

Dissertação apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Física Nuclear.

Odilon Ardizzon Mattos

EFEITOS DO CONFINAMENTO NO MODELO PNJL NO REGIME DE TEMPERATURA NULA

Dissertação aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:



Prof. Dr. Odilon Lourenço

Orientador



Prof. Dr. Tobias Frederico

Coorientador

Prof. Dr. Pedro Teixeira Lacava

Pró-Reitor de Pós-Graduação

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP - Brasil
2019

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Divisão de Informação e Documentação

Mattos, Odilon Ardizzon
Efeitos do confinamento no modelo PNJL no regime de temperatura nula / Odilon Ardizzon
Mattos.
São José dos Campos, 2019.
99f.

Dissertação de Mestrado – Curso de Física. Área de Física Nuclear – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2019. Orientador: Prof. Dr. Odilon Lourenço. Coorientador: Prof Dr Tobias Frederico.

1. Transição de fase. 2. Cromodinâmica quântica. 3. Quarks. 4. Física de partículas. 5. Física.
I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Título.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

MATTOS, Odilon Ardizzon. **Efeitos do confinamento no modelo PNJL no regime de temperatura nula**. 2019. 99f. Dissertação de Mestrado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Odilon Ardizzon Mattos

TÍTULO DO TRABALHO: Efeitos do confinamento no modelo PNJL no regime de temperatura nula.

TIPO DO TRABALHO/ANO: Dissertação / 2019

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta dissertação e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação pode ser reproduzida sem a autorização do autor.

Odilon Ardizzon Mattos
Rua Jordão Monteiro Ferreira , 33
12.245-089 – São José dos Campos–SP

EFEITOS DO CONFINAMENTO NO MODELO PNJL NO REGIME DE TEMPERATURA NULA

Odilon Ardizzon Mattos

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr.	Wayne Leonardo Silva de Paula	Presidente	-	ITA
Prof. Dr.	Odilon Lourenço	Orientador	-	ITA
Prof. Dr.	Tobias Frederico	Coorientador	-	ITA
Profa. Dra.	Dyana Cristine Duarte	Membro Interno	-	ITA
Prof. Dr.	Antonio Delfino Junior	Membro Externo	-	UFF

Dedico este trabalho à minha família.
Espero deixá-los orgulhosos depois de
todo o esforço pelo qual passaram para
eu estar aqui.

Agradecimentos

Agradeço antes de tudo aos meus familiares que possibilitaram a realização deste grande feito em minha vida. Mesmo nos momentos mais difíceis desta jornada não deixaram de me apoiar e incentivar. À eles estas palavras de agradecimento não são suficientes e não há como expressar o quão grande é minha gratidão por tudo que eles fizeram e deixaram de fazer para que eu pudesse realizar esta conquista.

Agradeço a grande oportunidade e privilégio que os professores Odilon e Tobias me proporcionaram ao serem meus orientadores durante este trabalho e por me mostrarem como é difícil, porém glorioso, realizar um trabalho científico de alto nível.

Agradeço também a todos os professores que tive contato na instituição. Um agradecimento especial aos professores Brett, Malheiro, Wayne, Marcelo e Tobias que lecionaram excelentes disciplinas durante meu tempo no ITA. A sabedoria e conhecimento que adquiri com vocês é formidável e inestimável, e um dia espero deixá-los orgulhosos deste aluno que um dia frequentou vossas aulas. Deixo também meus agradecimentos aos outros professores que conheci ao longo desta jornada, a interação que tive com estes foi de suma importância no crescimento como pessoal e profissional. Um agradecimento especial aos meus professores da graduação Filipe e Fernando, vocês me mostraram o caminho para chegar onde estou hoje como físico, sem a participação de vocês nesta história eu não teria chegado até aqui.

Agradeço aos amigos e colegas que fiz nestes anos que estive no ITA, espero poder reencontrá-los algum dia. Um agradecimento especial aos amigos Abigail, Bruno, Estevão, George, Juliano, Marcelo, Natan, Renata, Rômulo e Sarah que me ajudaram e apoiaram, principalmente nos momentos mais difíceis. A amizade de vocês é algo que não tem preço, espero sempre poder contar com vocês.

Por último, mas não menos importante, agradeço ao apoio financeiro que viabilizou a realização deste trabalho, dado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e pelo Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Física Nuclear e Aplicações (INCT-FNA). Agradeço também ao ITA, essa prestigiosa instituição, pelo acolhimento em seu programa de pós-graduação em Física.

*“Lembre-se que as pessoas podem tirar tudo de você,
menos o seu conhecimento.”*

— ALBERT EINSTEIN

Resumo

O Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio (PNJL) é um modelo efetivo de quarks que incorpora os efeitos do desconfinamento no modelo original de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) através da inclusão do chamado laço de Polyakov (Φ) no regime de temperatura finita. Entretanto, em temperatura nula, a estrutura do modelo PNJL perde totalmente a informação do laço de Polyakov e, suas equações tornam-se as mesmas em comparação às do modelo NJL. Nesta dissertação, propomos uma variação nas magnitudes dos acoplamentos escalar e vetorial da versão de dois sabores do modelo PNJL, tornando-as dependentes do laço de Polyakov, com a única imposição de que todas as interações desapareçam na fase desconfiada (regime de quarks livres). Acrescentamos também um termo dependente de Φ no grande potencial termodinâmico do modelo, com o objetivo de favorecer soluções não nulas para Φ e também de limitá-lo ao valor $\Phi = 1$, facilitando a identificação da fase confinada/desconfinada. Como consequência de tais modificações, todas as equações do modelo PNJL em temperatura nula passam a registrar a dependência com o laço de Polyakov, diferentemente do que acontece originalmente. Chamamos essa nova versão de modelo PNJL0. Discutimos aqui sua termodinâmica, com atenção especial às transições de fase de primeira ordem e à fase quarkônica presentes agora em $T = 0$.

Abstract

The Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio (PNJL) is an effective quark model incorporating confinement effects in the original Nambu-Jona-Lasinio (NJL) model one from the inclusion of the Polyakov loop (Φ) at finite temperature regime. However, at zero temperature regime, the structure of the PNJL model completely loses information on the Polyakov loop. Its equations become the same as the NJL model. In this work, we propose a modification in scalar and vector coupling strengths of the two flavors PNJL model by making them dependent on the Polyakov loop. As a constraint, we require that all interactions disappear at deconfinement phase (free quarks regime). We also add a specific term dependent on Φ in the grand canonical potential of the model, that favors nonvanishing Φ solutions, and limits Φ to $\Phi = 1$, facilitating the identification of the confined/deconfinement phase. As a consequence, at zero temperature regime, all PNJL equations exhibit a Φ dependence, unlike the original model. We name this new version of the model as PNJL0. We discuss here its thermodynamics, focusing on the first order phase transitions and the quarkyonic phase, now present at $T = 0$.

Lista de Figuras

FIGURA 1.1 – Primeira proposta de diagrama de fases da matéria fortemente interagente: densidade bariônica (ρ_B) em função da temperatura (T). Nesse diagrama os quarks estão confinados na fase <i>I</i> (fase hadrônica) e desconfinados na fase <i>II</i> , figura adaptada de (CABIBBO; PARISI, 1975).	19
FIGURA 1.2 – Diagramas de fase esquemáticos da matéria fortemente interagente. Retirados das referências (MCLERRAN, 2009) e (COSTA <i>et al.</i> , 2018).	19
FIGURA 1.3 – Diagrama de composição de cores dos quarks. As cores vermelha, azul e verde remetem aos quarks. As cores amarela, ciano e magenta remetem aos anti-quarks. A região branca é a “cor” (neutra) de um bárion.	20
FIGURA 2.1 – $M \times \rho_B/\rho_0$ para os conjuntos de parâmetros dados na tabela 2.1. . .	34
FIGURA 2.2 – $\mathcal{E} \times \rho_B/\rho_0$ para os conjuntos de parâmetros dados na tabela 2.1. . .	34
FIGURA 2.3 – $P \times \rho_B/\rho_0$ para os conjuntos de parâmetros dados na tabela 2.1. . .	34
FIGURA 2.4 – Pressão em função do potencial químico (em cima) e, condensado de quarks em unidades de $\rho_{s(\text{vac})}$ (em baixo). Valores de G_V dados por $G_V = 0$ (a e b), $G_V = 0,25G_s$ (c e d), $G_V = 0,50G_s$ (e e f) e $G_V = G_s$ (g e h). Demais parâmetros dados pelo conjunto 2 da tabela 2.1.	35
FIGURA 2.5 – Potencial termodinâmico U em função de uma das suas variáveis intensivas P_S . Extraída da referência (CALLEN, 1998).	36
FIGURA 2.6 – Ω em função de μ para o conjunto 2 do modelo NJL e com $G_V = 0,25G_s$	37
FIGURA 2.7 – $\Omega \times \rho_s/\rho_{s(\text{vac})}$ para o conjunto 2 do modelo NJL e com $G_V = 0,25G_s$.	38
FIGURA 2.8 – Massa constituinte em função do potencial químico para $G_V = 0$. Demais parâmetros dados pelo conjunto 2 da tabela 2.1.	39

FIGURA 2.9 – Massa constituinte em função do potencial químico para $G_V = 0,25G_s$. Demais parâmetros dados pelo conjunto 2 da tabela 2.1.	39
FIGURA 2.10 – Massa constituinte em função do potencial químico para $G_V = 0,5G_s$. Demais parâmetros dados pelo conjunto 2 da tabela 2.1.	39
FIGURA 2.11 – Massa constituinte em função do potencial químico para $G_V = G_s$. Demais parâmetros dados pelo conjunto 2 da tabela 2.1.	40
FIGURA 2.12 – Densidade em função do potencial químico para $G_V = 0$. Demais parâmetros dados pelo conjunto 2 da tabela 2.1.	40
FIGURA 2.13 – Densidade em função do potencial químico para $G_V = 0,25G_s$. Demais parâmetros dados pelo conjunto 2 da tabela 2.1.	40
FIGURA 2.14 – Densidade em função do potencial químico para $G_V = 0,5G_s$. Demais parâmetros dados pelo conjunto 2 da tabela 2.1.	41
FIGURA 2.15 – Densidade em função do potencial químico para $G_V = G_s$. Demais parâmetros dados pelo conjunto 2 da tabela 2.1.	41
FIGURA 3.1 – Densidade de energia (ϵ), entropia (s) e pressão (p), como funções da temperatura (em unidades de T_0) para o setor puro de glúons descrito pelo potencial de Polyakov dado em (3.4). Figura extraída da referência (RATTI <i>et al.</i> , 2006).	44
FIGURA 3.2 – Potencial de Polyakov dado em (3.4) como função de Φ para duas temperaturas diferentes. Figura extraída da referência (RATTI <i>et al.</i> , 2006).	45
FIGURA 3.3 – Φ , em função da temperatura (em unidades de $T_c = T_0$), obtido a partir da solução da equação (3.6). Figura extraída da referência (RATTI <i>et al.</i> , 2006).	45
FIGURA 3.4 – Setor puro de glúons descrito pelo potencial de Polyakov dado em (3.7). Esquerda: densidade de energia (ϵ), entropia (s) e pressão (p), como funções de T (em unidades de $T_c = T_0$). \mathcal{U}/T^4 em função de Φ para alguns valores de T . Figura extraída da referência (RÖSSNER <i>et al.</i> , 2007).	46
FIGURA 4.1 – $\Omega \times \Phi$ do modelo PNJL0 com $G_V = 0$ e diferentes valores de a_3 . Potencial químico dado por $\mu = M_{\text{vac}} = 400$ MeV (esquerda) e $\mu = 405$ MeV (direita).	53

FIGURA 4.2 – $\Omega \times \Phi$ do modelo PNJL0 com $G_V = 0$ e diferentes valores de a_3 . Potencial químico dado por $\mu = 410$ MeV (esquerda) e $\mu = 415$ MeV (direita).	54
FIGURA 4.3 – $\Omega \times \Phi$ do modelo PNJL0 com $G_V = 0$ e diferentes valores de a_3 . Potencial químico dado por $\mu = 580$ MeV (esquerda) e $\mu = \Lambda = 587,9$ MeV (direita).	54
FIGURA 4.4 – $\Omega \times \Phi$ do modelo PNJL0 com $G_V = 0,25G_s$ e diferentes valores de a_3 . Potencial químico dado por $\mu = M_{\text{vac}} = 400$ MeV (esquerda) e $\mu = 405$ MeV (direita).	55
FIGURA 4.5 – $\Omega \times \Phi$ do modelo PNJL0 com $G_V = 0,25G_s$ e diferentes valores de a_3 . Potencial químico dado por $\mu = 410$ MeV (esquerda) e $\mu = 415$ MeV (direita).	55
FIGURA 4.6 – $\Omega \times \Phi$ do modelo PNJL0 com $G_V = 0,25G_s$ e diferentes valores de a_3 . Potencial químico dado por $\mu = 580$ MeV (esquerda) e $\mu = \Lambda = 587,9$ MeV (direita).	55
FIGURA 4.7 – Ω em função de μ para o conjunto 2 do modelo PNJL0 com $G_V = 0,25G_s$ e $a_3 = -0,1$	56
FIGURA 4.8 – Ω em função de μ para o conjunto 2 do modelo PNJL0 com $G_V = 0,25G_s$ e $a_3 = -0,1$ em um intervalo de μ que contém μ_{quiral} e μ_{conf}	57
FIGURA 4.9 – $\Omega \times \Phi$ para o conjunto 2 do modelo PNJL0 com $G_V = 0,25G_s$ e $a_3 = -0,1$	58
FIGURA 4.10 – Laço de Polyakov em função do potencial químico para o conjunto 2 do modelo PNJL0 com $G_V = 0,25G_s$ e $a_3 = -0,1$	58
FIGURA 4.11 – Condensado quiral (em unidades de $\rho_{s(\text{vac})}$) em função do potencial químico para o conjunto 2 do modelo PNJL0 com $G_V = 0,25G_s$ e $a_3 = -0,1$	59
FIGURA 4.12 – Diagrama de fases esquemático com a fase quarkiônica incluída. Extraída da referência (MCLERRAN <i>et al.</i> , 2009). O círculo indica o ponto crítico final (CEP).	60
FIGURA 4.13 – Uma opção (esquemática) para o diagrama de fases previsto pelo modelo PNJL0: dois pontos críticos finais.	60
FIGURA 4.14 – Φ em função de μ para o conjunto 2 do modelo PNJL0 com $G_V = 0,25G_s$ e diferentes valores de a_3	61
FIGURA 4.15 – Ω em função de μ para o conjunto 2 do modelo PNJL0 com $G_V = 0,25G_s$ e $a_3 = 0,026341$	62

FIGURA 4.16 $-\Phi$ em função de μ para o conjunto 2 do modelo PNJL0 com $a_3 = -0,1$ e diferentes valores de G_V	62
FIGURA 4.17 $-\Phi$ em função de μ para o conjunto 2 do modelo PNJL0 com $a_3 = -0,1$ e valores de G_V mais altos que os usados na figura 4.16.	63
FIGURA B.1 –Partículas de helicidade (a) positiva e (b) negativa.	79

Lista de Tabelas

TABELA 2.1 – Parametrizações do modelo NJL extraídas da referência (BUBALLA, 2005). Para cada conjunto de parâmetros (Λ , G_s e m) são listados também os respectivos valores de M_{vac} obtidos. Para a determinação de cada conjunto foram utilizados os valores de $\langle \bar{u}u \rangle_{\text{vac}}$, também listados, junto com os valores fixos de $m_\pi = 135$ MeV e $f_\pi = 92.4$ MeV. 33

TABELA 3.1 – Parâmetros dos potenciais dados nas equações (3.4) e (3.7). 46

Lista de Abreviaturas e Siglas

AdS/CFT	Anti-de Sitter/Conformal Field Theory
BNL	Brookhaven National Laboratory
CERN	Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire
CEP	Critical End Point
CSC	Color Superconducting
EDS	Equações de Dyson-Schwinger
EOS	Equações de Estado
LHC	Large Hadron Collider
LQCD	Lattice Quantum Chromodynamics
NJL	Modelo de Nambu-Jona-Lasinio
PNJL	Modelo de Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio
PNJL	Modelo <i>Entanglement</i> Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio
PNJL0	Modelo de Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio em $T = 0$
QCD	Quantum Chromodynamics
QED	Quantum Electrodynamics
QGP	Quark Gluon Plasma
RHIC	Relativistic Heavy Ion Collider
SPG	Setor Puro de Glúons

Lista de Símbolos

\mathcal{L}	Densidade de Lagrangiana
m	Massa corrente dos quarks
γ^μ	Matrizes de Dirac
ψ	Spinor de Dirac
M	Massa constituinte dos quarks
G_s	Constante de acoplamento escalar
G_V	Constante de acoplamento vetorial
ρ	Densidade de quarks
ρ_s	Densidade Escalar
$T_{\mu\nu}$	Tensor energia-momento
$g_{\mu\nu}$	Métrica do espaço de Minkowski
\mathcal{E}	Densidade de Energia
P	Pressão
k_F	Momento de Fermi
Λ	<i>Cutoff</i>
μ	Potencial Químico
Ω	Potencial Termodinâmico
Φ	Laço de Polyakov

Sumário

1	INTRODUÇÃO	18
2	DESCRIÇÃO DA QCD VIA MODELOS EFETIVOS	23
2.1	Simetria quiral e QCD	23
2.2	Modelo efetivo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL)	24
2.2.1	Aproximação de campo médio	25
2.2.2	Tensor energia-momento	27
2.2.3	Densidade de energia	28
2.2.4	Pressão	30
2.2.5	Análise do modelo	32
3	CONFINAMENTO NO MODELO NJL ($T \neq 0$)	42
3.1	Laço de Polyakov	42
3.2	Setor puro de glúons	44
3.3	Modelo Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio (PNJL)	47
4	CONFINAMENTO NO MODELO NJL ($T = 0$): MODELO PNJL0	50
4.1	Acoplamentos dependentes do laço de Polyakov	50
4.2	Novo potencial de Polyakov	52
4.3	Mínimos do grande potencial termodinâmico	53
4.4	Transição confinamento/desconfinamento	56
4.5	Fase quarkiônica	59
4.5.1	Efeito de a_3 e G_V	61
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	64

REFERÊNCIAS	67
APÊNDICE A – NOTAÇÕES E CONVENÇÕES	74
APÊNDICE B – SIMETRIA QUIRAL	78
APÊNDICE C – CÁLCULO DAS DENSIDADES E DO POTENCIAL QUÍMICO DO MODELO NJL	82
C.1 Densidade vetorial	82
C.2 Densidade escalar	86
C.3 Potencial químico	93
APÊNDICE D – SIMETRIA DE CENTRO	96
APÊNDICE E – TEORIA DE CAMPOS EM TEMPERATURA FINITA .	98

1 Introdução

A busca em compreender a natureza da matéria remonta à Grécia antiga com o surgimento da ideia do átomo (a menor porção possível, e indivisível, da matéria) e se estende até os dias atuais, nos quais a existência do núcleo atômico, dos hádrons, quarks e glúons é um consenso. Ao longo de todos esses anos, diversas teorias foram desenvolvidas para explicar a matéria convencional e suas interações e, atualmente, o chamado Modelo Padrão da Física de Partículas (TANABASHI, 2018), baseado no formalismo da Teoria Quântica de Campos, é o que fornece toda a descrição dos fenômenos do mundo microscópico. Um dos setores desse modelo é a Cromodinâmica Quântica (QCD, do inglês *Quantum Chromodynamics*), no qual é possível estudar, por exemplo, a matéria composta de quarks e glúons em situações extremas de temperatura e densidade. Acredita-se que nessas condições existam duas fases distintas, a saber, a fase hadrônica, na qual quarks e glúons estão confinados, e a chamada fase de plasma de quarks e glúons (QGP, do inglês *Quark Gluon Plasma*), na qual essas partículas estão livres (BUBALLA, 2005). Acredita-se que a fase QGP existiu no universo primordial instantes após o *Big Bang*, evento no qual temperatura e densidade eram extremamente altas. Estudos apontam que tal fase pode existir ainda nos dias de hoje, por exemplo, no interior de objetos muito compactos como as estrelas de nêutrons. Um dos principais objetivos do CERN (do francês, *Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire*) e do BNL (do inglês, *Brookhaven National Laboratory*) é o estudo experimental da fase QGP através dos aceleradores LHC (do inglês, *Large Hadron Collider*) e RHIC (do inglês, *Relativistic Heavy Ion Collider*), onde é possível criar experimentalmente condições propícias para se investigar esse estado da matéria.

O estudo da matéria mais fundamental e de suas fases termodinâmicas associadas é alvo de muito esforço teórico e experimental. O primeiro diagrama de fases para a matéria fortemente interagente foi proposto por Cabibbo e Parisi em 1975 na referência (CABIBBO; PARISI, 1975). Nela, os autores propõem esquematicamente a existência de somente duas fases, a hadrônica (quarks confinados) e a fase onde os quarks estariam desconfinados, como visto na figura a seguir. Atualmente, o diagrama de fases da matéria fortemente interagente mostra uma estrutura mais complexa do que a proposta na figura 1.1. Inclusive, algo que vem sendo amplamente discutido é a delimitação precisa da regiões onde a matéria apresenta transição de fase de primeira ordem (como a que ocorre com a água)

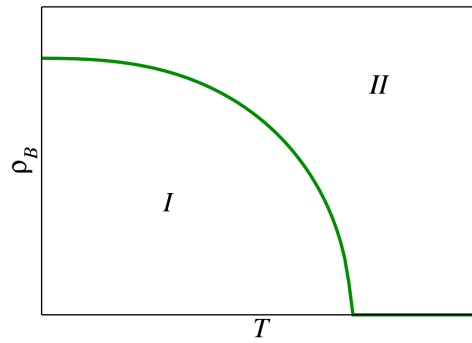


FIGURA 1.1 – Primeira proposta de diagrama de fases da matéria fortemente interagente: densidade bariônica (ρ_B) em função da temperatura (T). Nesse diagrama os quarks estão confinados na fase I (fase hadrônica) e desconfinados na fase II , figura adaptada de (CABIBBO; PARISI, 1975).

e de *crossover* (transição de fase sem descontinuidades). Ainda, discute-se também na literatura sobre o assunto de onde acontece a conexão entre as duas transições, ou em outras palavras, a localização do chamado ponto crítico final (CEP, do inglês *Critical End Point*). Estudam-se também as regiões onde a matéria pode apresentar supercondutividade de cor (CSC, do inglês, *Color Superconducting*), veja a referência (ALFORD *et al.*, 2008), ou mesmo a região conhecida como fase quarkônica (do inglês, *Quarkyonic Matter*), fase na qual os quarks já não apresentam massa, porém, ainda estão confinados no interior dos hádrons (MCLERRAN, 2008). A influência de campos magnéticos externos na termodinâmica dos sistemas submetidos à interação forte também é objeto de intenso estudo e análise. Uma figura ilustrativa dessa nova estrutura mais detalhada de fases da matéria é mostrada abaixo.

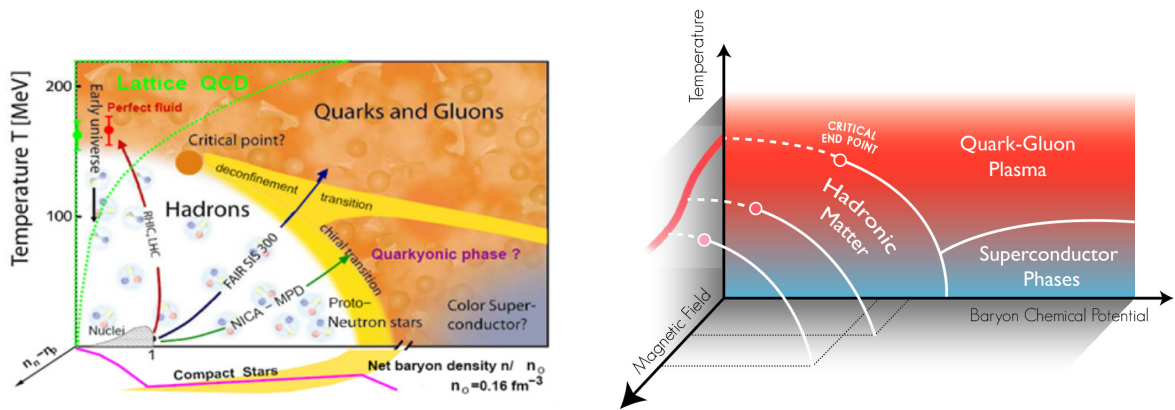


FIGURA 1.2 – Diagramas de fase esquemáticos da matéria fortemente interagente. Retirados das referências (MCLERRAN, 2009) e (COSTA *et al.*, 2018).

Voltando a atenção especificamente para a QCD, suas bases datam dos meados de 1964, período no qual Gell-Mann e Zweig propuseram que todos os hádrons eram compostos por partículas mais elementares chamadas de quarks (GRIFFITHS, 2008), que por sua vez

poderiam surgir em diferentes tipos, ou “sabores”, carregando uma chamada “carga de cor”, que podem ser vermelha, azul ou verde. As cargas de cor da QCD têm o mesmo papel da carga elétrica na Eletrodinâmica Quântica (QED, do inglês *Quantum Electrodynamics*). Na QED os mediadores das interações entre partículas eletricamente carregadas são os fótons, enquanto que na QCD a mediação da interação forte entre os quarks é feita através dos glúons. Podemos ver a organização de cores dos quarks no diagrama abaixo, onde confinados na matéria hadrônica, podem estar arranjados em pares (quark e anti-quark), chamados de mésons, ou em trios, chamados de bárions. Como em qualquer

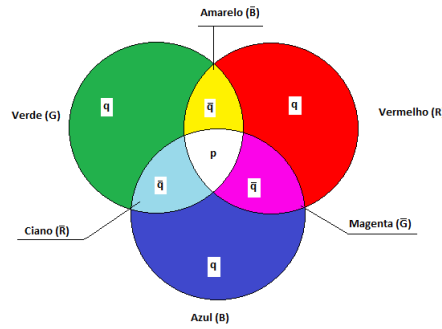


FIGURA 1.3 – Diagrama de composição de cores dos quarks. As cores vermelha, azul e verde remetem aos quarks. As cores amarela, ciano e magenta remetem aos anti-quarks. A região branca é a “cor” (neutra) de um bárion.

Teoria Quântica de Campos, a QCD pode ser descrita de forma mais quantitativa a partir de uma densidade lagrangiana, no caso dada por (WEINBERG, 1973; FRITZSCH *et al.*, 1973; HUANG, 1992)

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - \hat{m}) \psi - \frac{1}{4} G^{a\mu\nu} G_{\mu\nu}^a, \quad (1.1)$$

na qual ψ denota o campo de quarks com seis sabores possíveis (u, d, s, c, b, t) e três graus de liberdade de cores. Sendo $\hat{m} = \text{diag}_f(m_u, m_d, \dots)$ ¹ é a matriz de massa, independente da cor, com índices referentes ao sabor. Ainda, $D_\mu = \partial_\mu - ig\frac{\lambda^a}{2}A_\mu^a$, com A_μ^a representando o campo gluônico e λ^a os geradores do grupo $SU(3)$ (matrizes de Gell-Mann). O tensor $G_{\mu\nu}^a$ é dado por $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$, com g sendo o acoplamento e f^{abc} as constantes de estrutura da QCD. Em princípio, para se conseguir distinguir e estudar as diferentes fases da matéria fortemente interagente, bastaria um tratamento termodinâmico baseado na densidade lagrangiana dada pela equação (1.1). Porém, tecnicamente tal roteiro não é tão simples de ser implementado, visto que a QCD apresenta particularidades que dificultam sobremaneira seu estudo. A principal delas é o comportamento do acoplamento entre os quarks, que aumenta com a distância, ou equivalentemente, com a diminuição da energia. Esse efeito é justamente o oposto do registrado na QED. Uma

¹O índice f está relacionado ao sabor do quark

imagem possível de ser feita para ilustrar esse efeito é considerar dois quarks como se estivessem presos não por uma mola mas por um elástico. Na medida em que os quarks se afastam, o elástico vai intensificando a força aplicada e, quando os quarks se aproximam, a intensidade cai até se anular. No primeiro caso, temos o chamado “confinamento”: os quarks estão presos em uma certa região do espaço, ou seja, dentro de mésons ou bárions (região infra-vermelha, energia baixa, distância alta). No segundo, se dá a “liberdade assintótica”: os quarks estão livres de interação quando a distância entre eles é muito baixa (região ultra-violeta, energia alta). Devido a esse fenômeno, não é possível utilizar teoria de perturbação para a QCD na região onde seu acoplamento é muito alto. Métodos não perturbativos devem então ser levados em conta nesse caso.

Por exemplo, a QCD na rede (LQCD, do inglês *Lattice Quantum Chromodynamics*) (KOGUT, 1979; KOGUT, 1983; ROTHE, 2005) se baseia em simulações numéricas da ação da QCD (S_{QCD}) para resolver os funcionais geradores $Z = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{iS_{\text{QCD}}}$. Tal procedimento é feito a partir da discretização do espaço-tempo e da rotação de Wick, que leva Z em $Z = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S_{\text{QCD}}}$, tornando o problema equivalente a um problema de Mecânica Estatística, com as simulações numéricas feitas geralmente a partir dos métodos de Monte Carlo. Apesar de poderosa, a LQCD tem alguns problemas intrínsecos, tais como a necessidade de extrapolação de seus resultados para espaçamentos de rede tendendo a zero, o famoso “problema do sinal” (MUROYA *et al.*, 2003) e o requerimento de máquinas cada vez mais avançadas para a realização os cálculos que são inerentemente muito custosos do ponto de vista computacional. Outro método não perturbativo bastante usado é o uso das equações de Dyson-Schwinger (EDS) (ROBERTS; WILLIAMS, 1994; ALKOFER; SMEKAL, 2001), que a partir do funcional gerador Z deriva as equações de movimento para as funções de Green, que são um conjunto infinito de equações integrais que deve ser truncado em algum momento. Por esse motivo, as EDS também são conhecidas como as equações de Euler-Lagrange para uma determinada teoria, no caso a QCD. Tanto a LQCD quanto as EDS padecem do problema de serem formuladas no espaço euclidiano. Nesse sentido é difícil tais métodos reproduzirem por completo a QCD, que é descrita no espaço de Minkowski. Uma alternativa para esse problema é o uso da chamada representação de Nakanishi, construída com vistas à solução das EDS, ou da equação de Bethe-Salpeter, já no espaço de Minkowski (PAULA *et al.*, 2017; FREDERICO *et al.*, 2012; PIMENTEL; PAULA, 2016). Regras de soma (SHIFMAN *et al.*, 1979; REINDERS *et al.*, 1985) e a conexão entre teorias de calibre e de cordas também visam tratar a região infra-vermelha da QCD. Essa última foi introduzida por Gerard t’Hooft (HOOFT, 1993), sugerindo o cálculo analítico das amplitudes utilizando teorias de cordas, com o uso dos resultados em teorias de calibre (PAULA, 2010). Um mapeamento mais claro entre as duas teorias foi proposto em 1998 pelo físico argentino Juan Maldacena (MALDACENA, 1999), em sua famosa conjectura AdS/CFT (do inglês, *Anti-de Sitter/Conformal Field Theory*).

