

Dissertação apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Física Nuclear.

Bruno da Silva Gonçalves

**TEORIAS DE GRAVIDADE COM
ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO ENTRE
GEOMETRIA E MATÉRIA COMO
ALTERNATIVA PARA A ENERGIA ESCURA**

Dissertação aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:



Prof. Dr. Pedro H. R. S. Moraes

Orientador

Prof. Dr. Pedro Texeira Lacava

Pró-Reitor de Pós-Graduação

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP - Brasil
2020

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Divisão de Informação e Documentação

Gonçalves, Bruno da Silva

Teorias de gravidade com acoplamento não-mínimo entre geometria e matéria como alternativa para a energia escura / Bruno da Silva Gonçalves.

São José dos Campos, 2020.

78f.

Dissertação de Mestrado – Curso de Física. Área de Física Nuclear – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2020. Orientador: Prof. Dr. Pedro H. R. S. Moraes.

1. Cosmologia. 2. Energia Escura. 3. Teorias Alternativas. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Título.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

GONÇALVES, Bruno da Silva. **Teorias de gravidade com acoplamento não-mínimo entre geometria e matéria como alternativa para a energia escura**. 2020. 78f. Dissertação de Mestrado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Bruno da Silva Gonçalves

TÍTULO DO TRABALHO: Teorias de gravidade com acoplamento não-mínimo entre geometria e matéria como alternativa para a energia escura.

TIPO DO TRABALHO/ANO: Dissertação / 2020

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta dissertação e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação pode ser reproduzida sem a autorização do autor.



Bruno da Silva Gonçalves

Rua Jordão Monteiro Ferreira, 33

12.245-089 – São José dos Campos–SP

**TEORIAS DE GRAVIDADE COM
ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO ENTRE
GEOMETRIA E MATÉRIA COMO
ALTERNATIVA PARA A ENERGIA ESCURA**

Bruno da Silva Gonçalves

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Manuel M. B. M. de Oliveira	Presidente	-	ITA
Prof. Dr. Pedro H. R. S. Moraes	Orientador	-	ITA
Prof. Dr. Wayne Leonardo Silva de Paula	Membro Interno	-	ITA
Prof. Dr. José Fernando de Jesus	Membro Externo	-	UNESP

À minha esposa, Joeni Luiza, o ser humano mais belo que já conheci. À minha família. À memória de minha avó Helena B. Vargas. À D. Tereza Goulart e à memória do Sr. Herculano Goulart.

Agradecimentos

Inicialmente, agradeço a Deus, pois sem ele nada seria. Depois faço um agradecimento especial a pessoa que além de me apoiar em todos os aspectos dessa importante etapa, também é a outra metade da minha vida, minha esposa Joeni Luiza Goulart Gonçalves.

Ao pequeno João Lucas, jovenzinho espirituoso, afável e provido abundantemente de vigor e anseio capaz de trazê-lo a estudar futuramente no ITA.

Aos meus pais, Claudemir Gonçalves, principal figura de homem a qual sempre esteve representando grande fonte de reflexão sobre a vida, e Mara Regina da Silva, a quem refiro-me como cerne de inspiração e, em especial, menciono: *“sentado em uma pequena cadeira, o menino sobre as mãos dela, assimilava seu póster”*.

Aos meus irmãos por toda amizade e ótima companhia que são, Gabriel da Silva Gonçalves, uma figura humana que dispõe de enfático potencial, e Renan da Silva Gonçalves, rapaz aprazível, comunicativo e chistoso.

Gostaria de agradecer a minha avó Helena pelo exemplo de trajetória que é e sempre será para mim; assim como, carinhosamente a D. Tereza Goulart por ser um amável sopro de vida e ao Sr. Herculano Goulart, sendo a força e o sorriso representados em pessoa.

Ao meu orientador, Dr. Pedro Henrique Ribeiro da Silva Moraes, por nortear-me durante esses importantes passos rumo a ciência cósmica e gravitacional.

Ao corpo docente e equipe do Programa de Pós-Graduação em Física, por todo conhecimento construído; e apoio de todos os amigos no decurso, particularmente a Iolanda Farias, Odilon Mattos, Geanderson Carvalho, Rômulo Moita, Pablo Kunz, Marcelo Lapola, ao querido professor Deidimar Alves Brissi, o qual representa de forma exímia sua profissão, e especialmente ao meu amigo/filósofo Ricardo G. Felix, pelas boas partidas de Xadrez acompanhadas de muito café.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa de estudos que tornou factível a concretização deste trabalho.

“The important thing is not to stop questioning. One cannot help but be in awe when one contemplates the mysteries of eternity, of life, of the marvelous structure of reality.”

— ALBERT EINSTEIN

Resumo

Em virtude do comportamento contraintuitivo da gravidade, que como força atrativa deveria frear a expansão do Universo, ao tomarmos como referência o atual Modelo Cosmológico Padrão, nos deparamos com a necessária imposição de que $\sim 95\%$ do que constitui o Universo seja formado por entes exóticos (matéria e energia escura). Contudo, desde que se somou esse problemático cenário ao caso da Relatividade Geral não ser a teoria final da gravitação, vários modelos alternativos de gravidade vêm sendo propostos de modo a explicar tais aspectos inconsonantes. Na presente dissertação de mestrado, motivada por esse contexto, a expansão acelerada do Universo foi atacada a partir da teoria de gravidade $f(R, L_m)$, inicialmente proposta pelos Drs. Tiberiu Harko e Francisco S. N. Lobo, sendo uma ampla generalização da ação de Einstein-Hilbert, a qual mediante a uma forma funcional específica que admite o acoplamento não-mínimo entre geometria e matéria, permitiu o desenvolvimento de um novo modelo cosmológico, tendo-se em vista a investigação de seus respectivos parâmetros ligados a estrutura dinâmica do Universo. Diante à análise dos resultados fornecidos por nosso modelo, decorrente a possível restrição dos parâmetros ζ , φ e σ (e sem a necessidade de assumir o “setor escuro”), nota-se uma relevante consonância com as previsões já estabelecidas na literatura, referentes aos distintos períodos que o Universo evolui.

Abstract

Because of the counterintuitive behavior of gravity, which as an attractive force should stop the expansion of the Universe, when taking as reference the current Standard Cosmological Model, we are faced with the necessary imposition that $\sim 95\%$ of what constitutes the Universe is formed by exotic beings (dark matter and energy). However, since this problematic scenario was added to the case that General Relativity is not the final theory of gravitation, several alternative models of gravity have been proposed in order to explain such inconsistent aspects. In the present master's thesis, motivated by this context, the accelerated expansion of the Universe was attacked from the $f(R, L_m)$ gravity theory, initially proposed by Drs. Tiberiu Harko and Francisco SN Lobo, being a wide generalization of the Einstein-Hilbert action, which through a particular functional form that admits the non-minimum coupling between geometry and matter, allowed the development of a new cosmological model, and in order to investigate their associated parameters the dynamic structure of the Universe. In view of the analysis of the results provided by our model, due to the possible restriction of the parameters ζ , φ and σ (and without the need to assume the “dark sector”), there is a relevant consonance with the predictions already established in the literature, referring to the different periods that the Universe evolves.

Lista de Figuras

FIGURA 3.1 – Estrutura em larga escala formada pelo mapeamento-distribuição de ~ 141 mil galáxias (PEACOCK, 2001), demonstrando a homogeneidade cósmica.	31
FIGURA 3.2 – A RCFM (AKRAMI, 2016) vista em imagem do satélite Planck, trata-se do remanescente da era do desacoplamento entre a radiação e matéria, a qual apresenta flutuações da ordem de $10^{-5}K$	32
FIGURA 6.1 – Evolução temporal do Fator de Escala.	61
FIGURA 6.2 – Evolução temporal do Fator de Escala com $\varphi = 8\pi^2$	62
FIGURA 6.3 – Parâmetro de Hubble como função do tempo.	63
FIGURA 6.4 – Parâmetro de Hubble como função do tempo com $\varphi = 8\pi^2$	63
FIGURA 6.5 – Comportamento do parâmetro de Desaceleração.	66
FIGURA 6.6 – Comportamento do parâmetro de Desaceleração com $\varphi = 8\pi^2$	66
FIGURA 6.7 – Comportamento do parâmetro de Hubble como função do <i>red-shift</i>	68

Lista de Abreviaturas e Siglas

EdE	Equação de estado
Λ CDM	Λ -cold dark matter
RCFM	Radiação cósmica de fundo em micro-ondas
FRW	Friedmann-Robertson-Walker
LIGO	Laser interferometer gravitational-wave observatory
GW	Gravitational Wave
RG	Relatividade Geral
MCP	Modelo cosmológico padrão
ET	Espaço-tempo
RR	Relatividade Restrita
M	Variedade diferenciável
EsF	Equações de Friedmann
EA	Expansão acelerada
EsC	Equações de campo
AGM	Acoplamento não-mínimo entre geometria e matéria
WIMPs	Weakly interacting massive particles
SNIa	Supernovas do tipo Ia

Lista de Símbolos

Λ	Constante cosmológica
E_Λ	Energia escura
M_b	Matéria bariônica
M_E	Matéria escura
$T_p M$	Espaços tangentes a variedade
w	Índice barotrópico
M_\odot	Massa solar
m_i	Massa inercial
m_g	Massa gravitacional
$\hat{T}_{\mu\nu}$	Tensor de energia-momento efetivo

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
2	RELATIVIDADE GERAL	19
2.1	Princípio de Equivalência	19
2.1.1	Fraco	20
2.1.2	Forte	20
2.2	Métrica e Espaço-Tempo	21
2.3	Equações de Campo	23
2.3.1	Princípio Variacional	24
2.4	Testes Observacionais	28
2.4.1	O Periélio de Mercúrio	28
2.4.2	Deflexão da Luz	29
2.4.3	Ondas Gravitacionais	29
3	COSMOLOGIA CLÁSSICA	31
3.1	O Princípio Cosmológico	31
3.2	Métrica de FRW	32
3.3	Dinâmica no Modelo Padrão	34
4	ESTÁGIOS DE EVOLUÇÃO DO UNIVERSO	38
4.1	Universo Primordial	38
4.2	Universo Tardio	43
5	TEORIA DE GRAVIDADE $f(R, L_m)$	46
6	MODELO DE FRW NA TEORIA $f(R, L_m)$	50

6.1	Equações de Campo	50
6.2	Equações de Friedmann	53
6.3	Solução para os Parâmetros do Modelo	54
6.3.1	Fator de Escala	59
6.3.2	Parâmetro de Hubble	62
6.3.3	Parâmetro de Desaceleração	64
6.3.4	Restrições sobre o AGM no Modelo	67
7	CONCLUSÕES	69
	REFERÊNCIAS	72

1 Introdução

É fácil percebermos como a Cosmologia e suas conexões sempre estiveram presentes ao homem, viajando da primitividade babilônica, seguida dos gregos anexados de centralismo e imutabilidade, passando pela idade média tomada de perfeccionismo em verdades absolutas, chegando aos dias atuais com imagens de campo profundo do telescópio Hubble (BORLAF, 2019), detecção de ondas gravitacionais (ABBOTT, 2016b) e a primeira foto de um buraco negro (AKIYAMA, 2019).

Dentre todos os acontecimentos históricos suprimidos, façamos menção à notável conjectura batizada por Immanuel Kant (1724-1804), os *Universos-Ilha*. Raciocínio que tornou-se conclusivo na década de 1920, através de um dos trabalhos do astrônomo Edwin Hubble. Nesse mesmo período, Hubble, utilizando o método das *Cefeidas* (HUBBLE, 1929), realizou outro importante estudo sobre as distâncias no Universo, estudo que acabou trazendo antagonismo a um pensamento comum à época ao revelar que o Universo estava em expansão.

Para prosseguir, é adequado lembrarmos que o Universo em larga escala é o objeto de estudo da Cosmologia, área que tem como estrutura de seu atual modelo padrão e responsável por descrever às fases pelas quais o Universo passou, a teoria da Relatividade Geral (RG) (EINSTEIN, 1915a). Destaca-se ainda que, em 1917, quase seguida de sua publicação, a RG e princípio cosmológico, foram já pela primeira vez tomados como base para construção de um modelo de universo (EINSTEIN, 1917), dando origem à cosmologia moderna.

Embora o trabalho desenvolvido por Albert Einstein tenha iniciado uma nova fase da cosmologia, vale ressaltarmos que derivado da falta de dados observacionais na época, o referido comentário (subjacente) anterior sobre a inicial e sedimentada ideia de Universo estático estabeleceu desacordo com o dinâmico resultado descrito pelas equações de campo de sua primeira solução cosmológica. Fato este, que fez com que ele tivesse de somar um termo às suas equações, para então, assim, obter um regime estacionário descrevendo o Universo.

Hoje sabemos que mais tarde Einstein ao tomar conhecimento de que o Universo era de fato dinâmico e estava em expansão, viria a dizer que aderir à famigerada constante

cosmológica (Λ) teria sido o maior erro de sua vida.

No decorrer do século seguinte, tivemos vários aperfeiçoamentos de cunho teórico mediados pelo avanço tecnológico. Omitindo vários esforços, essa evolução foi sintetizada por meio da métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) junto da RG no atualmente mais aceito, Modelo Cosmológico Padrão (MCP), também conhecido como *Λ -cold dark matter model*¹ (Λ CDM) (RYDEN, 2003; HINSHAW, 2013).

Contudo, cabe-nos esclarecer que, apesar de sua boa concordância aos observáveis, o modelo Λ CDM *abriga* um dos maiores mistérios da física atual, a recente descoberta da expansão acelerada (EA) (RIESS, 1998; PERLMUTTER, 1999). Posto isto, explanemos que o termo destacado acima, trouxera referência a imposição de assumir que o Universo na perspectiva da RG, é composto de $\sim 68,5\%$ de *energia escura* (E_Λ), $\sim 26,6\%$ de *matéria escura* (M_E) e apenas os restantes $\sim 4,9\%$ de matéria bariônica (M_b) (a qual conhecemos). Assim sendo, $\sim 95,1\%$ da composição do atual Universo diz respeito a componentes exóticos que não podemos dizer nada além de sua suposta correção dinâmico-gravitacional (LIDDLE, 2015).

Ante a este cenário, a EA obtém “respaldo” ao recuperar a presença de Λ atribuída de novo significado nas equações de campo da RG, passando a ser interpretada como a densidade de energia quântica do vácuo, permitindo o então efeito repulsivo esperado ao incorporar uma equação de estado (EdE) com parâmetro $w_\Lambda = -1$. Todavia, embora ajustado o modelo, quando comparados o valor esperado da constante via Física de Partículas (WEINBERG, 1989), com o necessário para ajustar os dados observacionais de supernovas do tipo Ia (SNIa) e a radiação cósmica de fundo em micro-ondas (RCFM) (HINSHAW, 2013), encontramos um valor que difere em ~ 120 ordens de magnitude.

Apesar de tal inconsonância já ser o bastante para deixar os físicos teóricos descontentes, resta-nos ainda “observar” à M_E . Nomeada assim por não ser observada no espectro eletromagnético, a promitente matéria escura fria (não-relativística), é suportada através de evidências indiretas de sua existência, por exemplo, as lentes gravitacionais e o mecanismo (poço potencial) responsável pela formação das grandes estruturas no início do Universo. Além destes, devemos acentuar o fruto da investigação de alguns importantes nomes da física, dentre eles, James Jeans, Fritz Zwicky e destacado por último, Vera Rubin, astrônoma estadunidense que desenvolveu trabalhos cruciais ao tentar descrever, através da gravitação newtoniana, o comportamento das velocidades orbitais de estrelas ao redor de galáxias espirais. Pesquisa à qual estabeleceu haver ~ 10 vezes a mais do valor de massa luminosa presente nas galáxias há justificar seus resultados (RUBIN, 1977; RUBIN, 1978). Estudos recentes (BOVY, 2012; KARUKES, 2020) têm demonstrado que $\sim 93\%$ da massa total da Via-Láctea, cerca de $\sim 8 \times 10^{11} M_\odot$, deve estar sob a forma de

¹Em português, Matéria Escura Fria; e a constante Λ é associada a Energia Escura.

tal componente material desconhecida.

Contudo, mesmo com os relatos supramencionados fomentando sua existência, dentre os crescentes e notáveis esforços realizados para fazer sua detecção (AKERIB, 2014; ACKERMANN, 2015), nenhuma partícula associada a ela foi encontrada até hoje.

Tomando todo esse contexto frente à consistência de uma teoria de evolução do Universo, fica claro a importância da relação entre observações astronômicas, a Física de Partículas e teoria gravitacional para o aperfeiçoamento de um modelo cosmológico que permita a descrição de todas as diferentes eras do Universo. Sendo assim, é adequado frisar que embora a gênese da cosmologia moderna esteja ligada a RG (teoria padrão), caso esta não seja a teoria final da gravitação, outra mais completa poderia vir a prever os resultados do setor escuro no MCP, naturalmente, através de termos extras em suas equações de campo.

Note-se que, respaldado pela extrema e atual relevância de não termos uma descrição quântica que contemple às quatro interações da natureza, o que pode tornar passível a solução de outras grandes questões como a singularidade inicial e o interior de buracos negros, este também pode ser o caminho para uma unificação entre a gravidade e a mecânica quântica, haja vista que a abordagem geral para criação de uma teoria de gravidade quântica (KISAK, 2016; ROVELLI; VIDOTTO, 2015) visa elegantemente considerar uma teoria mais simples e abrangente, como idealizado por teorias alternativas de gravidade.

Existe atualmente na literatura uma diversidade de teorias que estendem a RG, somando à ação de Einstein-Hilbert termos extras concernentes a correções em seu domínio geométrico e/ou material. Dentre essas, citemos alguns importantes modelos: As teorias $f(R)$ (SOTIRIOU; FARAONI, 2010) compostas por um funcional² competente pelo setor gravitacional/geométrico definido como uma função genérica não-linear do escalar de Ricci R (que será definido no capítulo seguinte), onde além de serem encontrados trabalhos pertinentes ao âmbito cosmológico (NOJIRI; ODINTSOV, 2006) ligados a tal teoria, é possível ver também sua aplicabilidade em questões como as curvas de rotação de galáxias (CAPOZZIELLO S.; CARDONE; TROISI, 2007; MARTINS; SALUCCI, 2007), que mostram razoável eficiência em seus modelos ao tornar desnecessária a adesão à M_E para respaldar os atuais observáveis.

Por conseguinte, vale destacar que além de teorias que flexibilizam condições conceituais, como o caso da $f(\mathcal{T})$ ³ (LINDER, 2010) e a associação de modelos à teoria de Einstein-Cartan (PEREIRA, 2019), dispondo como referência o campo *Inflaton*, responsável pela efêmera e vital fase de inflação descrita no modelo do Big-Bang (um claro exemplo de como os campos escalares na física (FARAONI, 2004) são relevantes), temos e expomos

²Forma específica para função que compõe à ação.

³Sendo \mathcal{T} o escalar de torção derivado da parte anti-simétrica da conexão afim, postulado como nulo na RG.

as teorias que concernem às modificações no setor de fonte⁴ gravitacional, visto que em vários dos casos elas são associadas a uma nova relação permitida pela aquiescência de um campo escalar ϕ , como no exemplo/parônimo modelo da *Quintessência* (TSUJIKAWA, 2013).

E, finalmente, as teorias que sugerem o acoplamento entre matéria e geometria dado por uma única função, sendo nosso exemplo retratado pelas teorias $f(R, T)$ (HARKO, 2011), onde tais contemplam uma função geral dos termos, R (já mencionado) e T , o traço do tensor de energia-momento. Junto ao emprego dessa teoria podemos encontrar na literatura, significativos resultados em modelos extra-dimensionais (MORAES, 2014) sendo compatíveis com o MCP, destacando que as modificações ligadas a T são geralmente interpretadas como possíveis imperfeições no fluido ou efeitos quânticos; também podemos ver sua aplicação, tanto para a verificação de soluções físicas e a estabilidade geométrica de buracos de minhoca (MORAES P.; CORREA; LOBATO, 2017) (MORAES P.; DE PAULA; CORREA, 2019), quanto sobre resultados pertinentes à sua existência e condições de energia (YOUSAF, 2018). Outrossim, pode-se encontrar o tratamento do equilíbrio hidrostático de objetos relativísticos compactos como estrelas de nêutrons (MORAES P.; ARBANIL; MALHEIRO, 2016).

