin ( $I^3$ ) e a carga elétrica (Q):

$$Q = I^3 + \frac{Y}{2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

onde a hipercarga é definida como a soma do número bariônico (B) com a estranheza (S):

$$Y = B + S. \quad (\text{A.3})$$

Os números quânticos dos quarks e de suas respectivas antipartículas estão dadas na tabela a seguir:

$q$	B	Y	I	$I_3$	Q	S	$\bar{q}$	B	Y	I	$I_3$	Q	S
$u$	1/3	1/3	1/2	+ 1/2	+ 2/3	0	$\bar{u}$	- 1/3	- 1/3	1/2	- 1/2	- 2/3	0
$d$	1/3	1/3	1/2	- 1/2	- 1/3	0	$\bar{d}$	- 1/3	- 1/3	1/2	+ 1/2	+ 1/3	0
$s$	1/3	- 2/3	0	0	- 1/3	- 1	$\bar{s}$	- 1/3	2/3	0	0	+ 1/3	+ 1
$c$	1/3	1/3	1/2	+ 1/2	2/3	0	$\bar{c}$	- 1/3	- 1/3	1/2	- 1/2	- 2/3	0
$b$	1/3	1/3	1/2	- 1/2	- 1/3	0	$\bar{b}$	- 1/3	- 1/3	1/2	+ 1/2	+ 1/3	0
$t$	1/3	1/3	1/2	+ 1/2	2/3	0	$\bar{t}$	- 1/3	- 1/3	1/2	- 1/2	- 2/3	0

TABELA A.1 – Números quânticos para os quarks e antiquarks.

Tanto o isospin como a estranheza, são conservados nas interações fortes, enquanto que a carga elétrica é conservada em todas as interações conhecidas.

Para compreendermos a álgebra de isospin, precisamos observar que o produto de rotações infinitesimais resulta em uma rotação. Podemos assim definir um grupo de rotação como sendo um grupo contínuo cujos geradores satisfazem a álgebra de Lie, ou seja, os geradores  $R_i$  satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$[R_j, R_k] = i\epsilon_{jkl}R_l. \quad (\text{A.4})$$

Este grupo é não-abeliano, onde as suas matrizes de rotação  $R$  não comutam entre si.

A álgebra de isospin surgiu da idéia do núcleon ser visto como tendo um grau de liberdade interno com dois estados permitidos, neste caso o próton e o nêutron. A interação nuclear forte não consegue distinguir um próton de um nêutron. Como neste caso temos dois estados possíveis, temos uma simetria  $SU(2)$ . A relação de comutação entre as matrizes de isospin é análogo a Eq. (A.4) e é descrita como (HALZEN, 1984):

$$[l_j, l_k] = i\epsilon_{jkl}l_l. \quad (\text{A.5})$$

Na representação fundamental os geradores são denotados como:

$$l_i = \frac{1}{2}\tau_i, \quad (i, j, k = 1, 2, 3), \quad (\text{A.6})$$

onde:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

são as matrizes de Pauli para o formalismo de isospin em  $SU(2)$ . Estas matrizes são hermitianas e são os geradores das transformações unitárias, que representam rotações de isospin (HALZEN, 1984):

$$U(\theta_i) = \exp\left(-\frac{i\theta_i\tau_i}{2}\right), \quad (\text{A.7})$$

onde  $\theta_i$  é o ângulo de rotação. As combinações lineares das matrizes  $\tau$  também são utilizadas e são definidas como:

$$\tau_{\pm} = \frac{1}{2}(\tau_1 \pm i\tau_2). \quad (\text{A.8})$$

As matrizes  $\tau$  descritas anteriormente atuam nos estados do próton e do nêutron, representados por:

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Assim, temos que:

$$\tau^+d = u \quad e \quad \tau^-u = d. \quad (\text{A.10})$$

Os estados de isospin mostram que para um sistema composto por um par quark-antiquark, formando um méson, em uma representação irredutível de dimensões 3 e 1, originada de  $2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$ , é dada pelos estados:

$$\begin{aligned} |l = 1, l_3 = 1\rangle &= -u\bar{d}, \\ |l = 1, l_3 = 0\rangle &= \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}}, \\ |l = 1, l_3 = -1\rangle &= d\bar{u}, \\ |l = 0, l_3 = 0\rangle &= \frac{u\bar{u} + d\bar{d}}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Os mésons têm número bariônico zero, podendo ser colocados na representação de um

singlete e de um octeto de cor como:

$$|q\bar{q}\rangle \Rightarrow 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 . \quad (\text{A.12})$$

Os estados ligados de bárions contém três quarks e podem ser colocados na representação de um singlete, dois octetos e um decuplete de cor:

$$|qqq\rangle = 3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 . \quad (\text{A.13})$$

As transformações unitárias pertencente ao grupo  $SU(3)$ , no espaço de cores da QCD, tem  $(N_c = 3)^2 - 1 = 8$  geradores. As matrizes  $U$  formam a representação fundamental do grupo  $SU(3)$ :

$$U(\phi_a) = \exp(-i\phi_a\lambda^a) , \quad (\text{A.14})$$

onde  $\phi_a$  é um parâmetro de grupo em analogia a um espaço de fase do grupo. Ao considerarmos a matriz  $U$  como uma transformação infinitesimal, temos:

$$U(x) \simeq 1 - i\phi_a\lambda^a . \quad (\text{A.15})$$

As matrizes  $\lambda^a$  devem ser hermitianas e com traço igual a zero. Aqui para o grupo  $SU(3)$  há duas matrizes com traço nulo e diagonais que indicam a ordem do grupo devido à existência de dois geradores que comutam entre si. Pela mesma razão o grupo  $SU(2)$  tem ordem 1. A representação fundamental para os estados do  $SU(3)$  é um tripleto. O número quântico de “cor” de um quark formam a representação fundamental dos estados do grupo de simetria  $SU(3)$  (HALZEN, 1984):

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \quad (\text{A.16})$$

As matrizes de Gell-Mann  $\lambda_a$ ,  $a = 1, \dots, 8$ , são os geradores nesta representação:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

As matrizes de Gell-Mann são hermitianas e com os traços iguais a zero:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\lambda_a] &= 0, \\ \text{Tr}[\lambda_a \lambda_b] &= 2\delta_{ab} \quad ; \quad (a, b = 1, \dots, 8), \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

onde as constantes de estrutura são dadas por:

$$if^{abc} = \frac{1}{4} \text{Tr}[\lambda_a \lambda_b \lambda_c - \lambda_b \lambda_a \lambda_c]. \quad f^{abc} = f_{abc}. \quad (\text{A.18})$$

A relação de comutação das matrizes  $\lambda_a$  é dada por:

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda_c, \quad (a, b, c = 1, \dots, 8). \quad (\text{A.19})$$