Outra forma de tratar a QCD em sua região não perturbativa é através de modelos efetivos, construídos de forma a reproduzirem ao máximo possível a fenomenologia da QCD, tais como suas simetrias, por exemplo. Nesse sentido, muitos modelos foram desenvolvidos e aprimorados. Dois deles serão objeto de nosso estudo nesta dissertação de mestrado: o modelo Nambu-Jona-Lasinio (NJL), e sua versão onde os efeitos da transição confinamento/desconfinamento dos quarks com inclusão de um campo efetivo para os glúons são considerados, o modelo Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio (PNJL). Essencialmente, trataremos esses modelos no regime de temperatura nula ($T = 0$). No capítulo 2 apresentaremos o modelo NJL e mostraremos como obter suas equações de estado a partir da densidade lagrangiana que o define, usando para isso a conhecida aproximação de campo médio. No capítulo 3 sua versão mais aprimorada, o modelo PNJL, será discutido. Mostraremos que no regime de temperatura nula essa versão se reduz ao modelo NJL anterior, ou seja, perdem-se os efeitos do confinamento adicionados no regime de temperatura finita ($T > 0$). E no capítulo seguinte proporemos uma alteração no modelo NJL em $T = 0$ de forma a evitar a perda desse efeito. Mostraremos as condições sob as quais é possível ainda tratar o modelo PNJL agora em $T = 0$. Por fim, no capítulo 4, daremos vez às nossas conclusões e perspectivas de aplicação do modelo proposto em trabalhos futuros.

O apêndice A desta dissertação contém as notações, convenções e definições usadas ao longo do texto. Os demais apêndices complementam temas abordados nos capítulos anteriores e estão assim organizados: O apêndice B versa sobre o conceito de simetria quiral em um modelo fermiônico. O apêndice C apresenta o cálculo das densidades vetorial e escalar do modelo NJL e de seu potencial químico. O apêndice D mostra o conceito de simetria de centro em um sistema bosônico e, finalmente, o apêndice E contém alguns conceitos sobre teoria quântica de campos em temperatura finita.

2 Descrição da QCD via modelos efetivos

2.1 Simetria quiral e QCD

Para que um modelo efetivo seja útil na descrição da física da matéria fortemente interagente, é preciso que ele reproduza o máximo de características presentes no modelo original, no caso a QCD, tais como suas simetrias ou quebra delas. De forma geral, uma simetria está diretamente relacionada com o conceito de fase termodinâmica de um sistema (REICHL, 1999), na medida em que o chamado parâmetro de ordem, variável cujo valor a identifica de forma inequívoca, indica a realização ou não de uma determinada simetria. Assim, o estudo do diagrama de fases da QCD, com delimitação das fronteiras de suas fases termodinâmicas, passa necessariamente pelo entendimento de quais simetrias são ou não realizadas e sob quais circunstâncias essa dinâmica de realização ou quebra de uma simetria se dá. Uma das simetrias importantes ligadas à QCD é a quiral. De uma forma geral, um sistema fermiônico descrito pelo spinor ψ é dito apresentar simetria quiral quando é invariante sob a transformação $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha\gamma^5}\psi$, com α sendo um número real. Tal invariância é satisfeita sempre que o férmion é não massivo e, quando esse é o caso, sua densidade lagrangiana apresenta total desacoplamento entre ψ_L e ψ_R , espinores que representam férmions levógiros (left-handed), $\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi$, e dextrógiros (right-handed), $\psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi$, com helicidade bem definida dadas por $-1/2$ e $1/2$, respectivamente. Por outro lado, quando o férmion é massivo, o termo $m\bar{\psi}\psi$ quebra o desacoplamento em nível da densidade lagrangiana e também o sistema não é mais invariante segundo $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha\gamma^5}\psi$. Diz-se que a simetria quiral é quebrada explicitamente devido à massa m do férmion, conforme detalha o apêndice B para o caso de um férmion livre.

A densidade lagrangiana da QCD quebra explicitamente a simetria quiral uma vez que os quarks possuem massa, segundo a equação (1.1). Porém, se nos restringíssemos aos quarks mais leves u e d , de massa da ordem de 10 MeV (TANABASHI, 2018), a simetria quiral seria considerada como “quase” realizada, uma vez que tais massas são muito

menores que a escala de energia típica hadrônica que é da ordem de 1 GeV (massa do núcleo). Entretanto, se esse fosse o caso, deveríamos observar um espectro hadrônico totalmente diferente do conhecido. Deveríamos detectar hádrons cada um com um parceiro de massa aproximadamente igual (quase degenerado)¹ e paridade oposta, já que as interações fortes conservam paridade e as transformações quirais dão origem a estados ímpares. Tal possibilidade é totalmente desconexa do que é verificado experimentalmente, a saber, hádrons bastante massivos e sem seus parceiros de paridade oposta, indicando que a simetria quiral embora “quase” presente na densidade lagrangiana da QCD é na verdade espontaneamente quebrada pelo vácuo. Uma consequência direta dessa quebra espontânea é devida ao teorema de Goldstone (PESKIN, 2018; WEINBERG, 1995a; WEINBERG, 1995b), que a relaciona com partículas (excitações) de massa muito pequena, os chamados pseudo-bósons de Goldstone. Na QCD, onde a simetria quiral é espontânea e explicitamente quebrada, esses pseudo-bósons correspondem aos píons, cuja massa é da ordem de 140 MeV, muito pequena quando comparada à dos demais hádrons².

Uma forma de se descrever quantitativamente o quanto a simetria quiral é espontaneamente quebrada pelo vácuo da QCD é através do chamado condensado quiral de quarks nesse regime, cujo valor, objetivo via QCD na rede, é dado por $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{vac}} \approx -(250 \text{ MeV})^3$ (MCNEILE, 2005). Um estudo do diagrama de fases para a matéria fortemente interagente, portanto, tem por compromisso a busca das fases termodinâmicas nas quais a simetria quiral é quebrada $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$, ou restaurada, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = 0$. Nessa perspectiva, o condensado é entendido como o parâmetro de ordem dessa transição. Outra característica importante de $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ é a sua conexão direta com a geração da massa do quark. Se pensarmos apenas no setor leve da QCD, com $m_u = m_d \approx 10 \text{ MeV}$, é difícil compreender que três desses quarks podem gerar um núcleo de massa da ordem de 900 MeV, a não ser que por alguma dinâmica os quarks venham a adquirir massas maiores. Esse chamado mecanismo de geração de massa será apresentado especificamente para o modelo efetivo no qual nos basearemos na próxima seção.

2.2 Modelo efetivo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL)

O modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) foi originalmente proposto no início dos anos 60 nas referências (NAMBU; JONA-LASINIO, 1961a) e (NAMBU; JONA-LASINIO, 1961b) para explicar a dinâmica de geração de massa do núcleo através da quebra espontânea da

¹No chamado limite quiral, no qual as massas de todos os quarks é zero, a natureza deveria exibir esses pares de hádrons perfeitamente degenerados na massa.

²No limite quiral, o teorema de Goldstone relaciona a simetria quiral espontaneamente quebrada com os chamados bósons de Goldstone (e não pseudo-bósons) que nesse caso tem massa nula. No caso da QCD, se o limite quiral fosse estabelecido explicitamente na densidade lagrangiana, seriam observados píons sem massa na natureza.

simetria quiral, em uma época na qual a teoria QCD ainda não tinha sido estabelecida. Yoichiro Nambu e Giovanni Jona-Lasinio se basearam em um mecanismo análogo ao da teoria de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) (BARDEEN *et al.*, 1957) da supercondutividade para desenvolver o modelo. Com o advento da QCD, os graus de liberdade hadrônicos foram substituídos pelos de quarks, o que deu ao modelo NJL status de modelo efetivo da QCD apesar da ausência da dinâmica da transição confinamento/desconfinamento, devido ao fato da interação entre os quarks no modelo ser dada localmente por vértices de quatro pontos (modelo de contato), e não pela troca de partículas mediadoras, glúons nesse caso. Porém, há muitas situações nas quais a quebra/restauração da simetria quiral é a característica mais importante da QCD a ser analisada, e nesses casos o modelo NJL torna-se de extrema utilidade. Essa condição aliada à relativa simplicidade teórica/matemática tornou o modelo NJL bastante utilizado como uma ferramenta no tratamento da matéria fortemente interagente. Aqui, apresentaremos sua versão em dois sabores, SU(2), e em temperatura nula, utilizando basicamente as referências (BUBALLA, 2005; KLEVANSKY, 1992; VOGL; WEISE, 1991). Sua densidade lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{\psi}(i\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - m)\psi + G_s [(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2] - G_V(\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi)^2, \quad (2.1)$$

sendo ψ o campo fermiônico, m a chamada massa de corrente dos quarks, γ^{μ} as matrizes de Dirac, com G_s e G_V constantes que regulam a intensidade da interação nos canais escalar/pseudo-escalar e vetorial, respectivamente.

Diferentemente dos artigos originais do modelo NJL, consideramos aqui o termo vetorial na equação (2.1) cuja intensidade é controlada pela constante de acoplamento G_V . Em modelos relativísticos hadrônicos usuais (DUTRA *et al.*, 2014), esse termo é obrigatório para que a matéria nuclear apresente a saturação, que em última análise se dá a partir de um quase cancelamento entre os potenciais vetorial e escalar, definidos a partir dos termos contendo as respectivas constantes de acoplamento. Para a matéria de quarks esse requisito não existe, de forma que em princípio tal termo é desnecessário em modelos efetivos da QCD. Entretanto, estudos como por exemplo a referência (FUKUSHIMA, 2008), mostram que um dos efeitos gerados por esse tipo de termo vetorial é a mudança de localização do CEP do diagrama de fases da matéria fortemente interagente. Dependendo do valor considerado para G_V , é possível inclusive eliminar por completo a linha de transição de primeira ordem no diagrama de fases, excluindo por consequência o próprio CEP.

2.2.1 Aproximação de campo médio

A aproximação de campo médio (MFA, do inglês *mean field approximation*) consiste em considerar um operador \mathcal{O}_1 qualquer como um pequeno desvio em relação ao ser valor

esperado (médio), ou seja, fazer

$$\mathcal{O}_1 = \langle \mathcal{O}_1 \rangle + \Delta \mathcal{O}_1, \quad (2.2)$$

com $\Delta \mathcal{O}_1 \equiv \mathcal{O}_1 - \langle \mathcal{O}_1 \rangle \approx 0$. O produto $\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2$ é então dado por³

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 &= (\langle \mathcal{O}_1 \rangle + \Delta \mathcal{O}_1)(\langle \mathcal{O}_2 \rangle + \Delta \mathcal{O}_2) \\ &= \mathcal{O}_1 \langle \mathcal{O}_2 \rangle - \langle \mathcal{O}_1 \rangle \langle \mathcal{O}_2 \rangle + \mathcal{O}_2 \langle \mathcal{O}_1 \rangle + \Delta \mathcal{O}_1 \Delta \mathcal{O}_2 \\ &\approx \mathcal{O}_1 \langle \mathcal{O}_2 \rangle + \mathcal{O}_2 \langle \mathcal{O}_1 \rangle - \langle \mathcal{O}_1 \rangle \langle \mathcal{O}_2 \rangle, \end{aligned} \quad (2.3)$$

com $\mathcal{O}^2 \approx 2\mathcal{O} \langle \mathcal{O} \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle^2$ sendo uma consequência direta do caso particular no qual $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$. Assim, para o modelo NJL temos que as estruturas envolvendo o campo fermiônico ψ são dadas na aproximação de campo médio como

$$(\bar{\psi}\psi)^2 \approx 2\bar{\psi}\psi \langle \bar{\psi}\psi \rangle - \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2, \quad (2.4)$$

$$(\bar{\psi}\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2 \approx 2\bar{\psi}\gamma_5\vec{\tau}\psi \langle \bar{\psi}\gamma_5\vec{\tau}\psi \rangle - \langle \bar{\psi}\gamma_5\vec{\tau}\psi \rangle^2, \quad (2.5)$$

$$(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2 \approx 2\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \langle \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \rangle - \langle \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \rangle^2, \quad (2.6)$$

Se o sistema é espacialmente uniforme, como é o caso da matéria de quarks representada pela densidade lagrangiana da equação (2.1), o valor esperado de $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ é zero exceto para a componente $\bar{\psi}\gamma_0\psi$. Esse resultado junto ao valor nulo do valor esperado do termo envolvendo a matriz γ_5 leva à seguinte densidade lagrangiana na aproximação de campo médio,

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}}^{\text{MFA}} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M - 2G_V\gamma_0\rho)\psi - G_s\rho_s^2 + G_V\rho^2, \quad (2.7)$$

na qual $\rho = \langle \bar{\psi}\gamma_0\psi \rangle$ e $\rho_s = \langle \bar{\psi}\psi \rangle = \langle \bar{u}u \rangle + \langle \bar{d}d \rangle = 2\langle \bar{u}u \rangle$ são as densidades vetorial e escalar de quarks, respectivamente, considerando u e d degenerados.

Na equação (2.7) acima, a massa constituinte dos quarks, dada por

$$M = m - 2G_s\rho_s, \quad (2.8)$$

explicita a dinâmica de geração de massa no modelo NJL. Note que mesmo no limite quiral ($m = 0$), o condensado de quarks ρ_s é o responsável pela variação da massa M . Tal mecanismo garante que mesmo o setor leve SU(2) possa gerar massas maiores que as massas correntes dos quarks u e d , da ordem de 10 MeV, garantindo a massa observada para os hádrons. Nesse sentido, o modelo efetivo NJL incorpora bem tal mecanismo previsto pela teoria da QCD.

³Desprezando o termo $\Delta \mathcal{O}_1 \Delta \mathcal{O}_2$, da ordem de $(\Delta \mathcal{O})^2$ e, conseqüentemente, muito menor que $\Delta \mathcal{O}$.

Usando a densidade lagrangiana do modelo NJL, na aproximação de campo médio, nas equações de Euler-Lagrange para o campo $\bar{\psi}$, dadas por

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{NJL}}^{\text{MFA}}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{NJL}}^{\text{MFA}}}{\partial \bar{\psi}} = 0, \quad (2.9)$$

com

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{NJL}}^{\text{MFA}}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{NJL}}^{\text{MFA}}}{\partial \bar{\psi}} = (i\gamma_\mu \partial^\mu - M - 2G_V \gamma_\mu \rho)\psi, \quad (2.10)$$

chega-se na seguinte equação para o campo fermiônico ψ

$$[\gamma_\mu (i\partial^\mu - 2G_V \rho) - M]\psi = 0. \quad (2.11)$$

Nota-se portanto que o quark descrito pelo modelo NJL, na aproximação de campo médio, pode ser considerado como um quark livre, de massa constituinte (efetiva) dada pela equação (2.8) e, com seu quadrimomento alterado pela densidade (vetorial) de quarks.

2.2.2 Tensor energia-momento

Nesta dissertação, estamos interessados no comportamento das quantidades termodinâmicas do modelo NJL no regime de temperatura nula e, para construí-las, tomaremos um caminho diferente do frequentemente utilizado na literatura. Em geral, a determinação das equações de estado (EOS) do modelo NJL nesse regime é feita a partir do limite $T \rightarrow 0$ nas expressões mais gerais dependentes de T . Aqui usaremos como ponto de partida o tensor energia-momento do modelo para a partir dele encontrar a densidade de energia, o potencial químico e a pressão, já no regime de $T = 0$. Para tal, precisaremos do tensor energia-momento do modelo, encontrado a partir da seguinte equação

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q_j)} \partial_\nu Q_j. \quad (2.12)$$

Para o modelo NJL, onde $Q_j = \psi$, o tensor $T_{\mu\nu}$ torna-se

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{NJL}}^{\text{MFA}} + \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{NJL}}^{\text{MFA}}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \partial_\nu \psi, \quad (2.13)$$

com

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{NJL}}^{\text{MFA}}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \partial_\nu \psi = \bar{\psi} i\gamma_\mu \partial_\nu \psi. \quad (2.14)$$

Assim, substituindo as expressões (2.7) e (2.14) na equação (2.13), teremos que o tensor energia-momento será dado por

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} [\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_0 + 2G_s\rho_s - 2G_V\gamma_\mu\rho)\psi - G_s\rho_s^2 + G_V\rho^2] + \bar{\psi}i\gamma_\mu\partial_\nu\psi, \quad (2.15)$$

com seu valor médio escrito como

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = -g_{\mu\nu} [\langle \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m + 2G_s\rho_s - 2G_V\gamma_\mu\rho)\psi \rangle - G_s\rho_s^2 + G_V\rho^2] + i\langle \bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi \rangle. \quad (2.16)$$

Utilizando a equação (2.11) com a definição da massa constituinte em (2.8), identifica-se que

$$\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = \bar{\psi}(-2G_s\rho_s + 2G_V\gamma_\mu\rho)\psi = -2G_s\bar{\psi}\psi\rho_s + 2G_V\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\rho, \quad (2.17)$$

$$\langle \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \rangle = 2G_V\rho^2 - 2G_s\rho_s^2. \quad (2.18)$$

Essa última expressão substituída em (2.16) gera

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle &= -g_{\mu\nu} [\langle \bar{\psi}(2G_V\rho^2 - 2G_s\rho_s^2 + 2G_s\rho_s^2 - 2G_V\rho^2)\psi \rangle - G_s\rho_s^2 + G_V\rho^2] + i\langle \bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi \rangle \\ &= -g_{\mu\nu}(-G_s\rho_s^2 + G_V\rho^2) + i\langle \bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi \rangle, \end{aligned} \quad (2.19)$$

para o tensor energia-momento do modelo NJL na aproximação de campo médio.

2.2.3 Densidade de energia

Agora estamos aptos a encontrar a primeira equação de estado do modelo NJL, a saber, a densidade de energia. Essa quantidade é definida em termos do tensor energia-momento como $\mathcal{E} = \langle T_{00} \rangle$. A partir da equação (2.19) com $\mu = \nu = 0$, chega-se em

$$\mathcal{E} = -g_{00}(-G_s\rho_s^2 + G_V\rho^2) + i\langle \bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi \rangle = G_s\rho_s^2 - G_V\rho^2 + i\langle \bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi \rangle. \quad (2.20)$$

Utilizando a solução de onda plana para o campo fermiônico ψ no último termo da equação anterior, dada por

$$\psi(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{k}, \lambda)e^{-ik_\mu x^\mu}, \quad (2.21)$$

obtém-se

$$i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi = k_0\bar{\psi}\gamma_0\psi. \quad (2.22)$$

Utilizando novamente a equação (2.11) com a definição da massa constituinte em (2.8), mostra-se que a energia do quark k_0 pode ser escrita como $k_0 = 2G_V\rho \pm (k^2 + M^2)^{1/2}$, com os sinais positivo e negativo correspondentes à partículas e anti-partículas, respectivamente. Usando esse resultado na equação (2.22) temos que

$$i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi = 2G_V\rho\bar{\psi}\gamma_0\psi + (k^2 + M^2)^{1/2}\bar{\psi}\gamma_0\psi, \quad (2.23)$$

$$i\langle\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi\rangle = 2G_V\rho^2 + \langle(k^2 + M^2)^{1/2}\bar{\psi}\gamma_0\psi\rangle = 2G_V\rho^2 + \langle(k^2 + M^2)^{1/2}\psi^\dagger\psi\rangle. \quad (2.24)$$

A partir daqui usaremos as expansões dos spinores ψ e ψ^\dagger dadas por

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left[a_{\mathbf{k},\lambda} u(\mathbf{k}, \lambda) e^{-ik_\mu x^\mu} + b_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger v(\mathbf{k}, \lambda) e^{ik_\mu x^\mu} \right] \quad (2.25)$$

e

$$\psi^\dagger(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left[a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger u^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{ik_\mu x^\mu} + b_{\mathbf{k},\lambda} v^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{-ik_\mu x^\mu} \right] \quad (2.26)$$

para calcular

$$\langle\bar{\psi}\gamma_0\psi\rangle = \langle\psi^\dagger\psi\rangle = \int d^3k (A_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger A_{\mathbf{k},\lambda} + B_{\mathbf{k},\lambda} B_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger), \quad (2.27)$$

onde $A_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger$ e $A_{\mathbf{k},\lambda}$ são, respectivamente, os operadores de criação (aniquilação) e aniquilação (criação) para quarks (antiquarks). Aplicando (2.27) na equação (2.24) temos

$$i\langle\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi\rangle = 2G_V\rho^2 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk k^2 (k^2 + M^2)^{1/2} - \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dk k^2 (k^2 + M^2)^{1/2}, \quad (2.28)$$

com a primeira integral representando o termo cinético e a segunda o termo referente ao “mar de Dirac”, sendo k_F o momento de Fermi, γ o fator de degenerescência dado por $\gamma = N_s \times N_f \times N_c = 12$, devido aos números de spin, sabor e cor ($N_s = N_f = 2$ e $N_c = 3$) no caso da versão SU(2) com os quarks u e d degenerados e, Λ um parâmetro de *cutoff* introduzido para regularizar a integral que inicialmente é divergente, já que seu limite superior é infinito em sua versão original. Inserindo a expressão (2.28) na equação (2.20) da densidade de energia temos

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= G_s \rho_s^2 - G_V \rho^2 + 2G_V \rho^2 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk k^2 (k^2 + M^2)^{1/2} \\ &\quad - \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dk k^2 (k^2 + M^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$= G_s \rho_s^2 + G_V \rho^2 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk k^2 (k^2 + M^2)^{1/2} - \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dk k^2 (k^2 + M^2)^{1/2}, \quad (2.30)$$

com as densidades vetorial e escalar dadas, respectivamente, por⁴

$$\rho = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 dk = \frac{\gamma}{6\pi^2} k_F^3 \quad (2.31)$$

e

$$\rho_s = -\frac{\gamma M}{2\pi^2} \int_{k_F}^{\Lambda} dk \frac{k^2}{(k^2 + M^2)^{1/2}}. \quad (2.32)$$

Note que no vácuo, no qual $k_F = 0$, ainda resta uma contribuição não nula na densidade de energia, dada por

$$\mathcal{E}_{\text{vac}} = G_s \rho_s^2(\text{vac}) - \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{\Lambda} dk k^2 (k^2 + M_{\text{vac}}^2)^{1/2}, \quad (2.33)$$

com

$$\rho_s(\text{vac}) = -\frac{\gamma M_{\text{vac}}}{2\pi^2} \int_0^{\Lambda} dk \frac{k^2}{(k^2 + M_{\text{vac}}^2)^{1/2}} \quad \text{e} \quad M_{\text{vac}} = m - 2G_s \rho_s(\text{vac}). \quad (2.34)$$

Para que $\mathcal{E}(\rho = 0)$ seja de fato nulo, faz-se então a subtração da quantidade residual \mathcal{E}_{vac} em \mathcal{E} , o que gera

$$\mathcal{E} = G_V \rho^2 + G_s \rho_s^2 - \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_{k_F}^{\Lambda} dk k^2 (k^2 + M^2)^{1/2} - \mathcal{E}_{\text{vac}} \quad (2.35)$$

para a expressão final da densidade de energia do modelo NJL na aproximação de campo médio.

2.2.4 Pressão

Outra quantidade que pode ser diretamente extraída do tensor energia-momento é a pressão, escrita como $P = \frac{1}{3} \langle T_{ii} \rangle$. Porém, através desse caminho encontram-se problemas com o termo provindo do “mar de Dirac”. Como esse é um termo divergente, existem infinitas maneiras dessa contribuição ser implementada matematicamente. À priori, não existe um formato melhor ou pior para se apresentar essa contribuição. Sugere-se a forma que deixe mais claro a física envolvida nessa contribuição (que nada mais seria que a soma de todos os estados de energia negativa). Nessa dissertação, o critério de escolha para a implementação da contribuição do “mar de Dirac” será o de respeitar a consistência termodinâmica do modelo (para nós esse é o caminho que evidencia a física envolvida nesse termo), assim como é feito nas referências (MISHUSTIN *et al.*, 2000) e (MISHUSTIN I. N. AND SATAROV, 2001). Então, a partir da expressão da identidade termodinâmica em

⁴A derivação detalhada dessas densidades está feita no apêndice C

$T = 0$ pode-se calcular a pressão como

$$P = \mu\rho - \mathcal{E} \quad (2.36)$$

ou

$$P = \rho^2 \frac{\partial(\mathcal{E}/\rho)}{\partial\rho}, \quad (2.37)$$

onde μ é o potencial químico do sistema, dado por⁵

$$\mu = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho} = 2G_V\rho + (k_F^2 + M^2)^{1/2}, \quad (2.38)$$

expressão encontrada a partir da derivada da densidade de energia dada na equação (2.35) em relação à densidade. Note que outro efeito da interação vetorial é o de “deslocar” o potencial químico do seu valor original, $(k_F^2 + M^2)^{1/2}$, encontrado ao considerarmos um quark “livre” cuja massa constituinte é dada por $M = m - 2G_s\rho_s$.

Considerando a identidade termodinâmica (2.36), pode-se calcular a pressão como sendo

$$\begin{aligned} P &= [2G_V\rho + (k_F^2 + M^2)^{1/2}] \rho - \left[G_s\rho_s^2 + G_V\rho^2 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk k^2 (k^2 + M^2)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dk k^2 (k^2 + M^2)^{1/2} \right] + \mathcal{E}_{\text{vac}} \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} &= 2G_V\rho^2 + (k_F^2 + M^2)^{1/2}\rho - G_s\rho_s^2 - G_V\rho^2 - \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk k^2 (k^2 + M^2)^{1/2} \\ &\quad + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dk k^2 (k^2 + M^2)^{1/2} + \mathcal{E}_{\text{vac}}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Utilizando a expressão (2.31) e notando que

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk k^2 (k^2 + M^2)^{1/2} &= \frac{\gamma}{2\pi^2} \frac{1}{8} \left\{ (2k_F^3 + k_F M^2)(k_F^2 + M^2)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. - M^4 \ln \left[\frac{k_F + (k_F^2 + M^2)^{1/2}}{M} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

⁵A derivação detalhada do potencial químico é apresentada no apêndice C.

obtemos

$$\begin{aligned}
P &= G_V \rho^2 - G_s \rho_s^2 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dk k^2 (k^2 + M^2)^{1/2} + (k_F^2 + M^2)^{1/2} \left(\frac{\gamma k_F^3}{6\pi^2} \right) \\
&\quad - \frac{\gamma}{2\pi^2} \frac{1}{8} \left\{ (2k_F^3 + k_F M^2) (k_F^2 + M^2)^{1/2} - M^4 \ln \left[\frac{k_F + (k_F^2 + M^2)^{1/2}}{M} \right] \right\} + \mathcal{E}_{\text{vac}} \quad (2.42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= G_V \rho^2 - G_s \rho_s^2 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dk k^2 (k^2 + M^2)^{1/2} + \frac{\gamma}{2\pi^2} \left\{ \frac{k_F^3}{3} (k_F^2 + M^2)^{1/2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{8} (2k_F^3 + k_F M^2) (k_F^2 + M^2)^{1/2} + M^4 \ln \left[\frac{k_F + (k_F^2 + M^2)^{1/2}}{M} \right] \right\} + \mathcal{E}_{\text{vac}} \quad (2.43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= G_V \rho^2 - G_s \rho_s^2 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dk k^2 (k^2 + M^2)^{1/2} + \frac{\gamma}{2\pi^2} \left\{ \frac{(2k_F^3 - 3k_F M^2) (k_F^2 + M^2)^{1/2}}{24} \right. \\
&\quad \left. + \frac{M^4}{8} \ln \left[\frac{k_F + (k_F^2 + M^2)^{1/2}}{M} \right] \right\} + \mathcal{E}_{\text{vac}} \quad (2.44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= G_V \rho^2 - G_s \rho_s^2 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dk k^2 (k^2 + M^2)^{1/2} + \frac{\gamma}{6\pi^2} \frac{1}{8} \left\{ (2k_F^3 - k_F M^2) (k_F^2 + M^2)^{1/2} \right. \\
&\quad \left. + 3M^4 \ln \left[\frac{k_F + (k_F^2 + M^2)^{1/2}}{M} \right] \right\} + \mathcal{E}_{\text{vac}}, \quad (2.45)
\end{aligned}$$

com o último termo representando a parte cinética da pressão e podendo ser reescrito em sua forma integral como

$$\frac{1}{8} \left\{ \frac{(k_F^2 + M^2)^{1/2}}{(2k_F^3 - k_F M^2)^{-1}} + 3M^4 \ln \left[\frac{k_F + (k_F^2 + M^2)^{1/2}}{M} \right] \right\} = \int_0^{k_F} dk \frac{k^4}{(k^2 + M^2)^{1/2}}. \quad (2.46)$$

Assim, chega-se em

$$P = G_V \rho^2 - G_s \rho_s^2 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dk k^2 (k^2 + M^2)^{1/2} + \frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^{k_F} dk \frac{k^4}{(k^2 + M^2)^{1/2}} + \mathcal{E}_{\text{vac}} \quad (2.47)$$

para a pressão do modelo NJL na aproximação de campo médio.

2.2.5 Análise do modelo

Com as equações de estado construídas, ainda é preciso determinar as constantes do modelo para que se possa analisar sua termodinâmica. São eles: m (massa de corrente), Λ (*cutoff*), G_s e G_V (constantes de acoplamento escalar e vetorial, respectivamente). Os três primeiros são obtidos forçando a reprodução de três quantidades. A primeira é a massa do (pseudo) bóson de Goldstone, que para a matéria de quarks em dois sabores corresponde ao pión, m_π . A segunda é a constante de decaimento do pión, f_π , e a terceira

é o condensado quiral no vácuo, $\langle \bar{u}u \rangle_{\text{vac}}$. A massa m é diretamente encontrada via relação de Gell-Mann-Oakes-Renner (GELL-MANN *et al.*, 1968),

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -m \rho_{s(\text{vac})}, \quad (2.48)$$

com $\rho_{s(\text{vac})} = 2 \langle \bar{u}u \rangle_{\text{vac}}$. Já para encontrar as constantes G_s e Λ é preciso primeiro obter Λ e M_{vac} através da solução simultânea de

$$\rho_{s(\text{vac})} = -\frac{\gamma M_{\text{vac}}}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dk \frac{k^2}{(k^2 + M_{\text{vac}}^2)^{1/2}} \quad \text{e} \quad f_\pi^2 = \frac{N_s N_c M_{\text{vac}}^2}{2\pi^2 N_f} \int_0^\Lambda \frac{k^2 dk}{(k^2 + M_{\text{vac}}^2)^{3/2}}, \quad (2.49)$$

para depois usar a equação $M_{\text{vac}} = m - 2G_s \rho_{s(\text{vac})}$ e finalmente achar G_s . Os valores de m , Λ e G_s usados nesta dissertação estão mostrados na tabela 2.1 a seguir.