No entanto, é preciso manifestar que devemos ser criteriosos ao escolher não somente a teoria, mas também sua forma funcional específica, bem como fica demonstrado pelos trabalhos (BOHMER C.G.; HARKO; LOBO, 2008; NAIK, 2018) e (MUBASHER J.; MOMENI; MYRZAKULOV, 2012), os quais estabelecem restrições a um grande número de funções para as teorias $f(R)$ e $f(R, T)$, respectivamente; ademais se vê discutido através de (NOUREEN, 2015; YOUSAF, 2016), que a medida em que a complexidade da matéria com as tensões anisotrópicas crescem, fatores de heterogeneidade no fluido acentuam-se.

Diante do exposto, nesta dissertação de mestrado, dentre os presentes problemas e mistérios observacionais da cosmologia, atacaremos particularmente o problema da E_Λ a partir de teorias de gravidade com acoplamento não-mínimo entre geometria e matéria (AGM). Especificamente, nosso enfoque será dado à teoria de gravidade $f(R, L_m)$ (HARKO; LOBO, 2010), que será apresentada a seguir, sendo L_m a densidade lagrangeana de matéria.

A presente dissertação está organizada da seguinte forma: no Capítulo 2 é feita uma objetiva revisão sobre os principais aspectos conceituais tratados e conduzidos para o desenvolvimento e a formação da RG, em vista de seu importante ferramental pertinente ao avanço do presente trabalho. No Capítulo 3 abordamos as principais características e fundamentos da cosmologia padrão, tendo em vista abarcar o conhecimento e compreensão da descrição dinâmica do Universo por ela explicada. No Capítulo 4 traçamos sucinta-

⁴Inerente a correções na lagrangeana dos campos de matéria.

mente a evolução do cenário cósmico clássico, dentre suas respectivas e principais fases e processos, sendo por fim explanado criticamente a relevância e implicações atreladas ao uso dos mecanismos necessários de matéria e energia escura. No Capítulo 5 seguimos pela apresentação da estrutura da teoria de gravidade $f(R, L_m)$ (HARKO; LOBO, 2010) e suas aplicações, cuja forma é posta em execução no Capítulo 6, para a derivação de um novo modelo cosmológico objetivando seus possíveis resultados e consequências. Comportado pelo Capítulo 7 estão as conclusões finais e perspectivas.

2 Relatividade Geral

Tendo como propósito integrar o leitor à análise feita nesta dissertação, o mesmo deve ter em mente que o tratamento físico pertinente as escalas cosmológicas assume dentre as forças fundamentais da natureza, a gravidade como única responsável pela dinâmica dos sistemas. Dessa forma, sabendo que a morfologia de um modelo cosmológico é dada interna e essencialmente por uma teoria que assuma tal natureza, o objetivo central deste capítulo está voltado a concepção da gravidade sobre à perspectiva da RG, tendo sua forma final definida através das famosas equações de campo (EsC).

Como ponto de partida, em 1915, Einstein nos expôs sua teoria onde sugeriu que à força gravitacional deveria ser descrita meio a modificação efetiva da geometria do espaço-tempo (ET). Uma teoria que abarca e difere conceitos da antecessora gravidade newtoniana, vinculando ao cenário da época profundas consequências no contexto da física gravitacional e suas ramificações. Uma delas é o ente gerado da unificação entre espaço e tempo, o ET, estando agora há representar a geometria intrinsecamente ligada a fonte¹ de campo gravitacional.

Consequente, abordaremos sumariamente uma década do trabalho de Einstein explanando seu importante ferramental e princípios que serão a base conceitual para compreensão do ET.

2.1 Princípio de Equivalência

Convergindo ao encontro do *Princípio de Equivalência*, o qual será subdividido entre outros dois, façamos uma breve regressão a 1905 para responder um simples questionamento. Neste ano, Einstein publicou um artigo intitulado, *Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento* (EINSTEIN, 1905), uma teoria que ultrapassara os conceitos mecanicistas de Galileu e Newton, mudando a realidade de aspectos fundamentais da Física, posteriormente difundida como a Relatividade Restrita (RR).

¹Matéria e energia.

O primeiro de seus postulados diz: “*As leis pelas quais os estados dos sistemas físicos mudam são independentes de qual dos dois sistemas de coordenadas, que são relativos uns aos outros em movimento translacional uniforme, essas mudanças de estado são referidas*”.

Visto acima, temos conhecimento de que Einstein ao dizer, movimento translacional uniforme, reporta-se a característica de um sistema de referência *inercial*. Dessa maneira, questiona-se: Se existe, qual a relação entre a massa gravitacional de um corpo e o termo acima destacado?

A primeira referência a qual temos ao termo *inércia* de Galileu (1564 - 1642) foi 1607, na carta de Benedetto Castelli que menciona; “*princípio inercial: é necessário um motor para iniciar o movimento, mas, para continuar, a ausência de resistência é suficiente.*” (HALL, 1965).

Das palavras de Castelli, ressaltamos que, embora o entendimento de Ernst Mach, de que a lei da inércia não tivesse um papel central/preponderante ao pensamento de Galileu, tanto sua interpretação quanto a vista na teoria de Newton (NEWTON, 1687), o termo inércia está mantido sobre a competência por tal feito de movimento único e somente meio ao conteúdo de massa inercial (m_i), sendo inábil e mais do que justificado pelo período histórico de ambos, atrelar algo sobre a massa gravitacional (m_g) do corpo. Isto posto, recordemos que realmente nada mais à frente da simples coincidência entre as massas $m_i = m_g$, era dito.

Feito o apontamento anterior, em 1907, realizando um de seus *gedankenexperiment*², Einstein pouco após ter proposto a RR diria a seguinte curta e conhecida frase que culminaria no princípio ao qual buscamos; “*A ideia mais feliz da minha vida*”.

2.1.1 Fraco

Acabava ele de perceber que não era possível estabelecer distinção (localmente) entre um referencial acelerado e outro imerso em um campo gravitacional. Essa conclusão dá início à quebra do paradigma absolutista da aceleração, que por sua vez permite doravante ser tomado como fundamental a igualdade entre as massas, $m_i = m_g$, nomeado este, como o *princípio da equivalência fraco* (D’INVERNO, 1992).

2.1.2 Forte

Vemos que, decorrente a essa nova interpretação/conexão, é fundamentada a inexistência de movimento absoluto (não há existência de referencial privilegiado), ou seja, *a priori*

²Experimentos mentais.

um sistema de coordenadas trata-se somente de um artifício para descrição da natureza, onde observadores, inerciais ou não, devem ser capazes de descrever qualquer sistema físico usando às leis fundamentais da física, uma vez que, conseqüentemente, essas são invariantes sobre mudanças de coordenadas. O *princípio da equivalência forte* estabelece que: As leis da natureza são expressas por meio de equações válidas para todos os sistemas de coordenadas, isto é, que são covariantes para todas as transformações possíveis (EINSTEIN, 1916a).

Inerente dos princípios que acabamos de ver, Einstein passa a buscar uma nova relação entre massa e campo gravitacional. Sua resposta, como veremos, futuramente seria dada por uma geometria não-euclidiana.

É indispensável doravante tomarmos uma perspectiva concisa sobre a independência dos referenciais. Feito isso, o uso do cálculo tensorial junto da geometria diferencial, terá papel central para um desenvolvimento estrutural teórico que trate de maneira intrínseca a gravidade (curvatura) e a matéria. Diante do exposto, a fim de evitar discussões limitadas, porém deixando claro que não há intenção de rigor em definições subjacentes a tais, faremos a seguir uma breve revisão de conceitos pertinentes e conduzidos pelo desenvolvimento da RG.

2.2 Métrica e Espaço-Tempo

Guardadas as intenções anteriores, devemos assumir uma nova compreensão física do potencial campo gravitacional como sendo um campo métrico, onde a gravidade passa a ser relacionada a curvatura de uma *variedade diferenciável* (M). Neste caso, temos especificamente associado ao ET uma variedade quadri-dimensional pseudo-riemanniana.

Assim, iniciamos expondo o quadrado do elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

onde o termo $g_{\mu\nu}$, chamado de tensor métrico, é um objeto que outorga sob uma M a definição de ângulos e comprimentos, tornando passível noções geométricas sobre espaços de maior dimensão e curvatura, ou seja, essa uma forma generalizada do espaço métrico de Minkowski para espaços curvos de dimensão arbitrária.

Nota-se inclusive, que além da métrica as M em particular estão a abrigar características de suma importância para RG, uma delas é ser associativa a espaços tangentes ($T_p M$) que por sua vez possibilitam estruturas como espaços vetoriais, campos tensoriais e conexões. Sendo simplista, uma n-dimensional M, trata-se de um espaço topológico dispondo uma vizinhança aberta em torno de cada ponto, que pode ser identificada por

um contínuo sistema de coordenadas.

Seguindo com o objetivo de analisar uma essencial e específica relação desse contexto, devemos abranger sobre nossa discussão a necessária generalização do conceito de derivadas parciais para espaços curvos, posto que é preciso ser considerado as variações contidas na orientação da base de vetores movendo-se de um ponto a outro em tais espaços.

Portanto, definimos para esse fim, a *derivada covariante* sobre um tensor geral A^μ_σ , como (D'INVERNO, 1992),

$$\nabla_\alpha A^\mu_\sigma = \frac{\partial A^\mu_\sigma}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\beta_\sigma - \Gamma^\gamma_{\alpha\sigma} A^\mu_\gamma, \quad (2.2)$$

ressaltando que essa forma de diferenciação é responsável por atestar o *transporte paralelo* de vetores em espaços dotados de curvatura, visto que as conexões ($\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$) funcionando como uma espécie de conector entre os distintos $T_p M^3$, vêm a corrigir as possíveis variações angulares sofridas em um deslocamento geodésico. Ficando claro que a existência desses termos adicionais indica como varia-se a base de vetores ao ser percorrida uma curva.

Mencionando ainda, que há uma escolha natural de tais conexões em nossa M pseudo-riemanniana nomeada como conexão de Levi-Civita (RICCI M.M.G.; CIVITA, 1901). Esta, além de compatível com a métrica ($\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$) e dotada de simetria nos índices inferiores⁴ (assumido na RG), faz adequadamente com que uma M pareça infinitesimalmente como um espaço minkowskiano.

Destarte, apresentamos a expressão em coordenadas espaciais para conexão de Levi-Civita relacionada a métrica, sob a seguinte forma:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}), \quad (2.3)$$

conhecido $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ por Símbolos de Christoffel do 2º tipo ou espécie.

Compete agora, apresentarmos o tensor de curvatura que define-se pelo seguinte operador de comutação tomado sobre um tensor geral:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\nu] B^\mu = (\nabla_\alpha \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\alpha) B^\mu. \quad (2.4)$$

Usando as propriedades vistas em (2.2), assumindo que na RG o espaço é livre de torção e fazendo a manipulação de alguns índices,

$$(\nabla_\alpha \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\alpha) B^\mu = (\partial_\alpha \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\alpha} + \Gamma^\rho_{\alpha\gamma} \Gamma^\gamma_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\gamma\nu} \Gamma^\gamma_{\mu\alpha}) B^\mu. \quad (2.5)$$

³Sistemas de coordenadas definidos ponto-ponto sobre seus respectivos $T_p M$, formando um atlas sobre a M.

⁴Possui torção nula.

Definimos como:

$$R_{\mu\alpha\nu}^{\rho} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\alpha}^{\rho} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\rho}\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma} - \Gamma_{\gamma\nu}^{\rho}\Gamma_{\mu\alpha}^{\gamma}, \quad (2.6)$$

o *tensor de Riemann* (ou de curvatura).

Contraindo (2.6), dada relação

$$g^{\sigma\alpha}g_{\sigma\rho}R_{\mu\alpha\nu}^{\rho} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}, \quad (2.7)$$

obtemos,

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma} - \Gamma_{\nu\gamma}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^{\gamma}, \quad (2.8)$$

definido como *tensor de Ricci*.

Por fim, da contração de (2.8) com $g^{\mu\nu}$,

$$R = R_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

cria-se o *escalar de curvatura*.

2.3 Equações de Campo

Apontado na seção anterior os principais elementos para compreensão da base geométrica, seguiremos ao cerne da RG apresentando as equações que descrevem o comportamento do campo gravitacional, as EsC de Einstein.

Significativo ao escopo desta dissertação, em seguida iremos deduzir as EsC definindo inicialmente a ação completa de Einstein-Hilbert, porém acrescida da constante cosmológica (conhecida como ação do modelo Λ CDM), já que a mesma, como temos conhecimento, desempenha papel fundamental na estrutura do MCP.

A ação mencionada é

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\chi} (R - 2\Lambda) + L \right]. \quad (2.10)$$

O primeiro termo da ação, chamado de densidade tensorial, surge meio a necessária invariância sobre a mudança de coordenadas atrelada aos princípios discutidos anterior-

mente, onde g contido na raiz trata-se do determinante do tensor métrico ($\det |g_{\mu\nu}|$), R o escalar de curvatura, L a densidade lagrangeana de matéria e χ uma constante.

2.3.1 Princípio Variacional

É conveniente decompor as lagrangeanas contidas em (2.10), da seguinte forma:

$$S = \mathcal{L}_{g\Lambda} + \mathcal{L}_m = \frac{1}{2\chi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \int d^4x \sqrt{-g} L, \quad (2.11)$$

sendo $\mathcal{L}_{g\Lambda}$, responsável pela parte gravitacional e \mathcal{L}_m o termo fonte de matéria-energia.

Valendo-se do princípio da mínima ação e notado a relação dada por (2.9), é variado $\mathcal{L}_{g\Lambda}$ com respeito a $g^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2\chi} \int d^4x (R \delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g} \delta R - 2\Lambda \delta\sqrt{-g}) \\ &= \frac{1}{2\chi} \int d^4x (R \delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} - 2\Lambda \delta\sqrt{-g}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

A fim de prosseguir, devemos encontrar uma relação para $\delta(\sqrt{-g})$ presente no I e IV termo de (2.12) e $\delta R_{\mu\nu}$ no III.

- I-IV

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta g. \quad (2.13)$$

Devemos variar a seguinte propriedade matricial, $\ln(\det A) = \text{tr}(\ln A)$; logo,

$$\frac{1}{\det A} \delta(\det A) = \text{tr}(A^{-1} \delta A), \quad (2.14)$$

onde a matriz geral A , será substituída pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \delta g &= g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ \delta g &= g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Com isso, podemos substituir (2.15) em (2.13), produzindo

$$\begin{aligned}\delta(\sqrt{-g}) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta g \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} (-g) g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (2.16)$$

Lembrando que,

$$\begin{aligned}\delta(\delta_\nu^\mu) &= g^{\mu\rho} \delta g_{\nu\rho} + g_{\nu\rho} \delta g^{\mu\rho} = 0 \\ g^{\mu\rho} \delta g_{\nu\rho} &= -g_{\nu\rho} \delta g^{\mu\rho},\end{aligned}\quad (2.17)$$

podemos reescrever (2.16) como,

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.\quad (2.18)$$

• III

Variando o termo definido em (2.8), temos

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \delta \Gamma_{\alpha\gamma}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\gamma + \Gamma_{\alpha\gamma}^\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\gamma - \delta \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\gamma - \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\gamma.\quad (2.19)$$

Sabendo que $\delta \Gamma_{\kappa\lambda}^\sigma$ é um tensor (MCMAHON; ALSING, 2005), podemos utilizar a derivada covariante munida da manipulação de alguns índices e rearranjar o termo acima, como segue,

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha).\quad (2.20)$$

Dado que a métrica comuta com a derivada covariante e que temos alguns índices mudos, reescrevemos o III termo:

$$\begin{aligned}\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \sqrt{-g} [\nabla_\alpha (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha)] \\ &= \sqrt{-g} [\nabla_\alpha (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \nabla_\alpha (g^{\mu\alpha} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu)].\end{aligned}\quad (2.21)$$

Definindo,

$$V^\alpha = g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - g^{\mu\alpha} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\nu, \quad (2.22)$$

(2.21) é reescrito como o divergente de um campo vetorial,

$$\sqrt{-g} \nabla_\alpha V^\alpha. \quad (2.23)$$

Desse modo, usando-se o teorema da divergência, podemos fazer da integral de um infinitesimal quadri-volume do ET uma integral de superfície, cuja integração de seu elemento de hiper-superfície d_Ω a fronteira é nulo.

Portanto,

$$\int d_\Omega \sqrt{-g} V^\alpha = 0 \longrightarrow \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.24)$$

Usando os resultados encontrados em (2.18) e (2.24), reescreve-se (2.12):

$$\delta S = \frac{1}{2\chi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} = 0. \quad (2.25)$$

Supondo que a lagrangeana \mathcal{L}_m dependa da métrica e de suas derivadas de 1° ordem, façamos sua variação de forma explícita, como segue:

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int d^4x \sqrt{-g} L = \int d^4x \delta (\sqrt{-g} L) \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} L) \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial_\alpha g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} L) \delta \partial_\alpha g^{\mu\nu} \right], \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde denotamos, $\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$.

Observando que,

$$\partial_\alpha g^{\mu\nu} (\sqrt{-g} L) \delta g^{\mu\nu} = \partial_\alpha [\partial_\alpha g^{\mu\nu} (\sqrt{-g} L) \delta g^{\mu\nu}] - \partial_\alpha [\partial_\alpha g^{\mu\nu} (\sqrt{-g} L)] \delta g^{\mu\nu}, \quad (2.27)$$

notando que o primeiro termo dessa equação anula-se ao usarmos o teorema da divergência na integração, assim como em (2.24), reescrevemos (2.26) como

$$\delta S = \int \left\{ \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} L) - \partial_\alpha [\partial_\alpha g^{\mu\nu} (\sqrt{-g} L)] \right\} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (2.28)$$

Dessa forma, é definido

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g}L) - \partial_\alpha [\partial_\alpha g^{\mu\nu} (\sqrt{-g}L)] \right\} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.29)$$

como sendo o *tensor de energia-momento* de um fluido perfeito (LANDAU; LIFSHITZ, 1980).

Portanto, com a variação do termo de fonte (2.26), obtemos,

$$\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.30)$$

Finalmente, combinando (2.25) e (2.30), estabelecemos a forma final para variação de (2.10):

$$\delta S = \int d^4x \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - \chi T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} = 0, \quad (2.31)$$

notando que a constante $\chi = 8\pi G/c^4$, é obtida através da aproximação no limite de campo fraco (SABBATA; GASPERINI, 1985), com G e c , respectivamente a constante gravitacional newtoniana e velocidade da luz, aqui tomado $c = 1$.

Somado a Λ , as equações de campo de Einstein são, portanto,

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.32)$$

Em suma, a equação qual acabamos de apresentar, compõe um conjunto não-linear em $g_{\mu\nu}$ com 10 equações diferenciais parciais, que retêm e permite-nos saber como o ET experiencia a alteração de sua estrutura geométrica com a presença da matéria; isso, pois, através do conhecimento prévio do tensor de energia-momento em um sistema físico, podemos obter sua respectiva métrica. Concluimos então que, passa a ser descrito por seu primeiro termo, chamado de *tensor de Einstein* ($G_{\mu\nu}$), a gravidade como sendo a curvatura da métrica no ET, enquanto o lado direito $T_{\mu\nu}$ é associado à distribuição de matéria-energia contida nos limites estabelecidos ao campo.

Merecendo por fim, narrarmos uma conhecida frase de John Archibald Wheeler (1911 - 2008): “O espaço-tempo diz à matéria como se mover; matéria diz ao espaço-tempo como se curvar”.

2.4 Testes Observacionais

Não somente a RG quanto qualquer outra teoria no geral, passa a ter validade e aceitação no meio científico após haver comprovação experimental dentre suas previsões. Dessa forma, a RG teve de suportar uma série de previsões até então firmar-se como a atual teoria padrão da gravitação.

Essa, uma necessidade que foi superada através de observáveis com grande exatidão, os quais ainda são discutidos na atual literatura (CUZINATTO, 2014), e que iremos evidenciar ao leitor a seguir. Destaquemos que, como nossa intenção está em apenas narrar alguns dos principais sucessos da teoria, não tomaremos abrangência a questões teórico-matemáticas envolvidas a tais, portanto, para além das equações dispostas sem rigor de detalhes, indicamos a leitura dos trabalhos originais citados no decorrer.

2.4.1 O Periélio de Mercúrio

Baseado na teoria de Newton e assumindo as perturbações dos planetas conhecidos até então, o astrônomo francês Alexis Bouvard (1767 - 1843), em 1821 publicou vários dados astronômicos sobre a órbita de Urano. Entretanto, nos anos seguintes as observações mostraram desvios substanciais aos dados anteriores, o que levou Bouvard a sugerir que a órbita de Urano estava sendo perturbada gravitacionalmente por outro corpo ainda desconhecido. A partir dessa ideia, importantes trabalhos⁵ foram desenvolvidos até que tal questão chegasse as mãos do astrônomo Johann Gottfried Galle (1812 - 1910), do observatório de Berlim. Em 23 de setembro de 1846, Galle descobriu a existência do oitavo planeta do sistema solar, Netuno. Essa descoberta canonizou a teoria de Newton na época.