Na eletrodinâmica quântica (QED), é necessário que haja invariância de calibre, como por exemplo a invariância dos observáveis pela transformação de fase local do campo do elétron,  $\exp(i\alpha(x))$ , onde a fase  $\alpha$  depende das coordenadas do espaço-tempo. Para os campos dos quarks podemos desenvolver uma invariância similar a da QED. A Lagrangeana livre deve ser invariante sob rotações dos campos dos quarks no espaço de cores (KHARZEEV; RAUFEISEN, 2002):

$$\mathcal{L}_{livre} = \sum_{q=u,d,s,\dots, \text{cor}=R,G,B} \sum \bar{q}(x) \left( \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m_q \right) q(x), \quad (\text{A.20})$$

onde  $m_q$  é a massa do quark constituinte. A Eq. (A.20) é invariante sob a rotação:

$$U : \quad q^j(x) \rightarrow U_{jk}(x)q^k(x) \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (\text{A.21})$$

Para que a Eq.(A.20) seja invariante sob transformações de calibre, a rotação  $U$  não deve depender de  $x$ . Assim para preservar a invariância de calibre na QCD, para a dinâmica do quark livre é preciso introduzir o campo de calibre (campo de glúons),  $A_{jk}^\mu$ , e substituir a derivada na Eq.(A.20) pela derivada covariante,  $D_{jk}^\mu$ :

$$\partial^\mu q^j(x) \rightarrow D_{jk}^\mu q^j(x) \equiv (\delta_{jk} \partial^\mu - iA_{jk}^\mu(x))q^j(x), \quad (\text{A.22})$$

sendo o campo de calibre dado por:

$$A_{jk}^\mu(x) = A_a^\mu \lambda_{jk}^a . \quad (\text{A.23})$$

Temos que,  $A^\mu$  sob a rotação  $U$  se transforma de acordo com:

$$U : A^\mu \rightarrow U(x)A^\mu U^\dagger(x) + iU(x)\partial^\mu U^\dagger(x) . \quad (\text{A.24})$$

Assim a Lagrangiana da cromodinâmica quântica (QCD) é escrita como:

$$\mathcal{L}_{livre} = \sum_{q=u,d,s,\dots} \sum_{cor=R,G,B} \bar{q}(x) (i\gamma_\mu D^\mu - m_q) q(x) - \frac{1}{g^2} Tr [G^{\mu\nu}(x)G_{\mu\nu}(x)] . \quad (\text{A.25})$$

O tensor de força do campo de glúon é dado por:

$$G^{\mu\nu}(x) \equiv i[D^\mu, D^\nu] = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) - i[A^\mu(x), A^\nu(x)] , \quad (\text{A.26})$$

onde este comutador origina as interações entre glúons. A relação dada pela Eq.(A.26) pode ser escrita em termos das componentes de cores  $A_a^\mu$  do campo de calibre.

$$G_a^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A_a^\nu(x) - \partial^\nu A_a^\mu(x) - f_{abc}A_b^\mu(x)A_c^\nu(x) . \quad (\text{A.27})$$

A QCD é a teoria fundamental que descreve a interação forte e a estrutura hadrônica. Por isso as dificuldades práticas encontradas no regime não-perturbativo para esta teoria motivou o surgimento de modelos efetivos, tais como os modelos de quarks constituintes, (GODFREY; ISGUR, 1985) inspirados pela QCD. Isto significa que a fenomenologia hadrônica é descrita, não somente pelo par quark-antiquark ( $q\bar{q}$ ) ou tripleto ( $qqq$ ), mas também por um mar de glúons e pares quark-antiquarks.

Podemos descrever os hádrons em termos de uma série de componentes, sendo uma função de onda para cada canal como, em particular, para um méson (MELO, 1998):

$$|mésom\rangle = \sum_{q\bar{q}} |q\bar{q}\rangle \Psi_{q\bar{q}} + \sum_{q\bar{q}g} |q\bar{q}g\rangle \Psi_{q\bar{q}g} + \dots , \quad (\text{A.28})$$

onde  $g$  representa o glúon.



# Apêndice B - Coordenadas na Frente de Luz

A complexidade matemática na descrição de fenômenos físicos está também associada a escolha das coordenadas para tratar o problema. A solução do problema físico pode ser simplificado por uma escolha adequada do sistema de coordenadas. A definição apropriada do sistema de coordenadas está associada às simetrias que o fenômeno físico apresenta e que podem ser descritas de forma simples no conjunto de coordenadas escolhido. Por exemplo, para descrevermos o campo elétrico de uma distribuição de cargas com simetria cilíndrica, o sistema de coordenadas mais apropriado é o cilíndrico, no caso de uma simetria esférica escolhemos coordenadas esféricas (JACKSON, 1999). Essa metodologia prática de procurar adequar o sistema de coordenadas ao problema físico ilustra de forma simplória a extensão realizada por Dirac em 1949 (DIRAC, 1949), que propôs três tipos de formulações para a dinâmica relativística onde explorou as simetrias de diferentes hipersuperfícies do espaço-tempo: a forma instantânea, a forma do ponto e a forma da frente de luz. Assim Dirac mostrou que se pode definir o estado físico do sistema no plano nulo  $t = 0$ , e a dinâmica na frente de luz corresponde a evolução no tempo.

## B.1 Breve revisão da cinemática e dinâmica na frente de Luz

Para descrevermos a dinâmica da interação quark-antiquark na estrutura de um méson pseudoescalar, utilizamos as coordenadas da frente de luz, tal como utilizado nas referências (MELO, 1998; MELO; FREDERICO, 1997; MELO *et al.*, 1999a; NAUS *et al.*, 1998; BRODSKY *et al.*, 1998).

Com este conjunto de coordenadas e momentos podemos calcular, utilizando a teoria de perturbação às amplitudes dos processos físicos que apresentam-se invariantes de forma trivial por uma classe de transformações de Lorentz (BRODSKY *et al.*, 1998; LEUTWYLER; STERN, 1978). Estas transformações são as transformações cinemáticas, que não envolvem

a interação. As coordenadas de momento na frente de luz foram escolhidas pois permitiram simplificar o cálculo numéricos dos observáveis eletrofracos do pión. Além disso essas coordenadas descrevem a componente de valência da função de onda do pión na frente de luz, como iremos estudar em detalhes na tese.

Outra razão para utilizarmos esse conjunto de momentos é que na relação de dispersão de Einstein que usualmente tem um fator de raiz quadrada, torna-se linear quando escrita em termos dos momentos na frente de luz. Isto permite analisar separadamente a cinemática da partícula e antipartícula.