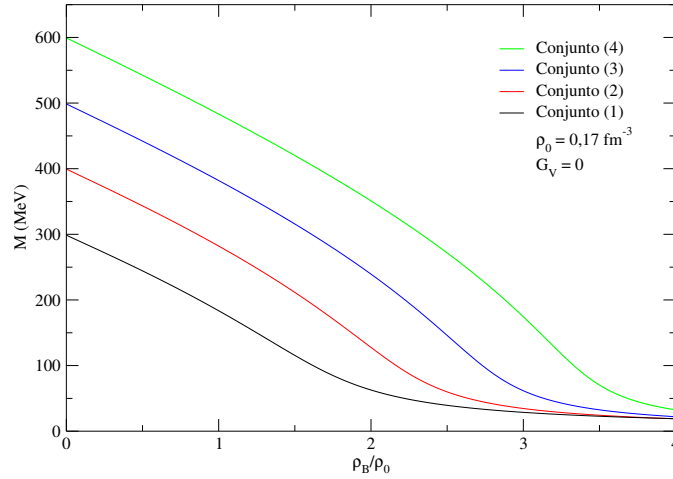
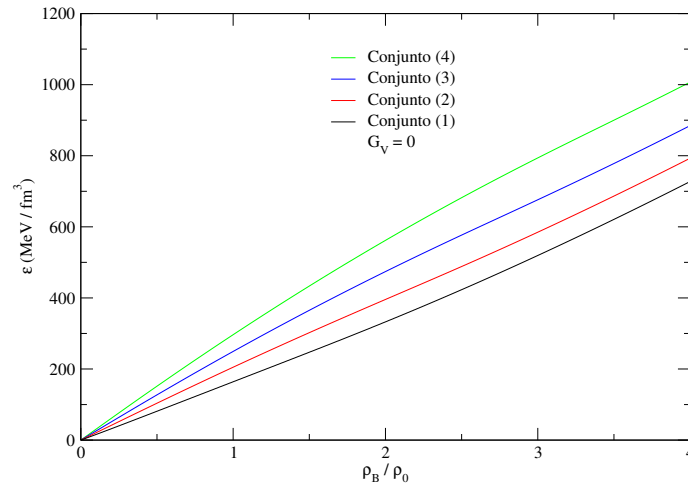
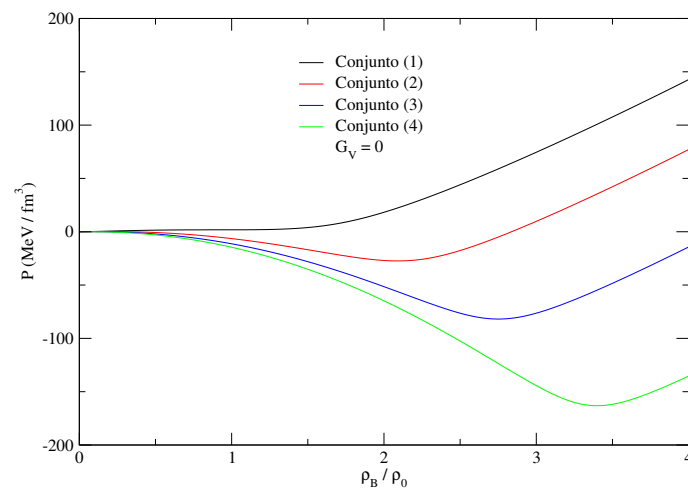
Conjunto	Λ (MeV)	$G_s \Lambda^2$	m (MeV)	M_{vac} (MeV)	$\langle \bar{u}u \rangle_{\text{vac}}^{1/3}$ (MeV)
1	664,3	2,06	5,0	300	-250,8
2	587,9	2,44	5,6	400	-240,8
3	569,3	2,81	5,5	500	-242,4
4	568,6	3,17	5,1	600	-247,5

TABELA 2.1 – Parametrizações do modelo NJL extraídas da referência (BUBALLA, 2005). Para cada conjunto de parâmetros (Λ , G_s e m) são listados também os respectivos valores de M_{vac} obtidos. Para a determinação de cada conjunto foram utilizados os valores de $\langle \bar{u}u \rangle_{\text{vac}}$, também listados, junto com os valores fixos de $m_\pi = 135$ MeV e $f_\pi = 92.4$ MeV.

Com as constantes Λ , G_s e m definidas em termos de m_π , f_π e $\langle \bar{u}u \rangle_{\text{vac}}$ e, considerando inicialmente o modelo NJL sem o termo vetorial, ou seja, fazendo $G_V = 0$, é possível agora analisar o comportamento das quantidades termodinâmicas do modelo em função, por exemplo, da densidade dos quarks. Para tal, faz-se correr a própria densidade, ou equivalentemente, o momento de Fermi e, para cada valor ρ de “entrada”, resolve-se a equação transcendental da massa constituinte (2.8) para encontrar M associada àquela densidade⁶. Com essa massa M encontrada, é possível calcular o próprio condensado quiral (2.32) e com ele avaliar as expressões da densidade de energia (2.35), da pressão (2.47) e do potencial químico (2.38). A partir desse procedimento, construímos as curvas da massa constituinte do modelo, na figura 2.1, da densidade de energia, na figura 2.2 e da pressão, na figura 2.3. Nessas figuras investigamos a dependência das quantidades termodinâmicas em função da razão ρ_B/ρ_0 , na qual $\rho_B = 3\rho$ é a densidade bariônica (cada bárion contém 3 quarks) e ρ_0 é a chamada densidade de saturação da matéria nuclear (DUTRA *et al.*, 2014). Usamos um valor típico de $0,17 \text{ fm}^{-3}$ para tal quantidade.

Considerando agora como não nula a constante G_V na densidade lagrangiana dada em (2.7), torna-se necessário determiná-la, assim como fizemos com as demais, para investigar qual a influência do termo que a contém nas quantidades termodinâmicas do modelo

⁶Note que por (2.32), essa equação é do tipo $M = m - 2G_s \rho_s(M)$.

FIGURA 2.1 – $M \times \rho_B/\rho_0$ para os conjuntos de parâmetros dados na tabela 2.1.FIGURA 2.2 – $\mathcal{E} \times \rho_B/\rho_0$ para os conjuntos de parâmetros dados na tabela 2.1.FIGURA 2.3 – $P \times \rho_B/\rho_0$ para os conjuntos de parâmetros dados na tabela 2.1.

NJL. Entretanto, essa não é uma tarefa trivial já que o canal vetorial do modelo está diretamente relacionado ao méson ρ cuja massa (m_ρ) é da ordem de 770 MeV (TANABASHI, 2018). De certa forma isso torna-se um problema, uma vez que a escala de energia do

modelo está ligada ao valor do *cutoff* Λ e, como pode-se observar na tabela 2.1, ele é menor que m_ρ . Fixar o valor de G_V a partir da massa do méson ρ , como é feito com G_s a partir da massa do pión, é nesse sentido um tanto quanto artificial. Por esse motivo, a constante G_V do modelo NJL é tratada como um parâmetro livre cujo valor, frequentemente dado em termos da constante G_s , varia segundo cada autor. Por exemplo, o intervalo $0,25G_s \leq G_V \leq 0,50G_s$ é usado em (CARIGNANO *et al.*, 2010; KASHIWA *et al.*, 2011; RAPP *et al.*, 1998). Já em (LOURENÇO *et al.*, 2012; BRATOVIC *et al.*, 2013), os autores utilizaram o conjunto $0,3G_s \leq G_V \leq 3,2G_s$. Na figura 2.4, mostramos para alguns valores de G_V como o canal vetorial influencia a pressão e o condensado de quarks (em unidades do seu valor no vácuo $\rho_{s(\text{vac})}$) no modelo NJL.

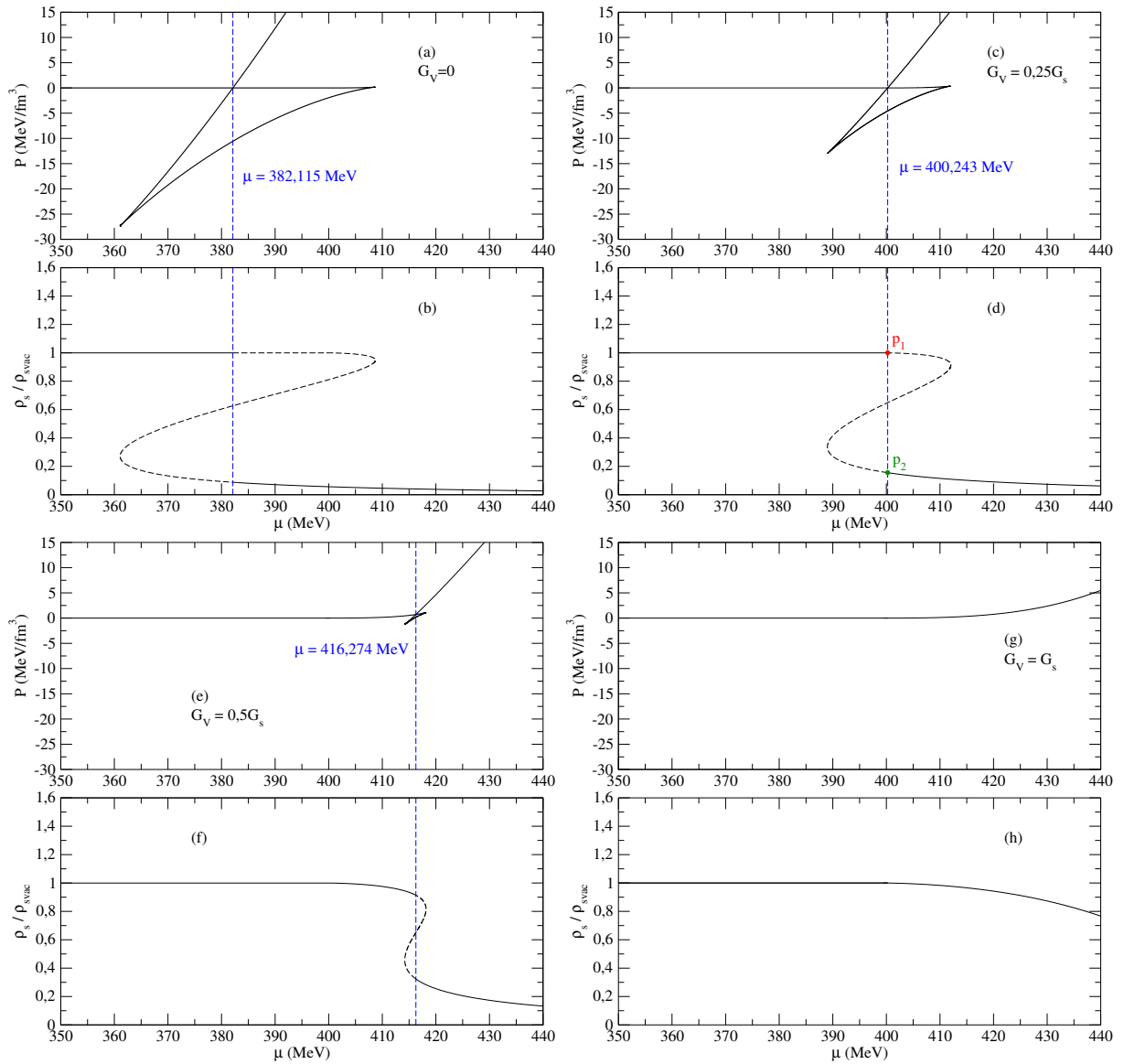


FIGURA 2.4 – Pressão em função do potencial químico (em cima) e, condensado de quarks em unidades de $\rho_{s(\text{vac})}$ (em baixo). Valores de G_V dados por $G_V = 0$ (a e b), $G_V = 0,25G_s$ (c e d), $G_V = 0,50G_s$ (e e f) e $G_V = G_s$ (g e h). Demais parâmetros dados pelo conjunto 2 da tabela 2.1.

Os gráficos de pressão dados na figura 2.4 para $G_V \leq 0,5G_s$ mostram uma característica típica das transições de fase de primeira ordem, a saber, mais de um valor do potencial termodinâmico que descreve o sistema, veja, por exemplo, esse comportamento na figura 2.4c. Aqui, a pressão é diretamente relacionada com Ω (grande potencial termodinâmico) através da relação $P = -\Omega$. Note que se tomarmos μ como variável livre, é possível descrever o sistema através Ω , já que este é o potencial termodinâmico adequado quando as variáveis independentes são μ e T (no caso específico, $T = 0$).

O comportamento do potencial termodinâmico que descreve o sistema é o que caracteriza a transição de fase de primeira ordem (CALLEN, 1998). Considere, por exemplo, um sistema descrito pelo potencial termodinâmico $U[P_S, \dots, P_t]$ com P_S, \dots, P_t, \dots variáveis intensivas que dependem das extensivas X_1, X_2, \dots . O critério de estabilidade termodinâmica estabelece que U deve ser convexa (côncava) quando em função dos seus parâmetros extensivos (intensivos). Geometricamente, U deve estar completamente acima (abaixo) de hiperplanos tangentes no subespaço de suas variáveis extensivas (intensivas). Como exemplo veja a figura 2.5 a seguir na qual U é descrita em função de P_S .

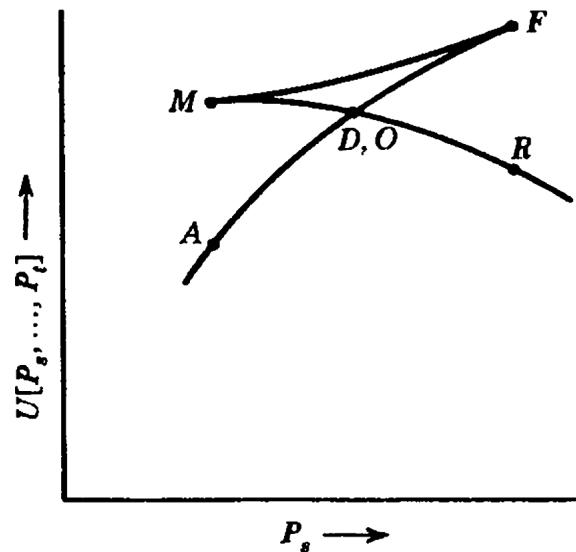


FIGURA 2.5 – Potencial termodinâmico U em função de uma das suas variáveis intensivas P_S . Extraída da referência (CALLEN, 1998).

Note que U em função de P_S , tem curvatura negativa exceto no segmento MF . Ainda, o segmento MD está acima, em vez de abaixo, da linha tangente ao segmento ADF que passa no ponto D . Somente a curva $ADOR$ está completamente abaixo das retas tangentes, satisfazendo portanto a estabilidade termodinâmica. A mudança abrupta da derivada de U em relação a P_S indica uma transição de fase de primeira ordem e, o ponto $D(=O)$ define os valores de U e P_S onde a transição se dá. O mesmo fenômeno ocorre no modelo NJL, como evidencia o gráfico de Ω em função de μ na figura 2.6 para

$G_V = 0,25G_s$. Nesse caso, a transição de fases ocorre para $\mu = 400,243$ MeV e para este valor o parâmetro de ordem da transição, ρ_s , admite dois valores distintos representados pelos pontos p_1 e p_2 na figura 2.4d. A região que tem por limite o valor de ρ_s dado no ponto p_1 indica a fase termodinâmica na qual a simetria quiral está quebrada ($\rho_s \neq 0$) e, aquela limitada por ρ_s dado no ponto p_2 representa a fase na qual a simetria quiral é restaurada ($\rho_s \approx 0$). Nessa perspectiva, ρ_s é o parâmetro de ordem da transição. Ainda, a curva termodinamicamente estável nesse caso é formada pelo segmento ABC .

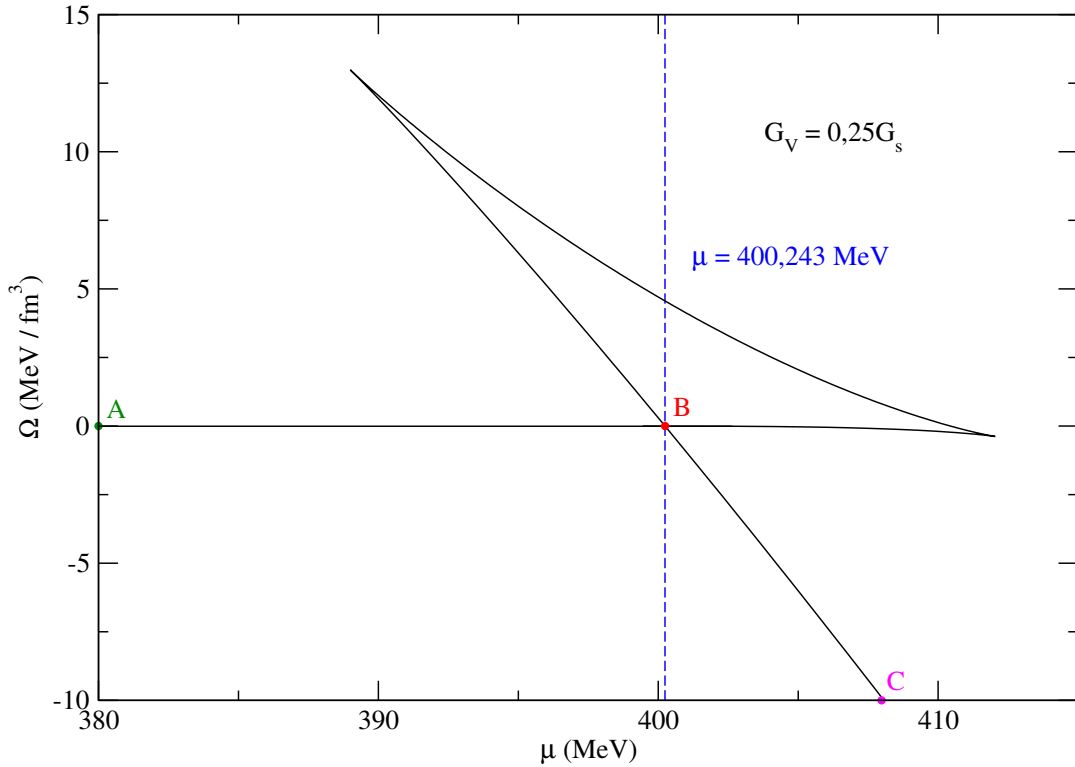


FIGURA 2.6 – Ω em função de μ para o conjunto 2 do modelo NJL e com $G_V = 0,25G_s$.

Outra forma de se identificar o potencial químico no qual ocorre a transição de primeira ordem no modelo NJL é a através da busca dos mínimos de Ω em função do “campo” ρ_s para valores fixos de μ (MASAYUKI; KOICHI, 1989). Para tal, é preciso que ρ_s (ou, equivalentemente, M) seja uma das variáveis livres, isto é, ρ_s é dado como “input” no negativo da equação (2.47) com M dado por (2.8), porém, sem a obrigatoriedade de se resolver a equação transcendental em (2.32). Como exemplo, mostramos na figura 2.7 o gráfico de $\Omega \times \rho_s / \rho_{s(\text{vac})}$ para $G_V = 0,25G_s$ e alguns valores fixos de μ . Note que apenas um único valor de μ , no caso $\mu = 400,243$ MeV, produz dois mínimos de Ω . Este é o mesmo μ obtido na figura 2.6 através da análise da estabilidade termodinâmica do sistema. Os respectivos valores de ρ_s associados aos mínimos de Ω para este μ são os mesmos dos pontos p_1 e p_2 da figura 2.4d e delimitam as fases termodinâmicas de simetria quiral quebrada e restaurada. Para outros valores de μ , como os apresentados na figura 2.7, há apenas uma solução de ρ_s que gera um mínimo para Ω , ou seja, nesses

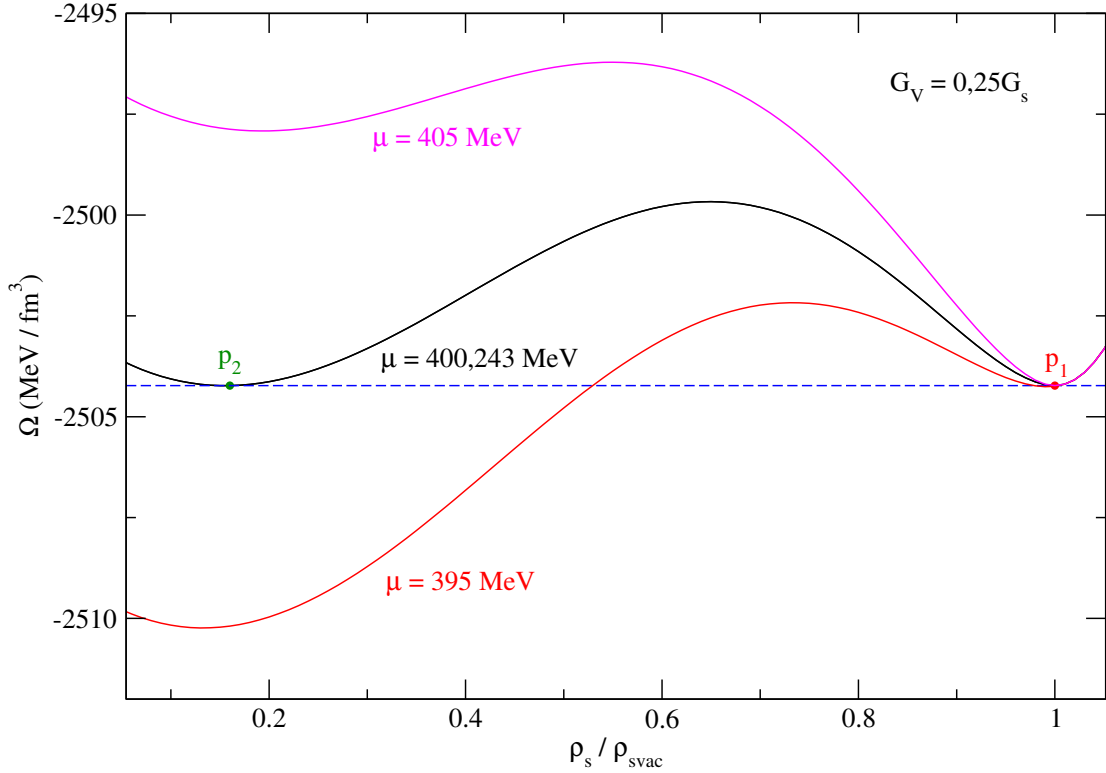


FIGURA 2.7 – $\Omega \times \rho_s / \rho_{s(\text{vac})}$ para o conjunto 2 do modelo NJL e com $G_V = 0,25G_s$.

casos o sistema está exclusivamente em uma das duas fases termodinâmicas possíveis. Apenas em $\mu = 400,243$ MeV o sistema realiza a transição. Ainda sobre esse método, vale notar que a condição $(\partial\Omega/\partial\rho_s)_\mu = 0$, que deve ser satisfeita para a determinação de ρ_s , é completamente equivalente à $(\partial\mathcal{E}/\partial\rho_s)_\rho = 0$. Note que quando tomamos ρ como variável independente, o sistema é descrito por \mathcal{E} e a derivada na densidade de energia é feita para ρ fixo. Quando fazemos μ como independente, então o sistema é descrito por Ω o que impõe que sua derivada é feita mantendo-se μ fixo.

Toda a análise feita acima se deu para $G_V = 0,25G_s$, porém, outros valores poderiam ter sido usados. A diferença entre parametrizações com diferentes valores de G_V está no deslocamento do ponto onde a transição de primeira ordem acontece. Valores maiores de G_V deslocam o ponto de transição para valores maiores de μ e, simultaneamente, também se observa que G_V crescente “atenua” a transição de primeira ordem até torná-la contínua. Esses efeitos são verificados nas figuras 2.4a, 2.4c, 2.4e, e 2.4g.

Por fim, mostramos nas figuras 2.8-2.11 e 2.12-2.15 a dependência da massa constituinte e da densidade, respectivamente, com o potencial químico para alguns valores distintos de G_V .

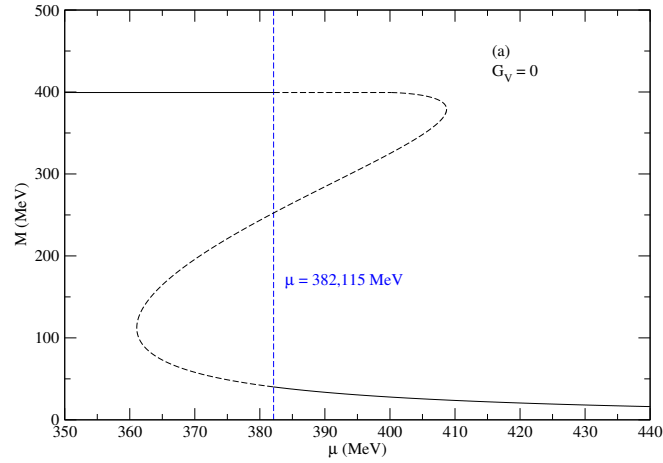


FIGURA 2.8 – Massa constituinte em função do potencial químico para $G_V = 0$. Demais parâmetros dados pelo conjunto 2 da tabela 2.1.

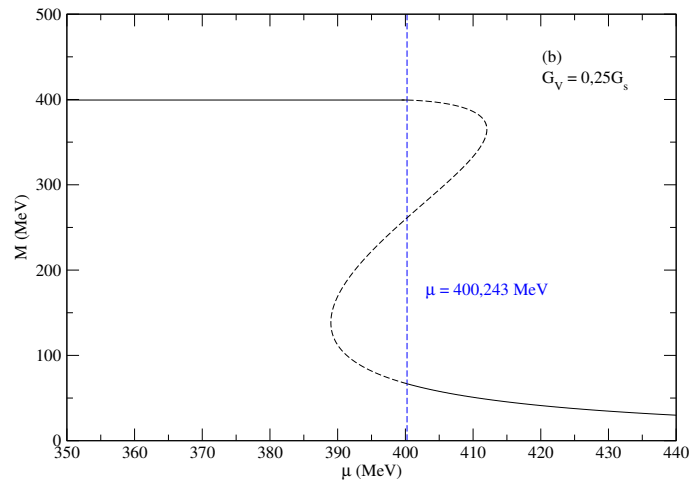


FIGURA 2.9 – Massa constituinte em função do potencial químico para $G_V = 0,25G_s$. Demais parâmetros dados pelo conjunto 2 da tabela 2.1.

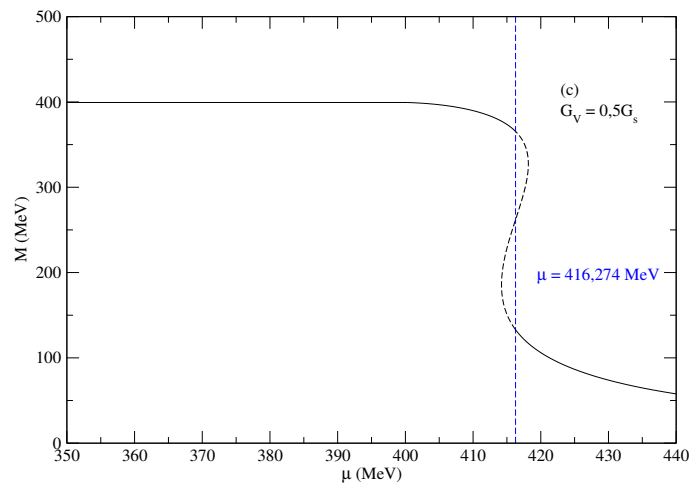


FIGURA 2.10 – Massa constituinte em função do potencial químico para $G_V = 0,5G_s$. Demais parâmetros dados pelo conjunto 2 da tabela 2.1.

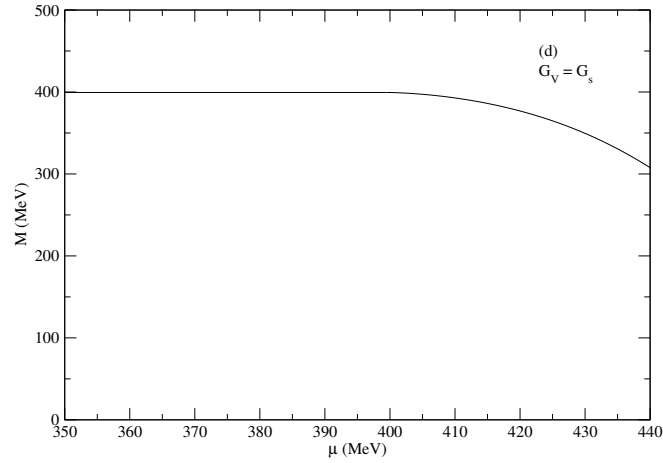


FIGURA 2.11 – Massa constituinte em função do potencial químico para $G_V = G_s$. Demais parâmetros dados pelo conjunto 2 da tabela 2.1.

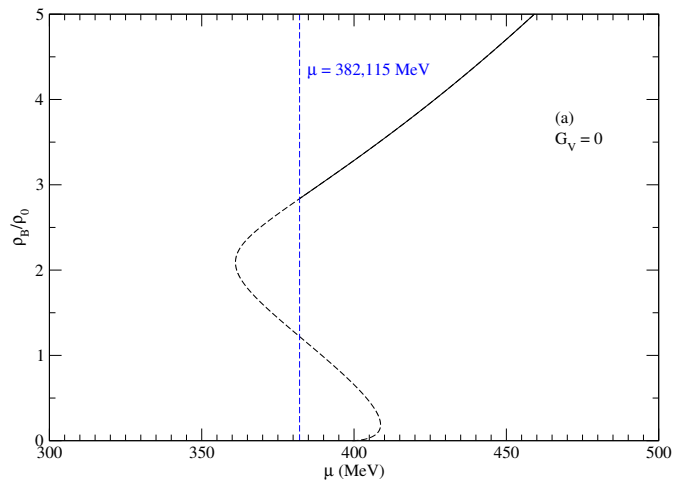


FIGURA 2.12 – Densidade em função do potencial químico para $G_V = 0$. Demais parâmetros dados pelo conjunto 2 da tabela 2.1.

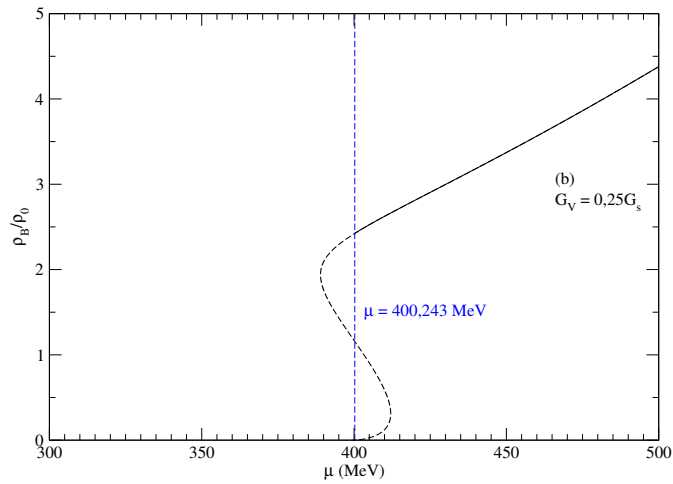


FIGURA 2.13 – Densidade em função do potencial químico para $G_V = 0,25G_s$. Demais parâmetros dados pelo conjunto 2 da tabela 2.1.

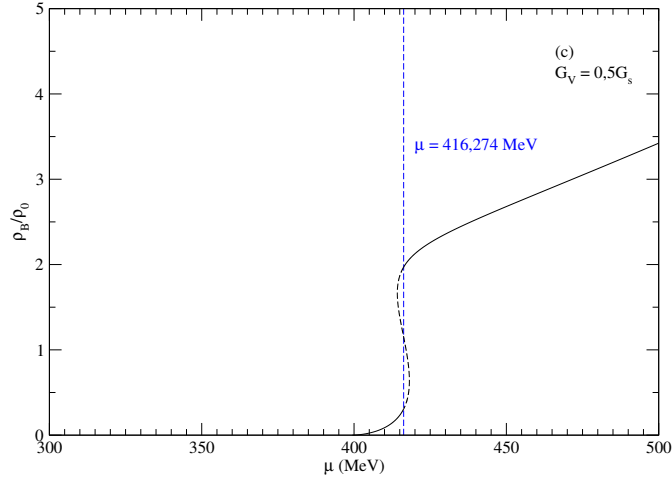


FIGURA 2.14 – Densidade em função do potencial químico para $G_V = 0,5G_s$. Demais parâmetros dados pelo conjunto 2 da tabela 2.1.