Entretanto, embora a potente credibilização da teoria com tal sucesso, havia um pequeno, mas mensurável fator de inconsistência da mesma para com a descrição do periélio de Mercúrio. Esta, tratava-se de um avanço anômalo de $45 \pm 5''$ /século⁶, o qual a teoria não previa para o planeta.

Somente depois de várias tentativas sem sucesso e mais de meio século de sua descoberta, um pequeno termo corretivo,

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2 a (1 - e^2)} = 43'', \quad (2.33)$$

derivado de aproximações via RG, que previa como a curvatura do espaço-tempo influencia o ângulo apsidal, traria solução a essa questão (EINSTEIN, 1915b). Isto permitiu

⁵Trabalhos referente a teoria perturbativa newtoniana.

⁶Valor decorrente aos dados observacionais astronômicos da época; atualmente estimado $\sim 42,7''$.

posteriormente a Einstein, dizer que a RG explicava quantitativamente a rotação secular da órbita de Mercúrio, descoberta por Le Verrier, sem necessidade de qualquer hipótese especial.

2.4.2 Deflexão da Luz

Podemos ver escrito no mesmo trabalho referido acima, a seguinte frase; *Essa teoria, no entanto, produz uma influência do campo gravitacional em um raio de luz um pouco diferente daquele dado em meu trabalho anterior [...]*, parte em que Einstein brevemente corrige sua inicial previsão teórica de $0,85''$, que um raio de luz deve sofrer deflexão ao passar próximo ao Sol, para

$$\Delta\phi = \frac{4GM}{c^2d} = 1,7'', \quad (2.34)$$

sendo M e d , a massa solar e distância entre o Sol e a linha (raio de luz) que sofre a curvatura, respectivamente.

Forçada ao atraso mediante a Primeira Guerra Mundial, a primeira previsão da RG veio a ser confirmada experimentalmente apenas quatro anos após sua publicação, por meio de duas expedições inglesas chefiadas e enviadas respectivamente por, Andrew Crommelin à Sobral no Brasil e Arthur Eddington à ilha de Príncipe na África; tendo em vista medir a suposta deflexão de $1,7''$ de um raio de luz tangente ao sol durante um eclipse total.

Esse feito seria factível pela comparação entre as chapas fotografadas durante o eclipse mostrando as estrelas ao redor do Sol, e depois sem ele, a fim de se verificar algum deslocamento angular nas medidas. Como conhecido fato histórico, posteriormente durante uma reunião com a *Royal e Astronomical Society*, no dia 6 de novembro de 1919, o astrônomo Sir Frank Watson Dyson (1868 - 1939) confirmou a previsão da RG (PAIS, 1982).

Servindo de base para os astrônomos observarem objetos mais distantes no Universo, atualmente o fenômeno de desvio gravitacional da luz é visto junto a galáxias⁷ concentrações de massa, as quais permite-nos o funcional efeito descrito acima, que diante a similaridade da resultante ampliação da luz, com a vista em uma lente ocular, foi nomeado de Lentes Gravitacionais.

2.4.3 Ondas Gravitacionais

Com a RG, a noção de vácuo como sendo um grande espaço vazio onde os fenômenos ocorrem, morreu, dando lugar ao já citado ET. Através dessa nova concepção, Einstein

⁷Referir-se aa galáxias e seus aglomerados.

desenvolveu vários trabalhos teóricos, um deles em 1916 propôs como resultado de suas equações, linearizadas em um adequado sistema de coordenadas, uma solução do tipo-onda (EINSTEIN, 1916b) descrita pelo lado direito da Eq.(2.35) logo abaixo, a qual pode-se inferir a ausência do termo que representa a matéria e energia ($T_{\mu\nu}$) na solução,

$$\square \gamma'_{\mu\nu} = 2\chi T_{\mu\nu} \longrightarrow (\text{sem a fonte}) \longrightarrow \frac{\partial^2 \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} = 0. \quad (2.35)$$

Durante um longo período, a existência de tais ondas ficou apenas às margens de discussões teóricas, algo de se esperar, já que a amplitude típica dessas ondas é de $\sim 10^{-21}m$. No entanto, após 1960, a comunidade científica aderiu esforços em busca da possível detecção dessas pequenas oscilações no tecido do ET. Empenho que ficará mais claro ao citarmos dois dos maiores exemplos de interferometria a Laser conhecidos, o LIGO (*Laser Interferometer for Gravitational waves Observatory*) e o Virgo (ACERNESE, 2006).

Em fevereiro de 2016, dentre os vários triunfos da RG e um século após sua previsão, o experimento LIGO permitiu que fosse estabelecido mais um ao detectar as Ondas Gravitacionais⁸ geradas pela fusão de dois buracos negros (ABBOTT, 2016b). Fato este que permitiu a abertura de uma nova era para as observações e pesquisas astronômicas, como exemplo a análise relativa à discrepâncias sobre o índice de frenagem de pulsares (ARAÚJO J. C. N. DE; COELHO, 2016), dentre outras, sendo hoje popularmente conhecida como a astronomia multimensageira⁹.

Depois do evento inaugural GW150914, além de outras detecções de coalescência binária entre buracos negros (ABBOTT, 2016a; ABBOTT, 2017a), a teoria de Einstein abriu as portas para que tivéssemos outros dois importantes marcos históricos, primeiro o então GW170817 (ABBOTT, 2017b) sendo a primeira detecção de Ondas Gravitacionais provindas da fusão de um par de estrelas de nêutrons, onde ainda tivemos a oportunidade de registrar a sua contrapartida no espectro eletromagnético. Em segundo, a partir de um esforço global, destacamos que recentemente em 2019, observamos a primeira foto de um buraco negro (AKIYAMA, 2019), o qual foi previsto em 1916 pela solução de Schwarzschild (SCHWARZSCHILD, 1916b; SCHWARZSCHILD, 1916a).

⁸Denotadas pela sigla em inglês GW de *Gravitational Waves*.

⁹Refere-se à coleta de dados a partir do espectro eletromagnético somado ao das ondas gravitacionais.

3 Cosmologia Clássica

Cabe-nos ao início deste capítulo relatar que será apresentado no que segue, uma breve revisão dos principais constituintes da dinâmica do MCP. Nesse sentido, lembrando que as EsC da RG regem tal dinâmica, é prévia e necessária a adoção de alguns requisitos básicos (os quais fazem parte dos pilares do modelo cosmológico) para que possamos compreender junto do atual momento cósmico sua decorrente evolução.

3.1 O Princípio Cosmológico

Uma hipótese necessária meio a seu caráter simplificador, é o chamado *Princípio Cosmológico*. Este, é apoiado no fato de que o Universo em larga escala (distâncias $> 100\text{Mpc}$) apresenta-se com um nível razoável de homogeneidade mediante as observações catalogadas sobre a distribuição e contagem de galáxias, e elevada isotropia evidenciada acidentalmente por Penzias e Wilson na RCFM em 1965. Ambos os fatos narrados, podem ser vistos logo abaixo nas Figs. (3.1-3.2), respectivamente.

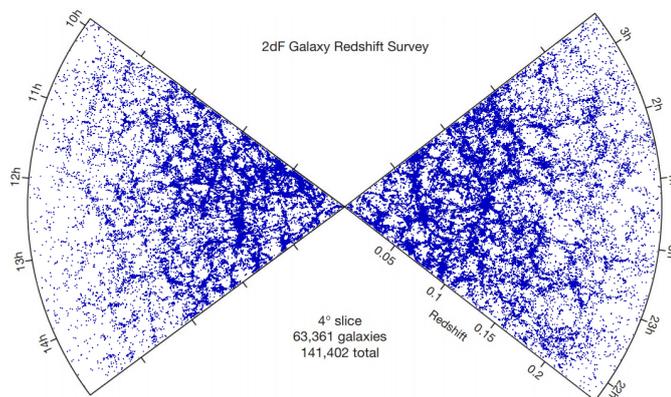


FIGURA 3.1 – Estrutura em larga escala formada pelo mapeamento-distribuição de $\sim 141\text{mil}$ galáxias (PEACOCK, 2001), demonstrando a homogeneidade cósmica.

Corroborando com as observadas características expansivas/inflacionárias de homogeneidade e isotropia, ao tomarmos as proporções envolvidas, devemos coerentemente

assumir que as variações (velocidades) das discretas estruturas (galáxias e aglomerados) físicas presentes no Universo, devem ser proporcionais ao próprio fator de expansão. Necessidade essa, que passa a ser permitida através do postulado de *Weyl*¹, o qual dita que cada particular estrutura mova-se ao longo de uma geodésica temporal, as quais se interceptam num único ponto singular do passado.

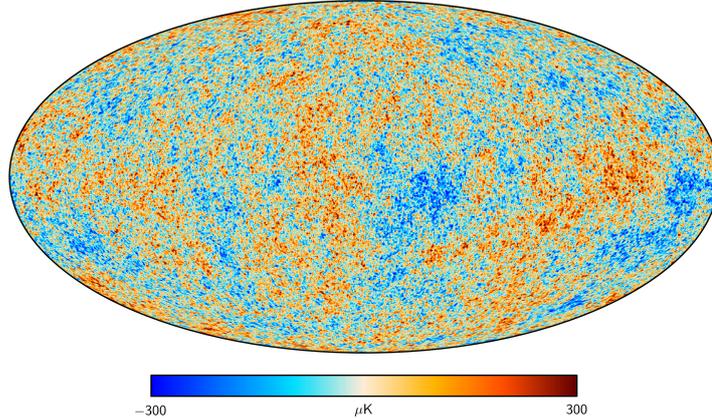


FIGURA 3.2 – A RCFM (AKRAMI, 2016) vista em imagem do satélite Planck, trata-se do remanescente da era do desacoplamento entre a radiação e matéria, a qual apresenta flutuações da ordem de $10^{-5} K$.

Concluindo, o princípio cosmológico (homogeneidade, isotropia e postulado de Weyl), vem a propiciar uma inteligível abordagem dinâmica ao tratar o Universo em seu todo de forma simples.

3.2 Métrica de FRW

Tendo em vista a definição da métrica que deve representar o Universo ante à justificada adesão do princípio o qual acabamos de discutir, a opção mais geral que satisfaça as condições de um universo em expansão, homogêneo e isotrópico, é descrita pela métrica de FRW². Consistindo-se de uma geometria esférica maximamente simétrica, agregada a um fator de escala e coordenada temporal, ficando representado no seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (3.1)$$

¹Postulado que torna passível as galáxias serem tratadas como um sistema de coordenadas e o final conceito de referencial comóvel.

²Homenagem aos trabalhos do cosmólogo russo, A. Friedmann, o físico norte-americano, H.P. Robertson e o matemático britânico, A.G. Walker.

tomando como assinatura métrica $(+, -, -, -)$, sendo $a(t)$ o fator de escala e k a curvatura da hiper-superfície do ET, a qual pode assumir três diferentes formas geométricas para o Universo, sendo essas a geometria hiperbólica (aberto), plana e esférica (fechado), respectivamente representadas por $k = -1, 0$ e 1 . Posto isso, expomos o seguinte tensor métrico que refere-se a (3.1):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2/(1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Por conta das simetrias na presente métrica, estão associados os seguintes Símbolos de Christoffel não nulos,

$$\Gamma_{ij}^0 = -\frac{\dot{a}}{a}g_{ij}, \quad (3.3)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij}, \quad (3.4)$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{il}(\partial_k g_{lj} + \partial_j g_{lk} - \partial_l g_{jk}), \quad (3.5)$$

sendo $\partial_{k,j,l} = \frac{\partial}{\partial x^{i,j,l}}$, as derivadas parciais com relação à métrica e os subíndices ij , associados as coordenadas espaciais r , θ e ϕ .

Para os componentes do tensor de Ricci,

$$R_{00} = -3\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right), \quad (3.6)$$

$$R_{ij} = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2}\right)g_{ij}, \quad (3.7)$$

e o escalar de curvatura,

$$-6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right). \quad (3.8)$$

O conteúdo físico do Universo é representado pelo tensor de energia-momento de um fluido perfeito, conforme previsto pelo postulado de Weyl em acordo com o princípio

cosmológico,

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}, \quad (3.9)$$

correspondendo $u_\mu u^\mu = 1$ a quadri-velocidade normalizada que satisfaz um fluido cosmológico comóvel, o qual fica representado através de suas respectivas densidade de energia e pressão, ρ e p . Com isso, a forma matricial do tensor energia-momento fica sendo dada por

$$T^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

ressaltando que veremos mais adiante uma importante relação dada exclusivamente por esse termo, condicionando a conservação de matéria e energia.

3.3 Dinâmica no Modelo Padrão

Usando a Eq.(2.32), tomada à métrica (3.1) junto do tensor de energia-momento (3.9), podemos obter as seguintes equações que descrevem a dinâmica de evolução do Universo no modelo Λ CDM,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.11)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.12)$$

com $H = \frac{\dot{a}}{a}$, definido como parâmetro de Hubble, às duas expressões acima são chamadas de *Equações de Friedmann* (EsF), valendo-se que aderimos à $c = 1$.

Assumindo $\Lambda = 0$ nas Eq. (3.11-3.12), podemos encontrar um importante, e que será analisado futuramente, parâmetro que relaciona a taxa de variação da expansão do Universo,

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}, \quad (3.13)$$

chamado de *parâmetro de desaceleração*, nome atribuído ao fato de que inicialmente, antes

da descoberta da expansão acelerada, a comunidade científica acreditava que do Universo a expansão seria freada ($\ddot{a} < 0$) frente a gravidade, sempre atrativa. Como já sabemos, isso não é verdade e viria a causar um grande conflito decorrente da violação da condição de energia forte no modelo inicial.

Adiante, tomando a derivada covariante sobre (3.9),

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \partial_\nu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\nu T^{\mu\lambda},$$

com $\mu = 0$, representando a coordenada temporal, temos

$$\partial_\nu T^{0\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^0 T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\nu T^{0\lambda} = 0. \quad (3.14)$$

Levando-se em conta a métrica (3.1) e o tensor de energia-momento (3.9), expandindo os somatórios sobre os índices mudos (ν e λ), temos que

$$\partial_0 T^{00} + \Gamma_{11}^0 T^{11} + \Gamma_{22}^0 T^{22} + \Gamma_{33}^0 T^{33} + \Gamma_{01}^1 T^{00} + \Gamma_{02}^2 T^{00} + \Gamma_{03}^3 T^{00} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (3.15)$$

representando a Eq.(3.15), a lei de conservação de energia (DODELSON, 2003).

Posto isso, sabendo que um fluido perfeito pode ser completamente descrito por sua densidade e pressão através da seguinte EdE, $p = w\rho$, sendo w o índice barotrópico, podemos resolver (3.15), conhecida como a equação da continuidade, conduzindo o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + 3H(1+w)\rho &= 0 \\ \frac{\dot{\rho}}{\rho} &= -3\frac{\dot{a}}{a}(1+w), \end{aligned} \quad (3.16)$$

que pode ser reescrita como as derivadas totais de ρ e a ,

$$d\ln(\rho) = -3(1+w)d\ln(a), \quad (3.17)$$

permitindo-nos integrar ambos os lados,

$$\int_{\rho_0}^{\rho} d\ln(\rho) = - \int_{a_0}^a 3(1+w) d\ln(a), \quad (3.18)$$

resultando na seguinte expressão, que estabelece como a densidade de energia varia para as diferentes eras do Universo em função do fator de escala e conseqüentemente do tempo

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w)}, \quad (3.19)$$

onde ρ_0 e a_0 , são respectivamente a densidade de energia e o fator de escala hoje³.

Diante disso, levando-se em conta que para cada fase que o Universo esteja ele possui uma EdE bem definida representando seus respectivos componentes dominantes a dinâmica, fazendo uso do resultado (3.19), veremos no capítulo a seguir como tal parâmetro comporta-se em três distintos e importantes períodos cósmicos.

Voltando às EsF, desprezando Λ podemos reescrever a (3.11), que relaciona o crescimento do fator de escala à curvatura do ET e densidade total de energia, da seguinte conveniente forma:

$$\Omega - 1 \equiv \frac{8\pi G}{3H^2} \rho - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}, \quad (3.20)$$

tendo como produto de $k = 0$,

$$\rho_c = 3H^2/8\pi G = 1,88 \times 10^{-29} h^2 g cm^{-3} \quad (3.21)$$

a densidade crítica⁴, com $h \equiv H_0/(100 km/s/Mpc)$; ainda dessa relação, o parâmetro de densidade $\Omega = \rho/\rho_c$, sendo $\rho = (\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda)$, as densidades de matéria, radiação e energia escura, respectivamente. O que agora nos permite dizer que o parâmetro de densidade Ω estabelece uma relação indireta entre a geometria do ET (dada por k) associada ao Universo, para com a abundância do constituinte cósmico total, demonstrada pela relação:

$$\begin{aligned} \rho > \rho_c &\longrightarrow k = +1, & \Omega > 1 & \text{ (Esférico)} \\ \rho = \rho_c &\longrightarrow k = 0, & \Omega = 1 & \text{ (Plano)} \\ \rho < \rho_c &\longrightarrow k = -1, & \Omega < 1 & \text{ (Hiperbólico)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Observando que o parâmetro de densidade definido na Eq.(3.20), também pode ser decomposto como,

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad \Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2}, \quad \Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c}, \quad \Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_c}, \quad (3.23)$$

³Definido nesta seção o subíndice 0, como parâmetro no atual momento.

⁴Densidade de energia total necessária para que o Universo seja plano.

indicando respectivamente os subíndices Λ , k , m e r , as componentes de E_Λ , curvatura, matéria e radiação. Utilizando a Eq.(3.11) e a relação entre o *red-shift* e o fator de escala

$$a(t) = \frac{1}{1+z}, \quad (3.24)$$

podemos escrever,

$$H^2(z) = H_0^2 [\Omega_\Lambda + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4], \quad (3.25)$$

que levada ao tempo atual ($z = 0$), fornece

$$1 = \Omega_\Lambda + \Omega_k + \Omega_m + \Omega_r. \quad (3.26)$$

Por fim, visto que os atuais observáveis nos indicam um universo plano $k = 0$, de acordo com MCP, aproximadamente 4,9% do conteúdo que permeia o cosmos é conhecido. Estabelecendo-se para os parâmetros de densidade os seguintes valores de: matéria bariônica $\Omega_{M_b} \simeq 0,049$, matéria escura $\Omega_{M_E} \simeq 0,266$, radiação $\Omega_r \simeq 5 \times 10^{-5}$ e energia escura $\Omega_\Lambda \simeq 0,685$.

4 Estágios de Evolução do Universo

Destinando fundamentar o atual contexto vivenciado na cosmologia ao leitor, tendo visto no capítulo anterior a estrutura dinâmica contida no MCP, iremos agora traçar o perfil dos principais processos dentre as distintas fases que o Universo passou durante sua evolução, direcionando tal análise a uma visão crítica sobre mecanismos fundamentais (indispensáveis) do modelo como a M_E e E_Λ .

4.1 Universo Primordial

Predito pelas observações cosmológicas, dentre elas, a velocidade de recessão das galáxias, a RCFM e a abundância dos elementos químicos leves (DODELSON, 2003), na chamada *era de Planck*, o início do Universo ($0s < t \leq 10^{-44}s$) é descrito por uma singularidade; “ponto” problemático visto que sua existência supõe uma interrupção das previsões teóricas (nesse instante, as conhecidas leis da física não são aplicáveis) ao tornar infinitas as grandezas como densidade e temperatura. No entanto, apesar das especulações decorrentes das altas energias envolvidas serem inacessíveis a experimentação humana, além de acreditar-se amplamente que nesse momento as forças fundamentais estejam unificadas, acredita-se que quando nessa efêmera, densa e quente fase cósmica, o regime de energia do Universo tenha excedido $10^{19}GeV$, tal cenário possivelmente tenha sido dominado por efeitos quânticos¹ da gravidade, os quais permitiram a subsequente fase cosmológica.

Embora contraintuitivamente intitulado, a *era da Grande Unificação* ($10^{-44}s < t \leq 10^{-36}s$) decorre inicialmente do desacoplamento da gravidade das outras forças a medida em que a densidade e temperatura ($T \sim 10^{32}K \longrightarrow T \sim 10^{28}K$) do Universo diminuam, ou seja, tal período é marcado pela unificação das outras três interações. No entanto, notemos que apesar de experimentos² sugerirem que a interação nuclear forte, em altos regimes de energia, venha a se unir a interação eletrofraca formando uma única interação, até o momento não temos uma teoria satisfatória para descrever tal cenário. Ainda vale-se ressaltar que, além das características de temperatura e energia ($T \sim 10^{28}K$ e $10^{15}GeV$)

¹Embora haja a carência de uma satisfatória teoria quântica gravitacional.