A notação do quadrivetor covariante  $x^\mu$  é dada como:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) . \quad (\text{B.1})$$

Na forma covariante, o produto escalar é dado por:

$$x \cdot y = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 . \quad (\text{B.2})$$

No caso do formalismo da teoria quântica de campos na frente de luz, temos que (HARRINDRANATH, 2000):

$$x^+ = x^0 + x^3 \quad ; \quad x^- = x^0 - x^3 \quad e \quad x_\perp = (x^1, x^2) , \quad (\text{B.3})$$

onde  $x^+$ ,  $x^-$  e  $x_\perp$  são as variáveis temporal, longitudinal e transversal, respectivamente na dinâmica na frente de luz. As coordenadas de posição,  $x^-$  e  $x_\perp$  definem um ponto na hipersuperfície são com  $x^+$  constante. Nestas coordenadas o produto escalar é dado por:

$$x \cdot y = \frac{1}{2} (x^+ \cdot y^- + x^- \cdot y^+) - \vec{x}_\perp \cdot \vec{y}_\perp , \quad (\text{B.4})$$

onde o fator  $\frac{1}{2}$  é proveniente do tensor métrico que é dado a seguir:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad (\text{B.5})$$

e o elemento de volume quadridimensional nas integrações, é dado por:

$$d^4x = \frac{1}{2} d^2x_\perp dx^+ dx^- . \quad (\text{B.6})$$

De modo a exemplificar como proceder em uma transformação das variáveis da forma

covariante usual para as da frente de luz, faremos a demonstração através da definição do quadrimomento, dado por,

$$\begin{cases} k^+ = k^0 + k^3 \\ k^- = k^0 - k^3 \\ k^1 = k_{\perp} \cos \theta \\ k^2 = k_{\perp} \sin \theta, \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

que são os momentos canonicamente conjugados às coordenadas, Eq. (B.3). Note que podemos expressar as componentes  $k^0$  e  $k^3$  como,

$$\begin{cases} k^0 = \frac{k^+ + k^-}{2} \\ k^3 = \frac{k^+ - k^-}{2}. \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Para a transformação das coordenadas da forma covariante para a formalismo da frente de luz, temos que calcular o determinante do Jacobiano,

$$\det |J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial k^0}{\partial k^+} & \frac{\partial k^0}{\partial k^-} & \frac{\partial k^0}{\partial k_{\perp}} & \frac{\partial k^0}{\partial \theta} \\ \frac{\partial k^1}{\partial k^+} & \frac{\partial k^1}{\partial k^-} & \frac{\partial k^1}{\partial k_{\perp}} & \frac{\partial k^1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial k^2}{\partial k^+} & \frac{\partial k^2}{\partial k^-} & \frac{\partial k^2}{\partial k_{\perp}} & \frac{\partial k^2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial k^3}{\partial k^+} & \frac{\partial k^3}{\partial k^-} & \frac{\partial k^3}{\partial k_{\perp}} & \frac{\partial k^3}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -k_{\perp} \sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & -k_{\perp} \cos \theta \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} k_{\perp}. \quad (\text{B.9})$$

Quando estamos realizando integrações no formalismo da frente de luz em quatro dimensões, é este resultado que temos que usar para compor o elemento de volume na integrais de *loop* que iremos calcular.

# Apêndice C - A Identidade de Ward-Takahashi

Nas seções a seguir detalhamos algumas das etapas para obtenção do fator de forma eletromagnético do pión.

## C.1 Vértice quark-fóton

Apresentamos alguns detalhes de como obtemos o vértice do acoplamento quark-fóton,  $\Gamma^\mu(k; P, P')$ , para a corrente eletromagnética satisfazer a Identidade de Ward-Takahashi (NAUS *et al.*, 1998; TAKAHASHI, 1957):

$$\begin{aligned}
 q_\mu \Gamma^\mu(k; P, P') &= S^{-1}(P' - k) - S^{-1}(P - k) \\
 &= \not{P}' - \not{k} + m_0 - \frac{m^3}{(P' - k)^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \\
 &\quad - \left( \not{P} - \not{k} + m_0 - \frac{m^3}{(P - k)^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \right) \\
 &= \not{q} - \frac{m^3}{(P' - k)^2 - \lambda^2 + i\epsilon} + \frac{m^3}{(P - k)^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \\
 &= \not{q} + m^3 \frac{(P' - k)^2 - \lambda^2 + i\epsilon - [(P - k)^2 - \lambda^2 + i\epsilon]}{[(P' - k)^2 - \lambda^2 + i\epsilon][(P - k)^2 - \lambda^2 + i\epsilon]} \\
 &= \not{q} + m^3 \frac{(P'^2 - 2P' \cdot k) - (P^2 - 2P \cdot k)}{[(P' - k)^2 - \lambda^2 + i\epsilon][(P - k)^2 - \lambda^2 + i\epsilon]} \\
 &= \not{q} + m^3 \frac{P^2 + 2q \cdot P + q^2 - 2(P + q) \cdot k - (P^2 - 2P \cdot k)}{[(P' - k)^2 - \lambda^2 + i\epsilon][(P - k)^2 - \lambda^2 - i\epsilon]} \\
 &= \not{q} + m^3 \frac{(2q \cdot P + q^2 - 2q \cdot k)}{[(P' - k)^2 - \lambda^2 + i\epsilon][(P - k)^2 - \lambda^2 + i\epsilon]}, \tag{C.1}
 \end{aligned}$$

simplificando  $q_\mu$  em ambos os lados em (C.1)

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu &= \gamma^\mu + m^3 \frac{(2P + q - 2k)^\mu}{[(P' - k)^2 - \lambda^2 + i\epsilon][(P - k)^2 - \lambda^2 + i\epsilon]} \\ &= \gamma^\mu + m^3 \frac{(2P + P' - P - 2k)^\mu}{[(P' - k)^2 - \lambda^2 + i\epsilon][(P - k)^2 - \lambda^2 + i\epsilon]}.\end{aligned}\tag{C.2}$$

Portanto o vértice formado entre o fóton e o quark é dado por:

$$-i\Gamma^\mu(k; P, P') = \gamma^\mu + \Lambda^\mu(k; P, P'),\tag{C.3}$$

onde a função de correlação,  $\Lambda^\mu(k; P, P')$ , é dada por:

$$\Lambda^\mu(k; P, P') = \frac{m^3 (P' + P - 2k)^\mu}{((P' - k)^2 - \lambda^2 + i\epsilon)((P - k)^2 - \lambda^2 + i\epsilon)}.\tag{C.4}$$

Onde utilizamos aqui as matrizes  $\gamma^\mu$  de Dirac segundo a convenção de Bjorken e Drell (DRELL; BJORKEN, 1964; HARINDRANATH, 2000):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix},$$

e,

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\tag{C.5}$$

As matrizes gama são expressadas em termos das matrizes de Pauli (HARINDRANATH, 1996):

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\tag{C.6}$$

As matrizes de Dirac na frente de luz são definidas como combinações das matrizes usuais de Dirac:

$$\gamma^\pm = \gamma^0 \pm \gamma^3 \quad e \quad \vec{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2),\tag{C.7}$$

ou em uma forma explícita:

$$\gamma^\pm = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mp 1 \\ \mp 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.8})$$

# Apêndice D - Traço da corrente eletromagnética

Neste apêndice apresentamos detalhes da obtenção do cálculo do traço da corrente eletromagnética do pión.