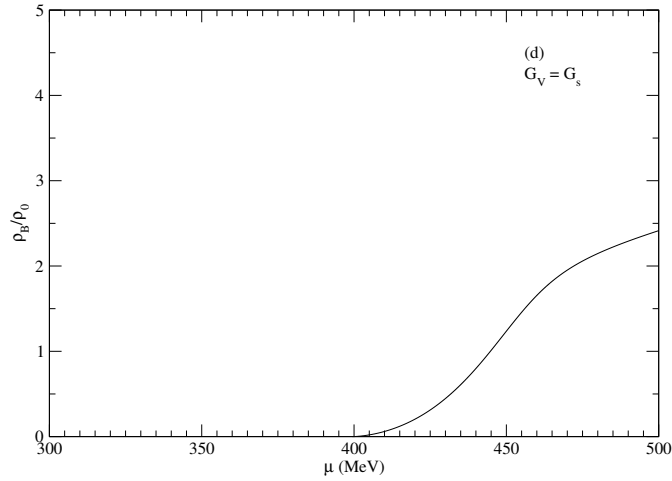


FIGURA 2.15 – Densidade em função do potencial químico para $G_V = G_s$. Demais parâmetros dados pelo conjunto 2 da tabela 2.1.

Note que a influência do canal vetorial também se manifesta nessas quantidades, apresentando exatamente os mesmos efeitos descritos anteriormente, a saber, o deslocamento da transição para diferentes valores de μ e a tendência de eliminação da transição de primeira ordem em favor de uma transição contínua. No caso do modelo NJL submetido à aproximação de campo médio com a parametrização 2 da tabela 2.1, verifica-se que para o caso específico de $G_V = G_s$, a transição simetria quiral quebrada/restaurada é contínua. Nos demais casos testados, $G_V = 0$, $G_V = 0,25G_s$ e $G_V = 0,5G_s$, a transição é de primeira ordem.

3 Confinamento no modelo NJL

$(T \neq 0)$

No próximo capítulo, apresentaremos nossa proposta para a construção de um modelo efetivo para a QCD, mais especificamente baseada na versão $SU(2)$ do modelo NJL mostrada no capítulo anterior, onde será possível descrever a fase desconfinaada do sistema (de quarks) mesmo em $T = 0$. Antes porém, mostraremos como a transição confinamento/desconfinamento é incluída nos modelos efetivos da QCD e que, em geral, os modelos padecem do problema de não mais descreverem esse tipo de transição no regime de temperatura nula. Em particular, proporemos uma versão do modelo Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio (PNJL), modelo NJL no qual os efeitos do confinamento são levados em conta de forma fenomenológica, na qual será possível investigar o desconfinamento dos quarks mesmo em temperatura nula.

3.1 Laço de Polyakov

Nos modelos efetivos que visam descrever o máximo possível a teoria formal da QCD, tais como o *MIT bag model* (CHODOS *et al.*, 1974a; CHODOS *et al.*, 1974b; DEGRAND *et al.*, 1975), o modelo σ linear (inicialmente usado na descrição da interação entre mésons e núcleons (GELL-MANN; LEVY, 1960)), ou o próprio modelo NJL apresentado no capítulo anterior em sua versão $SU(2)$, uma característica extremamente importante da interação forte não é contemplada, a saber, a previsão de um possível desconfinamento dos quarks a distâncias muito curtas, ou, equivalentemente, a liberdade assintótica. Por exemplo, no modelo MIT, os quarks permanecem confinados como se estivessem presos em uma “sacola”, com um termo constante na equação de estado da pressão simulando tal efeito. No modelo σ linear os quarks são tratados como quarks “vestidos” pelas interações simuladas pelas trocas de mésons e apenas a transição quiral é analisada. Da mesma forma, o modelo NJL também só é capaz de tratar de forma efetiva a transição quiral, com os quarks interagindo entre si apenas quando estão em contato. Como mostrado no capítulo anterior, a estrutura da densidade lagrangiana apresenta apenas os chamados termos de

contato no campo ψ , ou seja, não há troca de partículas mediadoras. Para tentar aproximar ainda mais os modelos efetivos da teoria original da QCD, é preciso levar em conta a possibilidade do desconfinamento dos quarks. Tal característica pode ser incorporada de forma essencialmente fenomenológica nos modelos a partir da inclusão do chamado laço (*loop*) de Polyakov (POLYAKOV, 1978; SUSSKIND, 1979; SVETITSKY; YAFFE, 1982; SVETITSKY, 1986), definido como um laço de Wilson no espaço euclidiano (WILSON, 1974). O laço de Wilson fornece uma transformação de *gauge* entre dois pontos, definido por

$$W(x, y) = \mathcal{P} \exp \left[i \int_x^y dx^\mu A_\mu \right], \quad (3.1)$$

onde A_μ é o campo de glúons. No espaço-tempo euclidiano a integral (3.1) pode alcançar uma mesma posição espacial \vec{x} nos tempos euclidianos $\tau = 0$ e $\tau = \beta$, onde este *loop* fechado é interpretado como o laço de Polyakov (RÖßNER, 2009), dado por

$$\hat{L}(\vec{x}) = \mathcal{P} \exp \left[i \int_0^\beta d\tau A_4(\vec{x}, \tau) \right], \quad (3.2)$$

onde $A_4 = iA_0$ é a componente temporal euclidiana do campo A_μ associado aos glúons, $\beta = 1/T$ é o inverso da temperatura e \mathcal{P} indica a ordem de caminho no tempo imaginário τ que vai de 0 a β , com a construção desse formalismo ($t \rightarrow -i\tau$) realizada a partir das chamadas rotações de Wick (WEINBERG *et al.*, 1995). Como o operador \hat{L} é calculado em um mesmo ponto do espaço, ele é interpretado como um caminho fechado que interliga os pontos 0 e β em tempos diferentes.

O traço do laço de Polyakov, normalizado no número de cores ($N_c = 3$), segundo (FERREIRA, 2015), é dado por

$$\Phi \equiv \left\langle \frac{1}{N_c} \text{Tr} [\hat{L}] \right\rangle = \left\langle \frac{1}{3} \text{Tr} \left[\exp \left(i \int_0^\beta d\tau A_4 \right) \right] \right\rangle, \quad (3.3)$$

onde o campo dos glúons $A_4 = iA_0$. Na verdade, Φ é identificado como um parâmetro de ordem da transição confinamento/desconfinamento já que tal quantidade está diretamente relacionada com a simetria de centro (WEISS, 1982; HOLLAND; WIESE, 2000), conforme ilustra o apêndice D. Em sistemas puros de glúons, onde apenas campos bosônicos descrevem a teoria, esta simetria é sempre verificada. No caso do laço de Polyakov (Φ) deve ser igual a zero quando a simetria de centro é verificada (apêndice D). Logo, como Φ também está associado com a energia livre de um quark (F_q) via $\Phi = e^{-F_q/k_B T}$ (MCLERRAN; SVETITSKY, 1981), se a simetria de centro é realizada ($\Phi = 0$), então $F_q \rightarrow \infty$, significando que o quark está confinado. Se o desconfinamento é atingido, em temperaturas muito altas, por exemplo, então temos $\Phi = 1$, sinalizando que a simetria de centro é quebrada ($\Phi \neq 0$).

3.2 Setor puro de glúons

O comportamento dinâmico de Φ e de seu complexo conjugado Φ^* ($\Phi^* = \langle 1/N_c \text{Tr} [\hat{L}^\dagger] \rangle$) é determinado a partir da descrição termodinâmica do setor puro de glúons (SPG) em temperatura finita. Em outras palavras, Φ e Φ^* devem ser tais que as equações de estado para um gás (efetivo) de glúons reproduzam resultados já conhecidos desse setor, no caso, dados obtidos via cálculos de QCD na rede. O grande potencial termodinâmico que descreve o SPG, $\Omega_{\text{SPG}} \equiv \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)$, é construído a partir dessa perspectiva. Na literatura, há algumas formas funcionais para $\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)$, chamado também de potencial de Polyakov. Por exemplo, em (RATTI *et al.*, 2006; HANSEN, 2009), a seguinte forma polinomial é proposta,

$$\frac{\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)}{T^4} = -\frac{b_2(T)}{2} \Phi\Phi^* - \frac{b_3}{6} (\Phi^3 + \Phi^{*3}) + \frac{b_4}{4} (\Phi\Phi^*)^2 \quad (3.4)$$

com

$$b_2(T) = a_0 + a_1 \left(\frac{T_0}{T} \right) + a_2 \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 + a_3 \left(\frac{T_0}{T} \right)^3, \quad (3.5)$$

sendo a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , b_3 e b_4 constantes adimensionais e $T_0 = 270$ MeV a temperatura de desconfinamento para o SPG, ou seja, a temperatura a partir da qual Φ passa a ser diferente de zero. Seguem na figura 3.1 a seguir, as previsões desse modelo para o SPG em comparação com dados obtidos via QCD na rede. Pressão, densidade de energia e entropia para o SPG são dados em função de $\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)$ através das relações $p = -\Omega_{\text{SPG}} = -\mathcal{U}$, $\epsilon = \mathcal{U} - T \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial T}$ e $s = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial T}$, respectivamente.

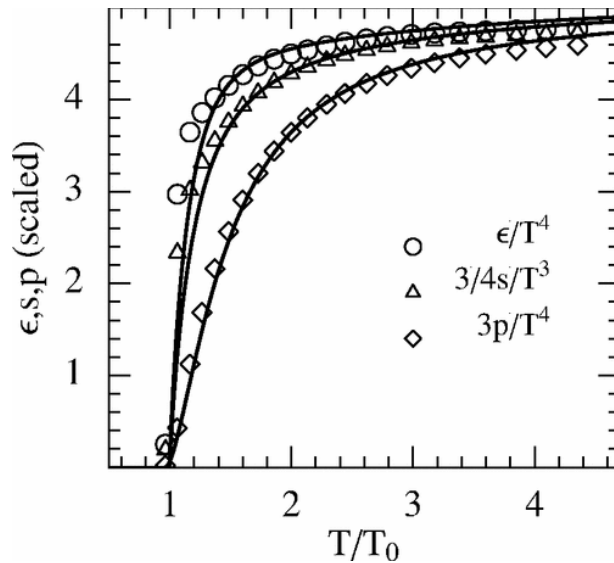


FIGURA 3.1 – Densidade de energia (ϵ), entropia (s) e pressão (p), como funções da temperatura (em unidades de T_0) para o setor puro de glúons descrito pelo potencial de Polyakov dado em (3.4). Figura extraída da referência (RATTI *et al.*, 2006).

O laço de Polyakov e seu complexo conjugado são obtidos a partir da solução de

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \Phi} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \Phi^*} = 0, \quad (3.6)$$

ou seja, Φ e Φ^* são soluções que minimizam o grande potencial termodinâmico do SPG, como ilustra a figura 3.2 abaixo. Aliás, para o SPG temos sempre que $\Phi = \Phi^*$.

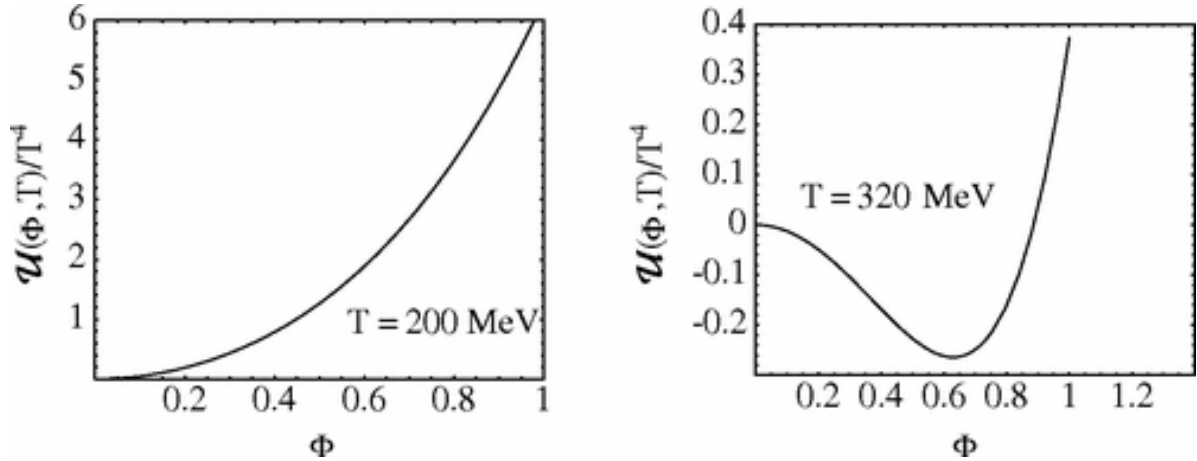


FIGURA 3.2 – Potencial de Polyakov dado em (3.4) como função de Φ para duas temperaturas diferentes. Figura extraída da referência (RATTI *et al.*, 2006).

O próprio Φ em função da razão T/T_c é mostrado na figura 3.3 a seguir. Note que em $T = T_c$ (temperatura crítica) o laço de Polyakov passa a ser diferente de zero indicando uma transição de fase, a saber, da fase confinada para a desconfiada. Nesse caso específico do SPG descrito pelo grande potencial termodinâmico dado em termos da equação (3.4), $T_c = T_0 = 270$ MeV e a transição de fase é de primeira ordem. Na verdade, a forma para $b_2(T)$ na equação (3.5) é dada justamente para que essa transição de fase seja reproduzida.

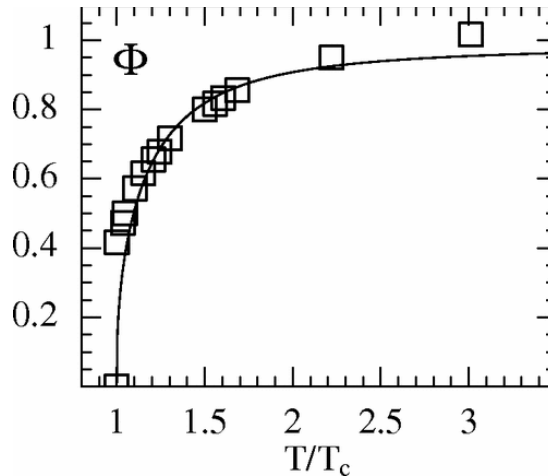


FIGURA 3.3 – Φ , em função da temperatura (em unidades de $T_c = T_0$), obtido a partir da solução da equação (3.6). Figura extraída da referência (RATTI *et al.*, 2006).

Na referência (FUKUSHIMA, 2008), os termos independentes da temperatura na equação (3.4) são substituídos por uma forma logarítmica em Φ e Φ^* , gerando $\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)$ dado por

$$\frac{\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)}{T^4} = -\frac{b_2(T)}{2}\Phi\Phi^* + b_4(T) \ln [1 - 6\Phi\Phi^* + 4(\Phi^3 + \Phi^{*3}) - 3(\Phi\Phi^*)^2], \quad (3.7)$$

com $b_2(T)$ apresentando a mesma dependência em T da equação (3.5) e $b_4(T) = b_3(T_0/T)^3$. Note que tal termo logarítmico limita o laço de Polyakov a valores menores que 1. A comparação das quantidades termodinâmicas desse modelo como os resultados de QCD na rede e, a forma do potencial de Polyakov $\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)$ para alguns valores de temperatura são dados na figura 3.4 a seguir.

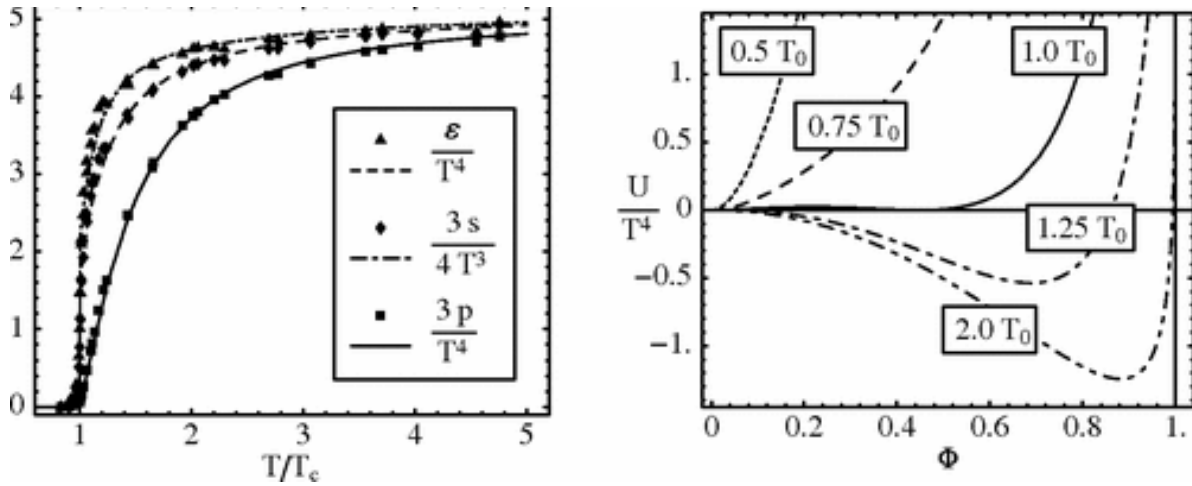


FIGURA 3.4 – Setor puro de glúons descrito pelo potencial de Polyakov dado em (3.7). Esquerda: densidade de energia (ϵ), entropia (s) e pressão (p), como funções de T (em unidades de $T_c = T_0$). U/T^4 em função de Φ para alguns valores de T . Figura extraída da referência (RÖSSNER *et al.*, 2007).

Os parâmetros adimensionais usados em $\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)$ nas suas formas polinomial e logarítmica são dados na tabela 3.1.

$\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)$	a_0	a_1	a_2	a_3	b_3	b_4
Eq. (3.4)	6,75	-1,95	2,625	-7,44	0,75	7,5
Eq. (3.7)	3,51	-2,47	15,22	-	-	-1,75

TABELA 3.1 – Parâmetros dos potenciais dados nas equações (3.4) e (3.7).

Outro potencial de Polyakov presente na literatura é o da referência (FUKUSHIMA, 2008). Além de fazer com que a termodinâmica do SPG seja compatível com os dados de QCD na rede em temperaturas próximas à temperatura de transição de fase, as constantes adimensionais da tabela 3.1 que compõem os potenciais dados pelas equações (3.4) e (3.7), são obtidas também para que o limite de Stefan-Boltzmann seja reproduzido em temperaturas muito altas. O autor de (FUKUSHIMA, 2008), K. Fukushima, sugere que tal limite

não deveria ser levado em conta já que o laço de Polyakov descreve glúons longitudinais e para altas temperaturas os glúons transversais deveriam ser os dominantes. A partir dessa análise, Fukushima propôs a seguinte forma funcional para o potencial de Polyakov,

$$\frac{\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)}{bT} = -54e^{-a/T}\Phi\Phi^* + \ln [1 - 6\Phi\Phi^* + 4(\Phi^3 + \Phi^{*3}) - 3(\Phi\Phi^*)^2], \quad (3.8)$$

com $a = 664$ MeV determinado para que a transição de primeira ordem ocorra em $T = 270$ MeV e b escolhido de forma a fazer com que a transição quiral coincida com a de desconfinamento quando quarks são adicionados ao sistema. Nesse caso a transição passa a ser um “*crossover*” e em torno de 200 MeV. Para esse potencial o limite Stefan-Boltzmann não é atingido em temperaturas altas. Entretanto, como a validade desses modelos fenomenológicos é restrita a aproximadamente $2T_c$, todas os potenciais apresentados são consistentes em temperaturas dentro dessa faixa de valores.

3.3 Modelo Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio (PNJL)

O chamado modelo Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio (PNJL) foi inicialmente proposto por K. Fukushima (FUKUSHIMA, 2004) como uma generalização do modelo NJL devido à inclusão dos efeitos do confinamento. Nesse aspecto, o modelo PNJL torna-se um modelo efetivo que descreve mais realisticamente a teoria da QCD quando comparado ao próprio NJL. Basicamente, a dinâmica de glúons é feita a partir da substituição da derivada ∂^μ no modelo NJL por $D^\mu \equiv \partial^\mu + iA^\mu$, com A^μ sendo o campo dos glúons. A densidade lagrangiana do modelo PNJL para o sistema com quarks de dois sabores (u e d), $SU(2)$, é então escrita como

$$\mathcal{L}_{\text{PNJL}} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu D^\mu - m)\psi + G_s [(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\tau\psi)^2] - G_V(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2 - \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T). \quad (3.9)$$

A construção da termodinâmica do modelo é obtida a partir da determinação de seu grande potencial termodinâmico dado por $\Omega_{\text{PNJL}} = -\frac{T}{V}\ln(\mathcal{Z}_{\text{PNJL}})$, com $\mathcal{Z}_{\text{PNJL}}$ sendo a função partição do modelo. A forma usual de se obter $\mathcal{Z}_{\text{PNJL}}$ é a partir da conexão da Teoria de Campos a temperatura finita com a Mecânica Estatística Quântica. As linhas gerais de como tal conexão é feita são mostradas no apêndice E. Para o modelo NJL, por exemplo, a derivação de Ω é feita com o uso da aproximação de campo médio, de campos auxiliares bosônicos e do formalismo de Nambu-Gorkov. Uma referência que mostra esses cálculos de forma minuciosa é (DUARTE, 2018). Para o caso do modelo PNJL

especificamente, os mesmos procedimentos são adotados, resultando em

$$\begin{aligned}\Omega_{\text{PNJL}} &= \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T) + G_s \rho_s^2 - G_V \rho^2 - \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\Lambda E k^2 dk \\ &- \frac{\gamma T}{2\pi^2 N_c} \int_0^\infty \ln [1 + 3\Phi e^{-(E-\mu)/T} + 3\Phi^* e^{-2(E-\mu)/T} + e^{-3(E-\mu)/T}] k^2 dk \\ &- \frac{\gamma T}{2\pi^2 N_c} \int_0^\infty \ln [1 + 3\Phi^* e^{-(E+\mu)/T} + 3\Phi e^{-2(E+\mu)/T} + e^{-3(E+\mu)/T}] k^2 dk\end{aligned}\quad (3.10)$$

com $E = (k^2 + M^2)^{1/2}$, $\rho_s = \langle \bar{\psi}\psi \rangle = \langle \bar{u}u \rangle + \langle \bar{d}d \rangle = 2 \langle \bar{u}u \rangle$ e o fator de degenerescência dado por $\gamma = N_s \times N_f \times N_c = 12$, devido aos números de spin, sabor e cor, respectivamente ($N_s = N_f = 2$ e $N_c = 3$). O parâmetro Λ define o *cutoff* da integral inicialmente divergente do modelo. Os detalhes técnicos dessa derivação são mostrados, por exemplo, nas referências (RÖßNER, 2006; RÖßNER, 2009). Assim como no modelo NJL, a massa constituinte dos quarks M é dada em função da massa de corrente m e do condensado de quarks ρ_s de forma autoconsistente, ou seja,

$$M = m - 2G_s \rho_s, \quad (3.11)$$

com ρ_s , obtido pela condição $\frac{\partial \Omega_{\text{PNJL}}}{\partial \rho_s} = 0$, dado por

$$\rho_s = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{M}{E(M)} k^2 dk [f(k, T, \Phi, \Phi^*) + \bar{f}(k, T, \Phi, \Phi^*)] - \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{M}{E(M)} k^2 dk. \quad (3.12)$$

As funções f e \bar{f} ¹, dadas por

$$f(k, T, \Phi, \Phi^*) = \frac{\Phi e^{2(E-\mu)/T} + 2\Phi^* e^{(E-\mu)/T} + 1}{3\Phi e^{2(E-\mu)/T} + 3\Phi^* e^{(E-\mu)/T} + e^{3(E-\mu)/T} + 1} \quad (3.13)$$

e

$$\bar{f}(k, T, \Phi, \Phi^*) = \frac{\Phi^* e^{2(E+\mu)/T} + 2\Phi e^{(E+\mu)/T} + 1}{3\Phi^* e^{2(E+\mu)/T} + 3\Phi e^{(E+\mu)/T} + e^{3(E+\mu)/T} + 1}, \quad (3.14)$$

são as distribuições generalizadas de Fermi-Dirac, usadas também na determinação da densidade de quarks através de

$$\rho = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk [f(k, T, \Phi, \Phi^*) - \bar{f}(k, T, \Phi, \Phi^*)]. \quad (3.15)$$

Note que as equações de estado do modelo PNJL apresentam estruturas similares às do modelo NJL. As modificações estão na substituição das funções de Fermi-Dirac usuais de quarks e antiquarks pelas funções generalizadas dadas nas equações (3.13) e (3.14), além

¹As funções f e \bar{f} não são complexos conjugados, uma vez que ambas são funções reais, veja a referencia (HANSEN, 2009).

é claro, da inclusão do potencial referente aos glúons, dado por $\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)$, no grande potencial termodinâmico. Além disso, Φ e Φ^* são encontrados através da solução de

$$\frac{\partial \Omega_{\text{PNJL}}}{\partial \Phi} = \frac{\partial \Omega_{\text{PNJL}}}{\partial \Phi^*} = 0, \quad (3.16)$$

que simultaneamente com a solução da equação (3.11) para M , determinam completamente o modelo. Pressão e densidade de energia são obtidos a partir da equação (3.10) como

$$\begin{aligned} P_{\text{PNJL}} &= -\Omega_{\text{PNJL}} \\ &= -\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T) + G_V \rho^2 - G_s \rho_s^2 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\Lambda (k^2 + M^2)^{1/2} k^2 dk \\ &\quad + \frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^4}{(k^2 + M^2)^{1/2}} dk [f(k, T, \Phi, \Phi^*) + \bar{f}(k, T, \Phi, \Phi^*)] + \mathcal{E}_{\text{vac}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{PNJL}} &= -T^2 \frac{\partial(\Omega_{\text{PNJL}}/T)}{\partial T} + \mu \rho \\ &= \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T) - T \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial T} + G_V \rho^2 + G_s \rho_s^2 - \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\Lambda (k^2 + M^2)^{1/2} k^2 dk \\ &\quad + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty (k^2 + M^2)^{1/2} k^2 dk [f(k, T, \Phi, \Phi^*) + \bar{f}(k, T, \Phi, \Phi^*)] - \mathcal{E}_{\text{vac}}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

respectivamente, com \mathcal{E}_{vac} dado pela expressão (2.33). Por fim, a densidade de entropia pode ser obtida via $\mathcal{S}_{\text{PNJL}} = -\frac{\partial \Omega_{\text{PNJL}}}{\partial T}$, ou pela relação $\mathcal{S}_{\text{PNJL}} = (P_{\text{PNJL}} + \mathcal{E}_{\text{PNJL}} - \mu \rho)/T$, completando as equações de estado. A termodinâmica do modelo é então analisada uma vez que o potencial $\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)$ é escolhido, e as constantes G_s , Λ e m determinadas. Essas últimas são as mesmas obtidas no setor apenas de quarks (modelo NJL), com G_V sendo um parâmetro livre.

4 Confinamento no modelo NJL

$(T = 0)$: modelo PNJL0

Apesar do modelo PNJL apresentar um claro aprimoramento em relação ao modelo NJL original, já que no primeiro a dinâmica da transição confinamento/desconfinamento é levada em conta através dos “campos” Φ e Φ^* , uma falha advinda do próprio modelo NJL ainda é observada no modelo PNJL: a falta dessa dinâmica no regime de temperatura nula. Esse problema pode ser observado ao analisarmos a pressão e a densidade de energia dadas em (3.17) e (3.18), respectivamente. O limite $T \rightarrow 0$ nas distribuições generalizadas de Fermi-Dirac as transforma na função degrau. Assim, as integrais que vão até infinito passam a ir até k_F e, segundo as expressões (3.4) e (3.7), os potenciais de Polyakov se anulam fazendo então com que (3.17) e (3.18) sejam dadas exatamente por (2.47) e (2.35), respectivamente¹, ou seja, recuperam-se as equações de estado do modelo NJL em $T = 0$ e, conseqüentemente, perde-se totalmente a informação implementada em $T \neq 0$ sobre o confinamento: não há mais laço de Polyakov na estrutura termodinâmica do modelo. Além do estudo sobre a termodinâmica de um modelo específico na reprodução da fenomenologia da QCD (modelo NJL), esta dissertação também apresenta uma proposta para contornar esse problema específico do modelo NJL/PNJL no regime de temperatura nula.

4.1 Acoplamentos dependentes do laço de Polyakov

A ideia aqui é introduzir o laço de Polyakov na pressão e densidade de energia do modelo NJL em $T = 0$ impondo que os acoplamentos escalar e vetorial do modelo se anulem quando os quarks se desconfinarem nesse regime. Para tal, sugerimos que as constantes que regulam os acoplamentos sejam agora funções de Φ da seguinte forma:

$$G_s \longrightarrow G_s(\Phi) = G_s(1 - \Phi^2), \quad G_V \longrightarrow G_V(\Phi) = G_V(1 - \Phi^2), \quad (4.1)$$

onde, por simplicidade, tomamos aqui a aproximação $\Phi^* = \Phi$ nos termos que seriam dados pelo produto $\Phi\Phi^*$. Na verdade, tais alterações compõem uma versão mais simples

¹As contribuições das distribuições de antipartículas são desconsideradas em $T = 0$.

do chamado modelo EPNJL (do inglês, *Entanglement* PNJL) dado, por exemplo, na referência (SAKAI *et al.*, 2010) na qual os autores propõe uma mudança do tipo²

$$G_s(\Phi, \Phi^*) = G_s[1 - \alpha_1 \Phi \Phi^* - \alpha_2(\Phi^3 + \Phi^3)] \quad (4.2)$$

para o acoplamento escalar³, com α_1 e α_2 constantes a serem determinadas. Nesse trabalho, a alteração em G_s faz com que o modelo reproduza dados de QCD na rede para potenciais químicos imaginários (SAKAI *et al.*, 2010). Conseqüentemente, a correlação entre os parâmetros de ordem ρ_s e Φ se torna mais forte e as transições simetria quiral quebrada/restaurada e confinamento/desconfinamento ocorrem no mesmo T para $\mu = 0$ (regime de temperatura finita nesse caso). Nota-se que caso tenhamos $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ o EPNJL se reduz ao PNJL. Também em regime de temperatura nula o EPNJL, assim como o PNJL, perde as contribuições de Φ , e novamente o modelo se reduz ao NJL convencional em $T = 0$. Em nossa proposta em (4.1), apenas admitimos que quando os quarks estão livres, $\Phi = 1$, suas interações devem desaparecer.