²Experimentos confirmam que em certos níveis de energia a interação eletromagnética e nuclear fraca se unificam em uma única interação eletrofraca.

necessárias para a bariogênese nesse período, em virtude de ser razoável admitir que o Universo tenha começado em uma fase simétrica de matéria e antimatéria, existem outros três comportamentos/requisitos básicos que uma teoria deve prever para ser efetiva nesse cenário. Chamada de quebra de simetria, essas três condições resumem-se na violação do número bariônico, simetrias \mathcal{C} e afastamento momentâneo do equilíbrio térmico.

Haja vista que os outros processos tenham se concretizado, o seguinte momento experienciado pelo Universo é chamado de *Inflação* ($10^{-36}s < t \leq 10^{-32}s$)(GUTH, 1981). Nome atribuído em referência a um intervalo de tempo extremamente curto, no qual o Universo se resfriou rapidamente após expandir-se de forma abrupta e colossal. Período esse que comporta³ tanto a bariogênese (onde ocorreu a quebra de simetria), quanto a dissociação da interação eletroforte nas interações eletrofraca e forte, permitidas pelo novo regime de energia.

Após a inflação compreendida por seus respectivos processos, o Universo passou por uma nova fase de reaquecimento (alguns modelos consideram como a marca do início da época eletrofraca) estabelecida pela enorme energia potencial liberada através do campo inflacionário decaindo em outras partículas. Como resultado desse aquecimento, o alto nível de energia relativo aos fótons é o suficiente para impedir a formação de qualquer átomo, assim o Universo passa a ser constituído por uma mistura densa e quente de quarks, anti-quarks e glúons, definindo-se a *era da Radiação* ($10^{-32}s < t \leq 300.000$ anos). Diante ao exposto, para compreendermos a descrição dinâmica desse período conhecido como relativístico, é necessário encontrar primeiramente, como já dito no capítulo anterior, o parâmetro da EdE que relaciona pressão e densidade descrita através da simples e linear equação $p = w\rho$. Assim, visto que o elemento dominante a tal fase seja representado por um gás de fótons (os quais possuem momento embora não tenham massa) obedecendo à lei dos gases perfeitos (RYDEN, 2003)

$$p = \frac{\rho}{\mu} k_B T, \quad (4.1)$$

onde ρ , μ , k_B e T a densidade de energia, massa média das partículas de gás, a constante de Boltzmann e temperatura, respectivamente. Recordando que a temperatura é proporcional a raiz da velocidade quadrática média das partículas da seguinte forma,

$$3k_B T = \mu \langle v^2 \rangle, \quad (4.2)$$

conclui-se que o parâmetro do fluido que compete a era da radiação é dado por $w = 1/3$. Dessa forma, substituindo o valor encontrado de w na Eq.(3.19) e assumindo o atual fator de escala normalizado $a_0 = 1$, temos a seguinte expressão que relaciona a densidade de

³Notemos que diferentes modelos divergem tais previsões.

energia e o fator de escala,

$$\rho = \rho_{0r} a(t)^{-4}, \quad (4.3)$$

a qual nos permite através da solução da Eq.(3.11), ver que $a(t) \propto (t)^{1/2}$ nesse período.

Durante a decorrente fase de resfriamento do Universo, as interações fundamentais puderam ser divididas nas quais o modelo padrão da Física de Partículas comporta, formando-se assim uma sopa de núcleons, fótons, neutrinos, elétrons e pósitrons.

Conforme sua temperatura continuou a diminuir, passaram-se mais três importantes eventos de sua evolução, o primeiro ocorreu quando sua temperatura chegou a aproximadamente $10^9 K$ e elétrons e pósitrons aniquilam-se⁴, em segundo temos o período da nucleossíntese primordial dos elementos constituintes do cosmo, e em terceiro, já no final da era da radiação quando atingiram-se níveis de temperatura onde os fótons não mais impedem a formação dos átomos, chegamos a um processo chamado de recombinação, sendo esse o momento onde foi possível que os prótons, nêutrons e elétrons combinassem-se formando os primeiros núcleos atômicos. Esse processo pertence à *era da Matéria* ($300.000 \text{ anos} < t \leq \text{tempo da aceleração}$) e tornou o Universo transparente, liberando a RCFM, permitindo adiante as condições necessárias para a formação das estrelas, sistemas planetários, galáxias e as grandes estruturas dentre bilhões de anos de evolução.

A essa fase, conhecida como período não-relativístico, o parâmetro da EdE que define esse período pode ser encontrado por meio das Eqs.(4.1-4.2), verificando que,

$$w \approx \frac{\langle v^2 \rangle}{3} \ll 1, \quad (4.4)$$

resultado que se traduz por $w = 0$, como parâmetro da EdE que comporta a fase dominada pela matéria (também conhecido como o parâmetro da poeira). Algo razoável uma vez que tomado as escalas envolvidas, seus elementos são não interagentes, ou seja, sua pressão resultante é nula.

Em processo análogo ao anterior, tomado $w = 0$, podemos encontrar que

$$\rho = \rho_{0m} a(t)^{-3}, \quad (4.5)$$

solução que faz concordância sobre a descrição do período cósmico referente a radiação, haja vista que o *red-shift* causado pela expansão estabelece uma ligação intrínseca entre o fator de escala e fótons que a compõem, somando-se um termo $\propto a^{-1}$ em (4.5). Novamente, como resultado da solução (4.5) e Eq.(3.11) encontra-se que $a(t) \propto t^{2/3}$.

⁴Permanecendo uma população residual de elétrons.

Por fim, para podermos abarcar significativamente o conhecimento e compreensão dos principais processos e fases evolutivas do Universo, incluindo a atual fase *acelerada*, iremos explanar com maiores detalhes dois pontos que embasam profundamente o MCP, sendo que ambos representam mecanismos fundamentais em sua perspectiva evolutiva.

Nesse sentido, para iniciarmos nossa discussão a respeito da *matéria escura*, expor-nhamos que a cosmologia tem ganhado notoriedade nas últimas décadas, um exemplo é dado pelo Prêmio Nobel de Física em 2019 dividido por três nomes, sendo que um deles, James Peebles, foi agraciado por suas contribuições ao modelo padrão as quais vieram a permitir uma grande evolução e desenvolvimento na área. Entretanto, mesmo com o alvorecer e destaque a pesquisa, ainda existem questões fundamentais que permanecem um mistério a ser desvendado, uma delas a qual abordaremos agora, a M_E .

Sutilmente intitulada devido a sua única forma de interação conhecida com a matéria bariônica ser a gravitacional, a M_E (segundo o modelo Λ CDM) apesar de cinco vezes maior em quantidade do que a conhecida e visível M_b , foge totalmente ao espectro eletromagnético. Uma das suspeitas iniciais de sua existência, cabe ao astrônomo Holandês, Jan H. Oort (OORT, 1922), famoso pela região cometária que circunda o sistema solar ter seu nome, Oort supôs que não havia a matéria necessária em nossa galáxia para descrever as velocidades radiais estelares.

Algo que firmou-se pelos seguintes trabalhos de Fritz Zwicky, observando ao utilizar o teorema do virial a injustificada coesão na dinâmica vista no aglomerado de Coma (ZWICKY, 1933), e mais tarde pela astrônoma Vera C. Rubin, responsável pelos estudos iniciais sobre curvas de rotação de galáxias, que verificaram a incompatibilidade entre valores, vistos e previstos, das velocidades orbitais de estrelas ao redor de seus centros galácticos (RUBIN, 1977). Diante disto, a perspectiva sobre a forma e implicações desse novo tipo exótico de matéria foi ganhando relevância, passando do nível galáctico ao Universo em sua totalidade, ou seja, tomando significado na cosmologia.

Para concebermos essa frente, cabe a nós relatarmos que embora hoje o modelo Λ CDM (e conseqüentemente a teoria do Big Bang) esteja ajustado aos dados observacionais, denota-se que não fora sempre assim, haja vista que nos anos 80, Alan Guth teve de propor o Universo Inflacionário (GUTH, 1981) como medida para corrigir um dos primeiros percalços do modelo, o Problema do Horizonte.

Essa conhecida questão surge como fruto da incoerência inicial de um dos grandes pilares do MCP, a RCFM (PENZIAS; WILSON, 1965), que em decorrência de seu espectro de corpo negro, com respectiva temperatura $T \sim 2.7K$, demonstrar sobre *flutuações* um elevado grau de uniformidade (na ordem de 10^{-5}), o que faz desacordo ao se levar em

conta que a inicial dimensão prevista para região causalmente conectada do Universo, não era capaz de explicar o equilíbrio térmico ante a fase de desacoplamento representada pela RCFM.

Diante do exposto, sem intento em discutir o modelo inflacionário⁵, é justo por, que a RCFM (como acabamos de ver) possui forte influência sobre qualquer modelo cosmológico, inclusive o padrão, algo que ficará mais claro se lembrarmos que embora o termo destacado acima, também conhecido como anisotropias do espectro da RCFM (ADE, 2016), seja pequeno, trata-se de uma peça fundamentalmente atrelada a suposta M_E e evolução do Universo no modelo Λ CDM. Relação justificada, ao passo que, como o ajuste dos parâmetros (PERKINS, 2008) cosmológicos (densidades de M_E , M_b e outros) é feito ao adequar-se seus valores a provinda curva do espectro de potências, tais anisotropias, aqui, refletem a abundância de M_E a qual permite oportunamente ao modelo descrever a expansão/inflação do Universo, junto do colapso necessário (pós-recombinação) dos halos (poços de potencial) de M_E responsáveis pela formação *em tempo* das estruturas iniciais conhecidas (galáxias, aglomerados...).

No entanto, apesar desse quadro demonstrar que algo realmente está faltando, tanto o hábil mecanismo, quanto as *indiretas* observações, nada dizem a respeito da real natureza (composição) de tal novo elemento.

De qualquer forma, um suposto modelo de partículas que venha a respaldar esse quesito deve ser consonante com as expectativas do MCP, ou seja, ter coerência com a evolução do Universo. Mantendo isso em mente, citaremos de forma breve a seguir, dois modelos e suas respectivas candidatas a partículas:

I- Em primeiro, temos a M_E quente, cuja partícula associada são os conhecidos neutrinos, possuindo massas $\lesssim 1eV$ e interação fraca como características. Inicialmente esse modelo pareceu ser uma boa proposta, mas *a posteriori* verificou-se que haviam problemas quanto ao seu caráter relativístico e seu desacoplamento ao plasma primordial, o que resultou em um errôneo cenário para a formação das estruturas no Universo, conhecido como *top-down* (BLUMENTHAL G. R.; FABER; REES, 1984).

II- Como segundo, temos a atualmente mais aceita, M_E fria, fundamentada com os chamados WIMPs (*Weakly Interacting Massive Particles*, em Português, Partículas massivas que interagem fracamente), partículas massivas e não-relativísticas que interagem fracamente, permitindo o cenário hierárquico temporal de transição das fases de domínio entre matéria-radiação, correto/desejado para formação das estruturas.

Além desses, pode-se encontrar na literatura outros candidatos, por exemplo, os áxions, gravitinos e fotinos, partículas que assim como os WIMPs, geralmente estão associadas a

⁵Proposta teórica que surgiu a fim de responder alguns dos problemas (Horizonte, Planaridade e Monopolos Magnéticos) iniciais mantidos meio a incoerências entre o MCP e a RCFM.

teorias que estendem⁶ (WESS; BAGGER, 1992) o modelo padrão da Física de Partículas. Todavia, apesar do modelo de M_E fria levar em conta o ajuste das características necessárias para evolução do Universo, no que tange a observação direta das partículas propostas por ele, até o dado momento a maioria dos esforços experimentais têm evidenciado a sua inexistência (AKERIB, 2014; ACKERMANN, 2015).

4.2 Universo Tardio

Com propósito de discutirmos as características tardias do Universo, um passo importante é definir uma expressão que relaciona a luminosidade dos objetos astrofísicos à sua respectiva distância. Seja L a taxa de energia irradiada (pelo objeto) por unidade de tempo, e l a energia por unidade de área recebida por um detector (*luminosidade aparente*), em um universo estático essa expressão poderia ser dada como, $(L/4\pi l)^{1/2}$; entretanto, essa não é a real distância para o nosso caso, diferindo-se pela necessidade de ser levado em conta o desvio para o vermelho (*red-shift*), posto que nosso Universo encontra-se em expansão (HUBBLE, 1929).

Não muito diferente da espera para o conhecimento de que o Universo não era estático, somente na década de 90 nos foi apresentado que além de expandir-se, ele também acelerava. Fato decorrente da divergência entre os valores, estimados e obtidos, por dois importantes trabalhos, os quais analisaram vários dados observacionais relativos a medidas sobre distâncias através da luminosidade de SNIa (RIESS, 1998; PERLMUTTER, 1999).

Como sabemos, as SN Ia são provindas de anãs brancas que ultrapassam o limite de Chandrasekhar (CHANDRASEKHAR, 1935), associadas a uma rápida fase de ignição do carbono que resulta em uma específica curva de luz. Estas características fazem desse fenômeno um preciso e confiável indicador de distâncias para o Universo, tanto que, após a comunidade científica tomar conhecimento e analisar as evidências que apontavam para um universo em EA, posteriormente de modo a respaldar tal desacordo, seria fomentado um modelo cosmológico assumindo a existência de um constituinte extra a densidade de matéria do Universo.

Desse modo, perante o novo cenário onde o Universo acelera temos duas opções, a primeira compete em assumir que a RG é válida, tornando-se necessário aderir um mecanismo que esteja causando tal aceleração; essa a mesma tomada na perspectiva do modelo Λ CDM onde, devido fato da causal-aceleração não poder ser explicada pela interação entre

⁶Teorias de supersimetria.

os componentes materiais gravitantes, a adoção de tal mecanismo faz presente a efetivação de um componente exótico munido de pressão negativa permeando todo o Universo em questão.

A *energia escura*, como acabamos de indicar, trata-se de uma substância hipotética que toma a vastidão do cosmos; há na literatura, diversos candidatos passíveis a representá-la, o mais conhecido e parte do MCP, é intitulado de constante cosmológica e é carregada pela letra grega Λ nas EsC da RG. Sua primeira aparição foi em 1917 no trabalho de Einstein, porém na época sua proposta tinha como intuito manter estático o Universo, uma vez que o consideravam em contração conforme acima mencionado.

Atualmente no MCP, a constante passou a ser interpretada fisicamente como relacionada a densidade de energia quântica do vácuo, $\langle \rho_{vac} \rangle$, a qual é responsável pela atual fase que o Universo experiencia, chamada de EA.

Notemos que quando assumimos $\Lambda = 0$ para a Eq.(3.12), conhecida como equação da aceleração,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (4.6)$$

a única maneira de obtermos a atual EA é com

$$\rho + 3p < 0, \quad (4.7)$$

ou seja, $w < -1/3$. Este um ponto crucial, meio a implicante violação das condições de energia, para adesão da E_Λ no modelo representada pelo parâmetro da EdE $w = -1$. Apesar das implicações problemáticas que ainda trataremos no decorrer deste capítulo, tal atribuição/encargo a esse ente exótico, vem por meio da união de duas simples constatações; a primeira resulta da substituição de $w = -1$ na equação da continuidade,

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + 3H(\rho + p) &= 0 \\ \dot{\rho}_\Lambda &= 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde inferimos que $\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0} = \text{constante}$ (ou também usando a Eq.(3.19)); em segundo, pode-se concluir que um tensor de energia-momento (da Eq. 2.32) composto por um termo de vácuo $T^{\mu\nu} = \rho_\Lambda g^{\mu\nu}$, é equivalente ao mesmo sobre o efeito da constante cosmológica Λ .

Portanto, assumido a EdE do tipo $\rho_\Lambda = -p_\Lambda$, levando-se em conta o sinal negativo frente ao termo de pressão, adquire-se o efeito repulsivo gravitacionalmente esperado. Dos trabalhos citados acima, o desenvolvido por Perlmutter apontou uma divisão entre a densidade de matéria (M_E e M_b) igual a $\Omega_m \sim 0,28$, e energia escura, $\Omega_\Lambda \sim 0,72$. Desde

então, essas medidas foram e continuam sendo aperfeiçoadas por diferentes métodos, ainda assim a maioria deles concordam numa dada faixa de valores.

Neste ponto, é adequado não deixarmos de tratar um resultado obtido durante o processo de firmação a essa estrutura teórica. Sendo assim, considerando a E_Λ um termo de fonte do campo gravitacional e assumido um universo de FRW plano, podemos fazer uso das soluções via EsC da RG, e obter o atual valor ρ_Λ , como sendo

$$\rho_\Lambda = \frac{H_0^2}{8\pi G} \sim 10^{-29} g/cm^3, \quad (4.9)$$

onde H_0 , o parâmetro de Hubble no tempo atual.

Com efeito, ao confrontarmos esse valor com o obtido pela teoria da Física de Partículas (WEINBERG, 1989),(ZELDOVICH, 1967), $\rho_{vac} \sim 10^{92} g/cm^3$ (CARROLL; PRESS; TURNER, 1992), encontramos uma tamanha diferença que diríamos ser de proporções cósmicas. Um contraste bem conhecido dado por uma diferença de magnitude, entre ambas as estimativas, na ordem de $\sim 10^{120}$.

Por fim, resumimos esse embaraçoso desnível teórico, salientando que apesar de suas várias concordâncias observacionais, ao aderirmos o MCP, automaticamente somos impedidos a admitir que o Universo é composto $\sim 95\%$ de entes os quais não podemos ver nada além de suas correções gravitacionais, permanecendo eles assim, sob um setor escuro.

A segunda opção que temos, refere-se em assumir que a RG não pode ser encarregada de responder questões ligadas às grandes escalas cosmológicas, esta abre viés ao propósito central de nosso trabalho, o qual abordaremos nos próximos capítulos.

5 Teoria de Gravidade $f(R, L_m)$

Diante do quebra-cabeças relacionado à gravidade, resulta-se um novo ramo da física chamado, teorias alternativas de gravidade. Essa área é compreendida por teorias que buscam por meio de modificações simples, porém aqui fundamentais a nível lagrangeano, na ação de campo¹ e suas respectivas equações, dar solução aos atuais problemas da gravitação de forma mais natural, ao simplesmente somar termos corretivos a própria geometria e/ou matéria conhecida do Universo. Também é notável que decorrente a nova base conceitual proporcionada por essas teorias, é permitido a formação de uma estrutura inédita para cada modelo com sua respectiva função a ser estabelecida.

Vale ressaltar que, uma das motivações centrais para que se adote generalizar/modificar a lagrangeana, está aliada ao passível sentido físico atribuído a natureza da efetiva nova ação de campo. Dito isto, além de sua potencial forma de AGM, algo que não é admissível via teoria padrão, tornar possível a solução dos atuais conflitos cosmológicos, seu caráter simples pode ajudar a revelar partes íntimas e ainda desconhecidas da natureza.

Ocupando o cerne de nosso trabalho, a teoria $f(R, L_m)$ (HARKO; LOBO, 2010), apresentada primeiramente em 2010, como resultado de uma ampla generalização da ação de Einstein-Hilbert, tendo em vista que mediante a sua essência², cada singular configuração funcional de $f(R, L_m)$ dispõe tanto de possíveis e específicas estruturas gravitacionais compostas por termos responsáveis pela curvatura e matéria, quanto por um acoplamento entre ambas a partir de uma única função.

Sendo assim, expressamos a ação que a corresponde:

$$S_{f(R, L_m)} = \int d^4x \sqrt{-g} f(R, L_m), \quad (5.1)$$

em que g é o determinante da métrica e $f(R, L_m)$ uma função arbitrária do escalar de Ricci R e da densidade lagrangeana de matéria L_m .

¹Refere-se a ação composta por ambos os termos que representam curvatura e matéria.

²Generalidade.

Define-se como tensor de energia-momento, dado pela Eq.(2.29), assumindo que a densidade lagrangeana de matéria depende somente dos componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, e não de seus derivados, obtemos

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}L_m - 2\frac{\partial L_m}{\partial g^{\mu\nu}}. \quad (5.2)$$

Aplicando o princípio variacional à Eq. (5.1), obtemos (HARKO; LOBO, 2010),

$$\delta S_{f(R, L_m)} = \int \left[f_R(R, L_m)\delta R + f_{L_m}(R, L_m)\frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R, L_m)\delta g^{\mu\nu} \right] \sqrt{-g}d^4x, \quad (5.3)$$

onde denotamos $f_R \equiv \partial f(R, L_m)/\partial R$ e $f_{L_m} \equiv \partial f(R, L_m)/\partial L_m$.