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^\mu &= [\not{k} + M(k)]\gamma^5[\not{k} - \not{P}' + M(k - P')]\gamma^\mu[\not{k} - \not{P} + M(k - P)]\gamma^5 \\
&= [\not{k}\gamma^5 + \gamma^5 M(k)][(\not{k} - \not{P}')\gamma^\mu + \gamma^\mu M(k - P')][(\not{k} - \not{P})\gamma^5 + \gamma^5 M(k - P)] \\
&= [\not{k}\gamma^5(\not{k} - \not{P}')\gamma^\mu + \gamma^5(\not{k} - \not{P}')\gamma^\mu M(k) + \not{k}\gamma^5\gamma^\mu M(k - P') + \gamma^5\gamma^\mu M(k)M(k - P')] \\
&\quad [(\not{k} - \not{P})\gamma^5 + \gamma^5 M(k - P)] \\
&= \gamma^5[\not{k}(\not{P}' - \not{k})\gamma^\mu + (\not{k} - \not{P}')\gamma^\mu M(k) - \not{k}\gamma^\mu M(k - P') + \gamma^\mu M(k)M(k - P')] \\
&\quad \gamma^5[(\not{P} - \not{k}) + M(k - P)] \\
&= [\not{k}(\not{k} - \not{P}')\gamma^\mu + (\not{k} - \not{P}')\gamma^\mu M(k) - \not{k}\gamma^\mu M(k - P') - \gamma^\mu M(k)M(k - P')] \\
&\quad [(\not{P} - \not{k}) + M(k - P)] \\
&= \not{k}(\not{k} - \not{P}')\gamma^\mu(\not{P} - \not{k}) + (\not{k} - \not{P}')\gamma^\mu(\not{P} - \not{k})M(k) - \not{k}\gamma^\mu(\not{P} - \not{k})M(k - P') \\
&\quad - \gamma^\mu(\not{P} - \not{k})M(k)M(k - P') \\
&\quad + \not{k}(\not{k} - \not{P}')\gamma^\mu M(k - P) + (\not{k} - \not{P}')\gamma^\mu M(k)M(k - P) \\
&\quad - \not{k}\gamma^\mu M(k - P')M(k - P) - \gamma^\mu M(k)M(k - P')M(k - P) .
\end{aligned} \tag{D.1}$$

Verifica-se que o traço de um produto ímpar de matrizes de Dirac é igual a zero. Como vamos obter o traço da Eq. (D.1) podemos de antemão descartar os termos com número ímpar de matrizes de Dirac em  $\mathcal{O}^\mu$ ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^\mu &= \not{k}(\not{k} - \not{P}')\gamma^\mu(\not{P} - \not{k}) - \gamma^\mu(\not{P} - \not{k})M(k)M(k - P') + (\not{k} - \not{P}')\gamma^\mu M(k)M(k - P) \\
&\quad - \not{k}\gamma^\mu M(k - P')M(k - P) \\
&= \not{k}\not{k}\gamma^\mu(\not{P} - \not{k}) - \not{k}\not{P}'\gamma^\mu(\not{P} - \not{k}) - \gamma^\mu(\not{P} - \not{k})M(k)M(k - P') \\
&\quad + \not{k}\gamma^\mu[M(k) - M(k - P')]M(k - P) - \not{P}'\gamma^\mu M(k)M(k - P) .
\end{aligned} \tag{D.2}$$

Utilizando a propriedade  $\not{a}\not{b} = a_\alpha b_\beta \gamma^\alpha \gamma^\beta$  temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^\mu &= [(k_\alpha k_\beta - k_\alpha P'_\beta) \gamma^\alpha \gamma^\beta - M(k)M(k - P')] \gamma^\mu \gamma^\nu (P - k)_\nu \\ &+ \{k_\nu \gamma^\nu \gamma^\mu [M(k) - M(k - P')] - P'_\nu \gamma^\nu \gamma^\mu M(k)\} M(k - P) . \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Para realizarmos o cálculo do traço na Eq. (D.4), verificamos as propriedades  $Tr[\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu] = 4(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\beta\nu} g^{\alpha\mu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu})$  e  $Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$ , logo o  $Tr[\mathcal{O}^\mu]$  é

$$\begin{aligned} Tr[\mathcal{O}^\mu] &= 4[(k_\alpha k_\beta - k_\alpha P'_\beta)(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\beta\nu} g^{\alpha\mu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}) \\ &- g^{\mu\nu} M(k)M(k - P)](P - k)_\nu \\ &+ 4g^{\nu\mu} \{k_\nu [M(k) - M(k - P')] - P'_\nu M(k)\} M(k - P) \\ &= 4[(k^\beta k_\beta - k^\beta P'_\beta) g^{\mu\nu} - (k^\mu k^\nu - k^\mu P'^\nu) + k^\nu k^\mu - k^\nu P'^\mu \\ &- g^{\mu\nu} M(k)M(k - P)](P - k)_\nu \\ &+ 4\{k^\mu [M(k) - M(k - P')] - P'^\mu M(k)\} M(k - P) \\ &= 4\{(k^2 - k \cdot P')(P - k)^\mu - [k^\mu k \cdot (P - k) - k^\mu P' \cdot (P - k)] + k \cdot (P - k) k^\mu \\ &- k \cdot (P - k) P'^\mu - M(k)M(k - P')(P - k)^\mu\} \\ &+ 4\{k^\mu [M(k) - M(k - P')] - P'^\mu M(k)\} M(k - P) \\ &= 4\{[k \cdot P' - k^2 + P' \cdot (P - k) + M(k)M(k - P') - M(k) + M(k - P')]\} k^\mu \\ &+ [k \cdot (k - P) - M(k)M(k - P)] P'^\mu + [k^2 - k \cdot P' - M(k)M(k - P')] P^\mu\} \\ &= 4\{[P \cdot P' - k^2 + M(k)M(k - P') - M(k) + M(k - P')]\} k^\mu \\ &+ [k^2 - k \cdot P - M(k)M(k - P)] P'^\mu + [k^2 - k \cdot P' - M(k)M(k - P')] P^\mu\} . \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Onde a métrica tensorial  $g^{\alpha\beta}$  no formalismo da frente de luz é dado a seguir:

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (\text{D.5})$$



Escrevendo  $M(k)$  no traço na frente de luz, Eq. (D.4) temos,

$$\begin{aligned}
 M(k) &= m_0 - \frac{m^3}{a_n}, \quad a_n = k^+ \left( k_n^- - \frac{f_a - i\epsilon}{k^+} \right), \\
 M(P - k) &= m_0 - \frac{m^3}{b_n}, \quad b_n = (P^+ - k^+) \left( P^- - k_n^- - \frac{f_b - i\epsilon}{(P^+ - k^+)} \right), \\
 M(P' - k) &= m_0 - \frac{m^3}{c_n}, \quad c_n = (P'^+ - k^+) \left( P'^- - k_n^- - \frac{f_c - i\epsilon}{(P'^+ - k^+)} \right).
 \end{aligned} \tag{D.6}$$