A implementação da proposta (4.1) nas equações de estado do modelo NJL em $T = 0$, equações (2.8), (2.35), (2.38) e (2.47), demanda a determinação dos possíveis valores de Φ através da condição

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \Phi}\right)_\rho = 0, \quad (4.3)$$

ou, equivalentemente, de

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \Phi}\right)_\mu = 0, \quad (4.4)$$

conforme discussão apresentada no final da seção 2.2.5⁴. Entretanto, a simples substituição de G_s e G_V pelas funções dadas em (4.1) não é suficiente para gerar valores de Φ diferentes de zero, ou seja, novamente um modelo com o laço de Polyakov incluso na teoria é levado ao modelo NJL usual onde os acoplamentos são constantes. Para evitar esse inconveniente, além das substituições em (4.1), adicionaremos de forma *ad hoc* no potencial termodinâmico que descreve o sistema (\mathcal{E} ou Ω) o termo dado por

$$\mathcal{U}_0(\Phi) \equiv a_3 T_0^4 \ln(1 - 6\Phi^2 + 8\Phi^3 - 3\Phi^4), \quad (4.5)$$

adaptado do termo logarítmico dado em (3.7), porém, com a temperatura fixada em⁵

²A escolha da dependência em Φ e Φ^* é feita para que as simetrias de centro, quiral e C (carga) sejam satisfeitas.

³No trabalho da referência (SAKAI *et al.*, 2010), os autores não consideram o canal vetorial.

⁴Condição resolvida simultaneamente à equação de M dada por (2.8) com ρ_s definido em (2.32), com os acoplamentos modificados para $G_s(\Phi)$ e $G_V(\Phi)$ também na expressão do potencial químico (2.38).

⁵Valor usado frequentemente nos potenciais de Polyakov dos modelos PNJL (RATTI *et al.*, 2006) cujo

$T_0 = 190$ MeV e com a_3 sendo um parâmetro livre adimensional. O efeito desse novo termo, além de fazer com que Φ adquira valores não nulos em algumas circunstâncias, como veremos adiante, é limitar os valores do laço de Polyakov a valores no intervalo entre 0 e 1. Tal procedimento foi usado na referência (DEXHEIMER; SCHRAMM, 2010) com o mesmo objetivo de gerar valores de Φ diferentes de zero, porém, em um modelo muito mais sofisticado que leva em conta na mesma densidade lagrangiana graus de liberdade de hádrons e quarks. No caso desta dissertação, nossa proposta é baseada na modificação do modelo NJL em $T = 0$. Assim, a massa constituinte do quark e o potencial químico do novo modelo, que chamaremos aqui de PNJL0, são dados por

$$M = m - 2G_s(1 - \Phi^2)\rho_s, \quad (4.6)$$

e

$$\mu = 2G_V(1 - \Phi^2)\rho + (k_F^2 + M^2)^{1/2}, \quad (4.7)$$

respectivamente.

4.2 Novo potencial de Polyakov

As equações de estado referentes à pressão e à densidade de energia podem ser dadas por,

$$\begin{aligned} P = & -\mathcal{U}(\rho, \rho_s, \Phi) + G_V\rho^2 - G_s\rho_s^2 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dk k^2 (k^2 + M^2)^{1/2} \\ & + \frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^{k_F} dk \frac{k^4}{(k^2 + M^2)^{1/2}} + \mathcal{E}_{\text{vac}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

e

$$\mathcal{E} = \mathcal{U}(\rho, \rho_s, \Phi) - 2G_V\Phi^2\rho^2 + G_V\rho^2 + G_s\rho_s^2 - \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_{k_F}^\Lambda dk k^2 (k^2 + M^2)^{1/2} - \mathcal{E}_{\text{vac}}, \quad (4.9)$$

respectivamente, quando definimos um novo potencial de Polyakov como sendo

$$\mathcal{U}(\rho_s, \rho, \Phi) = -G_V\Phi^2\rho^2 - G_s\Phi^2\rho_s^2 + \mathcal{U}_0(\Phi). \quad (4.10)$$

Note que essa definição de $\mathcal{U}(\rho_s, \rho, \Phi)$ deixa as expressões (4.8) e (4.9) com um formato sugestivo, no sentido em que elas podem ser interpretadas como um limite $T \rightarrow 0$ das equações (3.17) e (3.18). Claro que uma investigação mais cuidadosa precisa ser feita no

efeito nesses casos é fazer com que as temperaturas de transição em $\mu = 0$ sejam da ordem de 190 MeV, e não 270 MeV, como é o caso do setor puro de glúons.

regime de temperatura finita para se identificar (ou não) o segundo termo de (3.18) com o segundo termo de (4.9). Outro aspecto importante na definição desse novo potencial de Polyakov é a inclusão do efeito chamado de *back-reaction* do setor de quarks no de glúons, ou, em outras palavras, a influência do primeiro diretamente no segundo. Nos modelos PNJL usuais em temperatura finita, a interação dos glúons no setor de quarks já acontece uma vez que o laço de Polyakov está presente nas funções de distribuição generalizadas de Fermi-Dirac, veja as expressões (3.13) e (3.14), porém, o contrário não. Note que nas expressões (3.4) e (3.7) não há explicitamente a interação entre as quantidades associadas aos quarks no setor de glúons. A novidade aqui no regime de $T = 0$ é a que a *back-reaction* é completa (cada setor interage com o outro), advinda apenas da suposição de que as interações devem se anular no desconfinamento e da inclusão no modelo do termo dado na expressão (4.5). Outra forma de se incluir os efeitos do setor de quarks no de glúons foi dada, por exemplo, nas referências (HERBST *et al.*, 2011; SCHAEFER *et al.*, 2007), nas quais os autores impuseram uma dependência de N_f e μ na temperatura T_0 dos potenciais de Polyakov, $T_0 \rightarrow T_0(N_f, \mu)$.

4.3 Mínimos do grande potencial termodinâmico

O efeito do novo termo $\mathcal{U}_0(\Phi)$ no potencial de Polyakov dado em (4.10) é o de possibilitar soluções não nulas para Φ e assim permitir a dinâmica de desconfinamento em $T = 0$. Nesse sentido, a constante adimensional a_3 regula esse efeito. Para observá-lo na termodinâmica do modelo, apresentamos nas figuras (4.1)-(4.3) o grande potencial termodinâmico do modelo PNJL0 dado por $\Omega = -P$, com a pressão expressa na equação (4.8) em função do laço de Polyakov Φ para diferentes valores de μ , com $G_V = 0$ e os demais parâmetros dados pelo conjunto 2 da tabela 2.1.

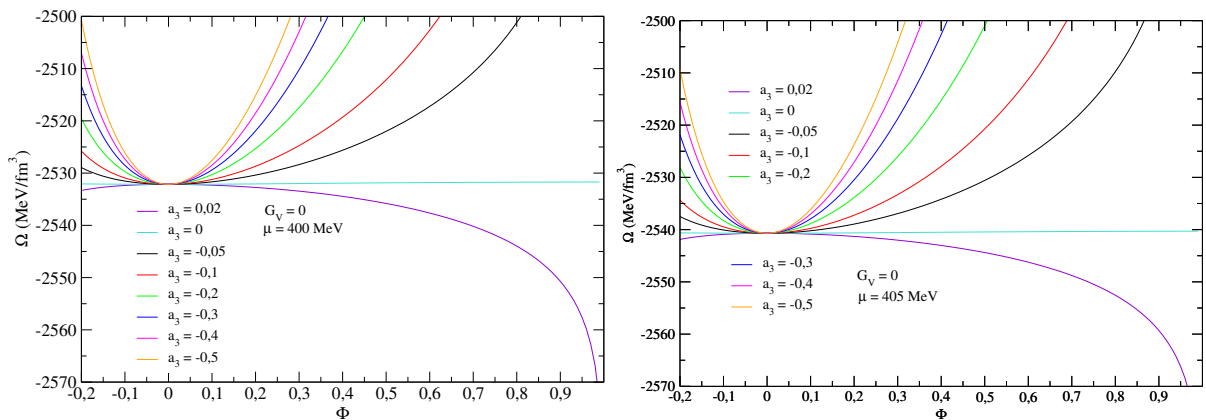


FIGURA 4.1 – $\Omega \times \Phi$ do modelo PNJL0 com $G_V = 0$ e diferentes valores de a_3 . Potencial químico dado por $\mu = M_{\text{vac}} = 400$ MeV (esquerda) e $\mu = 405$ MeV (direita).

Algumas observações podem ser feitas a partir dessas figuras. A saber, note que para um

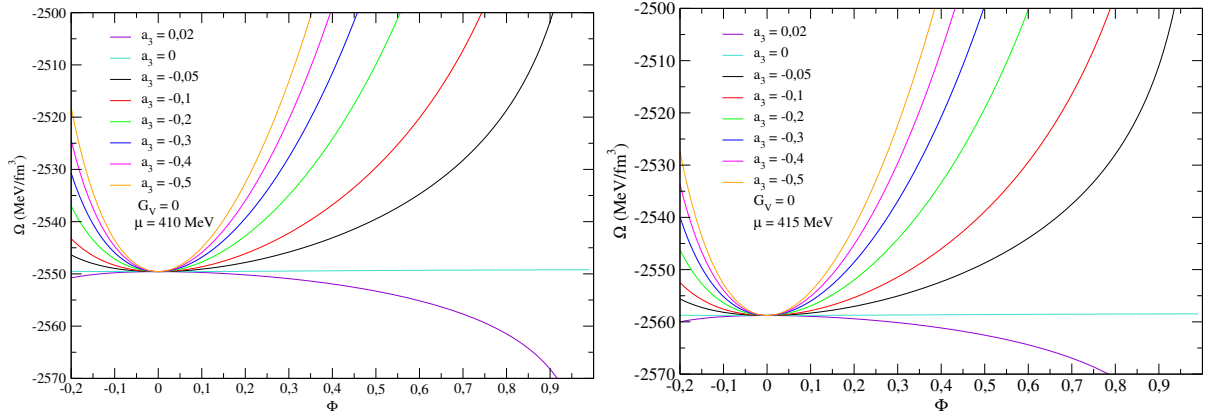


FIGURA 4.2 – $\Omega \times \Phi$ do modelo PNJL0 com $G_V = 0$ e diferentes valores de a_3 . Potencial químico dado por $\mu = 410$ MeV (esquerda) e $\mu = 415$ MeV (direita).

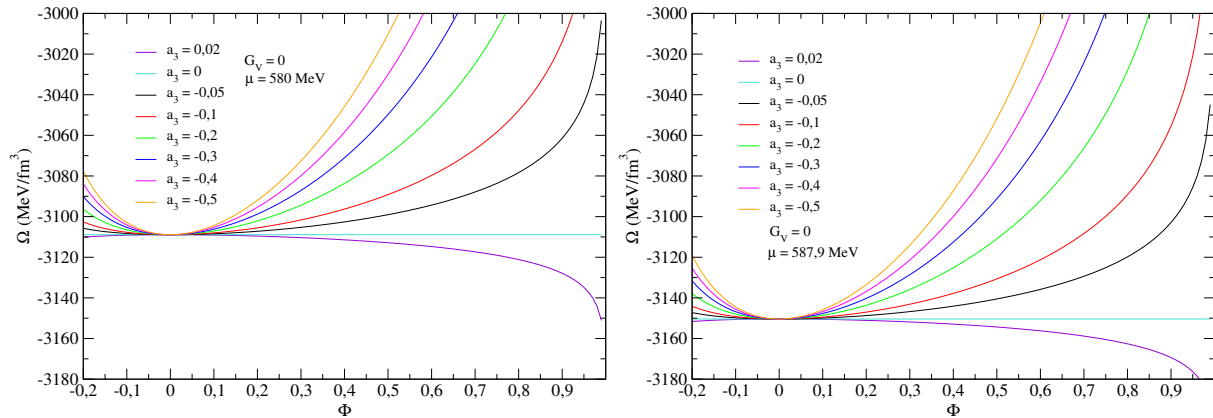


FIGURA 4.3 – $\Omega \times \Phi$ do modelo PNJL0 com $G_V = 0$ e diferentes valores de a_3 . Potencial químico dado por $\mu = 580$ MeV (esquerda) e $\mu = \Lambda = 587,9$ MeV (direita).

valor de μ fixo, por exemplo $\mu = 405$ MeV, a variação da constante a_3 não produz nenhuma alteração no valor de Φ correspondente ao mínimo de Ω , que para todos os valores de a_3 testados é o mesmo: $\Phi = 0$. Perceba também que para a_3 positivo, Ω deixa de apresentar um mínimo e passa a apresentar um máximo, situação fisicamente descartada. Esse efeito é verificado também para os demais valores de μ testados. Mesmo para um valor extremo de μ dado pelo *cutoff* Λ na figura 4.3 da direita, não há sinalização de que o sistema apresentará soluções de $\Phi \neq 0$, o que fisicamente significa que o modelo não exibe desconfinamento para a região analisada de μ : $M_{\text{vac}} \leq \mu \leq \Lambda$. Ainda sobre essas figuras, observa-se que para um valor fixo de a_3 , a variação de μ também não é suficiente para produzir mínimos em $\Phi \neq 0$. Seu único efeito é do de diminuir o valor de $\Omega(\Phi = 0)$ na medida em que μ aumenta. De forma resumida, para a parametrização dada pelo conjunto 2 da tabela 2.1 com $G_V = 0$, o modelo PNJL0 não apresenta a dinâmica confinamento/desconfinamento, reduzindo-se portanto ao próprio modelo NJL. Essa é uma informação importante, já que a sinalização é de que o modelo PNJL0 precisa necessariamente do canal vetorial presente em sua estrutura para que Φ possa apresentar soluções diferentes de zero. Pelo menos esse é o caso para o conjunto de parâmetros G_s ,

Λ e m do conjunto 2. Dessa forma, testamos valores não nulos para G_V para o mesmo conjunto 2 da tabela 2.1. Nas figuras (4.4)-(4.6) a seguir mostramos os resultados de Ω em função de Φ para $G_V = 0, 25G_s$, novamente variando os valores da constante a_3 .

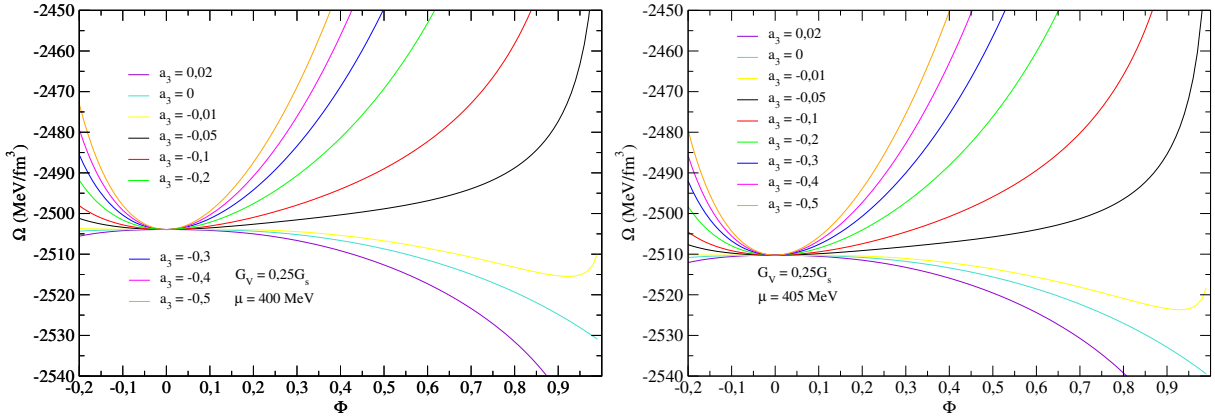


FIGURA 4.4 – $\Omega \times \Phi$ do modelo PNJL0 com $G_V = 0, 25G_s$ e diferentes valores de a_3 . Potencial químico dado por $\mu = M_{\text{vac}} = 400$ MeV (esquerda) e $\mu = 405$ MeV (direita).

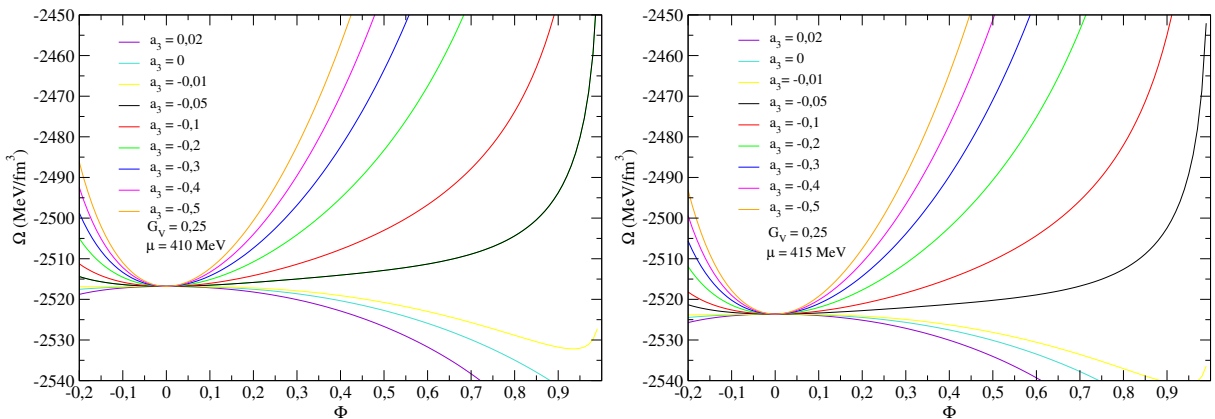


FIGURA 4.5 – $\Omega \times \Phi$ do modelo PNJL0 com $G_V = 0, 25G_s$ e diferentes valores de a_3 . Potencial químico dado por $\mu = 410$ MeV (esquerda) e $\mu = 415$ MeV (direita).

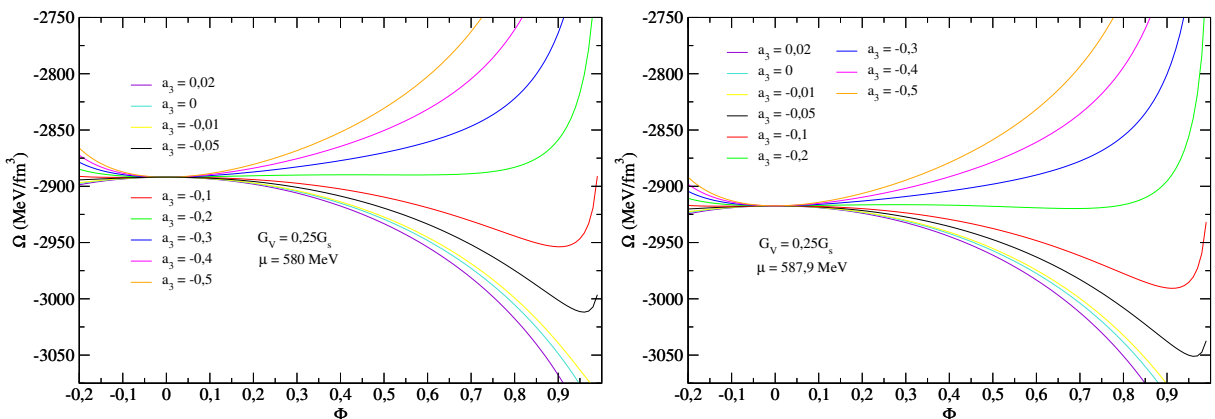


FIGURA 4.6 – $\Omega \times \Phi$ do modelo PNJL0 com $G_V = 0, 25G_s$ e diferentes valores de a_3 . Potencial químico dado por $\mu = 580$ MeV (esquerda) e $\mu = \Lambda = 587,9$ MeV (direita).

Note que agora há valores de a_3 que produzem mínimos globais para Ω com $\Phi \neq 0$. Como exemplo, veja que $a_3 = -0,1$ produz um modelo no qual o mínimo de Ω é obtido em $\Phi = 0$ para $\mu = M_{\text{vac}} = 400$ MeV (figura 4.4, curva vermelha). Já para $\mu = \Lambda = 587,9$ MeV (figura 4.6, curva vermelha), o mínimo global é alcançado com $\Phi \approx 0,9$. A indicação nesse caso é de que há um valor intermediário de μ no qual haverá dois mínimos possíveis para Φ , um deles sendo em $\Phi = 0$ e o outro para $\Phi \neq 0$. Esse é exatamente o valor do potencial químico no qual ocorre a transição do tipo quarks confinados ($\Phi = 0$) / desconfinados ($\Phi \neq 0$).

4.4 Transição confinamento/desconfinamento

Usaremos aqui a forma já discutida no capítulo 2 de se localizar o potencial químico no qual a transição confinamento/desconfinamento ocorre para o modelo PNJL0 com $G_V = 0,25G_s$ e $a_3 = -0,1$: através da busca do ponto de cruzamento do gráfico $\Omega \times \mu$. Veja na figura 4.7 que essa transição ocorre nesse caso para $\mu = 506,906$ MeV.

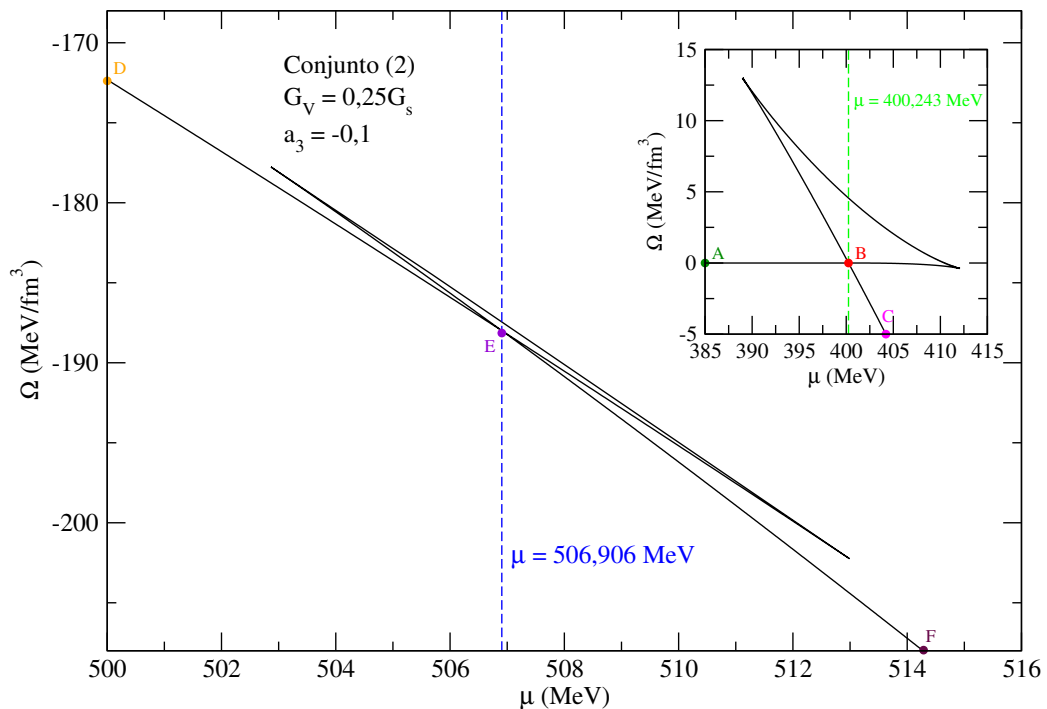


FIGURA 4.7 – Ω em função de μ para o conjunto 2 do modelo PNJL0 com $G_V = 0,25G_s$ e $a_3 = -0,1$.

Note que aqui a curva correta para o modelo é aquela descrita pelo segmento DEF , segundo os critérios discutidos no capítulo 2. Lembrando: a curva do potencial termodinâmico deve ser côncava como função do parâmetro intensivo (μ nesse caso), significando que ela deve se posicionar completamente abaixo de retas tangentes no espaço do parâmetro intensivo. Ainda, é possível verificar em nosso modelo que o cruzamento referente

ao ponto onde se dá a transição de fases do tipo simetria quiral quebrada / restaurada continua sendo determinado no mesmo valor de μ encontrado no caso do modelo NJL no capítulo 2. Veja o *inset* na figura 4.7 e compare-o com a figura 2.6. É possível entender a partir das equações do modelo PNJL0 o porquê desse ponto de transição em $\mu_{\text{quiral}} = 400,243$ MeV continuar inalterado. Note que na figura principal, o ponto em $\mu_{\text{conf}} = 506,906$ MeV indica que para $\mu < \mu_{\text{conf}}$ o sistema encontra-se em uma fase onde os quarks estão confinados, indicando portanto que $\Phi = 0$. Tomar esse valor de Φ no modelo PNJL0 significa reduzi-lo ao modelo original NJL em $T = 0$, conforme mostram as equações (4.5)-(4.10), ou seja, quando os quarks ainda estão confinados, a termodinâmica do modelo é inteiramente descrita pelo modelo NJL. Só a partir do ponto de transição confinamento / desconfinamento, em $\mu = \mu_{\text{conf}} = 506,906$ MeV, o laço de Polyakov passa a ser importante e a dinâmica passa a ser governada pelo modelo PNJL0. A curva total passa então a ser dada pelo segmento $ABCDEF$. Para uma visão mais geral, mostramos na figura 4.8 a curva de Ω em função de μ em um intervalo de μ que engloba μ_{quiral} e μ_{conf} simultaneamente.

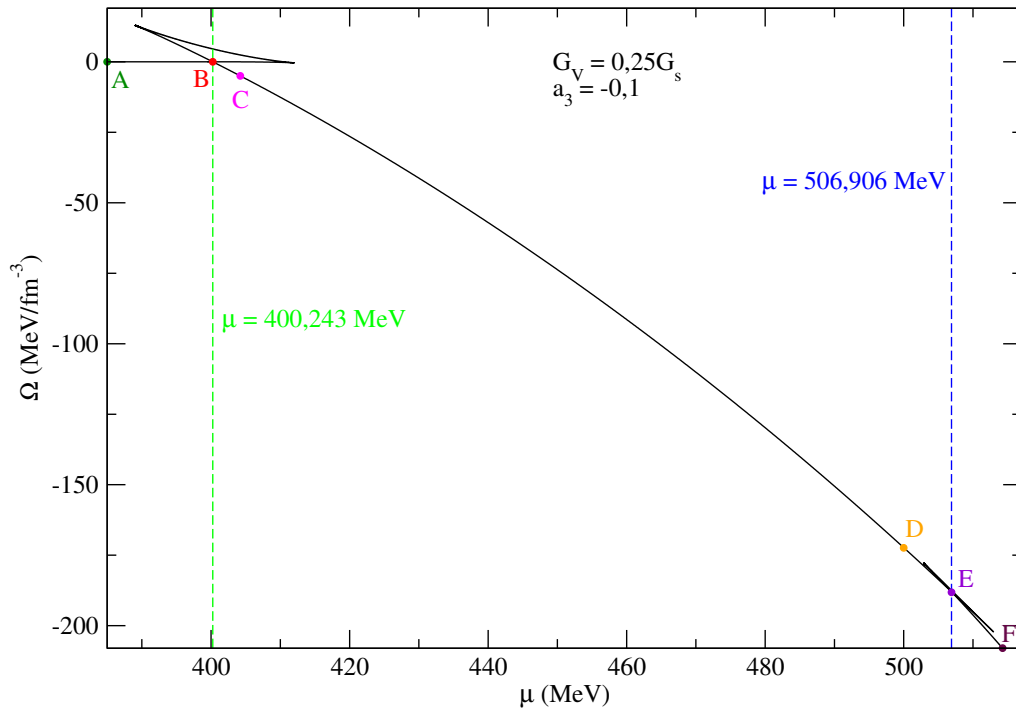
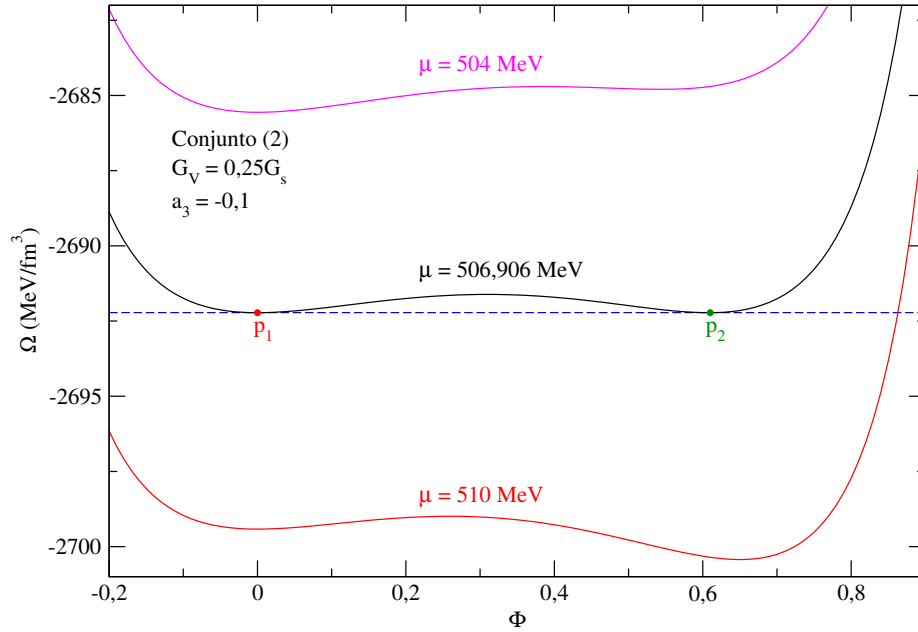
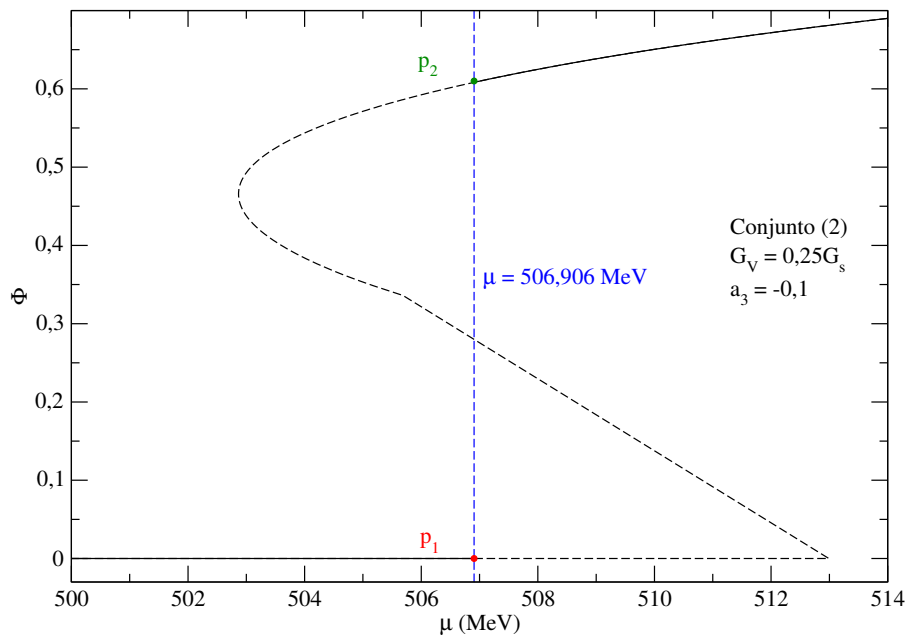


FIGURA 4.8 – Ω em função de μ para o conjunto 2 do modelo PNJL0 com $G_V = 0,25G_s$ e $a_3 = -0,1$ em um intervalo de μ que contém μ_{quiral} e μ_{conf} .

Da mesma maneira como procedemos no capítulo 2, ressaltamos que a obtenção do potencial químico de transição confinamento/desconfinamento também pode ser dada a partir da busca dos dois mínimos simultâneos no gráfico de Ω em função do parâmetro de ordem dessa transição específica: Φ . Na figura 4.9 apresentamos esse gráfico para alguns valores de μ , incluindo aquele no qual os dois mínimos ocorrem.