Variando-se o *escalar de Ricci*, temos que,

$$\begin{aligned} \delta R &= \delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) \\ &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \\ &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}(\nabla_\lambda\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Levando-se em conta o cálculo disposto dentre às Eqs.(2.13) e (2.20) e que a variação da conexão é dada como

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(\nabla_\mu\delta g_{\mu\alpha} + \nabla_\nu\delta g_{\alpha\nu} - \nabla_\alpha\delta g_{\mu\nu}), \quad (5.5)$$

obtemos,

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla^\mu\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}. \quad (5.6)$$

Dessa forma, podemos reescrever (5.3) como

$$\begin{aligned} \delta S_{f(R, L_m)} &= \int [f_R(R, L_m)R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + f_R(R, L_m)g_{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla^\mu\delta g^{\mu\nu} - f_R(R, L_m)\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} \\ &+ f_{L_m}(R, L_m)\frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R, L_m)\delta g^{\mu\nu}]\sqrt{-g}d^4x. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Após a integração parcial do segundo e terceiro termos da equação acima, usando a definição de (5.2), obtemos às EsC para a teoria de gravidade $f(R, L_m)$ como:

$$f_R(R, L_m)R_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla^\mu - \nabla_\mu\nabla_\nu)f_R(R, L_m) - \frac{1}{2}[f(R, L_m) - f_{L_m}(R, L_m)L_m]g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}f_{L_m}(R, L_m)T_{\mu\nu}. \quad (5.8)$$

Contraindo (5.8) com $g^{\mu\nu}$, obtemos a seguinte relação entre R , L_m e $T = T^\mu_\mu$ o traço do tensor de energia-momento,

$$f_R(R, L_m)R + 3\Box f_R(R, L_m) - 2[f(R, L_m) - f_{L_m}(R, L_m)L_m] = \frac{1}{2}f_{L_m}(R, L_m)T. \quad (5.9)$$

Isolado o termo $\Box f_R \equiv \nabla_\mu\nabla^\mu f_R(R, L_m)$, presente a (5.9) e substituindo em (5.8), resulta em

$$\begin{aligned} f_R(R, L_m)\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{3}Rg_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{6}[f(R, L_m) - f_{L_m}(R, L_m)L_m]g_{\mu\nu} \\ = \frac{1}{2}f_{L_m}(R, L_m)\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}Tg_{\mu\nu}\right) + \nabla_\mu\nabla_\nu f_R(R, L_m), \end{aligned} \quad (5.10)$$

valendo notar que, além dos termos extras que aparecem em tais equações, comparadas com (2.32), poderem fazer o papel do setor escuro do Universo, caso $f(R, L_m) = R/2\chi + L_m$, recupera-se a RG.

Tomando a derivada covariante em (5.8), usando $(\square\nabla_\nu - \nabla_\nu\square)F = R_{\mu\nu}\nabla^\mu F$, $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ (KOIVISTO, 2006), e a definição (5.2), obtemos

$$\begin{aligned}\nabla^\mu T_{\mu\nu} &= \nabla^\mu \ln [f_{L_m}(R, L_m)] (g_{\mu\nu}L_m - T_{\mu\nu}) \\ &= 2\nabla^\mu \ln [f_{L_m}(R, L_m)] \frac{\partial L_m}{\partial g^{\mu\nu}}.\end{aligned}\tag{5.11}$$

Em (HARKO; LOBO, 2010), os autores desenvolveram um modelo assumindo $f(R, L_m) = \Lambda \exp(R/2\Lambda + L_m/\Lambda)$ como forma para ação de campo, no entanto, várias formas funcionais e aplicações são vistas na literatura. Em (BERTOLAMI, 2007), é proposta uma das formas iniciais desse tipo de acoplamento antes da generalização em (HARKO; LOBO, 2010). Podemos encontrar a análise de viáveis candidatos a E_Λ sobre a teoria $f(R, L_m)$ via sistemas dinâmicos (AZEVEDO; PARAMOS, 2016), assim como objetivas explicações sobre a viabilidade de modelos cosmológicos dentre suas condições de energia (WANG, 2010) e termodinâmica (POURHASSAN; RUDRA, 2020).

Outros trabalhos como (HARKO T.; LOBO; SUSHKOV, 2013) e (MONTELONGO; LOBO, 2011), dedicaram-se em demonstrar a possível não violação das condições de energia, enquanto em (ORFEU, 2018), adotaram a teoria sobre o formalismo de Newman-Penrose e de perturbações explorando suas implicações acerca do contexto das ondas gravitacionais; também pode-se verificar ante a um recente trabalho (CARVALHO, 2020) sua aplicação sobre a estruturação e consequências relativas ao equilíbrio hidrostático de estrelas de nêutrons, o qual permitiu serem estabelecidos limites superiores de massa para pulsares massivos (LINARES; SHAHBAZ; CASARES, 2018) não previstos pela teoria padrão, assim como “anuncia” o recente e intrigante evento detectado pelo LIGO e Virgo GW190814, onde foi evidenciado um objeto compacto de $2.6M_\odot$, o que indica massa superior ao limite (via RG) estabelecido para uma estrela de nêutrons, porém uma quantidade pequena vista em relação a um buraco negro (ABBOTT, 2020).

Após a introdução ao formalismo base da teoria $f(R, L_m)$, veremos no seguinte capítulo seu uso na construção de um modelo cosmológico, até então inédito sobre tal forma.

6 Modelo de FRW na Teoria $f(R, L_m)$

Na sequência, iremos apresentar o desenvolvimento de nosso modelo cosmológico proposto, estruturado sobre a teoria discutida no capítulo anterior aderindo à métrica de FRW. Para obtermos as soluções de nosso modelo, devemos estabelecer inicialmente as equações de campo, as quais em decorrência dos cálculos extensos, doravante usaremos a seguinte notação (suprimindo a notação (R, L_m) , que se representa através do escalar de Ricci e lagrangeana de matéria respectivamente), reescrevemos a Eq.(5.8):

$$G_{\mu\nu} = \hat{T}_{\mu\nu}, \quad (6.1)$$

onde

$$\hat{T}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2f_R} \left[g_{\mu\nu} (L_m f_{L_m} + R f_R - f) - f_{L_m} T_{\mu\nu} + 2 (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) f_R \right], \quad (6.2)$$

define o tensor de energia-momento efetivo.

6.1 Equações de Campo

A princípio, como condição inicial delimitaremos o desenvolvimento das EsC na teoria de gravidade $f(R, L_m)$ sobre um universo dotado da métrica (3.1), plana ($k = 0$), sem a forma específica de $f(R, L_m)$.

Tomando a coordenada temporal ($\mu\nu = 00$) sobre (6.1):

$$G_{00} = \hat{T}_{00}, \quad (6.3)$$

a qual, por conseguinte, usando os termos derivados da métrica citada acima, reescreve-se

como,

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -\frac{1}{2f_R} \left[L_m f_{L_m} - f - 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) f_R - \rho f_{L_m} + 2 (g_{00} \square - \nabla_0 \nabla_0 f_R) \right], \quad (6.4)$$

restando os dois últimos termos à direita da igualdade, que serão evoluídos de forma separada/respectivamente iniciado do seguinte cálculo:

•

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \square f_R &= g_{\mu\nu} (g^{\rho\alpha} \nabla_\rho \nabla_\alpha f_R) \\ &= g_{\mu\nu} (g^{\rho\alpha} \partial_\rho \partial_\alpha f_R - g^{\rho\alpha} \Gamma_{\rho\alpha}^\lambda \partial_\lambda f_R), \end{aligned} \quad (6.5)$$

separando as coordenadas entre temporal e espaciais,

$$g^{00} \partial_0 \partial_0 f_R + g^{ij} \partial_i \partial_j f_R - g^{00} \Gamma_{00}^\lambda \partial_\lambda f_R - g^{ij} \Gamma_{ij}^\lambda \partial_\lambda f_R, \quad (6.6)$$

levando-se em conta a diagonalidade de nossa métrica, $i \neq j = 0$,

$$g^{00} \partial_0 \partial_0 f_R + g^{ii} \partial_i \partial_i f_R - g^{00} \Gamma_{00}^\lambda \partial_\lambda f_R - g^{ii} \Gamma_{ii}^\lambda \partial_\lambda f_R, \quad (6.7)$$

sendo expandidos os somatórios presentes em ii , verificando-se nulas as conexões do III termo e, $\partial_\lambda f_R = 0^1$, obtemos como solução de (6.5)

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \square f_R &= g_{\mu\nu} [g^{00} \partial_0 \partial_0 f_R - (g^{11} \Gamma_{11}^0 \partial_0 f_R + g^{22} \Gamma_{22}^0 \partial_0 f_R + g^{33} \Gamma_{33}^0 \partial_0 f_R)] \\ &= g_{\mu\nu} (\partial_0 \partial_0 f_R + 3 \frac{\dot{a}}{a} \partial_0 f_R), \end{aligned} \quad (6.8)$$

tendo como resultado para $\mu\nu = 00$,

$$\begin{aligned} g_{00} \square f_R &= g_{00} (\partial_0 \partial_0 f_R + 3 \frac{\dot{a}}{a} \partial_0 f_R) \\ &= \partial_0 \partial_0 f_R + 3 \frac{\dot{a}}{a} \partial_0 f_R. \end{aligned} \quad (6.9)$$

¹Consequente as condições de homogeneidade e isotropia postulados através do princípio cosmológico junto a métrica de FRW, temos a não dependência sobre variações das coordenadas espaciais.

●

$$-\nabla_\mu \nabla_\nu f_R = -(\partial_\mu \partial_\nu f_R - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda f_R), \quad (6.10)$$

expandindo o somatório no último termo acima,

$$-\partial_\mu \partial_\nu f_R + \Gamma_{\mu\nu}^0 \partial_0 f_R + \Gamma_{\mu\nu}^1 \partial_1 f_R + \Gamma_{\mu\nu}^2 \partial_2 f_R + \Gamma_{\mu\nu}^3 \partial_3 f_R, \quad (6.11)$$

onde analogamente ao passo (6.9), temos que os três últimos termos dessa equação são nulos, e assim,

$$-\nabla_\mu \nabla_\nu f_R = -\partial_\mu \partial_\nu f_R + \Gamma_{\mu\nu}^0 \partial_0 f_R, \quad (6.12)$$

para $\mu\nu = 00$,

$$\begin{aligned} -\nabla_0 \nabla_0 f_R &= -\partial_0 \partial_0 f_R + \Gamma_{00}^0 \partial_0 f_R \\ &= -\partial_0 \partial_0 f_R, \end{aligned} \quad (6.13)$$

uma vez que a conexão $\Gamma_{00}^0 = 0$.

Junto dos resultados (6.9) e (6.13), podemos reescrever a Eq.(6.4), como:

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -\frac{1}{2f_R} \left[L_m f_{L_m} - f - 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) f_R - \rho f_{L_m} + 6 \frac{\dot{a}}{a} \dot{f}_R \right], \quad (6.14)$$

onde $\dot{f} = df/dt$, denota derivada temporal.

Previamente, para calcularmos as componentes espaciais das EsC

$$G_{ij} = \hat{T}_{ij}, \quad (6.15)$$

como feito para a Eq.(6.4), devemos derivar seus respectivos termos dados pelas relações (6.8) e (6.12); dessa forma,

$$g_{11} \square f_R = -a^2 \left(\partial_0 \partial_0 f_R + 3 \frac{\dot{a}}{a} \partial_0 f_R \right). \quad (6.16)$$

$$g_{22} \square f_R = -a^2 r^2 \left(\partial_0 \partial_0 f_R + 3 \frac{\dot{a}}{a} \partial_0 f_R \right). \quad (6.17)$$

$$g_{33} \square f_R = -a^2 r^2 \sin^2 \theta \left(\partial_0 \partial_0 f_R + 3 \frac{\dot{a}}{a} \partial_0 f_R \right). \quad (6.18)$$

$$-\nabla_1 \nabla_1 f_R = a \dot{a} \partial_0 f_R. \quad (6.19)$$

$$-\nabla_2 \nabla_2 f_R = a \dot{a} r^2 \partial_0 f_R. \quad (6.20)$$

$$-\nabla_3 \nabla_3 f_R = a \dot{a} r^2 \sin^2 \theta \partial_0 f_R. \quad (6.21)$$

Com isso, chegamos as seguintes EsC para as componentes $\mu\nu = 11, 22$ e 33 , respectivamente:

$$-a^2 \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a} \right) = \frac{a^2}{2f_R} \left[(L_m + p) f_{L_m} - f - 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) f_R + 2 \left(\ddot{f}_R + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{f}_R \right) \right]. \quad (6.22)$$

$$-a^2 r^2 \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a} \right) = \frac{a^2 r^2}{2f_R} \left[(L_m + p) f_{L_m} - f - 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) f_R + 2 \left(\ddot{f}_R + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{f}_R \right) \right]. \quad (6.23)$$

$$-a^2 r^2 \sin^2 \theta \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a} \right) = \frac{a^2 r^2 \sin^2 \theta}{2f_R} \left[(L_m + p) f_{L_m} - f - 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) f_R + 2 \left(\ddot{f}_R + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{f}_R \right) \right]. \quad (6.24)$$

6.2 Equações de Friedmann

Com a finalidade de obter as soluções para o nosso modelo cosmológico, doravante assumindo a forma funcional que admite o AGM $f(R, L_m) = R/2\chi + (1 + \sigma R) L_m$, com $\chi = 8\pi G$, exporemos as EsF.

Assim sendo, através da Eq.(6.14), obtemos

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - 16\pi G \sigma \left[L_m \frac{\dot{a}}{a} - L_m \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \rho \right], \quad (6.25)$$

correspondendo essa, a 1ª equação de Friedmann de nosso modelo em $f(R, L_m)$.

Dada a forma das equações (6.22), (6.23) e (6.24), dispomos da seguinte generalização das componentes espaciais G_{ij} :

$$g_{ij} \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = 8\pi G T_{ij} + 16\pi G \sigma g_{ij} \left[L_m \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \ddot{L}_m - 2\dot{L}_m \frac{\dot{a}}{a} + (L_m + 3p) \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \right], \quad (6.26)$$

a qual pode ser reescrita através da contração com g^{ij} ,

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -8\pi G p + 16\pi G \sigma \left[L_m \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \ddot{L}_m - 2\dot{L}_m \frac{\dot{a}}{a} + (L_m + 3p) \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \right]. \quad (6.27)$$

Em seguida, fazendo a subtração entre as equações (6.27) e (6.25), obtemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) + 8\pi G \sigma \left[2L_m \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \ddot{L}_m - \dot{L}_m \frac{\dot{a}}{a} + (\rho + 3p) \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \right], \quad (6.28)$$

essa, a 2ª equação de Friedmann do modelo; vale notar que em ambas às EsF (6.25 -6.28), ao tomar-se $\sigma = 0$ recuperamos a solução padrão com a RG.

6.3 Solução para os Parâmetros do Modelo

Frente ao seguinte passo, expomos ao leitor que diferentemente das teorias de gravidade com acoplamento mínimo, onde devido ao termo de fonte (matéria/energia) em sua ação apresentar uma degenerescência não explícita a estrutura de L_m , teorias que possuem o AGM permitem uma descrição característica de sua lagrangeana de matéria, a partir da qual pode-se tomar uma essencial e nova acepção inerente a natureza-efetiva do respectivo fator associado.

Vários trabalhos, aqui já citados, demonstram que essa opção é uma poderosa ferramenta para se estudar a dinâmica do Universo. Contudo, notando que dentre significativas discussões sobre diferentes formas lagrangeanas e acoplamentos vistos na literatura (FARAONI, 2009), (BERTOLAMI; LOBO; PÁRAMOS, 2008), (HARKO; MORAES, 2020), desde recentes trabalhos (CARVALHO, 2017), (VELTEN; CARAMÊS, 2017), até conceituados referenciais (SCHUTZ, 1970), possuem como direção natural para descrição de suas lagrangeanas de matéria, $L_m = -p$.

Sendo essa a nossa mesma direção, buscando fundar um modelo que desempenhe de forma eficiente o atual cenário da EA sem a necessidade de aderir a um fluido exótico, como a E_Λ ($p = -\rho$), nesta seção iremos utilizar às EsF do modelo, de modo a obter suas soluções e analisar seus relativos resultados/previsões.

Deste modo, assumindo a lagrangeana de matéria como² $L_m = -p$, sobre um universo dominado por matéria em razão de assegurar que, caso nosso modelo descreva de forma coerente o atual cenário cosmológico tomando-se $L_m = -p = 0$, apropriadamente a EA será proveniente dos termos extras da teoria (em nosso caso, constituídos através do AGM), podemos reescrever as Eqs.(6.25 - 6.28), respectivamente como:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - 16\pi G\sigma \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \rho. \quad (6.29)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho + 8\pi G\sigma \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \rho. \quad (6.30)$$

No decorrer do seguinte cálculo para o fator de escala $a(t)$, deixemos claro que nossa intenção, do início ao final, estará em manter a *dependência* em σ sobre nossas soluções.

Isto posto, para obtermos a solução do fator de escala no *tempo*, devemos primeiramente encontrar uma solução para $\rho(t)$ contida nas EsF. Diante disso, faremos uso do seguinte resultado fornecido pela equação da conservação de matéria/energia do modelo.

Visto o resultado de (3.15), sabendo que a derivada covariante do tensor de energia-momento, na teoria de gravidade $f(R, L_m)$, é dada por (5.11), temos para o lado esquerdo da igualdade,

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1 + \omega)\rho = 2\nabla_\nu \ln [f_{L_m}] \frac{\partial L_m}{\partial g_{\mu\nu}}, \quad (6.31)$$

sendo que, para calcularmos o lado direito da equação acima, tendo-se em mente que devemos encontrar uma relação para equação da continuidade em nosso modelo que permita a análise, direta e particular, relativa a cada heterogênea fase que o universo evoluiu, façamos o seguinte desenvolvimento.

²Vale ressaltar que deve-se ter cautela ao tomar $L_m = \pm p$, sendo que essa variação de sinal é geralmente associada a uma respectiva mudança de assinatura métrica (com algumas exceções).

Em razão das grandezas de densidade e pressão serem totalmente intercambiáveis, a menos de uma constante (ω), podemos reescrever nossa forma lagrangeana como,

$$L_m = -p = \omega(-\rho),$$

permiti-nos calcular

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_m}{\partial g_{\mu\nu}} &= \frac{\partial(-p)}{\partial g_{\mu\nu}} \\ &= \frac{\partial \omega(-\rho)}{\partial g_{\mu\nu}}, \end{aligned} \quad (6.32)$$

dado que ω é uma constante, a mesma pode sair da derivada parcial, e então

$$\frac{\partial L_m}{\partial g_{\mu\nu}} = \omega \frac{\partial(-\rho)}{\partial g_{\mu\nu}}. \quad (6.33)$$

Feito o passo anterior, em vista de obter uma nova relação para (6.33), igualando as equações (3.9 - 5.2), temos que

$$(\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} L_m - 2 \frac{\partial L_m}{\partial g_{\mu\nu}}, \quad (6.34)$$

onde, isolando o termo que contem a derivada parcial do tensor métrico, encontramos

$$\frac{\partial L_m}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} [(\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} L_m], \quad (6.35)$$

e assim, devidamente tomando-se $L_m = -\rho$,

$$\frac{\partial(-\rho)}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} [(\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} + \rho g^{\mu\nu}], \quad (6.36)$$

resultado que, através de sua substituição na Eq.(6.33), reproduz

$$\omega \frac{\partial(-\rho)}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \omega [(\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} + \rho g^{\mu\nu}]. \quad (6.37)$$

Dessa forma, voltando ao lado direito da Eq.(6.31) com $f_{L_m} = 1 + \sigma R$,

$$\begin{aligned} 2\nabla_\nu \ln [f_{L_m}] \frac{\partial L_m}{\partial g_{\mu\nu}} &= 2\nabla_\nu \ln [1 + \sigma R] \frac{\partial L_m}{\partial g_{\mu\nu}} \\ &= 2 \left(\frac{\sigma}{1 + \sigma R} \right) \nabla_\nu R \frac{\partial L_m}{\partial g_{\mu\nu}}, \end{aligned} \quad (6.38)$$

e, substituindo o resultado presente na Eq.(6.37),

$$\begin{aligned} 2\nabla_\nu \ln [f_{L_m}] \frac{\partial L_m}{\partial g_{\mu\nu}} &= 2 \left(\frac{\sigma}{1 + \sigma R} \right) \nabla_\nu R \frac{\partial L_m}{\partial g_{\mu\nu}} \\ &= - \left(\frac{\omega \sigma}{1 + \sigma R} \right) \nabla_\nu R [(\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} + \rho g^{\mu\nu}]. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Por conseguinte, como feito para o lado esquerdo da Eq.(3.15), tomando-se $\mu = 0$ sobre (6.39),

$$2\nabla_\nu \ln [f_{L_m}] \frac{\partial L_m}{\partial g_{0\nu}} = - \left(\frac{\omega \sigma}{1 + \sigma R} \right) \nabla_\nu R [(\rho + p)u^0 u^\nu - pg^{0\nu} + \rho g^{0\nu}], \quad (6.40)$$

levando-se em conta a diagonalidade da métrica de FRW,

$$\begin{aligned} 2\nabla_0 \ln [f_{L_m}] \frac{\partial L_m}{\partial g_{00}} &= - \left(\frac{\omega \sigma}{1 + \sigma R} \right) \partial_0 R [(\rho + p)u^0 u^0 - pg^{00} + \rho g^{00}] \\ &= -2 \left(\frac{\omega \sigma}{1 + \sigma R} \right) \dot{R}[\rho]. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Por fim, para um universo dominado por matéria ($\omega = 0$), dispomos da seguinte solução para a equação da continuidade do modelo:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0, \quad (6.42)$$

valendo-se notar que o resultado encontrado acima evidência a conservação de matéria/energia no modelo, tratando-se diretamente da mesma solução obtida através da RG para com a descrição da era da matéria.