De maneira que podemos substituir  $M(k)$ ,  $M(P - k)$  e  $M(P' - k)$  da Eq. (D.6) na Eq. (D.4) assim temos,

$$\begin{aligned}
 Tr[\mathcal{O}^+(k; P, P')] &= \left\{ -4k^-(k^+ - P^+)(k^+ - P'^+) \right. \\
 &+ k^+ [4k_x^2 + q^2 - 4M(P - k)M(P' - k)] \\
 &+ M(k)M(P - k) + 4M(k)M(P' - k) \\
 &- 2[-2k_x^2(P^+ + P'^+) + k_x(P'^+ - P^+)q^+ \\
 &+ 2M(k)(P'^+M(P - k) + P^+M(P' - k))] \\
 &- \frac{(2k^+ - P^+ - P'^+)}{m^3} [-2k^+P'^-M(P - k) \\
 &+ 2k_xq(M(P - k) - M(P' - k)) - 2k^+P^-M(P' - k) \\
 &- 4k_x^2(M(P - k) + M(P' - k) - M(k)) \\
 &+ 2k^+P^-M(k) + 2k^+P'^-M(k) - 2P'^-P^+M(k) \\
 &- 2P^-P'^+M(k) - q^2M(k) - 4M(P - k)M(P' - k)M(k) \\
 &+ 2k^-( -P'^+M(P - k) - P^+M(P' - k) \\
 &+ 2k^+(M(P - k) + M(P' - k) - M(k))] \\
 &+ P^+M(k) + P'^+M(k) \left. \right\}, \tag{D.7}
 \end{aligned}$$

Para simplificarmos a expressão da corrente, Eq. (4.18), reescrevemos o traço, Eq.

(D.7), da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_n^+(k; P, P') &= -4m^6 [k^+ (a_n - b_n - c_n) + (b_n P^+ + c_n P'^+)] \\
 &+ 4m_0 m^3 [(c_n P'^+ + b_n P^+) a_n + (-2k^+ + P^+ + P'^+) b_n c_n] \\
 &+ m_0 [4(k_x^2 + m_0^2) + 2(P'^- P^+ + P^- P'^+) + q^2] \times \\
 &\times a_n (2k^+ - P^+ - P'^+) m^3 \\
 &+ a_n b_n c_n \{ [-4 [k_n^- (k^+ - P^+) (k^+ - P'^+)] \\
 &+ k_x^2 (P^+ + P'^+)] - 2k_x (P'^+ - P^+) q \\
 &+ k^+ (4k_x^2 + q^2)] + 4m_0^2 [k^+ - P^+ - P'^+] \} \\
 &+ \{ [-2k^+ P'^- a_n c_n + 2k_x q (c_n - b_n) a_n - 2k^+ P^- a_n b_n \\
 &- 4k_x^2 (a_n (b_n + c_n) - b_n c_n) + 2k^+ b_n c_n (P'^- + P^-) \\
 &- 4m_0^2 (a_n (b_n + c_n) + b_n c_n) \\
 &+ b_n c_n (-2P'^- P^+ - 2P^- P'^+ - q^2)] m^3 \\
 &+ 2k_n^- [(-P'^+ a_n c_n - P^+ a_n b_n) + 2k^+ (a_n (b_n + c_n) - b_n c_n) \\
 &+ (P^+ + P'^+) b_n c_n] m^3 - 4m^6 [m^3 - m_0 (a_n + b_n + c_n)] \\
 &- 4m_0 k_n^- k^+ a_n b_n c_n \} \frac{(2k^+ - P^+ - P'^+) m^3}{b_n c_n} \\
 Tr[\mathcal{O}_n^+(k; P, P')] &= \frac{\mathcal{P}_n^+(k; P, P')}{a_n b_n c_n} . \tag{D.8}
 \end{aligned}$$

Da qual podemos reescrever a Eq. (D.8) como,

$$\mathcal{P}_n^+ = \mathcal{Q}_n + \mathcal{R}_n + \left[ \frac{\mathcal{S}'_n}{b_n} + \frac{\mathcal{S}_n}{c_n} + \mathcal{T} + \mathcal{T}_n + \frac{\mathcal{U}_n}{b_n c_n} \right] \mathcal{Q}^+ , \tag{D.9}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q}_n &= -4m^6 [k^+ (a_n - b_n - c_n) + (b_n P^+ + c_n P'^+)] + 4m_0 m^3 [(c_n P'^+ + b_n P^+) a_n \\
 &+ (-2k^+ + P^+ + P'^+) b_n c_n] + m_0 [4(k_x^2 + m_0^2) + 2(P'^- P^+ + P^- P'^+) + q^2] \\
 &\times a_n (2k^+ - P^+ - P'^+) m^3 , \\
 \mathcal{R}_n &= a_n b_n c_n [-4k_n^- (k^+ - P^+) (k^+ - P'^+) + 4m_0^2 (k^+ - P^+ - P'^+) \\
 &- 2k_x (P'^+ - P^+) q + k^+ (4k_x^2 + q^2) - 4k_x^2 (P^+ + P'^+)] ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q}^+ &= (2k^+ - P^+ - P'^+) m^3 , \\
 \mathcal{S}_n &= 2m^3 \{ a_n [k_n^- (2k^+ - P^+) - (k^+ P^- + k_x q + 2k_x^2) - 2m_0^2] + 2m^3 m_0 \} , \\
 \mathcal{S}'_n &= 2m^3 \{ a_n [k_n^- (2k^+ - P'^+) - (k^+ P'^- - k_x q + 2k_x^2) - 2m_0^2] + 2m^3 m_0 \} ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T} &= [4k_x^2 + 2k^+(P'^- + P^-) - 2(P'^-P^+ + P^-P'^+) - q^2 - 4m_0^2] m^3 , \\
 \mathcal{T}_n &= 2k_n^- [(-2k^+ + P^+ + P'^+)m^3 - 2m_0k^+a_n] , \\
 \mathcal{U}_n &= 4m^6 (m_0a_n - m^3) .
 \end{aligned}$$

Para identificar se há divergências nos cálculos da corrente eletromagnética, Eq. (4.18), faz-se a contagem de potências de  $k^-$  na Eq. (D.9) como segue:

$$\begin{aligned}
 &a_n(k^-) , b_n(k^-) , c_n(k^-) , \\
 &\mathcal{Q}_n(k^{-2}, k^-) , \mathcal{R}_n(k^{-4}, k^{-3}) , \\
 &\mathcal{S}_n(k^{-2}, k^-) , \mathcal{S}'_n(k^{-2}, k^-) , \\
 &\mathcal{T}_n(k^{-2}, k^-) , \mathcal{U}_n(k^-) , \\
 &\mathcal{P}_n^+(k^{-4}, k^{-2}, k^-, k^{-1}) .
 \end{aligned} \tag{D.10}$$

# Apêndice E - Supressão dos termos de pares

Neste apêndice apresentamos detalhes do cálculo de  $J_\pi^{+Z}$  para identificar a supressão de termos de pares nesta componente da corrente.