 FIGURA 4.9 – $\Omega \times \Phi$ para o conjunto 2 do modelo PNJL0 com $G_V = 0,25G_s$ e $a_3 = -0,1$.

Os dois mínimos simultâneos na curva de Ω do modelo PNJL0 observados na figura 4.9 estão associados aos pontos p_1 e p_2 . Esses dois pontos estão também registrados na figura do parâmetro de ordem Φ em função do potencial químico, como verifica-se na figura 4.10 a seguir. Note que os respectivos valores de Φ associados aos mínimos de Ω para


 FIGURA 4.10 – Laço de Polyakov em função do potencial químico para o conjunto 2 do modelo PNJL0 com $G_V = 0,25G_s$ e $a_3 = -0,1$.

$\mu = 506,906$ MeV delimitam as fases termodinâmicas de confinamento (ponto p_1 , $\Phi = 0$) e desconfinamento (ponto p_2 , $\Phi \neq 0$). Para outros valores de μ , como os apresentados na figura 4.9, há apenas uma solução de Φ que gera um mínimo para Ω , ou seja, nesses casos

o sistema está exclusivamente em uma das duas fases termodinâmicas possíveis, a fase de confinamento ou a de desconfinamento. Apenas em $\mu = 506,906$ MeV o sistema realiza a transição.

Na figura 4.11, mostramos como o desconfinamento afeta o condensado quiral. Para

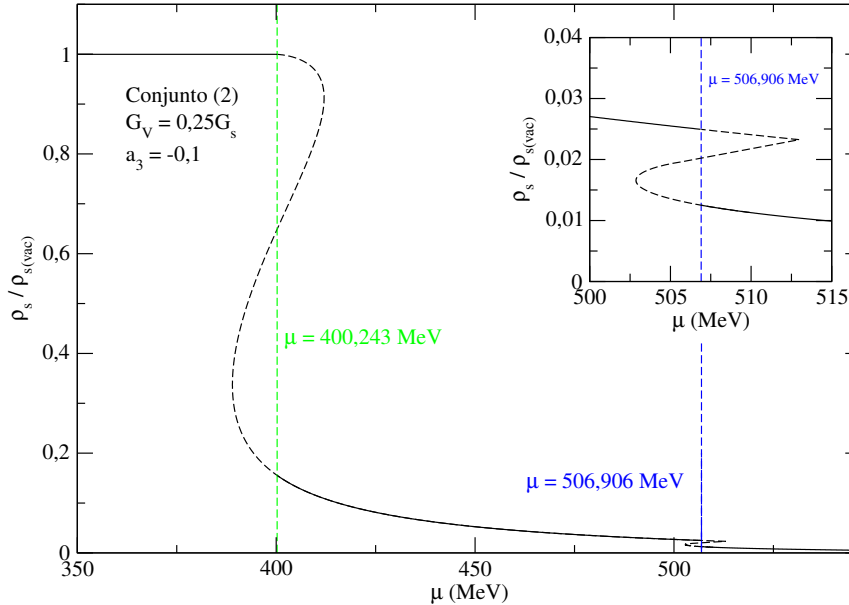


FIGURA 4.11 – Condensado quiral (em unidades de $\rho_{s(vac)}$) em função do potencial químico para o conjunto 2 do modelo PNJL0 com $G_V = 0,25G_s$ e $a_3 = -0,1$.

potenciais químicos menores que $\mu_{\text{quiral}} = 400,243$ MeV, o modelo comporta-se como o modelo NJL, conforme já discutido. Assim, o condensado quiral também é descrito pela dinâmica do NJL nessa região. Exatamente em $\mu_{\text{conf}} = 506,906$ MeV, a descontinuidade em Φ é também refletida em ρ_s devido à *back-reaction* do setor de glúons no setor de quarks. No *inset* da figura 4.11 é observada com mais clareza a transição confinamento/desconfinamento sendo registrada também no condensado quiral.

4.5 Fase quarkônica

O gráfico da figura 4.11 também é útil para se verificar outra fase da matéria fortemente interagente: a definida na região $\mu_{\text{quiral}} \leq \mu \leq \mu_{\text{conf}}$. Neste intervalo de μ a matéria de quarks já tem simetria quiral restaurada, uma vez que $\rho_s / \rho_{s(vac)}$ é próximo de zero, porém, ainda apresenta quarks confinados caracterizados pelo valor nulo de Φ . Somente a partir de $\mu = \mu_{\text{conf}}$, a fase de quarks livres (desconfinados) é atingida, ou seja, tem-se $\Phi \neq 0$. À essa região específica no intervalo $\mu_{\text{quiral}} \leq \mu \leq \mu_{\text{conf}}$ deu-se o nome de fase “quarkônica” (ABUKI *et al.*, 2008; FUKUSHIMA, 2008; MCLERRAN *et al.*, 2009; BUISSERET; LACROIX, 2012; MCLERRAN; PISARSKI, 2007; HIDAKA *et al.*, 2008), na qual o confinamento se dá mesmo para densidades de quarks não nulas. Lembramos que essa última condição

induz a restauração da simetria quiral, como pode-se verificar pelas figuras 2.12-2.15 do capítulo 2, ou seja, nota-se que a fase quarkiônica apresenta aspectos da matéria de “quarks” e da matéria “bariônica” (ou mesônica) simultaneamente. Na figura a seguir, retirada da referência (MCLERRAN *et al.*, 2009), um gráfico esquemático da distribuição das regiões termodinâmicas no diagrama de fases da matéria fortemente interagente.

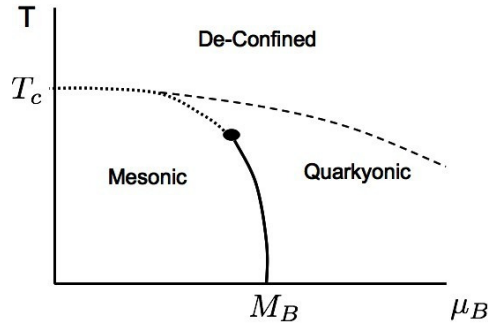


FIGURA 4.12 – Diagrama de fases esquemático com a fase quarkiônica incluída. Extraída da referência (MCLERRAN *et al.*, 2009). O círculo indica o ponto crítico final (CEP).

Em nosso modelo proposto, abre-se a possibilidade do surgimento da fase quarkiônica, o que não é possível sem a informação sobre o desconfinamento, incluída no modelo PNJL0 através da implementação do laço de Polyakov na estrutura do modelo original NJL no regime de temperatura nula. Ainda, nossos resultados apontam para uma transição de primeira ordem para o confinamento/desconfinamento. Veja o cruzamento no gráfico da figura 4.7 em $\mu = \mu_{\text{conf}} = 506,906 \text{ MeV}$ e o respectivo salto no valor de Φ na figura 4.10: de $\Phi = 0$ para $\Phi \approx 0,6$ no mesmo valor de μ . Tal resultado pode indicar que haveria também um ponto para a curva de transição da fase quarkiônica no qual a transição de fase deixa de ser um *crossover*, como usualmente os modelos fenomenológicos predizem para $\mu = 0$ e $T \neq 0$ até um valor onde $\mu = \mu_{\text{CEP}}$ e $T = T_{\text{CEP}}$, e passa a ser de primeira ordem até $\mu = \mu_{\text{conf}}$ e $T = 0$. Na figura a seguir um diagrama esquemático dessa possibilidade.

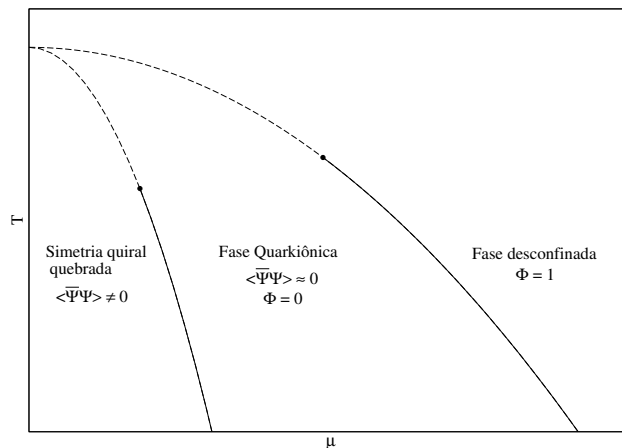


FIGURA 4.13 – Uma opção (esquemática) para o diagrama de fases previsto pelo modelo PNJL0: dois pontos críticos finais.

Outra possibilidade seria a de uma transição de primeira ordem em toda a curva de transição da fase quarkônica, resultado mais exótico já que em geral os modelos fenomenológicos e também os cálculos da rede preveem uma transição do tipo *crossover* para a matéria fortemente interagente em $\mu = 0$ e $T \neq 0$. Essa análise em específico, inclusão da temperatura e análise do diagrama de fases completo, é uma das intenções de estudos futuros sobre a aplicação do modelo PNJL0.

4.5.1 Efeito de a_3 e G_V

Uma última investigação feita acerca dos resultados do modelo PNJL0 sobre a fase quarkônica diz respeito ao efeito específico das constantes a_3 e G_V nessa região. Para o conjunto 2 da tabela 2.1, fixamos a magnitude do acoplamento vetorial em $G_V = 0,25G_s$ e variamos a constante a_3 da expressão 4.5. Os resultados estão apresentados na figura 4.14.

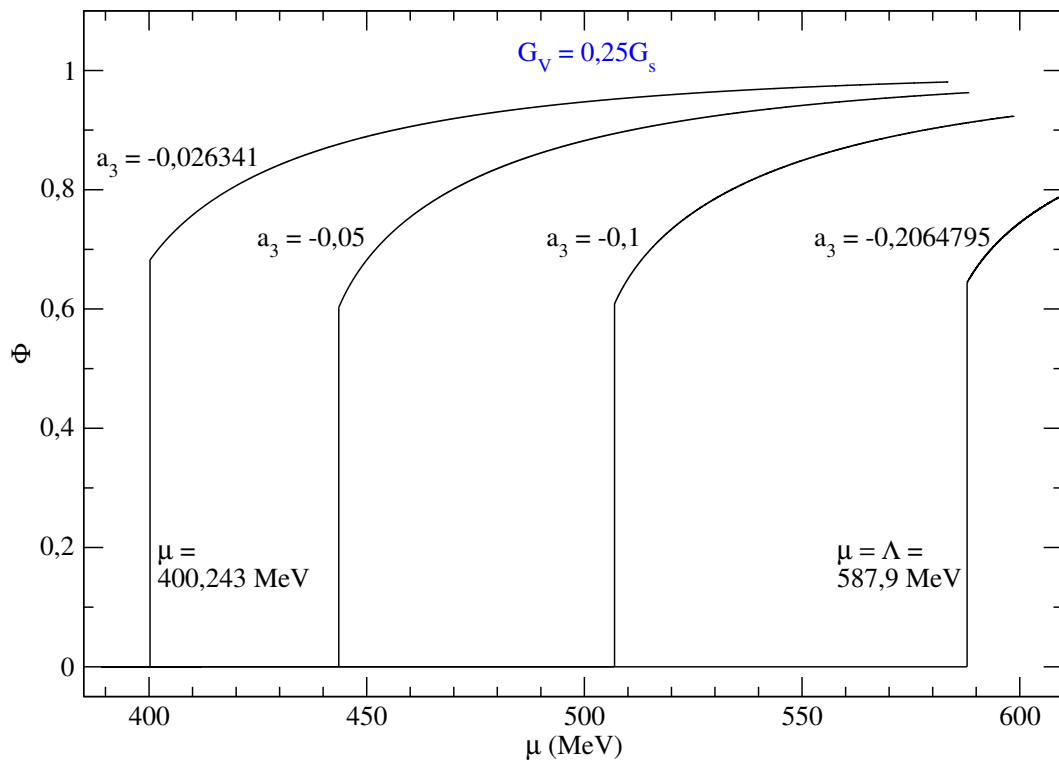


FIGURA 4.14 – Φ em função de μ para o conjunto 2 do modelo PNJL0 com $G_V = 0,25G_s$ e diferentes valores de a_3 .

A variação de a_3 aqui foi escolhida para que tivéssemos potenciais químicos de transição nos seguintes extremos: $\mu_{\text{conf}} = \mu_{\text{quiral}}$ e $\mu_{\text{conf}} = \Lambda$. Para o conjunto 2, temos $\mu_{\text{quiral}} = 400,243$ MeV e $\Lambda = 587,9$ MeV, respectivamente. Note que o efeito do aumento de a_3 é o de diminuir a fase quarkônica do sistema até eliminá-la completamente, nesse caso quando seu valor é dado por $a_3 = -0,026341$. Para esse valor em particular, o gráfico do grande

potencial termodinâmico do modelo PNJL0 em função do potencial químico apresenta os dois cruzamentos exatamente em $\mu = 400,243$ MeV, como vemos na figura 4.15.

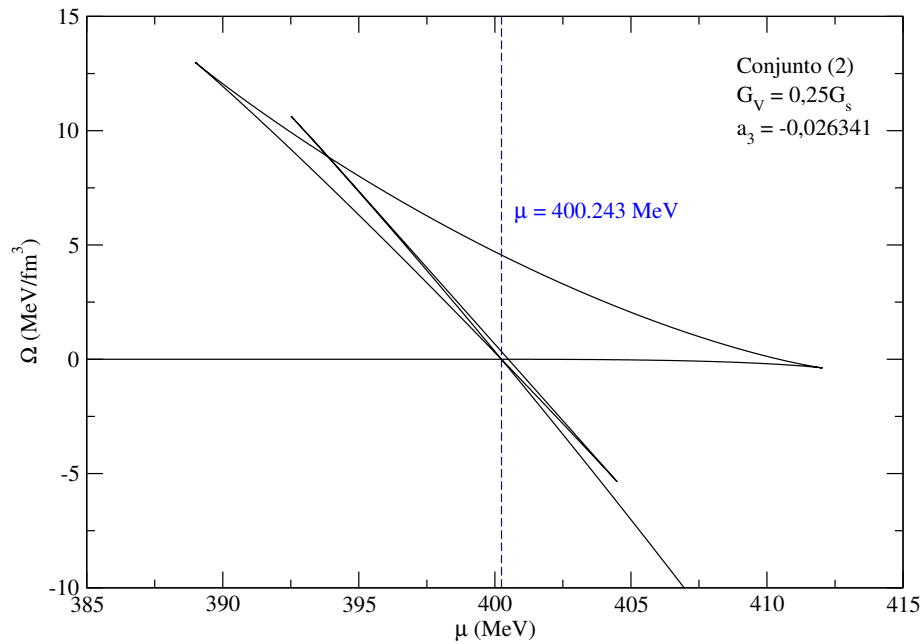


FIGURA 4.15 – Ω em função de μ para o conjunto 2 do modelo PNJL0 com $G_V = 0,25G_s$ e $a_3 = 0,026341$.

Por fim, investigamos como a variação de G_V influencia no tamanho da fase quarkiônica para um determinado valor fixo de a_3 , nesse caso, $a_3 = -0,1$. A figura 4.16 a seguir mostra os resultados dessa análise.

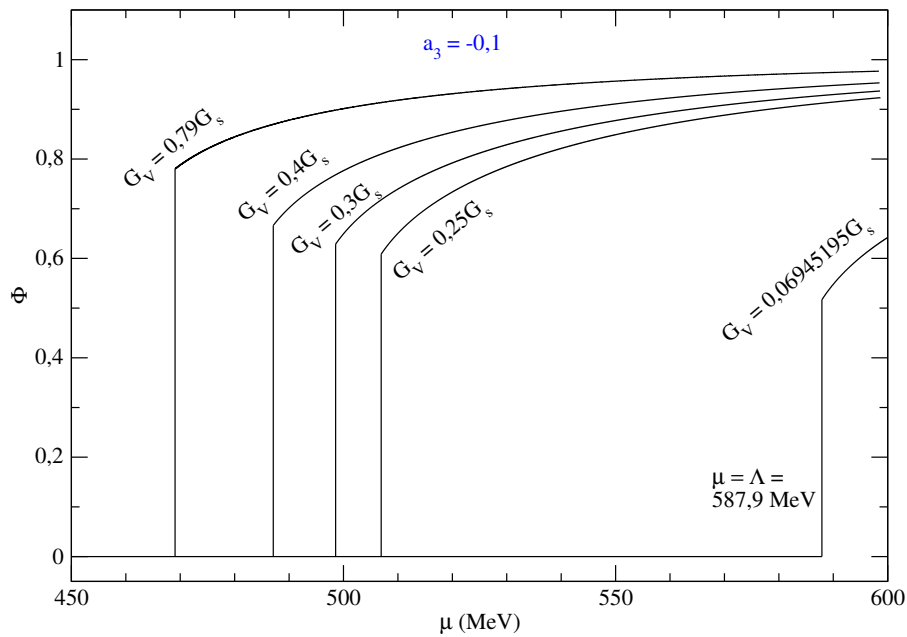


FIGURA 4.16 – Φ em função de μ para o conjunto 2 do modelo PNJL0 com $a_3 = -0,1$ e diferentes valores de G_V .

Percebe-se aqui que o aumento de G_V também diminui o tamanho da fase quarkiônica assim como foi verificado para o caso de a_3 variando. Entretanto, um resultado curioso é observado para o caso no qual G_V não é fixo. Note que na figura 4.16 não construímos a curva de $\Phi \times \mu$ com a transição dada em $\mu = \mu_{\text{quiral}}$. A razão é que um aumento além do valor de $G_V = 0,79G_s$ produz agora um aumento no tamanho da fase quarkiônica, impedindo que se atinja o potencial químico que a elimine por completo. A figura 4.17 mostra essa evolução para valores mais altos de G_V .

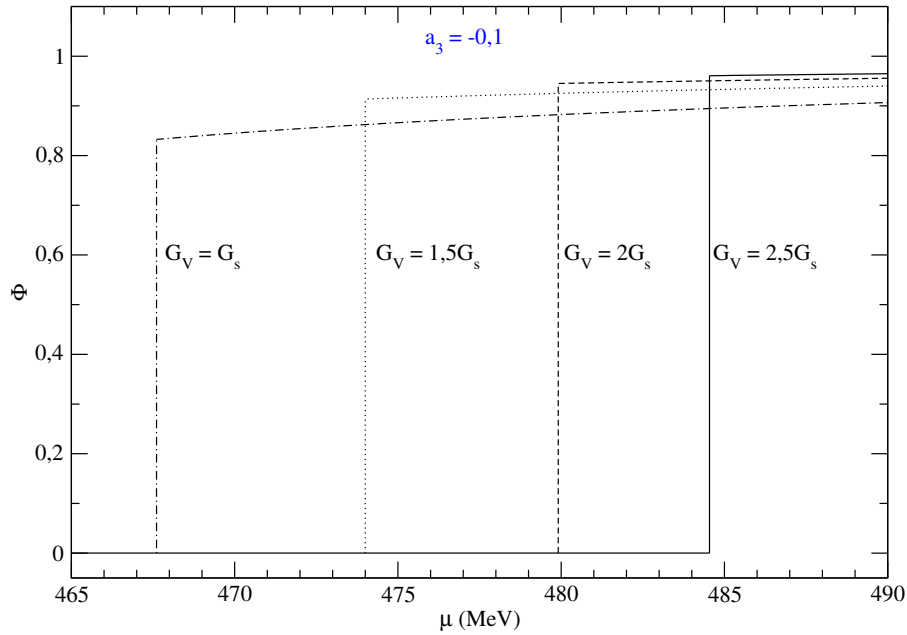


FIGURA 4.17 – Φ em função de μ para o conjunto 2 do modelo PNJL0 com $a_3 = -0,1$ e valores de G_V mais altos que os usados na figura 4.16.

Como discutido no capítulo 2, G_V é um parâmetro livre. Porém, um critério para determiná-lo poderia ser adotado com base nesses resultados exibidos pelo modelo PNJL0, a saber, poderíamos defini-lo em um intervalo dado por $G_V^{\text{min}} \leq G_V \leq G_V^{\text{max}}$, no qual G_V^{min} é o valor que produz $\mu_{\text{conf}} = \Lambda$ e G_V^{max} o valor que minimiza $\Delta\mu \equiv \mu_{\text{conf}} - \mu_{\text{quiral}}$. No caso específico de $a_3 = -0,1$, tal critério nos levaria a $G_V^{\text{min}} \approx 0,1G_s$, conforme se identifica na figura 4.16, aproximando o valor G_V^{min} para o menor valor com uma casa decimal.

5 Conclusões e perspectivas

O uso de modelos efetivos na descrição da QCD se mostra bastante útil, visto que estes são altamente capazes de descrever os fenômenos que ocorrem na matéria de quarks. Como pudemos perceber ao longo do capítulo 2 no regime de temperatura nula, o modelo NJL apresenta boa descrição da QCD. Apesar do modelo não prever o desconfinamento dos quarks, ele descreve muito bem a dinâmica de quebra/restauração da simetria quiral, que em muitos casos é o fenômeno protagonista na QCD. O modelo NJL apresenta o mecanismo de geração de massa dos quarks (massa constituinte, dada pela equação (2.8)) e também exibe o processo de diminuição dessa massa a partir do ponto de restauração da simetria quiral, que ocorre através de uma transição de fase de primeira ordem da qual o condensado de quarks ρ_s é o parâmetro de ordem. A partir do estudo da quebra/restauração da simetria quiral no modelo NJL, constatamos que para cada parametrização da tabela 2.1 existe um μ crítico onde ocorre a transição quiral, da fase termodinâmica na qual $\rho_s \neq 0$, para a fase onde a simetria quiral é restaurada, na qual $\rho_s \approx 0$. Mostramos duas formas, totalmente equivalentes, de como é feita a identificação do potencial químico crítico, a saber, pela procura dos mínimos do grande potencial termodinâmico (Ω) em função do parâmetro de ordem da transição (ρ_s), ou a partir da busca do ponto de cruzamento na curva $\Omega \times \mu$. Um efeito interessante sobre as transições de fase é a influência do parâmetro G_V . Conforme constatamos, o aumento do valor de G_V tende a eliminar a transição de fase de primeira ordem em favor de uma transição contínua.

Ao buscar-se um tratamento mais realístico da QCD, é necessário que o efeito de desconfinamento esteja incluído. No capítulo 3 mostramos como esse efeito é implementado em modelos efetivos de quarks no regime de temperatura finita. Em particular, mostramos como é feita a representação da dinâmica confinamento/desconfinamento a partir chamado laço de Polyakov (Φ), implementado no setor puro de glúons que é descrito termodinamicamente pelo potencial de Polyakov $\mathcal{U}(T, \Phi, \Phi^*)$. A partir daí apresentamos como Φ é adicionado ao modelo NJL, gerando o modelo chamado de PNJL. Mostramos que a estrutura desse modelo é a mesma da do modelo original NJL, porém, com a modificação das distribuições de Fermi-Dirac para partículas e antipartículas, que agora são funções também de Φ e Φ^* . Além disso, o próprio potencial $\mathcal{U}(T, \Phi, \Phi^*)$ faz parte das

equações de estado do modelo.

O modelo PNJL traz grandes vantagens em relação ao próprio NJL simplesmente pelo fato da inclusão do efeito do desconfinamento. Porém, ele torna-se ineficaz ao lidar com o regime de temperatura nula, já que o laço de Polyakov desaparece neste caso fazendo com que o modelo recaia no próprio modelo NJL. Em outras palavras, suas equações tornam-se as mesmas que as do modelo NJL em $T = 0$, perdendo, conseqüentemente, a capacidade de descrever a dinâmica da transição confinamento/desconfinamento nesse regime. Visando eliminar esse problema, propomos no capítulo 4 a seguinte dependência de Φ nas constantes de acoplamento G_s e G_V : $G_s \rightarrow G_s(\Phi) = G_s(1 - \Phi^2)$ e $G_V \rightarrow G_V(\Phi) = G_V(1 - \Phi^2)$, com a imposição de que para a fase totalmente desconfiada, dada por $\Phi = 1$, as interações se anulem. A partir destas modificações, conseguimos manter Φ nas equações que definem o modelo NJL em $T = 0$, porém, ainda sem apresentar soluções não nulas para Φ . Tal problema foi contornado ao adicionarmos no grande potencial termodinâmico do modelo o termo $\mathcal{U}_0(\Phi) \equiv a_3 T_0^4 \ln(1 - 6\Phi^2 + 8\Phi^3 - 3\Phi^4)$. Ainda, foi possível definir um novo potencial de Polyakov dado por $\mathcal{U}(\rho_s, \rho, \Phi) = -G_V \Phi^2 \rho^2 - G_s \Phi^2 \rho_s^2 + \mathcal{U}_0(\Phi)$. A este modelo com a dinâmica da transição confinamento/desconfinamento adicionada ao modelo NJL em $T = 0$ demos o nome de modelo PNJL0, com as soluções para Φ obtidas pela minimização do grande potencial termodinâmico, ou da densidade de energia, dependendo de qual potencial termodinâmico é usado para a descrição do sistema. Averiguamos também que soluções para $\Phi \neq 0$ só são possíveis ao tomarmos $G_V \neq 0$, demonstrando a necessidade do canal vetorial na estrutura do modelo. De maneira similar à feita no modelo NJL (capítulo 2), buscamos os valores de μ onde ocorrem as transições de fase associada à quebra/restauração da simetria quiral e a transição confinamento/desconfinamento para o modelo PNJL0. Realizamos esta busca analisando os mínimos de Ω em função do laço de Polyakov Φ para alguns valores fixos do par G_V e a_3 , e também através do ponto de cruzamento no gráfico de $\Omega \times \mu$, que no caso do modelo PNJL0 são 2, um para cada transição.

Como o modelo PNJL0 apresenta duas transições de fase em valores diferentes de μ (μ_{quiral} e μ_{conf}), como mostrado nas figuras 4.7 e 4.8, por exemplo, há então na região definida por $\mu_{\text{quiral}} \leq \mu \leq \mu_{\text{conf}}$, a chamada fase quarkiônica, na qual a simetria quiral já está restaurada, porém com os quarks ainda confinados, ou seja, uma fase termodinâmica apresentando os parâmetros de ordem dados por $\rho_s \approx 0$ e $\Phi = 0$. Verificamos o efeito da variação das constantes G_V e a_3 nessa fase específica. Primeiramente, ao fixarmos G_V ($G_V = 0, 25G_s$) e variarmos a_3 , percebemos que o crescimento do valor deste parâmetro implica na diminuição da fase quarkiônica, sendo possível inclusive determinar um valor específico para a_3 que a elimina por completo, de forma a fazer as transições quiral e de desconfinamento ocorrerem no mesmo ponto, como indica a figura 4.15. Constatamos também, ao fixarmos a_3 ($a_3 = -0, 1$) e variarmos G_V , que o efeito do aumento de G_V

é também de provocar a diminuição de $\Delta\mu \equiv \mu_{\text{conf}} - \mu_{\text{quiral}}$. Porém, diferentemente da variação anterior, não foi possível encontrarmos um valor de G_V que levasse a $\Delta\mu = 0$. Além disso, observamos um efeito curioso. Existe um valor de G_V que leva $\Delta\mu$ a um valor mínimo e depois o faz crescer, aumentando portanto a região compreendida pela fase quarkiônica, veja essa análise nas figuras 4.16 e 4.17. Pode-se conjecturar aqui o uso desse fenômeno para a determinação de um intervalo de possíveis valores de G_V , usado na literatura como parâmetro livre. Por exemplo, podemos defini-lo em um intervalo dado por $G_V^{\text{min}} \leq G_V \leq G_V^{\text{max}}$, no qual G_V^{min} é o valor que produz $\mu_{\text{conf}} = \Lambda$ e G_V^{max} o valor que minimiza $\Delta\mu$.

Por fim, pode-se apontar aqui pelo menos duas perspectivas de trabalhos futuros a serem desenvolvidos a partir do uso do modelo PNJL0. Primeiramente, é de interesse aplicá-lo no regime de temperatura finita e investigar o efeito dessa nova versão do modelo PNJL, por exemplo, no diagrama de fases no plano $T \times \mu$, analisando a movimentação do(s) ponto(s) crítico(s) em função do novo parâmetro a_3 . Claro, que também há a possibilidade de generalizar o modelo PNJL0 para sua versão SU(3) e realizar um estudo em $T \neq 0$ muito mais completo. A inclusão do campo magnético nesse modelo e a investigação de como a_3 influencia a catálise magnética também é um estudo relevante. Outra linha de estudos, agora no regime de temperatura nula, é o da aplicação do modelo PNJL0, por exemplo, na construção de estrelas de nêutrons híbridas, nas quais as equações de estado de quarks são conectadas com as hadrônicas através da imposição do critério de Gibbs. A fase de quarks nesse caso, que descreveria o núcleo da estrela, traria informações sobre o desconfinamento dos quarks, já que nosso modelo contempla essa dinâmica.

Referências

- ABUKI, H.; ANGLANI, R.; GATTO, R.; NARDULLI, G.; RUGGIERI, M. Chiral crossover, deconfinement, and quarkyonic matter within a nambu–jona-lasinio model with the polyakov loop. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 78, p. 034034, Aug 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.034034>>.
- ALFORD, M. G.; SCHMITT, A.; RAJAGOPAL, K.; SCHÄFER, T. Color superconductivity in dense quark matter. **Rev. Mod. Phys.**, v. 80, p. 1455–1515, 2008.
- ALKOFER, R.; SMEKAL, L. von. The Infrared behavior of QCD Green’s functions: Confinement dynamical symmetry breaking, and hadrons as relativistic bound states. **Phys. Rept.**, v. 353, p. 281, 2001.
- BARDEEN, J.; COOPER, L. N.; SCHRIEFFER, J. R. Theory of superconductivity. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 108, p. 1175–1204, Dec 1957. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.108.1175>>.
- BRANDT, F. T. C. **Tópicos sobre campos de gauge a temperatura finita**. Tese (Doutorado) — Sao Paulo U., 2004. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses-disponiveis/livredocencia/43/tde-26042012-090913/en.php>>.
- BRATOVIC, N.; HATSUDA, T.; WEISE, W. Role of vector interaction and axial anomaly in the pnjl modeling of the qcd phase diagram. **Physics Letters B**, v. 719, n. 1, p. 131 – 135, 2013. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269313000130>>.
- BUBALLA, M. Njl-model analysis of dense quark matter. **Physics Reports**, v. 407, n. 4, p. 205–376, 2005. ISSN 0370-1573.
- BUISSERET, F.; LACROIX, G. Large- N_c polyakov–nambu–jona-lasinio model with explicit Z_{N_c} symmetry. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 85, p. 016009, Jan 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.016009>>.
- CABIBBO, N.; PARISI, G. Exponential Hadronic Spectrum and Quark Liberation. **Phys. Lett.**, v. 59B, p. 67–69, 1975.
- CALLEN, H. B. **Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics**. [S.l.]: AAPT, 1998.