Dada a relação (6.42), lembrando que temos em vista uma solução para $\rho(t)$, podemos extrair as seguintes duas igualdades:

$$\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{1}{3} \frac{\dot{\rho}}{\rho}, \quad (6.43)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3} \frac{\ddot{\rho}}{\rho} + \frac{4}{9} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} \right)^2, \quad (6.44)$$

e reescrever as equações (6.29 - 6.30), como

$$\frac{1}{9} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - 16\pi G\sigma \left[\frac{5}{9} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} \right)^2 - \frac{1}{3} \frac{\ddot{\rho}}{\rho} \right] \rho, \quad (6.45)$$

$$-\frac{1}{3} \frac{\ddot{\rho}}{\rho} + \frac{4}{9} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} \right)^2 = -\frac{4\pi G}{3} \rho + 8\pi G\sigma \left[\frac{5}{9} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} \right)^2 - \frac{1}{3} \frac{\ddot{\rho}}{\rho} \right] \rho. \quad (6.46)$$

Manipulando as equações (6.45) e (6.46), encontramos que

$$\frac{\ddot{\rho}}{\rho} - \frac{3}{2} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} \right)^2 = 0, \quad (6.47)$$

possuindo como solução,

$$\rho(t) = \varphi \left(\frac{1}{t + \mathcal{C}} \right)^2, \quad (6.48)$$

sendo φ e \mathcal{C} , constantes. Note que a solução obtida para o comportamento de evolução temporal de ρ em nosso modelo, além de estabelecer evidente consonância com o resultado fornecido pela RG no MCP (RYDEN, 2003), haja vista à relativa proporcionalidade de $H(t) \propto \rho(t)$, também promove uma densidade finita no momento do Big Bang, algo não visto no MCP, por meio do ajuste de \mathcal{C} .

Encontrado $\rho(t)$, adiante para obtermos a solução do fator de escala, primeiro somaremos as Eqs.(6.29 - 6.30), como segue:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{4\pi G}{3}\rho - 8\pi G\sigma \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]\rho$$

$$\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] (1 + 8\pi G\sigma\rho) = \frac{4\pi G}{3}\rho$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{4\pi G}{3}\rho \left(\frac{1}{1 + 8\pi G\sigma\rho}\right), \quad (6.49)$$

onde, por simplicidade, assumindo $\mathcal{C} = 0$ sobre o resultado (6.48) para a densidade de matéria, podemos reescrevê-la da seguinte forma,

$$\ddot{a}a + \dot{a}^2 - \sigma(t)a^2 = 0, \quad (6.50)$$

sendo $\sigma(t) = \frac{4\pi G\varphi}{3} \left(\frac{1}{t^2 + 8\pi G\varphi\sigma}\right)$.

6.3.1 Fator de Escala

Nesta seção são obtidos os resultados finais dos parâmetros cosmológicos derivados pelo modelo aqui proposto, objetivando analisar sua viabilidade física por meio da comparação/concordância com os parâmetros preditos pelo MCP.

Fazendo a seguinte mudança de variável $a = v^{1/2}$, podemos reescrever a Eq.(6.50) como

$$\ddot{v} - 2\sigma(t)v = 0, \quad (6.51)$$

que, sob a condição inicial $a(0) = 0$, tem como solução para o fator de escala

$$a(t) = \zeta \sqrt{F[\alpha] (G\varphi\sigma)^{-1/2} t}, \quad (6.52)$$

com ζ , uma constante, $\alpha = 1/4$, $F[n] = {}_2F_1 \left[n - \delta, n + \delta, \left(n + \frac{5}{4} \right), -\frac{t^2}{8\pi G \varphi \sigma} \right]$, $\delta = \left(\frac{1}{16} + \frac{2\pi G \varphi}{3} \right)^{1/2}$, sendo representado por

$${}_2F_1 [a, b, c, d] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{a})_n (\mathbf{b})_n (c)^n}{(\mathbf{d})_n n!}, \quad (6.53)$$

uma função hipergeométrica³, onde os termos destacados acima evoluem conforme o Símbolo de Pochhammer (SEABORN, 1991),

$$(s)_n = s(s+1)(s+2)\dots(s+n-1); \quad (s)_0 = 1. \quad (6.54)$$

Ante a solução (6.52) expomos na Fig.(6.1) o comportamento exibido pelo fator de escala em função do tempo, onde, exceto pela curva em preto representando o resultado via RG ($\sigma = 0$ sobre às EsF) em todas as figuras, a princípio analisamos a viabilidade do modelo diante a modificação de φ , sendo destacado três relevantes valores com o propósito de exibir a principal influência de tal parâmetro sobre os resultados.

Posto isto, dado que a variação com relação ao parâmetro σ e a definição de $\zeta = 7\pi/5$ estão ligados unicamente ao ajuste para a descrição inicial adequada da era da matéria (ou seja, $a \propto t^{2/3}$) nas presentes soluções, podemos ver através da curva em verde que resultados impostos por valores de $\varphi \leq 0,24$, não apontam para um cenário coerente com a EA. Fato relativo ao evidenciar que, assim como a curva em preto (solução via RG), tal solução demonstra um comportamento aproximadamente linear para o parâmetro, onde coerentemente é esperado que o mesmo evolva de forma proporcional e respectiva a, $\dot{a} > 0$ e $\ddot{a} < 0$, $\dot{a} > 0$ e $\ddot{a} > 0$, para sinalizar⁴ um possível cenário de EA.

No entanto, referente as soluções estabelecidas através de $\varphi = 1,5$ e $8\pi^2$, respectivamente representadas pelas curvas em vermelho e azul, tendo em mente as alegações anteriores, pode-se verificar um comportamento aceitável uma vez observado que em certos períodos de tempo \ddot{a} manifesta uma variação de forma positiva, notavelmente observado em tais curvas.

Analisados os parâmetros acima na Fig.(6.1), mediante o comportamento da solução discutida sobre a configuração de $\varphi = 8\pi^2$ e $\sigma = 2,5 \times 10^{-4}$, e outras razões que serão elencadas nas seguintes seções, devemos nos concentrar sobre soluções em torno de tais valores.

Sendo assim, mais abaixo na Fig.(6.2), fixando-se o parâmetro $\varphi = 8\pi^2$, nota-se que

³Conhecida como série hipergeométrica gaussiana.

⁴Destaquemos como característica essencial a evidenciar esse momento cósmico (EA), a transição de $\ddot{a} < 0 \rightarrow \ddot{a} > 0$, uma vez que tal mudança sugere uma taxa de variação positiva para a aceleração.

dentre às três curvas definidas por nosso modelo, embora todas estejam indicando de forma razoável uma solução que represente um cenário acelerado, especificamente devemos ressaltar dois pontos; o primeiro trata-se da área delimitada entre as curvas em azul e vermelho ($2,5 \times 10^{-4} \leq \sigma \leq 3,5 \times 10^{-4}$) a qual apresenta um melhor ajuste em vista do inicial comportamento predito pelo MCP de $a \propto t^{2/3}$ para a era da matéria; em segundo, pode-se verificar que através da variação de σ para valores maiores, nitidamente se vê uma atenuação sobre a conduta de \dot{a} , algo que devidamente analisaremos mais a fundo através de seus respectivos resultados sobre $H(t)$ e $q(t)$ mais a frente.

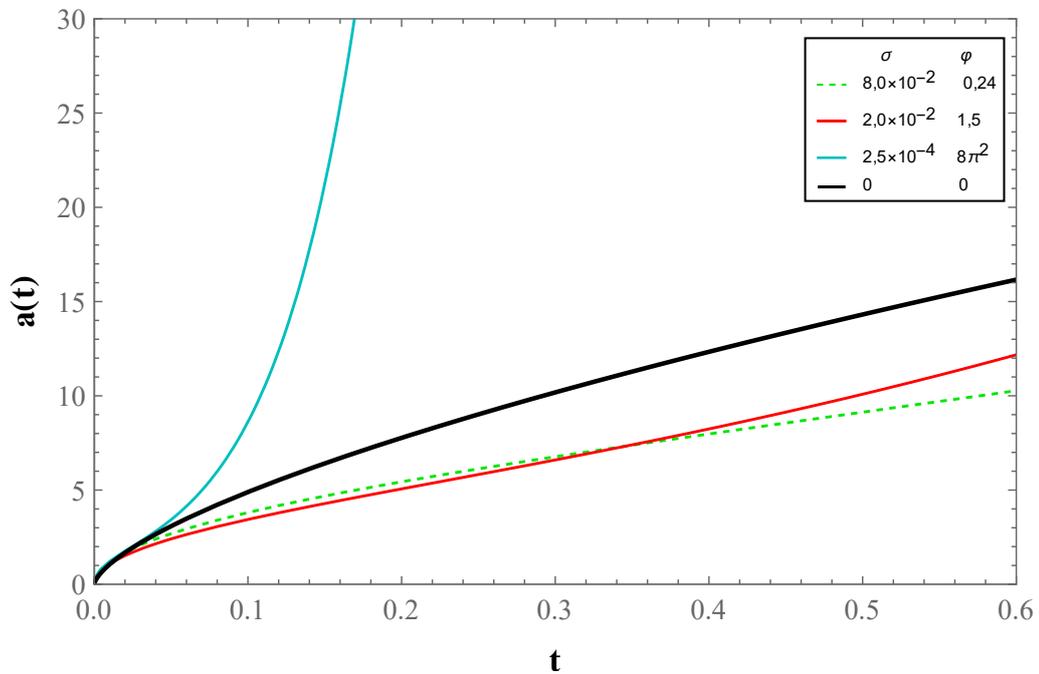
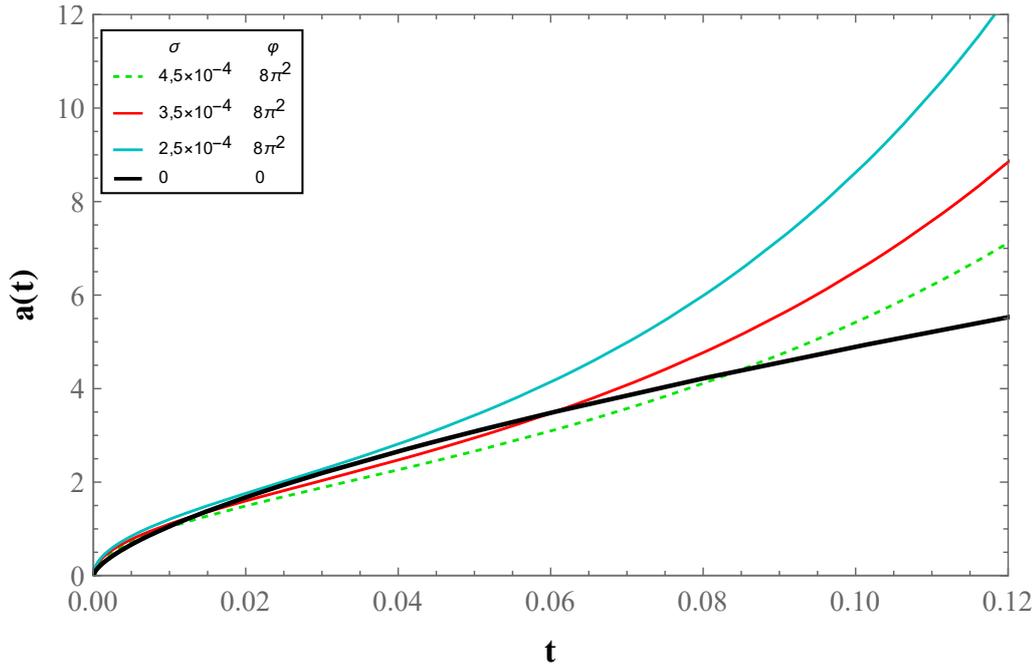


FIGURA 6.1 – Evolução temporal do Fator de Escala.

FIGURA 6.2 – Evolução temporal do Fator de Escala com $\varphi = 8\pi^2$.

6.3.2 Parâmetro de Hubble

Depois de termos reproduzido a equação que define o fator de escala, obtemos a solução para o parâmetro de Hubble da seguinte forma:

$$H(t) = \frac{1}{2t} + \frac{t}{18\sigma} \left(\frac{F[\beta]}{F[\alpha]} \right), \quad (6.55)$$

com $\beta = 5/4$, lembrando que $H = \frac{\dot{a}}{a}$.

Por meio do resultado (6.55), portando relativo consenso com o já evidenciado sobre $a(t)$, devemos acentuar que, apesar da solução resultante de $\varphi = 1,5$ na Fig.(6.1) demonstrar uma sutil variação positiva sobre \ddot{a} , a partir da análise retirada da Fig.(6.3), tanto esta quanto a curva delineada com $\varphi = 0,24$, representam soluções fisicamente destoantes do contexto esperado. Conclusão essa tendo em vista que $H(t) \rightarrow 0$ em ambas as soluções, onde, como previsto pelo MCP⁵ $H \propto t^{-1}$, espera-se que o mesmo exiba uma evolução de forma constante de modo a justificar uma solução do tipo exponencial sobre $a(t)$ e conseqüentemente sugerir um processo de aceleração.

Todavia, verifica-se em ambas às Figs.(6.3 - 6.4) que para o valor de $\varphi = 8\pi^2$ o comportamento desenvolvido por $H(t)$ segue em consonância com tais previsões, haja

⁵Consonante com nosso modelo através da solução obtida para densidade de matéria Eq.(6.48).

vista que o mesmo aproxima-se do presente momento cósmico configurando um aspecto platô $H(t_0) \rightarrow \text{constante}$, apontando então como esperado, para um cenário de EA.

Por fim, até o dado momento em análise, concluiu-se que valores de $\varphi < \pi^2$ decisivamente estabelecem soluções onde $H(t) \sim 0$.

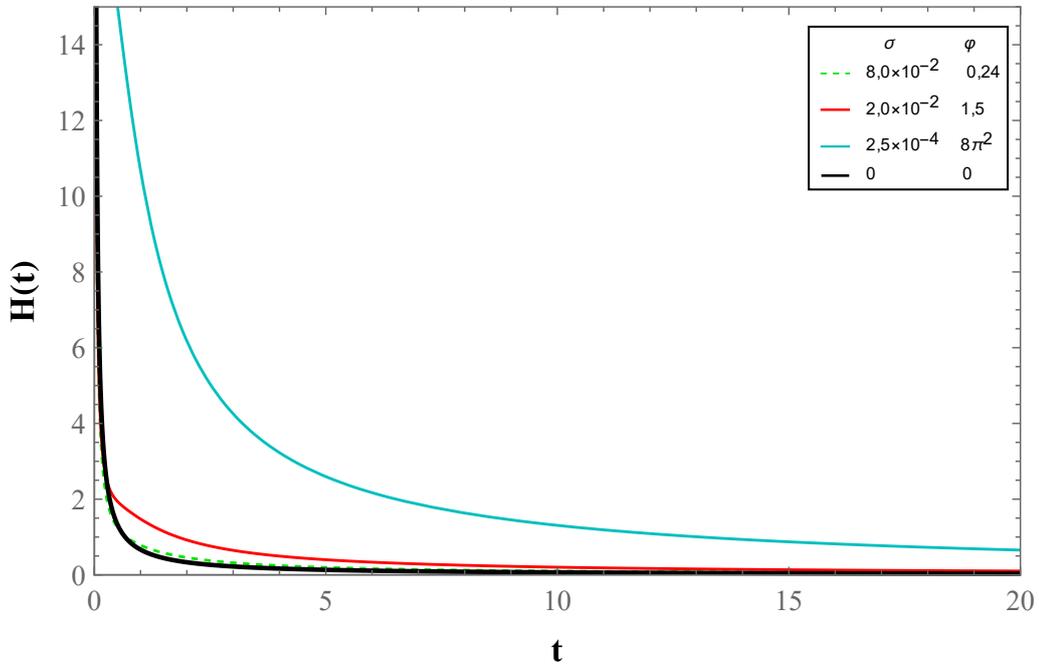


FIGURA 6.3 – Parâmetro de Hubble como função do tempo.

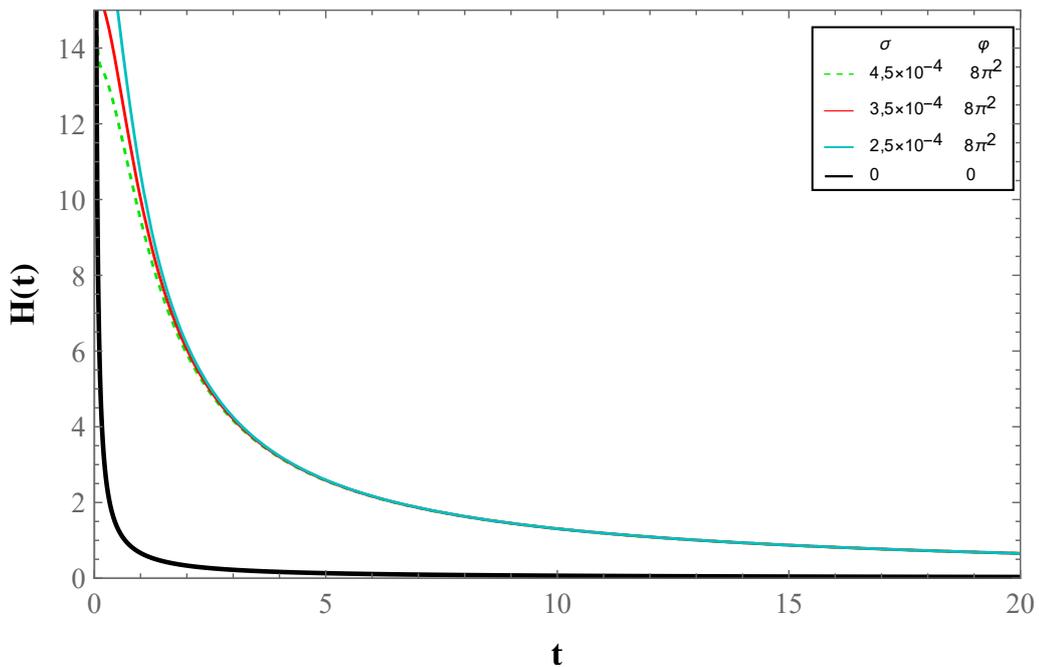


FIGURA 6.4 – Parâmetro de Hubble como função do tempo com $\varphi = 8\pi^2$.

6.3.3 Parâmetro de Desaceleração

Sendo a principal característica investigada no presente trabalho, o parâmetro de desaceleração $q(t)$, junto de $H(t)$ como já vimos, é responsável por descrever/classificar se o Universo está em processo de aceleração ($q < 0$) ou desaceleração ($q > 0$). Neste diapasão, o mesmo é representado por nosso modelo como

$$q(t) = \frac{(9\sigma F[\alpha])^2 - (6t)^2 \sigma F[\alpha] F[\beta] + (t^2 F[\beta])^2 + 3t^4 (9 - 4\pi G\varphi) F[\alpha] F[\gamma] / 10\pi G\varphi}{(9\sigma F[\alpha] + t^2 F[\beta])^2}, \quad (6.56)$$

sendo $\gamma = 9/4$, e $q(t) = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$.