Para verificarmos a supressão dos termos de pares para a componente  $J_\pi^{+Z}$ , precisamos remover a descontinuidade da função. Podemos identificar a descontinuidade em  $q^+$ , quando tomamos seu limite  $q^+ \rightarrow 0$ . Para a integração em  $k^-$  de  $J_\pi^{+Z}$ , cuja região de integração é para o intervalo em  $P^+ < k^+ < P'^+$ . Como verifica-se a presença de frações no traço da estrutura de Dirac,  $\mathcal{P}_{2n+3}^+$ , vamos analisar esta estrutura a fim de simplificarmos os termos proporcionais à  $q^+$ . Posteriormente podemos simplificar com os termos do denominador de  $J_\pi^{+Z}$ , assim a supressão dos termos de pares quando  $q^+ \rightarrow 0$  pode ser averiguado.

$$J_\pi^{+Z} = -\frac{N^2}{f_\pi^2} \sum_{n=1}^3 \int \frac{d^2 k_\perp dx q^+}{2(2\pi)^3} \frac{m^6 \mathcal{P}_{2n+3}^+ a_{2n+3} b_{2n+3} c_{2n+3} \mathcal{D}_{2n+3}}{(1-x)q^+ \prod_{j=1}^9 \mathcal{D}_j d_{2n+3} e_{2n+3}}, \quad (\text{E.1})$$

$$\mathcal{D}_1 = \frac{[P'^-(P^+ + xq^+) - f_1](1-x)q^+ - f_{2n+3}(P^+ + xq^+)}{(1-x)q^+},$$

$$\mathcal{D}_2 = \frac{[P'^-(P^+ + xq^+) - f_2](1-x)q^+ - f_{2n+3}(P^+ + xq^+)}{(1-x)q^+},$$

$$\mathcal{D}_3 = \frac{[P'^-(P^+ + xq^+) - f_3](1-x)q^+ - f_{2n+3}(P^+ + xq^+)}{(1-x)q^+},$$

$$\mathcal{D}_4 = \frac{[(P'^- - P^-)xq^+ - f_4](1-x) - f_{2n+3}x}{(1-x)},$$

$$\mathcal{D}_5 = f_{2n+3} - f_5,$$

$$\mathcal{D}_6 = \frac{[(P'^- - P^-)xq^+ - f_6](1-x) - f_{2n+3}x}{(1-x)},$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_7 &= f_{2n+3} - f_7, \\
 \mathcal{D}_8 &= \frac{[(P'^- - P^-)xq^+ - f_8](1-x) - f_{2n+3}x}{(1-x)}, \\
 \mathcal{D}_9 &= f_{2n+3} - f_9, \\
 a_{2n+3} &= \frac{[P'^-(P^+ + xq^+) - f_a](1-x)q^+ - f_{2n+3}(P^+ + xq^+)}{(1-x)q^+}, \\
 b_{2n+3} &= \frac{[(P'^- - P^-)xq^+ - f_b](1-x) - f_{2n+3}x}{(1-x)}, \\
 c_{2n+3} &= f_{2n+3} - f_c, \\
 d_{2n+3} &= \frac{\left[\left(P'^- + \frac{P^-}{2}\right)\left(\frac{3P^+}{2} + xq^+\right) - f_d\right](1-x) - f_{2n+3}\left(\frac{3P^+}{2q^+} + x\right)}{(1-x)}, \\
 e_{2n+3} &= \frac{\left\{\frac{3P'^-}{2}\left[\frac{3P^+}{2} + \left(\frac{1}{2} + x\right)q^+\right] - f_e\right\}(1-x) - f_{2n+3}\left[\frac{3P^+}{2q^+} + \left(\frac{1}{2} + x\right)\right]}{(1-x)},
 \end{aligned}$$

cujo traço da estrutura de Dirac é dado por,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{2n+3}^+ &= \left[[(P'^- - P^-)xq^+ - f_b](1-x)q^+ - f_{2n+3}xq^+\right] \times \\
 &\quad \frac{(f_{2n+3} - f_c)}{(1-x)q^+} [\mathcal{Q}_{2n+3} + \mathcal{R}_{2n+3} + (\mathcal{T} + \mathcal{T}_{2n+3})Q^+] \\
 &\quad + \left\{[(P'^- - P^-)xq^+ - f_b](1-x)q^+ - f_{2n+3}xq^+\right\} \mathcal{S}_{2n+3} \\
 &\quad + (f_{2n+3} - f_c)(1-x)q^+ \mathcal{S}'_{2n+3} + (1-x)q^+ \mathcal{U}_{2n+3} \left\} \frac{Q^+}{(1-x)q^+}
 \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q}^+ &= -(1-2x)q^+m^3 \\
 \mathcal{V} &= -2[(P^+ + xq^+)P^- + k_xq + 2k_x^2] - 4m_0^2 \\
 \mathcal{S}_{2n+3} &= \left\{2[P'^-(1-x)q^+ - f_{2n+3}](P^+ + 2xq^+) \right. \\
 &\quad \left. + (1-x)q^+\mathcal{V}\right\} m^3(1-x)q^+ \times \\
 &\quad \frac{[P'^-(P^+ + xq^+) - f_a](1-x)q^+ - f_{2n+3}(P^+ + xq^+)}{(1-x)^3q^{+3}} \\
 \mathcal{V}' &= -2[(P^+ + xq^+)P'^- - k_xq + 2k_x^2] - 4m_0^2 \\
 \mathcal{S}'_{2n+3} &= \left\{2[P'^-(1-x)q^+ - f_{2n+3}](P^+ - (1-2x)q^+) \right. \\
 &\quad \left. + (1-x)q^+\mathcal{V}'\right\} m^3(1-x)q^+ \times \\
 &\quad \frac{[P'^-(P^+ + xq^+) - f_a](1-x)q^+ - f_{2n+3}(P^+ + xq^+)}{(1-x)^3q^{+3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= [4k_x^2 + 2(P^+ + xq^+)(P'^- + P^-) \\ &\quad - 2(P'^-P^+ + P^-P'^+) - q^2 - 4m_0^2] m^3 \frac{(1-x)^3 q^{+3}}{(1-x)^3 q^{+3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{2n+3} &= \left[ \frac{P'^-(1-x)q^+ - f_{2n+3}}{(1-x)^3 q^{+3}} \right] (1-x)q^+ \times \\ &\quad \{2(1-2x)q^+(1-x)q^+ m^3 - 4m_0(P^+ + xq^+) \times \\ &\quad [[P'^-(P^+ + xq^+) - f_a](1-x)q^+ - f_{2n+3}(P^+ + xq^+)]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{2n+3} &= \frac{4m^6}{(1-x)^3 q^{+3}} (1-x)^2 q^{+2} \times \\ &\quad \{ [[P'^-(P^+ + xq^+) - f_a](1-x)q^+ - f_{2n+3}(P^+ + xq^+) \\ &\quad + [(P'^- - P^-)xq^+ - f_b](1-x)q^+ - f_{2n+3}xq^+ \\ &\quad + (f_{2n+3} - f_c)(1-x)q^+ ] m_0 m^3 (1-x)q^+ \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{2n+3} &= \frac{-4m^6(1-x)^2 q^{+2}}{(1-x)^3 q^{+3}} \{ (P^+ + xq^+) \times \\ &\quad \{ [P'^-(P^+ + xq^+) - f_a](1-x)q^+ - f_{2n+3}(P^+ + xq^+) \\ &\quad - [(P'^- - P^-)xq^+ - f_b](1-x)q^+ - f_{2n+3}xq^+ \\ &\quad - (f_{2n+3} - f_c)(1-x)q^+ \} \\ &\quad + [ [(P'^- - P^-)xq^+ - f_b](1-x)q^+ - f_{2n+3}xq^+ ] P^+ \\ &\quad + P^+(f_{2n+3} - f_c)(1-x)q^+ \} \\ &\quad + \frac{4m_0 m^3 (1-x)q^+}{(1-x)^3 q^{+3}} \{ [P^+(f_{2n+3} - f_c)(1-x)q^+ \\ &\quad + [ [(P'^- - P^-)xq^+ - f_b](1-x)q^+ - f_{2n+3}xq^+ ] P^+ ] \times \\ &\quad [P'^-(P^+ + xq^+) - f_a](1-x)q^+ - f_{2n+3}(P^+ + xq^+) \} \\ &\quad + (1-2x)q^+(1-x)q^+(f_{2n+3} - f_c) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[[ (P'^- - P^-)xq^+ - f_b](1-x)q^+ - f_{2n+3}xq^+ ] \} - Q^+ \times \\ &\frac{m_0(1-x)q^+}{(1-x)^3 q^{+3}} [4(k_x^2 + m_0^2) + 2(P'^-P^+ + P^-P'^+) + q^2] \times \\ &\{ [P'^-(P^+ + xq^+) - f_a](1-x)q^+ - f_{2n+3}(P^+ + xq^+) \} \times \\ &(1-x)q^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q}_{2n+3} &= \{[P'^-(P^+ + xq^+) - f_a](1-x)q^+ - f_{2n+3}(P^+ + xq^+)\} \times \\
 &\quad \{[(P'^- - P^-)xq^+ - f_b](1-x)q^+ - f_{2n+3}xq^+\} \frac{(f_{2n+3} - f_c)}{(1-x)^3 q^{+3}} \\
 &\quad \times \{-4[P'^-(1-x)q^+ - f_{2n+3}]xq^+(1-x)q^+ \\
 &\quad + [-2k_x q^+ q + (P^+ + xq^+)(4k_x^2 + q^2) \\
 &\quad - 4k_x^2(P^+ + P'^+) - 4m_0^2(P^+ + (1-x)q^+)](1-x)q^+\} .
 \end{aligned} \tag{E.2}$$