- CARIGNANO, S.; NICKEL, D.; BUBALLA, M. Influence of vector interaction and polyakov loop dynamics on inhomogeneous chiral symmetry breaking phases. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 82, p. 054009, Sep 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.82.054009>>.
- CHODOS, A.; JAFFE, R. L.; JOHNSON, K.; THORN, C. B. Baryon structure in the bag theory. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 10, p. 2599–2604, Oct 1974. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.10.2599>>.
- CHODOS, A.; JAFFE, R. L.; JOHNSON, K.; THORN, C. B.; WEISSKOPF, V. F. New extended model of hadrons. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 9, p. 3471–3495, Jun 1974. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.9.3471>>.
- COSTA, P.; FERREIRA, M.; PROVIDÊNCIA, C. Magnetized QCD phase diagram: critical end points for the strange quark phase transition driven by external magnetic fields. **PoS**, Hadron2017, p. 161, 2018.
- DEGRAND, T.; JAFFE, R. L.; JOHNSON, K.; KISKIS, J. Masses and other parameters of the light hadrons. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 12, p. 2060–2076, Oct 1975. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.12.2060>>.
- DEXHEIMER, V. A.; SCHRAMM, S. Novel approach to modeling hybrid stars. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 81, p. 045201, Apr 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.81.045201>>.
- DUARTE, D. C. **Estrutura de fases da matéria de quarks quente, densa e magnetizada no modelo de Nambu-Jona-Lasinio**. Tese (Dissertation) — Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física,, Santa Maria, 2018.
- DUARTE, D. C.; ALLEN, P. G.; FARIAS, R. L. S.; MANSO, P. H. A.; RAMOS, R. O.; SCOCCOLA, N. N. BEC-BCS crossover in a cold and magnetized two color NJL model. **Phys. Rev.**, D93, n. 2, p. 025017, 2016.
- DUTRA, M.; LOURENÇO, O.; AVANCINI, S. S.; CARLSON, B. V.; DELFINO, A.; MENEZES, D. P.; PROVIDÊNCIA, C.; TYPEL, S.; STONE, J. R. Relativistic Mean-Field Hadronic Models under Nuclear Matter Constraints. **Phys. Rev.**, C90, n. 5, p. 055203, 2014.
- FERREIRA, M. **QCD phase diagram under an external magnetic field**. Tese (Doutorado) — Universidade de Coimbra (Portugal), 2015.
- FREDERICO, T.; SALMÈ, G.; VIVIANI, M. Two-body scattering states in minkowski space and the nakanishi integral representation onto the null plane. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 85, p. 036009, Feb 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.036009>>.
- FRITZSCH, H.; GELL-MANN, M.; LEUTWYLER, H. Advantages of the color octet gluon picture. **Physics Letters B**, v. 47, n. 4, p. 365 – 368, 1973. ISSN 0370-2693.
- FUKUSHIMA, K. Chiral effective model with the polyakov loop. **Physics Letters B**, v. 591, n. 3, p. 277 – 284, 2004. ISSN 0370-2693.

- FUKUSHIMA, K. Phase diagrams in the three-flavor nambu-jona-lasinio model with the polyakov loop. **Phys. Rev.**, D77, p. 114028, 2008.
- GELL-MANN, M.; LEVY, M. The axial vector current in beta decay. **Nuovo Cim.**, v. 16, p. 705, 1960.
- GELL-MANN, M.; OAKES, R. J.; RENNER, B. Behavior of current divergences under $su_3 \times su_3$. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 175, p. 2195–2199, Nov 1968. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.175.2195>>.
- GREINER, W.; REINHARDT, J. **Field Quantization**, 219. [S.l.]: Springer Verlag, Berlin, 1996.
- GRIFFITHS, D. **Introduction to elementary particles**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.
- HANSEN, H. Qcd critical behavior in the pnjl model. **eCONF**, v. 906083, p. 05, 2009.
- HERBST, T. K.; PAWLOWSKI, J. M.; SCHAEFER, B.-J. The phase structure of the polyakov-quark-meson model beyond mean field. **Physics Letters B**, v. 696, n. 1, p. 58 – 67, 2011. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026931001350X>>.
- HIDAKA, Y.; MCLERRAN, L. D.; PISARSKI, R. D. Baryons and the phase diagram for a large number of colors and flavors. **Nucl. Phys.**, A808, p. 117–123, 2008.
- HOLLAND, K.; WIESE, U.-J. The Center symmetry and its spontaneous breakdown at high temperatures. p. 1909–1944, 2000.
- HOOFT, G. 't. A planar diagram theory for strong interactions. In: **The Large N Expansion In Quantum Field Theory And Statistical Physics: From Spin Systems to 2-Dimensional Gravity**. [S.l.]: World Scientific, 1993. p. 80–92.
- HUANG, K. **Quarks, leptons and gauge fields**. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 1992.
- KAPUSTA, J. I.; GALE, C. **Finite-temperature field theory: Principles and applications**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 9780521173223, 9780521820820, 9780511222801.
- KASHIWA, K.; HELL, T.; WEISE, W. Nonlocal polyakov–nambu–jona-lasinio model and imaginary chemical potential. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 84, p. 056010, Sep 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.84.056010>>.
- KLEVANSKY, S. P. The nambu—jona-lasinio model of quantum chromodynamics. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 64, p. 649–708, Jul 1992. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.64.649>>.
- KOGUT, J. B. An introduction to lattice gauge theory and spin systems. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 51, p. 659–713, Oct 1979. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.51.659>>.

- KOGUT, J. B. The lattice gauge theory approach to quantum chromodynamics. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 55, p. 775–836, Jul 1983. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.55.775>>.
- LOURENÇO, O.; DUTRA, M.; FREDERICO, T.; DELFINO, A.; MALHEIRO, M. Vector interaction strength in polyakov–nambu–jona-lasinio models from hadron-quark phase diagrams. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 85, p. 097504, May 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.097504>>.
- MALDACENA, J. M. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. **Int. J. Theor. Phys.**, v. 38, p. 1113–1133, 1999. [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)].
- MASAYUKI, A.; KOICHI, Y. Chiral restoration at finite density and temperature. **Nuclear Physics A**, v. 504, n. 4, p. 668 – 684, 1989. ISSN 0375-9474. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037594748990002X>>.
- MCLERRAN, L. Quarkyonic Matter and the Phase Diagram of QCD. In: **Continuous advances in QCD. Proceedings, 8th Workshop, CAQCD-08, Minneapolis, USA, May 15-18, 2008.** [S.l.: s.n.], 2008. p. 125–134.
- MCLERRAN, L. The phase diagram of qcd and some issues of large nc. **Nuclear Physics B - Proceedings Supplements**, v. 195, p. 275 – 280, 2009. ISSN 0920-5632. Proceedings of the 47th Internationale Universitätswochen für Theoretische Physik.
- MCLERRAN, L.; PISARSKI, R. D. Phases of dense quarks at large nc. **Nuclear Physics A**, v. 796, n. 1, p. 83 – 100, 2007. ISSN 0375-9474. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947407006823>>.
- MCLERRAN, L.; REDLICH, K.; SASAKI, C. Quarkyonic matter and chiral symmetry breaking. **Nuclear Physics A**, v. 824, n. 1, p. 86 – 100, 2009. ISSN 0375-9474. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947409002036>>.
- MCLERRAN, L. D.; SVETITSKY, B. Quark liberation at high temperature: A monte carlo study of su(2) gauge theory. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 24, p. 450–460, 1981.
- MCNEILE, C. An Estimate of the chiral condensate from unquenched lattice QCD. **Phys. Lett.**, B619, p. 124–128, 2005.
- MISHUSTIN, I. N.; SATAROV, L.; STOECKER, H.; GREINER, W. Unusual bound states of quark matter within the nambu-jona-lasinio model. v. 62, 08 2000.
- MISHUSTIN I. N.AND SATAROV, L. M. S. H. G. W. Strange-quark matter within the nambu-jona-lasinio model. **Physics of Atomic Nuclei**, v. 64, n. 5, p. 802–811, 2001. ISSN 1562-692X.
- MUROYA, S.; NAKAMURA, A.; NONAKA, C.; TAKAISHI, T. Lattice qcd at finite density*)an introductory review. **Progress of Theoretical Physics**, v. 110, n. 4, p. 615–668, 2003.

- NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. i. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 122, p. 345–358, Apr 1961. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.122.345>>.
- NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. ii. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 124, p. 246–254, Oct 1961. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.124.246>>.
- PAULA, W. de; FREDERICO, T.; SALMè, G.; VIVIANI, M.; PIMENTEL, R. Fermionic bound states in Minkowski-space: Light-cone singularities and structure. **Eur. Phys. J.**, C77, n. 11, p. 764, 2017.
- PAULA, W. L. S. de. **Supergravity, holography and light-meson spectroscopy**. Tese (Doutorado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2010. Disponível em: <http://www.bdita.bibl.ita.br/tesesdigitais/lista_resumo.php?num_tese=000567621>.
- PESKIN, M. E. **An introduction to quantum field theory**. [S.l.]: CRC Press, 2018.
- PIMENTEL, R.; PAULA, W. de. Excited states of the wick–cutkosky model with the nakanishi representation in the light-front framework. **Few-Body Systems**, v. 57, n. 7, p. 491–496, Jul 2016. ISSN 1432-5411. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00601-016-1097-x>>.
- POLYAKOV, A. Thermal properties of gauge fields and quark liberation. **Physics Letters B**, v. 72, n. 4, p. 477 – 480, 1978. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269378907372>>.
- RAPP, R.; SCHÄFER, T.; SHURYAK, E.; VELKOVSKY, M. Diquark bose condensates in high density matter and instantons. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 81, p. 53–56, Jul 1998. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.53>>.
- RATTI, C.; THALER, M. A.; WEISE, W. Phases of qcd: Lattice thermodynamics and a field theoretical model. **Phys. Rev.**, D73, p. 014019, 2006.
- REICHL, L. E. **A modern course in statistical physics**. [S.l.]: AAPT, 1999.
- REINDERS, L. J.; RUBINSTEIN, H.; YAZAKI, S. Hadron Properties from QCD Sum Rules. **Phys. Rept.**, v. 127, p. 1, 1985.
- ROBERTS, C. D.; WILLIAMS, A. G. Dyson-Schwinger equations and their application to hadronic physics. **Prog. Part. Nucl. Phys.**, v. 33, p. 477–575, 1994.
- RÖSSNER, S.; RATTI, C.; WEISE, W. Polyakov loop, diquarks, and the two-flavor phase diagram. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 75, p. 034007, Feb 2007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.75.034007>>.
- ROTHER, H. J. **Lattice Gauge Theories: An Introduction Third Edition**. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 2005.

- RÖßNER, S. **Field theoretical modelling of the QCD phase diagram**. Tese (Dissertation) — Technische Universität München, München, 2006.
- RÖßNER, S. **Phases of QCD**. Tese (Dissertation) — Technische Universität München, München, 2009.
- SAKAI, Y.; SASAKI, T.; KOUNO, H.; YAHIRO, M. Entanglement between deconfinement transition and chiral symmetry restoration. **Phys. Rev.**, D82, p. 076003, 2010.
- SAKURAI, J. J. **Advanced quantum mechanics**. [S.l.]: Pearson Education India, 1967.
- SCHAEFER, B.-J.; PAWLOWSKI, J. M.; WAMBACH, J. Phase structure of the polyakov-quark-meson model. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 76, p. 074023, Oct 2007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.76.074023>>.
- SHIFMAN, M. A.; VAINSHTEIN, A. I.; ZAKHAROV, V. I. QCD and Resonance Physics. Theoretical Foundations. **Nucl. Phys.**, B147, p. 385–447, 1979.
- SUSSKIND, L. Lattice models of quark confinement at high temperature. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 20, p. 2610–2618, Nov 1979. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.20.2610>>.
- SVETITSKY, B. Symmetry aspects of finite-temperature confinement transitions. **Physics Reports**, v. 132, n. 1, p. 1 – 53, 1986. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157386900141>>.
- SVETITSKY, B.; YAFFE, L. G. Critical behavior at finite-temperature confinement transitions. **Nuclear Physics B**, v. 210, n. 4, p. 423 – 447, 1982. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321382901729>>.
- TANABASHI, M. e. a. Review of particle physics. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 98, p. 030001, Aug 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.030001>>.
- VOGL, U.; WEISE, W. The Nambu and Jona Lasinio model: Its implications for hadrons and nuclei. **Prog. Part. Nucl. Phys.**, v. 27, p. 195–272, 1991.
- WEINBERG, S. Non-abelian gauge theories of the strong interactions. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 31, p. 494–497, Aug 1973.
- WEINBERG, S. **The quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995.
- WEINBERG, S. **The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern Applications**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995.
- WEINBERG, S.; S, W.; CAMPOS, T. de. **The Quantum Theory of Fields**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. (Quantum Theory of Fields, Vol. 2: Modern Applications, v. 1). ISBN 9780521550017.

WEISS, N. Wilson line in finite-temperature gauge theories. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 25, p. 2667–2672, May 1982. Disponível em:
<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.25.2667>>.

WILSON, K. G. Confinement of quarks. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 10, p. 2445–2459, Oct 1974. Disponível em:
<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.10.2445>>.

Apêndice A - Notações e convenções

As convenções e notações utilizadas neste trabalho serão expostas neste anexo. Iremos utilizar o sistema natural de unidades, ou seja, $\hbar = c = 1$.

Define-se os quadri-vetores contravariante e covariante como

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) , \quad (\text{A.1})$$

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -x, -y, -z) . \quad (\text{A.2})$$

Desse modo a relação envolvendo os dois quadri-vetores é dada por:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu , \quad (\text{A.3})$$

de modo que a soma ocorre sobre os índices repetidos, sendo $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico do espaço de Minkowski dado por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad (\text{A.4})$$

de modo que o índices gregos representam as componentes do espaço de Minkowski, podendo assumir os valores de $\mu, \nu = \{0, 1, 2, 3\}$. E os índices latinos representam as componentes espaciais do vetor ordinário, sendo $i, j = \{1, 2, 3\}$.

Teremos para as derivadas covariantes e contravariantes as seguintes definições

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_i) , \quad (\text{A.5})$$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\partial^0, \partial^i) , \quad (\text{A.6})$$

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \square . \quad (\text{A.7})$$

Assim o produto escalar entre dois quadri-vetores se torna

$$a \cdot b = a^\mu b_\mu, \quad (\text{A.8})$$

$$a \cdot b = g_{\mu\nu} a^\mu b_\nu, \quad (\text{A.9})$$

$$a \cdot b = a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (\text{A.10})$$

Para uma partícula livre de massa M definimos a equação de Dirac como

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta M)\psi(x, t) = \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}, \quad (\text{A.11})$$

onde $\psi(x, t)$ é um quadri-vetor, e α e β sendo matrizes de traço nulo. Definimos as matrizes α e β como

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

onde as componentes $\boldsymbol{\sigma}$ são as matrizes de Pauli 2×2 e I é a matriz identidade, definidas como

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

As matrizes α e β tem as seguintes propriedades:

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = \{\alpha^i, \alpha^j\} = 2g^{ij}, \quad (\text{A.16})$$

$$\beta \alpha^i + \alpha^i \beta = \{\beta, \alpha^i\} = 2\delta^{ij}, \quad (\text{A.17})$$

$$(\alpha^i)^2 = (\beta)^2 = 1. \quad (\text{A.18})$$

A forma covariante de equação de Dirac (A.11) é dada por

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - M)\psi(x, t) = 0 \quad (\text{A.19})$$

e

$$\gamma_\mu \partial^\mu = \gamma_0 \partial^0 + \gamma_i \partial^i, \quad (\text{A.20})$$

onde γ^μ são as matrizes de Dirac, definidas a partir das matrizes α (A.12) e β (A.13),

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^i), \quad (\text{A.21})$$

$$\gamma^0 = \beta, \quad (\text{A.22})$$

$$\gamma^i = \beta\alpha^i. \quad (\text{A.23})$$

Na representação de Dirac-Pauli as matrizes γ^0 e γ^i ficam

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (\text{A.24})$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.25})$$

Estas matrizes obedecem as seguinte relação de anti-comutação

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.26})$$

desde que

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad (\text{A.27})$$

$$(\gamma^0)^2 = I, \quad (\text{A.28})$$

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0, \quad (\text{A.29})$$

$$\gamma^0\gamma^k = -\gamma^k\gamma^0. \quad (\text{A.30})$$

Outra relação importante é a definição do espinor adjunto $\bar{\psi}$ definido como

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0. \quad (\text{A.31})$$

Um importante elemento é a matriz γ^5 que construímos a partir das outras matrizes de Dirac, sendo ela definida pela notação

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (\text{A.32})$$

seguinto as relações

$$\gamma^{5\dagger} = \gamma^5, \quad (\text{A.33})$$

$$(\gamma^5)^2 = I, \quad (\text{A.34})$$

$$\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0, \quad (\text{A.35})$$

e na representação de Dirac-Pauli

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.36})$$

Outra notação importante é a notação *slash* de Feynmann, definida através do uso das matrizes de Dirac (A.21)

$$\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu. \quad (\text{A.37})$$

Apêndice B - Simetria quiral

Consideremos um sistema de férmions livres descrito pela densidade lagrangiana de Dirac,

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi. \quad (\text{B.1})$$

A equação que deve ser verificada para tal sistema é a de Dirac, dada por

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (\text{B.2})$$

A solução para o spinor ψ , escrita como

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k [a_{\vec{k}}u(\vec{k})e^{-ik_\mu x^\mu} + b_{\vec{k}}^\dagger v(\vec{k})e^{ik_\mu x^\mu}], \quad (\text{B.3})$$

quando substituída em (B.2), gera

$$(\gamma^\mu k_\mu - m)u(\vec{k}) = 0 \quad \text{e} \quad (\text{B.4})$$

$$(\gamma^\mu k_\mu + m)v(\vec{k}) = 0. \quad (\text{B.5})$$

Para efeito de análise do número de soluções que as equações acima possuem, consideremos o caso em que $\vec{k} = 0$. Nesse caso $\gamma^\mu k_\mu = \gamma^0 k_0 = \gamma^0 \sqrt{k^2 + m^2} = \gamma^0 m$ e, conseqüentemente, a expressão (B.4), por exemplo, torna-se

$$(\gamma^0 m - I_{2 \times 2} m)u(\vec{k} = 0) = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

com duas soluções linearmente independentes dadas por

$$u_1(\vec{k}=0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad u_2(\vec{k}=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

O mesmo procedimento leva a obtenção também de duas soluções linearmente independentes para o spinor $v(\vec{k})$. De uma forma geral, ou seja, mesmo para $\vec{k} \neq 0$, vê-se então que é necessário distinguir entre duas soluções para os spinores u e v . Uma das formas de realizar tal distinção é procurar um operador que comute com o hamiltoniano de Dirac, $\hat{H}_D = -\gamma^0(\gamma^i\partial_i - m)$, encontrado a partir de (B.2), para então determinar um novo número quântico que diferencie os estados. Tal operador é dado por

$$\hat{\Lambda} \equiv \vec{S} \cdot \frac{\vec{k}}{k} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \cdot \frac{\vec{k}}{k}, \quad (\text{B.9})$$

com $\vec{\sigma} = \sigma_x\hat{x} + \sigma_y\hat{y} + \sigma_z\hat{z}$. Seus autovalores, dados por $\pm 1/2$, são os números quânticos que definem a *helicidade* da partícula, que fisicamente representa a projeção do spin do férmion na direção de seu movimento. A figura B.1 representa partículas cujas helicidades são positivas e negativas.

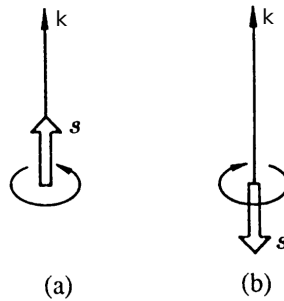


FIGURA B.1 – Partículas de helicidade (a) positiva e (b) negativa.

Pela definição, nota-se que a helicidade é uma grandeza que essencialmente depende do referencial adotado pelo observador. Por exemplo, um observador parado em relação à partícula representada na figura B.1a mede o valor $1/2$ para sua helicidade. Se agora o mesmo observador move-se com $k_{obs} > k$, temos que sua medida para a helicidade da partícula resulta no valor $-1/2$. Naturalmente, se o observador move-se com $k_{obs} = k$ conclui que a helicidade da partícula é nula. Diante deste contexto, conclui-se que um férmion de massa nula tem medida absoluta de sua helicidade, já que neste caso sua velocidade é igual à da luz. Uma consequência direta desta propriedade na equação de

Dirac, que neste limite de massa fermiônica nula é dada por

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0, \quad (\text{B.10})$$

é que como $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$, temos, ao multiplicar γ^5 pela esquerda em (B.10), que $i\gamma^5\gamma^\mu\partial_\mu\psi = -i\partial_\mu\gamma^\mu\gamma^5\psi = 0$, logo mostra-se que tanto ψ quanto $\gamma^5\psi$ são soluções de (B.10), assim as combinações lineares dadas por

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi \quad \text{e} \quad (\text{B.11})$$

$$\psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi \quad (\text{B.12})$$

também são. Nesta notação ψ_L (spinor *left-handed*) e ψ_R (spinor *right-handed*) estão associados a férmions de helicidade $-1/2$ e $1/2$ respectivamente. Seus adjuntos são escritos como

$$\bar{\psi}_L = \psi_L^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2}\psi^\dagger(1 - \gamma^5)\gamma^0 = \frac{1}{2}\bar{\psi}(1 + \gamma^5) \quad \text{e} \quad (\text{B.13})$$

$$\bar{\psi}_R = \psi_R^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2}\psi^\dagger(1 + \gamma^5)\gamma^0 = \frac{1}{2}\bar{\psi}(1 - \gamma^5). \quad (\text{B.14})$$

Com estas definições é possível reescrever a densidade lagrangiana de Dirac, Eq. (B.1), da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D &= i(\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)\gamma^\mu\partial_\mu(\psi_L + \psi_R) - m(\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)(\psi_L + \psi_R) \\ &= i\bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L + i\bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R + i\bar{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L + i\bar{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R \\ &\quad + m(\bar{\psi}_L\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_R\psi_R) \\ \mathcal{L}_D &= i\bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L + i\bar{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R + m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L), \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

onde usamos

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R &= \frac{i}{4}\bar{\psi}(1 + \gamma^5)\gamma^\mu\partial_\mu(1 + \gamma^5)\psi \\ &= \frac{i}{4}(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\partial_\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\gamma^5\partial_\mu\psi) \\ &= \frac{i}{4}(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\partial_\mu\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\partial_\mu\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned}
 i\bar{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L &= \frac{i}{4}\bar{\psi}(1-\gamma^5)\gamma^\mu\partial_\mu(1-\gamma^5)\psi \\
 &= \frac{i}{4}(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\partial_\mu\psi - \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\gamma^5\partial_\mu\psi) \\
 &= \frac{i}{4}(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\partial_\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\partial_\mu\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi) \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{B.17}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}_L\psi_L &= \frac{1}{4}\bar{\psi}(1+\gamma^5)(1-\gamma^5)\psi = \frac{1}{4}(\bar{\psi}\psi - \bar{\psi}\gamma^5\psi + \bar{\psi}\gamma^5\psi - \bar{\psi}\psi) \\
 &= 0 \quad \text{e}
 \end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}_R\psi_R &= \frac{1}{4}\bar{\psi}(1-\gamma^5)(1+\gamma^5)\psi = \frac{1}{4}(\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}\gamma^5\psi - \bar{\psi}\gamma^5\psi - \bar{\psi}\psi) \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{B.19}$$

juntamente com as propriedades $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ e $(\gamma^5)^2 = 1$.

Nota-se então, por (B.15), que é possível representar um férmion por seus respectivos campos de helicidade bem definida, e que tais campos são totalmente desacoplados entre si apenas no caso particular em que o férmion possui massa nula, já que o termo de massa é o responsável pela mistura entre ψ_L e ψ_R . Assim, diz-se que um sistema apresenta *simetria quiral* quando a densidade lagrangiana que o descreve é escrita de forma em que os campos left-handed e right-handed estão totalmente desacoplados. Por outro lado, sistemas nos quais estes campos são misturados, tais como o descrito por (B.15), são ditos apresentarem quebra explícita da simetria quiral.

Outra forma equivalente de verificar a realização da simetria quiral em uma teoria qualquer é através da análise da transformação global dada por

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha\gamma^5}\psi, \tag{B.20}$$

com α sendo um número real. Neste caso, a simetria quiral é realizada quando a densidade lagrangiana do sistema é invariante sob a transformação (B.20), o que continua não sendo o caso de (B.15) devido ao termo $m\bar{\psi}\psi$.

Como $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ é um termo que impede a realização da simetria quiral, é natural adotá-lo como um parâmetro de ordem da transição de fases onde a simetria quiral é quebrada/restaurada¹. No caso específico da QCD por exemplo, tal parâmetro de ordem é considerado aproximado já que devido à massa não-nula dos quarks, a simetria quiral é explicitamente quebrada na densidade lagrangiana. A restauração é esperada ocorrer no regime de altas temperaturas ou densidades.

¹Simetria quiral quebrada: $\langle\bar{\psi}\psi\rangle \neq 0$. Restaurada: $\langle\bar{\psi}\psi\rangle = 0$.

Apêndice C - Cálculo das densidades e do potencial químico do modelo NJL

Partiremos da solução para a equação de Dirac dada por

$$\psi = u(\mathbf{k}, \lambda) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\epsilon(k)t}, \quad (\text{C.1})$$

onde $u(\mathbf{k}, \lambda)$ é um espinor de Dirac de vetor de onda \mathbf{k} e λ representa os estados de spin da partícula. Utilizando-se as matrizes $\boldsymbol{\alpha}$ e β teremos

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} + \beta M) u(\mathbf{k}, \lambda) = (\epsilon(k) - av_0) u(\mathbf{k}, \lambda). \quad (\text{C.2})$$

Assim o condensado do campo vetorial v_0 ajusta a energia das soluções. Assim usando as propriedades das matrizes de Dirac encontramos

$$\epsilon(k) = \epsilon^\pm(k) = av_0 \pm (k^2 + M^2)^{1/2} \quad (\text{C.3})$$

$$= av_0 \pm E(k), \quad (\text{C.4})$$

onde os sinais positivo e negativo são correspondentes às partículas e anti-partículas respectivamente, com

$$E(k) = (k^2 + M^2)^{1/2}. \quad (\text{C.5})$$

C.1 Densidade vetorial

Resolvendo a equação (C.2) obtemos as seguintes soluções

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} + \beta M) U(\mathbf{k}, \lambda) = [\epsilon(k)^{(+)} - av_0] U(\mathbf{k}, \lambda) \quad (\text{C.6})$$

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} + \beta M] U(\mathbf{k}, \lambda) = E(k)U(\mathbf{k}, \lambda) \quad (\text{C.7})$$

e

$$(\alpha \cdot \mathbf{k} + \beta M) V(\mathbf{k}, \lambda) = -[\epsilon(k)^{(-)} - av_0] V(\mathbf{k}, \lambda) \quad (\text{C.8})$$

$$(\alpha \cdot \mathbf{k} + \beta M) V(\mathbf{k}, \lambda) = E(k), V(\mathbf{k}, \lambda) \quad (\text{C.9})$$

onde $U(\mathbf{k}, \lambda)$ é solução para energias positivas, e $V(\mathbf{k}, \lambda)$ é solução para energias negativas. Adotando um volume finito e condições de contorno periódicas chegamos a um nova normalização para os espinores, onde estes são agora definidos como

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left[A_{\mathbf{k}, \lambda} U(\mathbf{k}, \lambda) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\epsilon^{(+)}(k)t} + B_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger V(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\epsilon^{(-)}(k)t} \right] \quad (\text{C.10})$$

$$\psi^\dagger(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}', \lambda'} \left[A_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger U^\dagger(\mathbf{k}', \lambda') e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} + i\epsilon^{(+)}(k)t} + B_{\mathbf{k}', \lambda'} V^\dagger(\mathbf{k}', \lambda') e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} + i\epsilon^{(-)}(k)t} \right]. \quad (\text{C.11})$$

Este tipo de normalização também é conhecido como segunda quantização (SAKURAI, 1967). Podemos agora encontrar a densidade do sistema através da multiplicação entre os espinores $\psi(\mathbf{x}, t)$ por $\psi^\dagger(\mathbf{x}, t)$, sendo $\rho = \bar{\psi} \gamma_0 \psi = \psi^\dagger \psi$. Temos então que

$$\begin{aligned} \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sum_{\mathbf{k}', \lambda'} \left[A_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger U^\dagger(\mathbf{k}', \lambda') e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} + i\epsilon^{(+)}(k)t} \right. \\ &+ \left. B_{\mathbf{k}', \lambda'} V^\dagger(\mathbf{k}', \lambda') e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} + i\epsilon^{(-)}(k)t} \right] \times \left[A_{\mathbf{k}, \lambda} U(\mathbf{k}, \lambda) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\epsilon^{(+)}(k)t} \right. \\ &+ \left. B_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger V(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\epsilon^{(-)}(k)t} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sum_{\mathbf{k}', \lambda'} \left[A_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger A_{\mathbf{k}, \lambda} U^\dagger(\mathbf{k}', \lambda') U(\mathbf{k}, \lambda) e^{+i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x} + i[\epsilon^{(+)}(k) - \epsilon^{(+)}(k')]t} \right. \\ &+ A_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger B_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger U^\dagger(\mathbf{k}', \lambda') V(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x} + i[\epsilon^{(+)}(k) - \epsilon^{(-)}(k')]t} \\ &+ B_{\mathbf{k}, \lambda} A_{\mathbf{k}, \lambda} V^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) U(\mathbf{k}, \lambda) e^{+i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x} + i[\epsilon^{(-)}(k) - \epsilon^{(+)}(k')]t} \\ &+ \left. B_{\mathbf{k}, \lambda} B_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger V^\dagger(\mathbf{k}', \lambda') V(\mathbf{k}, \lambda) e^{+i(\mathbf{k}'-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{x} + i[\epsilon^{(-)}(k) - \epsilon^{(-)}(k')]t} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Como os operadores A (ou B) e U (ou V) atuam em espaços diferentes, U (ou V) não atuam nos operadores A (ou B). Deste modo temos

$$|\psi\rangle = A_{k\lambda} U|0\rangle + B_{k\lambda} V|0\rangle \quad (\text{C.14})$$

$$|\psi\rangle = A_{k\lambda}|U\rangle + B_{k\lambda}|V\rangle. \quad (\text{C.15})$$

E ainda,

$$|\psi\rangle = \langle 0|\psi(\mathbf{x}, t)|A_{k\lambda}\phi_0\rangle, \quad (\text{C.16})$$

$$\phi_0 = U(\mathbf{k}, \lambda)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\epsilon(k)t}. \quad (\text{C.17})$$

Pelas relações de ortonormalização temos

$$\frac{1}{V} \int_V d^3x e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (\text{C.18})$$

$$U^\dagger(\mathbf{k}', \lambda')U(\mathbf{k}, \lambda) = V^\dagger(\mathbf{k}', \lambda')V(\mathbf{k}, \lambda) = \delta_{\lambda'\lambda}. \quad (\text{C.19})$$

E pela relação de ortogonalidade entre os operadores $U(\mathbf{k}, \lambda)$ e $V(\mathbf{k}, \lambda)$ temos

$$U^\dagger(\mathbf{k}', \lambda')V(\mathbf{k}, \lambda) = V^\dagger(\mathbf{k}', \lambda')U(\mathbf{k}, \lambda) = 0. \quad (\text{C.20})$$

Aplicando estas relações na equação (C.13) teremos

$$\psi^\dagger(\mathbf{x}, t)\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left[A_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger A_{\mathbf{k}, \lambda} + B_{\mathbf{k}', \lambda'} B_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger \right] \quad (\text{C.21})$$

com a seguinte definição do operador número

$$\hat{B} = \int_V d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}, t)\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left[A_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger A_{\mathbf{k}, \lambda} + B_{\mathbf{k}', \lambda'} B_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger \right]. \quad (\text{C.22})$$