Mediante a Eq.(6.56), corroborando com os resultados analisados anteriormente, é possível verificar na Fig.(6.5) que, ainda que suceda uma variação sobre $q(t)$, valores de $\varphi < 0,24$ não permitem seguramente uma solução acelerada; destacando-se que para $\varphi \sim 0,24$ dispomos de uma solução que representa um universo com aceleração aproximadamente nula.

Ainda sobre tais soluções, demonstrado através da curva em vermelho onde $q(t) \sim -0,6$, nossa investigação permitiu estabelecer que valores de $0,24 \leq \varphi < 8\pi^2$, apesar de “atestarem” um universo acelerado ($q < 0$), não estabelecem o comportamento desejado em vista do resultado fornecido pelo MCP, afirmação a qual é feita em virtude de que

$$q(t) = \frac{1}{2} \sum \Omega_i (1 + 3\omega_i) = \Omega_r + \frac{1}{2} \Omega_m + \frac{1 + 3\omega_\Lambda}{2} \Omega_\Lambda, \quad (6.57)$$

com $\Omega_{r0} \sim 10^{-4}$ (podendo ser desprezado), e $\omega_\Lambda = -1$,

$$\hat{q}(t) = \frac{1}{2} \Omega_m - \Omega_\Lambda, \quad (6.58)$$

obtém-se, esperada e notavelmente, como consequência por meio da expansão, uma evolução assintótica do parâmetro $q(t) \rightarrow -1$, resultado equivalente ao obtido através do modelo de universo de Sitter (SITTER, 1916) (recordando que a solução para esse modelo não possui matéria).

Contudo, a respectiva análise possibilitou o importante e apropriado ajuste do parâmetro φ do modelo, esse precisando o valor de $8\pi^2$ como limite inferior aliado a sua efetiva competência junto ao valor esperado do parâmetro $q(t)$.

Em seguida, na Fig.(6.6) temos manifestado através de pequenas flexões entre as curvas, claramente a direta influência do parâmetro responsável pelo AGM no modelo, onde, portanto, decorrente a variação de σ a valores mais elevados é observado uma moderação ante à taxa de variação de $q(t)$, valendo ainda se destacar o relativo equilíbrio vigente

entre tais variações presentes tanto nesta figura, quanto nas soluções para $a(t)$ expostas na Fig.(6.2). Sendo assim, entendemos que σ demonstra estar intrinsecamente relacionado a uma forma de *jerk* ($j(t)$), ou seja, o AGM além de permitir $q < 0$ no modelo, provê um mecanismo com relação a sua variação.

Dada sua relevância na cosmologia, exponhamos que o nomeado como par de *statefinder*, esse composto por $j(t)$ e $s(t)$ ⁶, trata-se de um importante diagnóstico que pode diferenciar alternativos modelos cosmológicos propostos para M_E e E_Λ , destaques como exemplo, o *Phantom* ($\omega < -1$) e o *Quintessência*⁷ ($-1 < \omega \leq -1/3$); modelos dos quais o último, visto em (JESUS, 2008), é discutido frente a usuais cenários aliados ao acoplamento sobre uma perspectiva interacional do setor escuro ($M_E \longleftrightarrow E_\Lambda$), objetivando investigar suas implicações e fundamentalidade.

Ademais, verificando-se em ambas figuras abaixo que $q(t)$ permanece estabelecido entre uma faixa limitante de $1 \leq q \leq -1$, relação que assente a descrição dos períodos dominados pela radiação ($q = 1$), matéria ($q = 1/2$) e aceleração ($0 < q \leq -1$) do Universo, assim como previsto no MCP, note-se que as curvas, referentes as Figs.(6.2 - 6.4 - 6.6), além de demonstrarem que o Universo adentra em uma fase de aceleração, revelam-se coerentes com o cenário total estimado, uma vez que outorgam uma transição do regime desacelerado, composto pelas eras mencionadas anteriormente, incluindo-se o atual momento cósmico definido como (q_0).

Diante isso, vale trazer ao leitor que embora ainda haja notáveis especulações e pesquisas no contexto acadêmico/científico e experimental que elencam a estimativa de q_0 (LAHAV; LIDDLE, 2019), (ADE, 2016), atualmente pode-se encontrar diversos trabalhos os quais relacionam e indicam como medida de tal parâmetro, $q_0 \sim -0,53$ (RYDEN, 2003), descrição esse que é identificada na Fig.(6.6) através de um círculo sobre suas respectivas curvas.

⁶*Snap*, uma combinação linear entre $j(t)$ e $q(t)$.

⁷Já referenciado no capítulo introdutório.

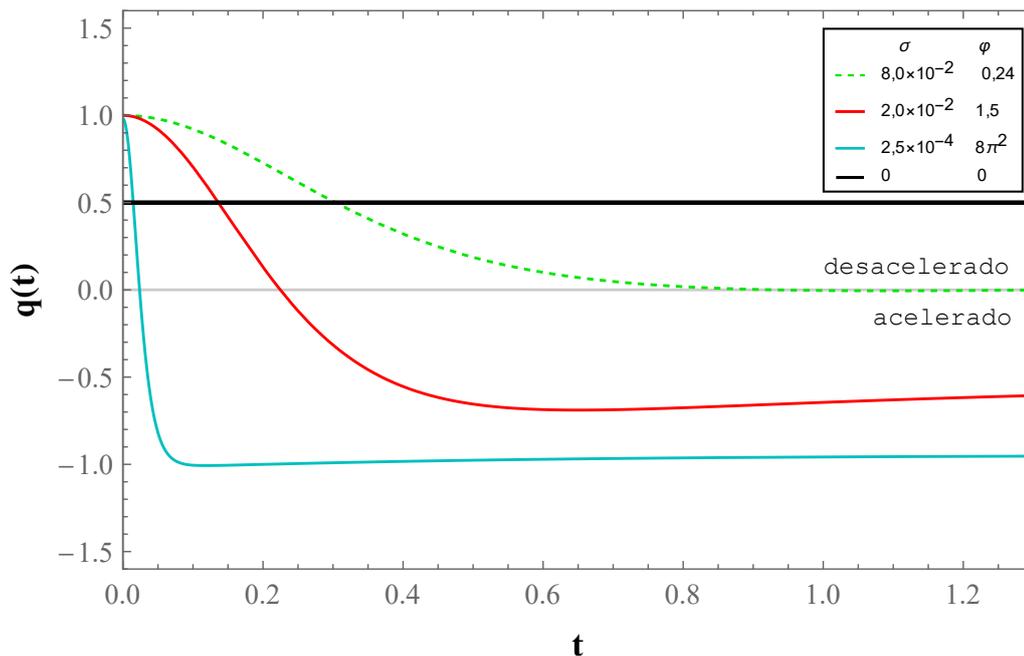


FIGURA 6.5 – Comportamento do parâmetro de Desaceleração.

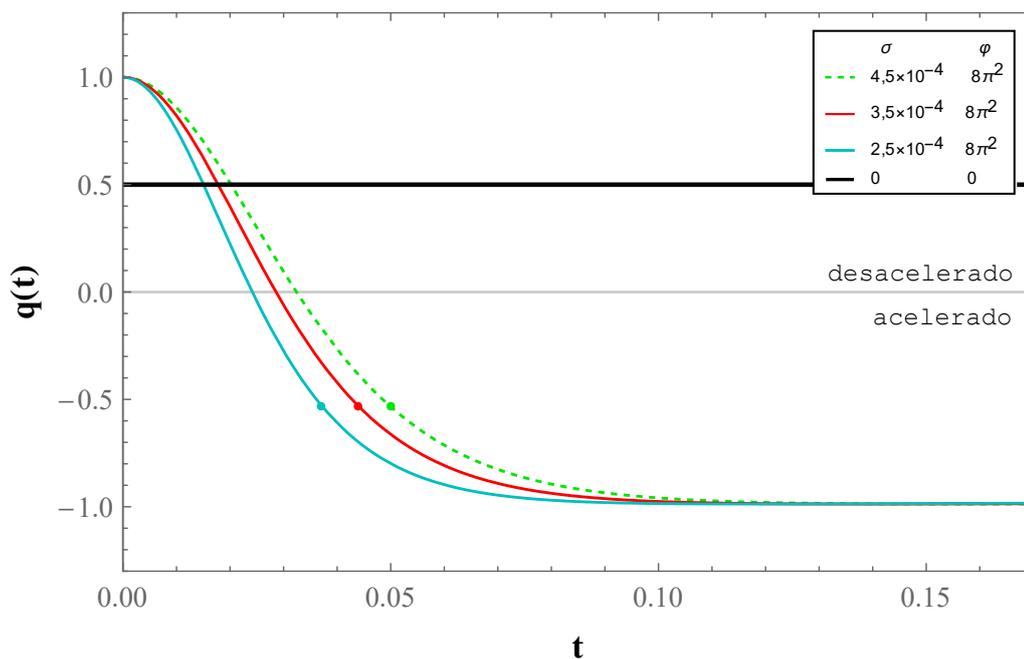


FIGURA 6.6 – Comportamento do parâmetro de Desaceleração com $\varphi = 8\pi^2$.

6.3.4 Restrições sobre o AGM no Modelo

Tratados os resultados acima, sabendo que uma forma segura e fundamental para se restringir parâmetros livres em modelos cosmológicos, no geral, é feita através do confronto com medidas observacionais, com o intuito de limitar a variação do parâmetro responsável pelo AGM σ , nesta seção, por meio da relação entre o fator de escala e o parâmetro de *red-shift* (3.24), buscaremos uma solução para o parâmetro de Hubble de nosso modelo como função de z , ou seja, $H(z)$.

Por conseguinte, em razão da relativa complexidade vista sobre nossa solução para o fator de escala, como alternativa em uma primeira aproximação a fim de obter o tempo como uma função de z , façamos sobre $a(t)$ a seguinte expansão em série de Taylor,

$$a(t) = \zeta \sqrt{(G \varphi \sigma)^{-1/2} t} + \frac{\zeta t^{5/2}}{36\sigma} \sqrt{(G \varphi \sigma)^{-1/2}} + O[t^{7/2} \dots], \quad (6.59)$$

onde, ao tomarmos até o termo de segunda ordem presente na expansão, dispomos da relação,

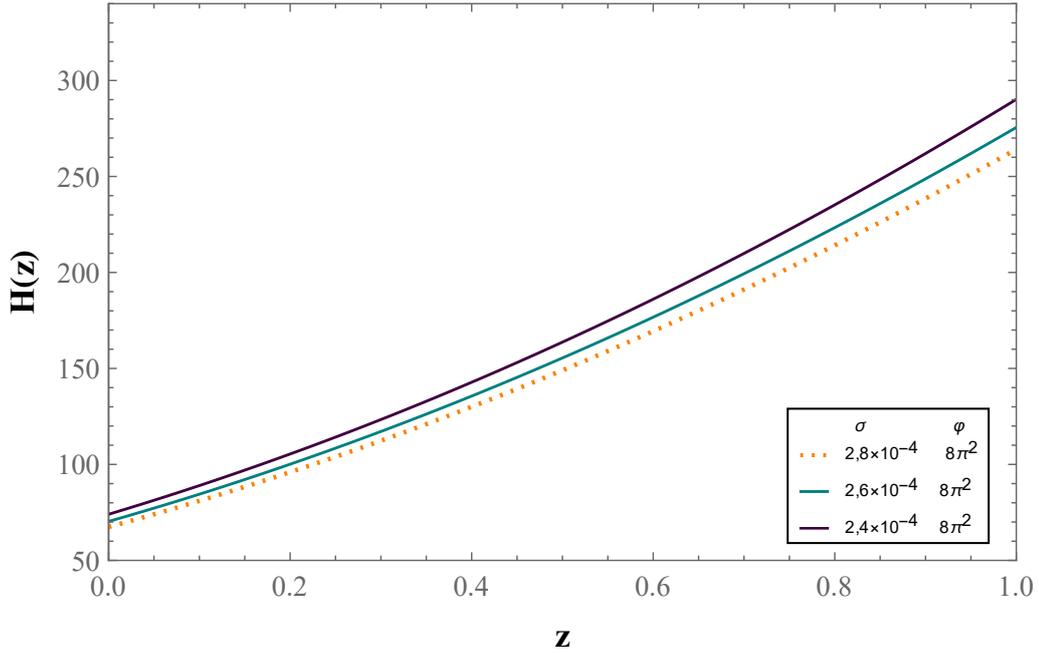
$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z} &= \zeta \sqrt{(G \varphi \sigma)^{-1/2} t} \\ t(z) &= \frac{(G \varphi \sigma)^{1/2}}{(1+z)^2 \zeta^2}. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Constituído o passo anterior, podemos através da substituição de $t \rightarrow t(z)$ dada pela nova relação vista logo acima, reescrever a Eq.(6.55) que defini o parâmetro de Hubble em nosso modelo, como

$$H(z) = \frac{\zeta^2 (1+z)^2}{2 (G \varphi \sigma)^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{G \varphi}{9 [\zeta (1+z)]^4} \frac{F[\beta]}{F[\alpha]} \right\}, \quad (6.61)$$

lembrando que as funções $F[\alpha]$ e $F[\beta]$ estão expostas na Seção.(6.3.1), com $\alpha = 1/4$ e $\beta = 5/4$.

Junto da Eq.(6.61), fazendo uso dos valores de $\zeta = 7\pi/5$ e $\varphi = 8\pi^2$ definidos sobre as discussões pertencentes a seção anterior, e assumindo como referência três distintos valores estimados de H_0 da recente literatura, sendo esses $H_0 = 67,4 \pm 0,5$ (AGHANIM, 2020), $H_0 = 70,3_{-5,0}^{+5,3}$ (HOTOKEZAKA, 2019) e $H_0 = 74,03 \pm 1,42$ (RIESS, 2019), podemos observar na Fig.(6.7) o comportamento relativo ao parâmetro $H(z)$, o qual, tomando $z = 0$, permitiu-nos definir com razoabilidade os três seguintes valores para o parâmetro dirigente do AGM, $\sigma = 2,8 \times 10^{-4}$, $2,6 \times 10^{-4}$ e $2,4 \times 10^{-4}$, de forma mútua a ordem de H_0 apresentado inicialmente.

FIGURA 6.7 – Comportamento do parâmetro de Hubble como função do *red-shift*

Contudo, após cumprir-se a análise sobre as previsões dos parâmetros cosmológicos $a(t)$, $H(t)$ e $q(t)$ de nosso modelo, foi possível verificar que a adequação dos parâmetros livres com os valores de $\zeta = 7\pi/5$ e $2,4 \times 10^{-4} \leq \sigma \leq 2,8 \times 10^{-4}$, em vista da conforme evolução do fator de escala e parâmetro de Hubble $H(z)$, e $\varphi = 8\pi^2$ consequente ao comportamento assintótico do parâmetro de desaceleração, estabelecem resultados capazes de avir às previsões feitas através do MCP de forma apropriada.

Obtido e visto os resultados do modelo cosmológico em $f(R, L_m)$ neste capítulo, mantendo-se em mente que nossa forma lagrangeana (L_m) tomada em um respectivo universo dominado por matéria ($p = 0$) assegura-nos de que o efeito de aceleração do Universo possui como natureza os termos extras proporcionados pela teoria, no seguinte capítulo, que passa a dispor, faremos as considerações e conclusões finais do mesmo.

7 Conclusões

Frisou-se no Capítulo 1 que, embora o MCP reúna grandes avanços e estabeleça conciliação entre previsões e observáveis decorrentes ao concomitante e contínuo esforço científico e tecnológico, atualmente o mesmo é dotado de grandes questões ainda em aberto.

Tendo em vista uma alternativa para responder esses impasses, as teorias alternativas da gravidade vêm tomando crescimento no meio acadêmico; nesta dissertação de mestrado fizemos o uso da teoria $f(R, L_m)$ (HARKO; LOBO, 2010), um formalismo que torna possível teorias de gravidade com acoplamentos não-mínimo entre geometria e matéria, para estabelecer um novo modelo cosmológico a fim de tratar o atual contexto problemático.

No Capítulo 2, fizemos uma breve revisão sobre as principais características e conceitos pertinentes ao desenvolvimento da RG. No Capítulo 3, explanamos a Cosmologia Clássica, buscando as principais características concernentes ao desenvolvimento de nosso trabalho, abordando assim as bases conceituais da dinâmica do MCP, junto de seus pilares fundamentais abarcando as necessárias noções sobre a descrição dos diferentes períodos do Universo. Por conseguinte, fomentado pelo passo anterior, no Capítulo 4, sintetizamos as heterogêneas fases cósmicas dirigindo-se a analisar não somente essa composição como um todo, mas sim explorando criticamente pontos estruturais de sua dinâmica, como a M_E e E_Λ .

No Capítulo 5, apresentamos a edificação matemática da teoria de gravidade $f(R, L_m)$, a qual foi efetivada na sequência com o Capítulo 6, onde inicialmente aderindo-se a métrica de FRW plana sem uma definição específica para forma de $f(R, L_m)$ junto da Eq.(5.8) nos permitiu encontrar as EsC de nosso modelo, vistas em (6.14), (6.22) e (6.24).

Definido na Seção 6.2, através das Eqs.(6.25 - 6.28), as EsF sobre a forma específica de $f(R, L_m)$ para o modelo, pode-se na Seção 6.3 assumindo um universo dominado por matéria chegar às EsF (6.29 - 6.30) em sua forma final, as quais juntas da equação da conservação de $T^{\mu\nu}$ possibilitou encontrar a solução para $\rho(t)$ descrita pela Eq.(6.48). Na seguinte subseção 6.3.1, obtivemos a Eq.(6.52) como solução para o fator de escala, que consequentemente tornou possível as soluções para os parâmetros de Hubble (6.55), visto na subseção 6.3.2 e desaceleração (6.56) do Universo na subseção 6.3.3.

Junto desses resultados analisamos a viabilidade/consistência de nosso modelo para descrição da atual fase de EA do Universo, através das figuras vistas no capítulo anterior e que serão conclusas a seguir.

Inicialmente compulsando o parâmetro φ , defrontamos sua influência expondo sua variação através das Figs.(6.1-6.3-6.5), onde nos foi permitido a princípio verificar que valores de $\varphi \lesssim 0,24$, além de exibir um comportamento aproximadamente linear desagradável para a evolução do fator de escala, tais soluções expressamente não dispõem da previsão esperada para o valor de $q < 0$; notando-se ainda por meio do comportamento de $H(t)$ que soluções estabelecidas dentre valores $\pi^2 < \varphi < 8\pi^2$, levam-nos a um cenário inadequado frente às previsões do MCP, dado que as mesmas apresentam $H(t) \rightarrow 0$, como já discutido na respectiva seção. Portanto, como efeito de tal investigação, obteve-se um limite inferior para o parâmetro φ ligado a efetividade do modelo em permitir ou não, uma solução acelerada para o Universo.

Na Fig.(6.2), foi possível inferir que o ajuste dos parâmetros $\zeta = 7\pi/5$, $\varphi = 8\pi^2$ e $2,5 \times 10^{-4} \leq \sigma \leq 3,5 \times 10^{-4}$, espaço limitado pelo delineamento das curvas em azul e vermelho, permitem uma solução adequada para a evolução do fator de escala, já que o mesmo deve apresentar tanto um comportamento inicial de $a(t) \propto t^{2/3}$, quanto uma concomitante evolução $\propto \dot{a} > 0$ e $\ddot{a} < 0$, seguido de $\dot{a} > 0$ e $\ddot{a} > 0$ para indicar uma possível EA; junto da Fig.(6.6) pudemos verificar que o ajuste estabelecido sobre o parâmetro σ está diretamente relacionado, de forma reguladora, com a taxa de variação de $q(t)$.

Sobre a análise da Fig.(6.4), que evidencia o comportamento do parâmetro de Hubble como uma função do tempo, foram vistas dentre todas as soluções impostas por $\varphi = 8\pi^2$ resultados favoráveis entre o esperado e previsto, corroborando com as observações feitas através de $a(t)$ e $q(t)$, nas figuras (6.2-6.6).

Na subseção (6.3.4), objetivando restringir o parâmetro responsável pelo AGM do modelo, com moderada aproximação, pode-se por meio da solução encontrada para $H(z)$ descrito pela Eq.(6.61) e a identificação de conceituadas estimativas para H_0 , definir o limite de $2,4 \times 10^{-4} \leq \sigma \leq 2,8 \times 10^{-4}$ mais apropriado para o parâmetro.