Os cálculos a seguir são etapas para reescrever a corrente com um denominador comum em  $q^+$ . Assim podemos simplificar os termos para verificarmos se a corrente é proporcional à  $q^+$ . Aplicamos o denominador comum em  $(1-x)$  logo,

$$J^{+Z} = -\frac{N^2}{f_\pi^2} \sum_{n=1}^3 \int \frac{d^2 k_\perp dx}{2(2\pi)^3} \frac{m^6 \mathcal{P}_{2n+3}^+ a_{2n+3} b_{2n+3} c_{2n+3} \mathcal{D}_{2n+3}}{(1-x) \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_3 \mathcal{D}_4 \mathcal{D}_5 \mathcal{D}_6 \mathcal{D}_7 \mathcal{D}_8 \mathcal{D}_9 d_{2n+3} e_{2n+3}} , \tag{E.3}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_1 &= [P'^-(P^+ + xq^+) - f_1](1-x)q^+ - f_{2n+3}(P^+ + xq^+) , \\
 \mathcal{D}_2 &= [P'^-(P^+ + xq^+) - f_2](1-x)q^+ - f_{2n+3}(P^+ + xq^+) , \\
 \mathcal{D}_3 &= [P'^-(P^+ + xq^+) - f_3](1-x)q^+ - f_{2n+3}(P^+ + xq^+) , \\
 \mathcal{D}_4 &= \frac{[(P'^- - P^-)xq^+ - f_4](1-x) - f_{2n+3}x}{(1-x)} , \\
 \mathcal{D}_5 &= f_{2n+3} - f_5 , \\
 \mathcal{D}_6 &= \frac{[(P'^- - P^-)xq^+ - f_6](1-x) - f_{2n+3}x}{(1-x)} , \\
 \mathcal{D}_7 &= f_{2n+3} - f_7 , \\
 \mathcal{D}_8 &= \frac{[(P'^- - P^-)xq^+ - f_8](1-x) - f_{2n+3}x}{(1-x)} , \\
 \mathcal{D}_9 &= f_{2n+3} - f_9 , \\
 a_{2n+3} &= [P'^-(P^+ + xq^+) - f_a](1-x)q^+ - f_{2n+3}(P^+ + xq^+) , \\
 b_{2n+3} &= \frac{[(P'^- - P^-)xq^+ - f_b](1-x) - f_{2n+3}x}{(1-x)} , \\
 c_{2n+3} &= f_{2n+3} - f_c , \\
 d_{2n+3} &= \frac{\left[ \left( P'^- + \frac{P^-}{2} \right) \left( \frac{3P^+}{2} + xq^+ \right) - f_d \right] (1-x) - f_{2n+3} \left( \frac{3P^+}{2q^+} + x \right)}{(1-x)} , \\
 e_{2n+3} &= \frac{\left\{ \frac{3P'^-}{2} \left[ \frac{3P^+}{2} + \left( \frac{1}{2} + x \right) q^+ \right] - f_e \right\} (1-x) - f_{2n+3} \left[ \frac{3P^+}{2q^+} + \left( \frac{1}{2} + x \right) \right]}{(1-x)} ,
 \end{aligned}$$

cujo traço torna-se:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{2n+3}^+ &= [[(P'^- - P^-)xq^+ - f_b](1-x)q^+ - f_{2n+3}xq^+] \times \\
 &\quad \frac{(f_{2n+3} - f_c)}{(1-x)} [\mathcal{R}_{2n+3} + \mathcal{U}_{2n+3} + (\mathcal{S} + \mathcal{S}_{2n+3}) \mathcal{Q}_s^+] \\
 &\quad + \{ [[(P'^- - P^-)xq^+ - f_b](1-x)q^+ - f_{2n+3}xq^+] \mathcal{Q}_{2n+3} \\
 &\quad + (f_{2n+3} - f_c)(1-x)q^+ \mathcal{Q}'_{2n+3} + (1-x)q^+ \mathcal{T}_{2n+3} \} \frac{\mathcal{Q}_s^+}{(1-x)}, \quad (\text{E.4})
 \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q}_s^+ &= -(1-2x)m^3 \\
 \mathcal{Q} &= -2[(P^+ + xq^+)P^- + k_x q + 2k_x^2] - 4m_0^2 \\
 \mathcal{Q}_{2n+3} &= \{ 2 [P'^-(1-x)q^+ - f_{2n+3}] (P^+ + 2xq^+) \\
 &\quad + (1-x)q^+ \mathcal{Q} \} m^3 \times \\
 &\quad [P'^-(P^+ + xq^+) - f_a](1-x)q^+ - f_{2n+3}(P^+ + xq^+) \\
 \mathcal{Q}' &= -2[(P^+ + xq^+)P'^- - k_x q + 2k_x^2] - 4m_0^2 \\
 \mathcal{Q}'_{2n+3} &= \{ 2 [P'^-(1-x)q^+ - f_{2n+3}] (P^+ - (1-2x)q^+) \\
 &\quad + (1-x)q^+ \mathcal{Q}' \} m^3 \times \\
 &\quad [P'^-(P^+ + xq^+) - f_a](1-x)q^+ - f_{2n+3}(P^+ + xq^+) \\
 \mathcal{S} &= [4k_x^2 + 2(P^+ + xq^+)(P'^- + P^-) \\
 &\quad - 2(P'^-P^+ + P^-P'^+) - q^2 - 4m_0^2] m^3(1-x)^2q^{+2} \\
 \mathcal{S}_{2n+3} &= [P'^-(1-x)q^+ - f_{2n+3}] \times \\
 &\quad \{ 2(1-2x)q^+(1-x)q^+m^3 - 4m_0(P^+ + xq^+) \times \\
 &\quad [P'^-(P^+ + xq^+) - f_a](1-x)q^+ - f_{2n+3}(P^+ + xq^+) \} \\
 \mathcal{T}_{2n+3} &= 4m^6(1-x)q^+ \times \\
 &\quad \{ [P'^-(P^+ + xq^+) - f_a](1-x)q^+ - f_{2n+3}(P^+ + xq^+) \\
 &\quad + [(P'^- - P^-)xq^+ - f_b](1-x)q^+ - f_{2n+3}xq^+ \\
 &\quad + ((f_{2n+3} - f_c)(1-x)q^+) m_0 m^3(1-x)q^+ \} ,
 \end{aligned}$$