Consequente a crítica investigação dos resultados, compete-nos explicar ao leitor que integralmente as previsões de nosso modelo apontam uma notável seguridade, haja vista que todas¹ as soluções estabelecidas por ele, além de demonstrarem um adequado comportamento (acima narrado) para o fator de escala e o parâmetro de Hubble, tais soluções estão atreladas a outras duas importantes características. A primeira delas trata-se do limite superior e inferior² definido pela solução do parâmetro de desaceleração, o qual

¹Soluções através da definição dos parâmetros $\zeta = 7\pi/5$, $\varphi = 8\pi^2$ e $2,4 \times 10^{-4} \leq \sigma \leq 2,8 \times 10^{-4}$.

²Definido como $\varphi = 8\pi^2$, levando-se em conta que mesmo se tal valor for excedido, $q(t)$ permanece limitado a -1 .

radica do regime desacelerado que compõem a era da radiação, com $q(t) = 1$, e matéria representada por $q(t) = 0,5$, seguidos do atual momento cósmico (acelerado) indicado por $q_0(t) \sim -0,53$ e assintótica evolução de $q = -1$, demonstrando, portanto, relevante afinação com as previsões do atual MCP. Em segundo temos que foi possível de forma relativa restringir o parâmetro de AGM no modelo por meio de estimativas de H_0 através de dados observacionais de $H(z)$.

Em síntese final nesta dissertação de mestrado, é razoável destacar que, após feito o desenvolvimento estrutural do modelo e vistos suas respectivas soluções através das figuras contidas no capítulo anterior, ao considerarmos os limites estabelecidos para ζ , φ e σ , com relativa ponderação verificamos que suas previsões são fisicamente viáveis sobre os atuais processos ligados a EA do Universo. Contudo, feito tais considerações, cabe-nos lembrar que apesar de o MCP prever com boa concordância os observáveis, sua estrutura possui a necessária adesão de $\sim 68,5\%$ do que constitui o cosmos, ser formado por um ente exótico o qual até o momento não possui verificação direta.

Ocorrência que passa a ser desnecessária através do modelo aqui originado, decorrente a distinta base teórica entre ambos, sendo o MCP estruturado sobre a RG, enquanto o nosso fundamentado sobre a teoria de gravidade $f(R, L_m)$ (HARKO; LOBO, 2010), que junto de sua qualidade em tornar possível formas mais gerais para a estrutura da teoria de gravitação, aqui foi empregada sob uma forma de acoplamento não-mínimo entre geometria e matéria, que se mostrou capaz de reproduzir de forma coerente os resultados do MCP sem a necessidade³ de incorporar-se a E_Λ ; esse, o ponto de maior relevância e tensionado por nosso modelo.

Todavia, feita a presente análise onde buscamos tornar compatíveis os resultados (parâmetros) de nosso modelo para com os preditos através do MCP, foi possível apenas estabelecer parcialmente a competência de nosso modelo alternativo à gravitação, tendo em vista que devemos aprofundar nossa proposta gravitacional para outras vertentes, como o estudo de curvas de rotação de galáxias, testes de supernovas e oscilações acústicas de bárions tendo como objetivo verificar a consistência que outorga tal modelo.

³Haja vista que nosso modelo foi capaz de estabelecer o atual cenário cosmológico com apenas uma equação de estado, $w = 0$.

Referências

ABBOTT, B. P. *et al.* Gw151226: Observation of gravitational waves from a 22-solar-mass binary black hole coalescence. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 116, p. 241103, Jun 2016. 30

ABBOTT, B. P. *et al.* Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 116, p. 061102, Feb 2016. 14, 30

ABBOTT, B. P. *et al.* Gw170814: A three-detector observation of gravitational waves from a binary black hole coalescence. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 119, p. 141101, Oct 2017. 30

ABBOTT, B. P. *et al.* Gw170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 119, p. 161101, Oct 2017. 30

ABBOTT, R. *et al.* Gw190814: Gravitational waves from the coalescence of a 23 solar mass black hole with a 2.6 solar mass compact object. **The Astrophysical Journal**, American Astronomical Society, Jun 2020. 49

ACERNESE, F. *et al.* The virgo status. **Classical and Quantum Gravity**, v. 23, Set 2006. 30

ACKERMANN, M. *et al.* Searching for dark matter annihilation from milky way dwarf spheroidal galaxies with six years of fermi large area telescope data. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 115, p. 231301, Nov 2015. 16, 43

ADE, P. A. R. *et al.* Planck 2015 results. xiii. cosmological parameters. **a.a.p.**, v. 594, p. A13, Sep 2016. 42, 65

AGHANIM, N. *et al.* Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. **Astron. Astrophys.**, v. 641, p. A6, 2020. 67

AKERIB, D. S. *et al.* First results from the lux dark matter experiment at the sanford underground research facility. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 112, p. 091303, Mar 2014. 16, 43

AKIYAMA, K. *et al.* First m87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole. **The Astrophysical Journal Letters**, The American Astronomical Society, v. 875, p. L1, Abr 2019. 14, 30

- AKRAMI, Y. *et al.* Planck 2018 results. i. overview and the cosmological legacy of planck. **aap**, v. 594, p. A1, Sep 2016. ix, 32
- ARAÚJO J. C. N. DE; COELHO, J. G. C. C. A. Gravitational wave emission by the high braking index pulsar (psr) j1640-4631. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, Jul 2016. 30
- AZEVEDO, R.; PARAMOS, J. Dynamical analysis of generalized $f(r,l)$ theories. **Physical Review D**, v. 94, 09 2016. 49
- BERTOLAMI, O.; LOBO, F. S. N.; PÁRAMOS, J. Nonminimal coupling of perfect fluids to curvature. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, Set 2008. 54
- BERTOLAMI, O. *et al.* Extra force in $f(r)$ modified theories of gravity. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 75, p. 104016, May 2007. 49
- BLUMENTHAL G. R.; FABER, S. M. P. J. R.; REES, M. J. Formation of galaxies and large scale structure with cold dark matter. **Nature**, v. 311, p. 517–525, 1984. 42
- BOHMER C.G.; HARKO, T.; LOBO, F. The generalized virial theorem in $f(r)$ gravity. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, Mar 2008. 17
- BORLAF, A. *et al.* The missing light of the hubble ultra deep field. **Astronomy and Astrophysics**, EDP Sciences, v. 621, p. A133, 2019. 14
- BOVY, J. *et al.* J. The milky way’s circular-velocity curve between 4 and 14 kpc from apogee data. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 759, n. 2, p. 131, Oct 2012. 15
- CAPOZZIELLO S.; CARDONE, V. F.; TROISI, A. Low surface brightness galaxy rotation curves in the low energy limit of $f(r)$ gravity: no need for dark matter? **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 375, n. 4, p. 1423–1440, Fev 2007. 16
- CARROLL, S. M.; PRESS, W. H.; TURNER, E. L. The cosmological constant. **araa**, Jan 1992. 45
- CARVALHO, G. *et al.* Stellar equilibrium configurations of white dwarfs in the $f(r, t)$ gravity. **Eur. Phys. J. C**, 2017. 54
- CARVALHO, G. *et al.* Hydrostatic equilibrium configurations of neutron stars in a non-minimal geometry-matter coupling theory of gravity. **Eur. Phys. J. C**, v. 80, n. 5, 2020. 49
- CHANDRASEKHAR, S. The highly collapsed configurations of a stellar mass (second paper). **mnras**, v. 95, p. 207–225, Jan 1935. 43
- CUZINATTO, R. *et al.* Classic tests of general relativity described by brane-based spherically symmetric solutions. **The European Physical Journal C**, v. 74, Mai 2014. 28
- D’INVERNO, R. **Introducing Einstein’s Relativity**. New York: Oxford University Press, 1992. 20, 22

- DODELSON, S. **Modern Cosmology**. San Diego, CA: Academic Press, Elsevier Science, 2003. 35, 38
- EINSTEIN, A. Zur elektrodynamik bewegter korper. **Annalen der Physik**, v. 17, p. 891, 1905. 19
- EINSTEIN, A. Die feldgleichungen der gravitation. **Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften**, Berlin, p. 844–847, Nov 1915. 14
- EINSTEIN, A. Explanation of the perihelion motion of mercury from the general theory of relativity. **Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)**, p. 831–839, 1915. 28
- EINSTEIN, A. Die grundlage der allgemeinen relativitatstheorie. **Annalen der Physik**, n. 7, p. 769–822, Mar 1916. 21
- EINSTEIN, A. Naeherungsweise integration der feldgleichungen der gravitation. **Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften**, Berlin, p. 688, 1916. 30
- EINSTEIN, A. Kosmologische betrachtungen zur allgemeinen relativitatstheorie. **Sitzungsberichte der Koniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)**, p. 142–152, Jan 1917. 14
- FARAONI, V. **Cosmology in Scalar-Tensor Gravity**. [S.l.]: Springer Netherlands, 2004. (Fundamental Theories of Physics). 16
- FARAONI, V. Lagrangian description of perfect fluids and modified gravity with an extra force. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, Dez 2009. 54
- GUTH, A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 23, p. 347–356, Jan 1981. 39, 41
- HALL, A. R. Galileo and the science of motion. **The British Journal for the History of Science**, v. 2, n. 3, p. 185–199, Jun 1965. 20
- HARKO, T.; LOBO, F. S. N. $f(R, Lm)$ gravity. **The European Physical Journal C**, v. 70, n. 1, p. 373–379, Nov 2010. 17, 18, 46, 47, 49, 69, 71
- HARKO, T.; MORAES, P. Comment on “reexamining $f(r, t)$ gravity”. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, May 2020. 54
- HARKO, T. *et al.* $f(R, T)$ gravity. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 84, p. 024020, Jul 2011. 17
- HARKO T.; LOBO, F. M. M.; SUSHKOV, S. Modified-gravity wormholes without exotic matter. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 87, Mar 2013. 49
- HINSHAW, G. *et al.* Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Cosmological parameter results. **Astrophys. J. Suppl.**, v. 208, p. 19, 2013. 15
- HOTOKEZAKA, K. *et al.* A hubble constant measurement from superluminal motion of the jet in gw170817. **Nature Astronomy**, Jul 2019. 67

- HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Academy of Sciences, v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929. 14, 43
- JESUS, J. F. *et al.* New coupled quintessence cosmology. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 78, Set 2008. 65
- KARUKES, E. *et al.* A robust estimate of the milky way mass from rotation curve data. 2020. 15
- KISAK, P. **Loop Quantum Gravity: A Theory of Quantum Space-time**. [S.l.]: CreateSpace Independent Publishing Platform, 2016. 16
- KOIVISTO, T. A note on covariant conservation of energy–momentum in modified gravities. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 23, n. 12, p. 4289–4296, jun 2006. 49
- LAHAV, O.; LIDDLE, A. R. The cosmological parameters (2019). Dez 2019. Review of Particle Physics 2020. 65
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **The Classical Theory of Fields**. 4. ed. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 1980. 27
- LIDDLE, A. **An introduction to modern cosmology; 3rd ed.** Chichester: Wiley, 2015. 15
- LINARES, M.; SHAHBAZ, T.; CASARES, J. Peering into the dark side: Magnesium lines establish a massive neutron star in PSR j2215+5135. **The Astrophysical Journal**, American Astronomical Society, v. 859, n. 1, may 2018. 49
- LINDER, E. V. Einstein’s other gravity and the acceleration of the universe. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 81, p. 127301, Jun 2010. 16
- MARTINS, C. F.; SALUCCI, P. Analysis of rotation curves in the framework of $f(R)$ gravity. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 381, n. 3, p. 1103–1108, Out 2007. 16
- MCMAHON, D.; ALSING, P. **Relativity Demystified**. U.S: McGraw-Hill Professional, 2005. 25
- MONTELONGO, N. G.; LOBO, F. Nonminimal curvature–matter coupled wormholes with matter satisfying the null energy condition. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 28, n. 8, p. 085018, Mar 2011. 49
- MORAES, P. Cosmology from induced matter model applied to 5d $f(r,t)$ theory. **Astrophysics and Space Science**, v. 352, p. 273, 07 2014. 17
- MORAES P.; ARBANIL, J.; MALHEIRO, M. Stellar equilibrium configurations of compact stars in $f(r,t)$ theory of gravity. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, n. 06, p. 005–005, Jun 2016. 17
- MORAES P.; CORREA, R.; LOBATO, R. Analytical general solutions for static wormholes in $f(r,t)$ gravity. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, jul 2017. 17

- MORAES P.; DE PAULA, W.; CORREA, R. A. C. Charged wormholes in $f(r,t)$ -extended theory of gravity. **International Journal of Modern Physics D**, v. 28, n. 08, 2019. 17
- MUBASHER J.; MOMENI, D.; MYRZAKULOV, R. Violation of the first law of thermodynamics in $f(r,t)$ gravity. **Chinese Physics Letters**, IOP Publishing, Oct 2012. 17
- NAIK, A. *et al.* Imprints of chameleon $f(r)$ gravity on galaxy rotation curves. **mnras**, Nov 2018. 17
- NEWTON, I. **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica**. 1 ed. ed. London: William Dawson and Sons, 1687. 20
- NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. Modified $f(r)$ gravity consistent with realistic cosmology: From a matter dominated epoch to a dark energy universe. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 74, p. 086005, Oct 2006. 16
- NOUREEN, I. *et al.* Shearfree condition and dynamical instability in $f(r, t)$ gravity. **European Physical Journal C**, v. 75, 04 2015. 17
- OORT, J. H. Some peculiarities in the motion of stars of high velocity. **bain**, v. 1, p. 133, Sep 1922. 41
- ORFEU, B. *et al.* Gravitational waves in theories with a non-minimal curvature-matter coupling. **European Physical Journal C**, v. 78, n. 4, p. 303, Apr 2018. 49
- PAIS, A. **Subtle is the Lord: The Science and the Life of Albert Einstein**. [S.l.]: Oxford University Press, USA, 1982. 29
- PEACOCK, J. A. *et al.* A measurement of the cosmological mass density from clustering in the 2df galaxy redshift survey. **Nature**, v. 410, p. 169–173, 03 2001. ix, 31
- PENZIAS, A.; WILSON, R. W. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. **a.p.j**, v. 142, p. 419–421, Jul 1965. 41
- PEREIRA, S. *et al.* Acceleration in friedmann cosmology with torsion. **Eur. Phys. J. C**, v. 79, n. 11, 2019. 16
- PERKINS, D. H. **Particle Astrophysics**. 2 ed. ed. [S.l.]: OUP Oxford, 2008. (Oxford Master Series in Physics). 42
- PERLMUTTER, S. *et al.* Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 517, n. 2, p. 565–586, jun 1999. 15, 43
- POURHASSAN, B.; RUDRA, P. Thermodynamics in $f(r, \mathcal{L})$ theories: Apparent horizon in the flrw spacetime. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 101, Apr 2020. 49
- RICCI M.M.G.; CIVITA, L. Methodes de calcul differentiel absolu et leurs applications. **Mathematische Annalen**, v. 54, p. 125–201, 1901. 22
- RIESS, A. G. *et al.* Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 116, n. 3, p. 1009–1038, sep 1998. 15, 43

- RIESS, A. G. *et al.* Large magellanic cloud cepheid standards provide a 1% foundation for the determination of the hubble constant and stronger evidence for physics beyond λ_{cdm} . **Astrophys. J.**, v. 876, 2019. 67
- ROVELLI, C.; VIDOTTO, F. **Covariant Loop Quantum Gravity: An Elementary Introduction to Quantum Gravity and Spinfoam Theory**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2015. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). 16
- RUBIN, V. C. *et al.* Extended rotation curves of high-luminosity spiral galaxies. i-the angle between the rotation axis of the nucleus and the outer disk of ngc 3672. **The Astrophysical Journal**, v. 217, p. L1–L4, 1977. 15, 41
- RUBIN, V. C. *et al.* Extended rotation curves of high-luminosity spiral galaxies. ii-the anemic sa galaxy ngc 4378. **The Astrophysical Journal**, v. 224, p. 782–795, 1978. 15
- RYDEN, B. **Introduction to Cosmology**. San Francisco: Addison Wesley, 2003. 244 p. 15, 39, 58, 65
- SABBATA, V. de; GASPERINI, M. **Introduction to gravitation**. [S.l.]: World Scientific, 1985. 27
- SCHUTZ, B. F. Perfect fluids in general relativity: Velocity potentials and a variational principle. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, Dec 1970. 54
- SCHWARZSCHILD, K. Uber das gravitationsfeld einer kugel aus inkompressibler flussigkeit nach der einsteinschen theorie. **Berl. Ber.**, Koniglich Preussische Akademie der Wissenschaften, Berlin, p. 424–434, 1916. 30
- SCHWARZSCHILD, K. Uber das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie. **Sitzungsberichte der Koniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften**, Berlin, p. 189–196, Jan 1916. 30
- SEABORN, B. J. **Hypergeometric Functions and Their Applications**. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 1991. 60
- SITTER, W. de. On einstein’s theory of gravitation and its astronomical consequences. first paper. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Jul 1916. 64
- SOTIRIOU, T. P.; FARAONI, V. $f(R)$ theories of gravity. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 82, p. 451–497, Mar 2010. 16
- TSUJIKAWA, S. Quintessence: a review. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 30, n. 21, p. 214003, Oct 2013. 17
- VELTEN, H.; CARAMÈS, T. Cosmological inviability of $f(r, t)$ gravity. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, Jun 2017. 54
- WANG, J. *et al.* Conditions and instability in $f(r)$ gravity with non-minimal coupling between matter and geometry. **European Physical Journal C**, p. 541–546, 10 2010. 49
- WEINBERG, S. The cosmological constant problem. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 61, p. 1–23, Jan 1989. 15, 45

WESS, J.; BAGGER, J. **Supersymmetry and supergravity**. [S.l.]: Princeton university press, 1992. 43

YOUSAF, Z. *et al.* Causes of irregular energy density in $f(r,t)$ gravity. **prd**, Jun 2016. 17

YOUSAF, Z. *et al.* Existence of compact structures in $f(r,t)$ gravity. **The European Physical Journal C**, Apr 2018. 17

ZELDOVICH, Y. Cosmological constant and elementary particles. **JETP Lett**, v. 6, p. 316, 1967. 45

ZWICKY, F. Die rotverschiebung von extragalaktischen nebeln. **Helvetica Physica Acta**, v. 6, p. 110, 1933. 41

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO DM	2. DATA 11 de agosto de 2020	3. DOCUMENTO N° DCTA/ITA/DM-045/2020	4. N° DE PÁGINAS 78
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: Teorias de gravidade com acoplamento não-mínimo entre geometria e matéria como alternativa para a energia escura			
6. AUTOR(ES): Bruno da Silva Gonçalves			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: Cosmologia; Energia Escura; Teorias Alternativas, Dinâmica do Universo			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Cosmologia; Matéria obscura; Gravidade; Universo; Física			
10. APRESENTAÇÃO:		<input checked="" type="checkbox"/> Nacional <input type="checkbox"/> Internacional	
ITA, São José dos Campos. Curso de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Física Nuclear. Orientador: Prof. Dr. Pedro Henrique Ribeiro da Silva Moraes. Defesa em 16/07/2020. Publicada em 2020.			
11. RESUMO: Em virtude do comportamento contraintuitivo da gravidade, que como força atrativa deveria frear a expansão do Universo, ao tomarmos como referência o atual Modelo Cosmológico Padrão, nos deparamos com a necessária imposição de que ~ 95% do que constitui o Universo seja formado por entes exóticos (matéria e energia escura). Contudo, desde que se somou esse problemático cenário ao caso da Relatividade Geral não ser a teoria final da gravitação, vários modelos alternativos de gravidade vêm sendo propostos de modo a explicar tais aspectos inconsonantes. Na presente dissertação de mestrado, motivada por esse contexto, a expansão acelerada do Universo fora atacada a partir da teoria de gravidade $f(R, L_m)$, inicialmente proposta pelos Drs. Tiberiu Harko e Francisco S. N. Lobo, sendo uma ampla generalização da ação de Einstein-Hilbert, a qual mediante a uma forma funcional específica que admite o acoplamento não-mínimo entre geometria e matéria, permitiu o desenvolvimento de um novo modelo cosmológico, tendo-se em vista a investigação de seus respectivos parâmetros ligados a estrutura dinâmica do Universo. Diante à análise dos resultados fornecidos por nosso modelo, decorrente a possível restrição dos parâmetros ζ , φ e σ (e sem a necessidade de assumir o “setor escuro”), nota-se uma relevante consonância com as predições já estabelecidas na literatura, referentes aos distintos períodos que o Universo evoluiu.			
12. GRAU DE SIGILO: <input checked="" type="checkbox"/> OSTENSIVO <input type="checkbox"/> RESERVADO <input type="checkbox"/> SECRETO			