e,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}_{2n+3} &= -4m^6(1-x)q^+ \{ (P^+ + xq^+) \times \\
 &\quad \{ [P'^-(P^+ + xq^+) - f_a](1-x)q^+ - f_{2n+3}(P^+ + xq^+) \\
 &\quad - [(P'^- - P^-)xq^+ - f_b](1-x)q^+ - f_{2n+3}xq^+ \\
 &\quad - (f_{2n+3} - f_c)(1-x)q^+ \} \\
 &\quad + [ [(P'^- - P^-)xq^+ - f_b](1-x)q^+ - f_{2n+3}xq^+ ] P^+ \\
 &\quad + P'^+(f_{2n+3} - f_c)(1-x)q^+ \} \\
 &\quad + 4m_0m^3 \{ [P'^+(f_{2n+3} - f_c)(1-x)q^+ \\
 &\quad + [ [(P'^- - P^-)xq^+ - f_b](1-x)q^+ - f_{2n+3}xq^+ ] P^+ ] \times \\
 &\quad [P'^-(P^+ + xq^+) - f_a](1-x)q^+ - f_{2n+3}(P^+ + xq^+) \} \\
 &\quad + (1-2x)q^+(1-x)q^+(f_{2n+3} - f_c) \times \\
 &\quad [ [(P'^- - P^-)xq^+ - f_b](1-x)q^+ - f_{2n+3}xq^+ ] \} - q^+Q_s^+ \times \\
 &\quad m_0(1-x)q^+ [4(k_x^2 + m_0^2) + 2(P'^-P^+ + P^-P'^+) + q^2] \times \\
 &\quad \{ [P'^-(P^+ + xq^+) - f_a](1-x)q^+ - f_{2n+3}(P^+ + xq^+) \} \\
 \mathcal{R}_{2n+3} &= \{ [P'^-(P^+ + xq^+) - f_a](1-x)q^+ - f_{2n+3}(P^+ + xq^+) \} \times \\
 &\quad \{ [(P'^- - P^-)xq^+ - f_b](1-x)q^+ - f_{2n+3}xq^+ \} \times \\
 &\quad (f_{2n+3} - f_c) \times \\
 &\quad \{ -4[P'^-(1-x)q^+ - f_{2n+3}]xq^+ \\
 &\quad + [-2k_xq^+q + (P^+ + xq^+)(4k_x^2 + q^2) \\
 &\quad - (.4k_x^2(P^+ + P'^+) - 4m_0^2(P^+ + (1-x)q^+))] \}
 \end{aligned}$$

Portanto temos que  $J_\pi^{+Z}$  é no mínimo proporcional a  $q^+$ . Em detrimento de outras ordens de potência, como pode ser analisado na Eq. (E.3) ao observarmos o traço da estrutura de Dirac na Eq. (E.4).

Portanto:

$$\lim_{q^+ \rightarrow 0} J^{+Z} = 0. \quad (\text{E.5})$$

O termo de par é suprimido assim como no modelo das Refs. (MELO, 1998; MELLO, 2013).

## FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO  <p style="text-align: center;">TD</p>	2. DATA  <p style="text-align: center;">4 de julho de 2017</p>	3. REGISTRO N°  <p style="text-align: center;">DCTA/ITA/TD-018/2017</p>	4. N° DE PÁGINAS  <p style="text-align: center;">113</p>
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: A estrutura eletromagnética do pión com autoenergia dos quarks			
6. AUTOR(ES):  <b>Clayton Santos Mello</b>			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES):  Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR:  Amplitude de Bethe-Salpeter; mésons leves; Fator de forma eletromagnético; Constante de decaimento; Quarks constituintes; Massa running			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO:  Mésons; Teoria relativística; Quarks; Estruturas eletromagnéticas; Física de partículas; Física.			
10. APRESENTAÇÃO: <span style="float: right;"><input checked="" type="checkbox"/> Nacional      ( ) Internacional</span>  ITA, São José dos Campos. Curso de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Física Nuclear. Orientador: Prof. Dr. Tobias Frederico. coorientador: João Pacheco Bicudo Cabral de Melo. Defesa em 12/07/2017. Publicada em 2017			
11. RESUMO:  Neste trabalho estudamos a função de onda de valência do pión na Frente de Luz, começando com parametrizações analíticas da função de vértice e da função de massa do quark, fitados dos resultados da Cromodinâmica Quântica (QCD) na rede. Também investigamos a estrutura eletromagnética do pión, o méson pseudoescalar, composto de um estado ligado quark-antiquark com spin zero e paridade negativa. Obtemos uma função de onda a partir de resultados da QCD na rede, que descreve a estrutura interna do pión. Em particular, calculamos observáveis como o fator de forma eletromagnético, o raio quadrático médio e a constante de decaimento. Calcula-se a função de onda utilizando um modelo com a massa dos quarks constituintes variando em função do momento do quark. Especificamente, realizamos os cálculos no formalismo da Frente de Luz (FL) com a amplitude de Bethe-Salpeter (ABS) com um modelo de quarks constituintes, que forma o estado do pión composto. Os cálculos foram comparados com outros modelos na literatura, que apresentam diferentes formas para a função de onda do pión na Frente de Luz. Considera-se a estrutura espinorial das matrizes de Dirac da amplitude de Bethe-Salpeter. Numa primeira aproximação, descartamos a estrutura de Dirac, e fizemos as primeiras estimativas para a função de onda. Para esta proposta nós analisamos os pólos da amplitude de Bethe-Salpeter no quadrimomento, que são integrados via teorema de Cauchy para eliminar o tempo relativo entre os quarks, e desta forma obter a função de onda de valência do pión.			
12. GRAU DE SIGILO:  <p style="text-align: center;"><input checked="" type="checkbox"/> OSTENSIVO                      ( ) RESERVADO                      ( ) SECRETO</p>			