Com as seguintes relações de anti-comutação dada por

$$\{A_{\mathbf{k}, \lambda}, A_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger\} = \{B_{\mathbf{k}, \lambda}, B_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}, \quad (\text{C.23})$$

$$\{A_{\mathbf{k}, \lambda}, B_{\mathbf{k}, \lambda}\} = \{A_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger, B_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger\} = 0, \quad (\text{C.24})$$

reescrevemos o operador \hat{B} como

$$\begin{aligned} \hat{B} &= \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left[A_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger A_{\mathbf{k}, \lambda} - B_{\mathbf{k}, \lambda} B_{\mathbf{k}', \lambda}^\dagger - B_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger B_{\mathbf{k}, \lambda} + B_{\mathbf{k}, \lambda} B_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger + B_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger B_{\mathbf{k}, \lambda} + B_{\mathbf{k}, \lambda} B_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger \right] \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left[A_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger A_{\mathbf{k}, \lambda} - B_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger B_{\mathbf{k}, \lambda} \right] + \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}}\delta_{\lambda\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

Este último termo, na teoria do buraco de Dirac (em inglês, *Dirac's role theory*), representa a soma sobre todos os estados de energia negativa ocupados no “mar de Dirac” (do inglês, *Dirac sea*) e é uma constante independente da dinâmica. Desde que todas as medições são realizadas em relação ao vácuo. O observável do operador número é definido

pela subtração do valor esperado do vácuo de \hat{B} . Podemos definir o operador número e construir a hamiltoniana do sistema,

$$\hat{B} = \int_V d^3x [\psi^\dagger \psi - \langle 0 | \psi^\dagger \psi | 0 \rangle] = \sum_{\mathbf{k}\lambda} [A_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger A_{\mathbf{k},\lambda} - B_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger B_{\mathbf{k},\lambda}] \quad (\text{C.26})$$

onde $|0\rangle$ é o vácuo não interagente no limite $K_f \rightarrow 0$. Assim definimos o vácuo interagente como

$$A_{\mathbf{k},\lambda}|0\rangle = B_{\mathbf{k},\lambda}|0\rangle = 0 \quad , \forall k . \quad (\text{C.27})$$

Se realizarmos o cálculo para o operador \hat{B} , subtraindo o valor esperado do vácuo definimos o \hat{B} físico como

$$\hat{B} = \int_V d^3x [\psi^\dagger \psi - \langle 0 | \hat{B} | 0 \rangle] = \sum_{\mathbf{k}\lambda} [A_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger A_{\mathbf{k},\lambda} - B_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger B_{\mathbf{k},\lambda}] . \quad (\text{C.28})$$

Utilizando a relação entre a densidade vetorial e o operador número teremos

$$\rho = \frac{\hat{B}}{V} , \quad (\text{C.29})$$

$$= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}\lambda} [A_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger A_{\mathbf{k},\lambda} - B_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger B_{\mathbf{k},\lambda}] . \quad (\text{C.30})$$

Definimos o limite para um volume infinitamente grande como

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k . \quad (\text{C.31})$$

Aplicando na equação (C.30) teremos

$$\rho = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int d^3k [A_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger A_{\mathbf{k},\lambda} - B_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger B_{\mathbf{k},\lambda}] , \quad (\text{C.32})$$

lembrando que na aproximação do campo médio a densidade vetorial passa a ser dada como $\rho = \langle \bar{\psi} \gamma_0 \psi \rangle = \langle \psi^\dagger \psi \rangle$, supondo que a matéria seja uniforme, estática e esteja em seu estado fundamental, conhecido como estado de Fermi. Desse modo, aplicamos os operadores de Fermi ($|F\rangle$), assim a equação (C.32) ficará

$$\rho = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int d^3k [\langle F | A_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger A_{\mathbf{k},\lambda} | F \rangle - \langle F | B_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger B_{\mathbf{k},\lambda} | F \rangle] . \quad (\text{C.33})$$

Os operadores de Fermi atuam da seguinte maneira

$$A_{\mathbf{k},\lambda}|F\rangle = 0, \quad |k| > k_F, \quad (\text{C.34})$$

$$A_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger|F\rangle = 0, \quad |k| < k_F, \quad (\text{C.35})$$

$$B_{\mathbf{k},\lambda}|F\rangle = 0, \quad \forall k, \quad (\text{C.36})$$

$$A_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger A_{\mathbf{k},\lambda}|F\rangle = |F\rangle, \quad |k| < k_F, \quad (\text{C.37})$$

assim as antipartículas são descartadas de nosso sistema, onde este se encontra no regime de $T = 0$. Deste modo a densidade vetorial se torna

$$\rho = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int_0^{k_F} d^3k. \quad (\text{C.38})$$

A somatória em λ se torna nosso fator de degenerescências γ . Assim teremos

$$\rho = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_f} d^3k. \quad (\text{C.39})$$

Integrando

$$\rho = \frac{\gamma}{8\pi^3} \int_0^{k_F} 4\pi k^2 dk \quad (\text{C.40})$$

$$= \frac{\gamma}{8\pi^3} \frac{4}{3} \pi k_F^3 \quad (\text{C.41})$$

$$= \frac{\gamma}{6\pi^2} k_F^3. \quad (\text{C.42})$$

A expressão (C.42) mostra a relação direta entre a densidade vetorial e o momento de fermi k_F .

C.2 Densidade escalar

A densidade escalar é outra grandeza muito importante em nosso trabalho, definida como $\rho_s = \psi^\dagger \gamma_0 \psi = \bar{\psi} \psi$. Desse modo teremos

$$\begin{aligned} \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \gamma_0 \psi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sum_{\mathbf{k}', \lambda'} [A_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger U^\dagger(\mathbf{k}', \lambda') e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} + i\epsilon^{(+)}(k)t} \\ &+ B_{\mathbf{k}', \lambda'} V^\dagger(\mathbf{k}', \lambda') e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} + i\epsilon^{(-)}(k)t}] \times \gamma_0 [A_{\mathbf{k}, \lambda} U(\mathbf{k}, \lambda) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\epsilon^{(+)}(k)t} \\ &+ B_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger V(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\epsilon^{(-)}(k)t}] \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sum_{\mathbf{k}', \lambda'} \left[A_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger A_{\mathbf{k}, \lambda} U^\dagger(\mathbf{k}', \lambda') \gamma_0 U(\mathbf{k}, \lambda) e^{+i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x} + i[\epsilon^{(+)}(\mathbf{k}) - \epsilon^{(+)}(\mathbf{k}')]t} \right. \\
 &+ A_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger B_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger U^\dagger(\mathbf{k}', \lambda') \gamma_0 V(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x} + i[\epsilon^{(+)}(\mathbf{k}) - \epsilon^{(-)}(\mathbf{k}')]t} \\
 &+ B_{\mathbf{k}, \lambda} A_{\mathbf{k}, \lambda} V^\dagger(\mathbf{k}', \lambda') \gamma_0 U(\mathbf{k}, \lambda) e^{+i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x} + i[\epsilon^{(-)}(\mathbf{k}) - \epsilon^{(+)}(\mathbf{k}')]t} \\
 &\left. + B_{\mathbf{k}, \lambda} B_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger V^\dagger(\mathbf{k}', \lambda') \gamma_0 V(\mathbf{k}, \lambda) e^{+i(\mathbf{k}'-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{x} + i[\epsilon^{(-)}(\mathbf{k}) - \epsilon^{(-)}(\mathbf{k}')]t} \right] \quad (C.44)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sum_{\mathbf{k}', \lambda'} \left[A_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger A_{\mathbf{k}, \lambda} U^\dagger(\mathbf{k}', \lambda') \gamma_0 U(\mathbf{k}, \lambda) e^{+i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \right. \\
 &+ A_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger B_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger U^\dagger(\mathbf{k}', \lambda') \gamma_0 V(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \\
 &+ B_{\mathbf{k}, \lambda} A_{\mathbf{k}, \lambda} V^\dagger(\mathbf{k}', \lambda') \gamma_0 U(\mathbf{k}, \lambda) e^{+i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \\
 &\left. + B_{\mathbf{k}, \lambda} B_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger V^\dagger(\mathbf{k}', \lambda') \gamma_0 V(\mathbf{k}, \lambda) e^{+i(\mathbf{k}'-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} \right]. \quad (C.45)
 \end{aligned}$$

Diferentemente do cálculo da densidade vetorial aqui não poderemos aplicar as condições (C.19) e (C.20) para eliminarmos facilmente os espinores $U(\mathbf{k}, \lambda)$ e $V(\mathbf{k}, \lambda)$. Deste modo, precisamos realizar este cálculo de forma explícita e assim escrevemos, a partir da solução da equação (C.2), os espinores $U(\mathbf{k}, \lambda)$ e $V(\mathbf{k}, \lambda)$, e seus respectivos conjugados, como:

$$U(\mathbf{k}, \lambda) = \sqrt{\frac{E^* + M}{2E^*}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E^* + M} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (C.46)$$

$$U^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) = \sqrt{\frac{E^* + M}{2E^*}} \left(1 \ 0 \ \frac{k}{E^* + M} \ 0 \right), \quad (C.47)$$

$$V(\mathbf{k}, \lambda) = \sqrt{\frac{E^* + M}{2E^*}} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^* + M} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (C.48)$$

$$V^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) = \sqrt{\frac{E^* + M}{2E^*}} \left(\frac{-k}{E^* + M} \ 0 \ 1 \ 0 \right). \quad (C.49)$$

Utilizando a definição da matriz γ_0 do Apêndice A podemos realizar os cálculos para a densidade escalar,

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para facilitar a visualização dos cálculos iremos realizar separadamente os produtos da expressão (C.45). Assim para o primeiro termo faremos,

$$\begin{aligned}
 U^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)\gamma_0 U(\mathbf{k}, \lambda) &= \frac{E^* + M}{2E^*} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k}{E^*+M} & 0 \end{pmatrix} \\
 &\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E^*+M} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{C.50}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{E^* + M}{2E^*} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k}{E^*+M} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-k}{E^*+M} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{C.51}$$

$$= \frac{E^* + M}{2E^*} \left(1 - \frac{k^2}{(E^* + M)^2} \right) \tag{C.52}$$

$$= \frac{E^* + M}{2E^*} \left(\frac{(E^* + M)^2 - k^2}{(E^* + M)^2} \right) \tag{C.53}$$

$$= \frac{1}{2E^*} \left(\frac{E^{*2} + M^2 + 2E^*M - k^2}{E^* + M} \right) . \tag{C.54}$$

Podemos realizar a seguinte substituição

$$k^2 = E^{*2} - M^2 , \tag{C.55}$$

assim a expressão (C.54) fica,

$$U^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)\gamma_0 U(\mathbf{k}, \lambda) = \frac{1}{2E^*} \left(\frac{E^{*2} + M^2 + 2E^*M - E^{*2} + M^2}{E^* + M} \right) \tag{C.56}$$

$$= \frac{1}{2E^*} \left(\frac{2M^2 + 2E^*M}{E^* + M} \right) \tag{C.57}$$

$$= \frac{1}{2E^*} \left(\frac{2M(E^* + M)}{E^* + M} \right) \tag{C.58}$$

$$= \frac{M}{E^*} . \tag{C.59}$$

Substituindo a equação (C.5) teremos

$$U^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)\gamma_0 U(\mathbf{k}, \lambda) = \frac{M}{\sqrt{k^2 + M^2}}. \quad (\text{C.60})$$

Agora para o segundo termo de (C.45),

$$\begin{aligned} U^\dagger(\mathbf{k}', \lambda')\gamma_0 V(\mathbf{k}, \lambda) &= \frac{E^* + M}{2E^*} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k}{E^* + M} & 0 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^* + M} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.61})$$

$$= \frac{E^* + M}{2E^*} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k}{E^* + M} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^* + M} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.62})$$

$$= \frac{E^* + M}{2E^*} \left(-\frac{k}{E^* + M} - \frac{k}{E^* + M} \right) \quad (\text{C.63})$$

$$= \frac{E^* + M}{2E^*} \left(\frac{-2k}{E^* + M} \right) \quad (\text{C.64})$$

$$= \frac{-k}{E^*}. \quad (\text{C.65})$$

Utilizando a expressão (C.5) teremos

$$U^\dagger(\mathbf{k}', \lambda')\gamma_0 V(\mathbf{k}, \lambda) = \frac{-k}{\sqrt{k^2 + M^2}}. \quad (\text{C.66})$$

Para o terceiro termo de (C.45) teremos

$$\begin{aligned} V^\dagger(\mathbf{k}', \lambda')\gamma_0 U(\mathbf{k}, \lambda) &= \frac{E^* + M}{2E^*} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^* + M} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E^* + M} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.67})$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{E^* + M}{2E^*} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^*+M} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-k}{E^*+M} \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{E^* + M}{2E^*} \left(-\frac{k}{E^* + M} - \frac{k}{E^* + M} \right) \tag{C.68}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{E^* + M}{2E^*} \left(\frac{-2k}{E^* + M} \right) \tag{C.69}$$

$$= \frac{-k}{E^*} . \tag{C.70}$$

Usando novamente a relação (C.5) temos

$$V^\dagger(\mathbf{k}', \lambda') \gamma_0 U(\mathbf{k}, \lambda) = \frac{-k}{\sqrt{k^2 + M^2}} . \tag{C.71}$$

Agora o último termo de (C.45) é dado por

$$\begin{aligned}
 V^\dagger(\mathbf{k}', \lambda') \gamma_0 V(\mathbf{k}, \lambda) &= \frac{E^* + M}{2E^*} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^*+M} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^*+M} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{C.72}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{E^* + M}{2E^*} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^*+M} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-k}{E^*+M} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{C.73}$$

$$= \frac{E^* + M}{2E^*} \left(\frac{k^2}{(E^* + M)^2} - 1 \right) \tag{C.74}$$

$$= \frac{E^* + M}{2E^*} \left(\frac{k^2 - (E^* + M)^2}{(E^* + M)^2} \right) \tag{C.75}$$

$$= \frac{1}{2E^*} \left(\frac{k^2 - (E^{*2} + M^2 + 2E^*M)}{E^* + M} \right) \tag{C.76}$$

$$= \frac{1}{2E^*} \left(\frac{k^2 - E^{*2} - M^2 - 2E^*M}{E^* + M} \right) . \tag{C.77}$$

Usando a expressão (C.55) teremos,

$$V^\dagger(\mathbf{k}', \lambda') \gamma_0 V(\mathbf{k}, \lambda) = \frac{1}{2E^*} \left(\frac{E^{*2} - M^2 - E^{*2} - M^2 - 2E^*M}{E^* + M} \right) \quad (\text{C.78})$$

$$= \frac{1}{2E^*} \left(\frac{-2M^2 - 2E^*M}{E^* + M} \right) \quad (\text{C.79})$$

$$= \frac{1}{2E^*} \left(\frac{-2M(E^* + M)}{E^* + M} \right) \quad (\text{C.80})$$

$$= \frac{-2M}{2E^*} \quad (\text{C.81})$$

$$= \frac{-M}{E^*}. \quad (\text{C.82})$$

E usando por ultimo a expressão (C.5) teremos

$$V^\dagger(\mathbf{k}', \lambda') \gamma_0 V(\mathbf{k}, \lambda) = \frac{-M}{\sqrt{k^2 + M^2}}. \quad (\text{C.83})$$

Agora voltamos os resultados (C.60), (C.66), (C.71) e (C.83) na expressão (C.45),

$$\begin{aligned} \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \gamma_0 \psi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sum_{\mathbf{k}', \lambda'} \left[A_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger A_{\mathbf{k}, \lambda} \left(\frac{M}{\sqrt{k^2 + M^2}} \right) e^{+i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \right. \\ &+ A_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger B_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger \left(\frac{-k}{\sqrt{k^2 + M^2}} \right) e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \\ &+ B_{\mathbf{k}, \lambda} A_{\mathbf{k}, \lambda} \left(\frac{-k}{\sqrt{k^2 + M^2}} \right) e^{+i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \\ &\left. + B_{\mathbf{k}, \lambda} B_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger \left(\frac{-M}{\sqrt{k^2 + M^2}} \right) e^{+i(\mathbf{k}'-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} \right]. \quad (\text{C.84}) \end{aligned}$$

Utilizando a relação de ortonormalidade (C.19),

$$\begin{aligned} \rho_s &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left[A_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger A_{\mathbf{k}, \lambda} \left(\frac{M}{\sqrt{k^2 + M^2}} \right) + A_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger B_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger \left(\frac{-k}{\sqrt{k^2 + M^2}} \right) \right. \\ &\left. + B_{\mathbf{k}, \lambda} A_{\mathbf{k}, \lambda} \left(\frac{-k}{\sqrt{k^2 + M^2}} \right) + B_{\mathbf{k}, \lambda} B_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger \left(\frac{-M}{\sqrt{k^2 + M^2}} \right) \right]. \quad (\text{C.85}) \end{aligned}$$

De maneira similar ao feito para a densidade vetorial podemos modificar o $B_{\mathbf{k}, \lambda} B_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger$ por $-B_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger B_{\mathbf{k}, \lambda}$. Aplicando o limite para um volume infinitamente grande (C.31) teremos

$$\begin{aligned} \rho_s &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int d^3k \left[A_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger} A_{\mathbf{k},\lambda} \left(\frac{M}{\sqrt{k^2 + M^2}} \right) + A_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger} B_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger} \left(\frac{-k}{\sqrt{k^2 + M^2}} \right) \right. \\ &+ \left. B_{\mathbf{k},\lambda} A_{\mathbf{k},\lambda} \left(\frac{-k}{\sqrt{k^2 + M^2}} \right) + \left(-B_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger} B_{\mathbf{k},\lambda} + \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}} \delta_{\lambda\lambda} \right) \left(\frac{-M}{\sqrt{k^2 + M^2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.86})$$

Utilizando a aproximação do campo médio temos $\rho_s = \langle \bar{\psi} \psi \rangle$. Aplicando a equação acima em um estado de Fermi e se utilizando das relações (C.34), (C.35), (C.36) e (C.37) teremos

$$\begin{aligned} \rho_s &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int d^3k \left[\langle F | A_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger} A_{\mathbf{k},\lambda} | F \rangle \left(\frac{M}{\sqrt{k^2 + M^2}} \right) \right. \\ &+ \langle F | A_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger} B_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger} | F \rangle \left(\frac{-k}{\sqrt{k^2 + M^2}} \right) + \langle F | B_{\mathbf{k},\lambda} A_{\mathbf{k},\lambda} | F \rangle \left(\frac{-k}{\sqrt{k^2 + M^2}} \right) \\ &+ \left. \langle F | B_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger} B_{\mathbf{k},\lambda} | F \rangle \left(\frac{M}{\sqrt{k^2 + M^2}} \right) - \langle F | F \rangle \delta_{\lambda\lambda} \left(\frac{M}{\sqrt{k^2 + M^2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.87})$$

Utilizamos um *cutoff* (Λ) para regularizar termo do “mar de Dirac”,

$$\rho_s = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int_0^{k_F} d^3k \left(\frac{M}{\sqrt{k^2 + M^2}} \right) - \int_0^{\Lambda} d^3k \left(\frac{M}{\sqrt{k^2 + M^2}} \right) \quad (\text{C.88})$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int_{k_F}^{\Lambda} d^3k \left(\frac{M}{\sqrt{k^2 + M^2}} \right), \quad (\text{C.89})$$

onde novamente a somatória em λ será nosso fator de degenerescência (γ) e considerando uma simetria esférica

$$\rho_s = -\frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_{k_F}^{\Lambda} d^3k \left(\frac{M}{\sqrt{k^2 + M^2}} \right) \quad (\text{C.90})$$

$$= -\frac{\gamma}{8\pi^3} \int_{k_F}^{\Lambda} dk \left(\frac{4\pi k^2 M}{\sqrt{k^2 + M^2}} \right) \quad (\text{C.91})$$

$$= -\frac{\gamma M}{2\pi^2} \int_{k_F}^{\Lambda} dk \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + M^2}}. \quad (\text{C.92})$$

Resolvendo a integral indefinida teremos

$$\int dk \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + M^2}} = \frac{1}{2} k \sqrt{k^2 + M^2} - \frac{1}{2} M^2 \ln \left(k + \sqrt{k^2 + M^2} \right). \quad (\text{C.93})$$

Definindo os limites da integral teremos

$$\int_{k_F}^{\Lambda} dk \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + M^2}} = \frac{1}{2} \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} - \frac{1}{2} M^2 \ln \left[\frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M^2}}{M} \right] - \frac{1}{2} k_F \sqrt{k_F^2 + M^2} + \frac{1}{2} M^2 \ln \left[\frac{k_F + \sqrt{k_F^2 + M^2}}{M} \right]. \quad (\text{C.94})$$

Substituindo a expressão (C.94) em (C.92) encontramos a expressão final para a densidade escalar,

$$\rho_s = -\frac{\gamma M}{2\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} - \frac{1}{2} M^2 \ln \left[\frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M^2}}{M} \right] - \frac{1}{2} k_F \sqrt{k_F^2 + M^2} + \frac{1}{2} M^2 \ln \left[\frac{k_F + \sqrt{k_F^2 + M^2}}{M} \right] \right\} \quad (\text{C.95})$$

$$= -\frac{\gamma M}{4\pi^2} \left\{ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} - M^2 \ln \left[\frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M^2}}{M} \right] - k_F \sqrt{k_F^2 + M^2} + M^2 \ln \left[\frac{k_F + \sqrt{k_F^2 + M^2}}{M} \right] \right\}. \quad (\text{C.96})$$

C.3 Potencial químico

Podemos calcular o potencial químico a partir da densidade de energia (2.30), sendo esta dado por:

$$\mu = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho}. \quad (\text{C.97})$$

Podemos reescrever a expressão para μ como

$$\mu = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial k_F} \frac{\partial k_F}{\partial \rho}. \quad (\text{C.98})$$

Onde ρ e k_F são

$$\rho = \frac{\gamma}{6\pi^2} k_F^3, \quad (\text{C.99})$$

$$k_F = \left(\frac{6\pi^2 \rho}{\gamma} \right)^{1/3}. \quad (\text{C.100})$$

Assim realizando as derivadas parciais, primeiramente em relação a ρ teremos

$$\frac{\partial k_F}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{6\pi^2 \rho}{\gamma} \right)^{1/3} \quad (\text{C.101})$$

$$= \frac{2\pi^2}{\gamma k_F^2} . \quad (\text{C.102})$$

Agora a derivada da energia em relação a k_F é

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial k_F} &= \frac{\partial}{\partial k_F} \left[G_s \rho_s^2 + G_V \rho^2 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk k^2 (k^2 + M^2)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dk k^2 (k^2 + M^2)^{1/2} \right] . \end{aligned} \quad (\text{C.103})$$

Derivando termo a termo, teremos

$$\frac{\partial}{\partial k_F} [G_s \rho_s^2] = 0 . \quad (\text{C.104})$$

$$(\text{C.105})$$

Para o segundo escrevemos utilizando a expressão (C.99), de modo que a derivada será

$$\frac{\partial}{\partial k_F} [G_V \rho^2] = G_V \frac{\partial}{\partial k_F} \left[\frac{\gamma k_F^3}{6\pi^2} \right]^2 \quad (\text{C.106})$$

$$= 2G_V \left(\frac{\gamma k_F^3}{6\pi^2} \right) \left(\frac{3\gamma k_F^2}{6\pi^2} \right) \quad (\text{C.107})$$

$$= G_V \rho \left(\frac{\gamma k_F^2}{\pi^2} \right) . \quad (\text{C.108})$$

Para o realizarmos o derivada no terceiro termo, primeiro devemos resolver a integral, onde esta equivale a

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk k^2 (k^2 + M^2)^{1/2} &= \frac{\gamma}{2\pi^2} \frac{1}{8} \left\{ (2k_F^3 + k_F M^2)(k_F^2 + M^2)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. - M^4 \ln \left[\frac{k_F + (k_F^2 + M^2)^{1/2}}{M} \right] \right\} . \end{aligned} \quad (\text{C.109})$$

Assim

$$\frac{\gamma}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial k_F} \int_0^{k_F} dk k^2 (k^2 + M^2)^{1/2} = \frac{\gamma}{2\pi^2} \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial k_F} \left\{ (2k_F^3 + k_F M^2)(k_F^2 + M^2)^{1/2} - M^4 \ln \left[\frac{k_F + (k_F^2 + M^2)^{1/2}}{M} \right] \right\} \quad (\text{C.110})$$

$$= \frac{\gamma}{2\pi^2} \frac{1}{8} \left\{ (6k_F^2 + k_F M^2)(k_F^2 + M^2)^{1/2} + \frac{1}{2} (2k_F^2 + k_F M^2)(k_F^2 + M^2)^{1/2} 2k_F - M^4 \frac{M}{(k_F^2 + M^2)^{1/2} + k_F} \right\} \quad (\text{C.111})$$

$$\times \left[\frac{(k_F^2 + M^2)^{1/2} + k_F}{M(k_F^2 + M^2)^{1/2}} \right] \quad (\text{C.112})$$

$$= \frac{\gamma}{2\pi^2} \frac{1}{8} \left\{ \frac{8k_F^2(k_F^2 + M^2)}{(k_F^2 + M^2)^{1/2}} \right\} \quad (\text{C.113})$$

$$= \frac{\gamma}{2\pi^2} k_F^2 (k_F^2 + M^2)^{1/2} . \quad (\text{C.114})$$

Agora para o termo do “mar de Dirac” a derivada em relação a k_F é

$$\frac{\gamma}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial k_F} \int_0^\Lambda dk k^2 (k^2 + M^2)^{1/2} = 0 . \quad (\text{C.115})$$

Só nos resta retornar as derivadas no termo (C.103), juntamente com o termo (C.102), teremos que o potencial químico (C.98) equivale a

$$\mu = \left[G_V \rho \left(\frac{\gamma k_F^2}{\pi^2} \right) + \frac{\gamma k_F^2}{2\pi^2} (k_F^2 + M^2)^{1/2} \right] \left(\frac{2\pi^2}{\gamma k_F^2} \right) \quad (\text{C.116})$$

$$= 2G_V \rho + (k_F^2 + M^2)^{1/2} . \quad (\text{C.117})$$

Apêndice D - Simetria de centro

Consideremos um sistema invariante de *gauge* que seja descrito apenas por campos bosônicos. Como exemplo, tratemos da QCD contendo apenas glúons, ou seja, descrita apenas pelo campo A_μ . Tal campo se transforma segundo $A_\mu \rightarrow A'_\mu = U(A_\mu + i\partial_\mu)U^\dagger$, com U sendo a transformação local de *gauge*. Em temperatura finita, tanto A_μ quanto A'_μ devem satisfazer a condição de periodicidade (KAPUSTA; GALE, 2011), ou seja, deve-se observar que

$$A_\mu(0) = A_\mu(\beta) \quad \text{e} \quad (\text{D.1})$$

$$A'_\mu(0) = A'_\mu(\beta). \quad (\text{D.2})$$

Uma forma de se verificar a relação (D.2) é admitir que U também obedeça a condição de periodicidade dada por $U(0) = U(\beta)$, já que a partir desta condição e com o uso de (D.1), mostra-se que

$$A'_\mu(0) = U(0)(A_\mu(0) + i\partial_\mu)U^\dagger(0) = U(\beta)(A_\mu(\beta) + i\partial_\mu)U^\dagger(\beta) = A'_\mu(\beta). \quad (\text{D.3})$$

Outra maneira de preservar (D.2) é admitir que U satisfaça à

$$U(0) = zU(\beta) \quad (\text{D.4})$$

com $z = e^{2\pi ik/N_c}$, para $k = 1, 2, 3, \dots$. Sob tal transformação e usando (D.1), temos que

$$\begin{aligned} A'_\mu(0) &= U(0)(A_\mu(0) + i\partial_\mu)U^\dagger(0) = zU(\beta)(A_\mu(\beta) + i\partial_\mu)z^*U^\dagger(\beta) \\ &= e^{2\pi ik/N_c}e^{-2\pi ik/N_c}U(\beta)(A_\mu(\beta) + i\partial_\mu)U^\dagger(\beta) \\ &= U(\beta)(A_\mu(\beta) + i\partial_\mu)U^\dagger(\beta) \\ &= A'_\mu(\beta). \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Sistemas que realizam a simetria de centro são aqueles nos quais os campos, submetidos à transformações de *gauge* que obedecem à (D.4), permanecem satisfazendo às condições de contorno periódicas ou antiperiódicas, sendo bosônicos ou fermiônicos. Para

o caso do exemplo acima onde tratamos apenas do campo bosônico dos glúons, tal simetria é realizada e, como consequência direta, temos que Φ deixa de ser uma quantidade invariante, já que passa a se transformar através de¹

$$\Phi = z\Phi, \tag{D.6}$$

que por sua vez só se verifica no caso em que $\Phi = 0$. Como já mencionado anteriormente, o valor nulo de Φ corresponde à fase confinada dos quarks. Pode-se afirmar então que o fenômeno do confinamento está diretamente associado à realização da simetria de centro da teoria. Para o caso em que $\Phi \neq 0$, temos que a simetria é espontaneamente quebrada. Assim diz-se que Φ é um parâmetro de ordem para a transição confinamento/desconfinamento.

¹Tal resultado é obtido usando que, de uma forma geral, o laço de Wilson comporta-se, segundo uma transformação de *gauge*, como $\hat{L}' = U(x_1)\hat{L}U^\dagger(x_2)$, para $\hat{L} = \mathcal{P} \exp \left[\int_{x_1}^{x_2} dx_\mu A_\mu \right]$ (ROTHER, 2005).

Apêndice E - Teoria de Campos em temperatura finita

Em Teoria Quântica de Campos, a amplitude de probabilidade de um estado descrito por um campo cuja configuração é $\phi_i(x)$ em $t = t_i$ realizar uma transição para um estado cuja configuração é dada pelo campo $\phi_f(x)$ em $t = t_f$, para $t_f > t_i$, é escrita em termos da seguinte integral funcional (GREINER; REINHARDT, 1996):

$$\langle \phi_f, t_f | \phi_i, t_i \rangle = \langle \phi_f | e^{-i(t_f - t_i)\hat{H}} | \phi_i \rangle \quad (\text{E.1})$$

$$= \int D\phi \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi) \right] \quad (\text{E.2})$$

$$= \int D\phi e^{iS(\phi)} \quad (\text{E.3})$$

com $S(\phi)$ sendo a ação e \hat{H} o hamiltoniano do sistema.

O tratamento da Teoria Quântica de Campos a temperatura finita é feito a partir da conexão desta teoria com a Mecânica Estatística Quântica. Para realizar tal relação de forma direta, é preciso antes escrever a amplitude de probabilidade, dada na Eq. (E.3), no espaço euclidiano. Para tal, usemos o exemplo onde \mathcal{L}_M é dada por

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (\text{E.4})$$

com $V(\phi)$ representando os termos de interação. O subíndice indica que a densidade lagrangiana está expressa no espaço de Minkowski. Para escrever \mathcal{L}_M no espaço euclidiano, usa-se a chamada rotação de Wick dada por $t = -it_E$. Com isso temos que $dt = -idt_E$

e, conseqüentemente:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_M &= \frac{1}{2} \partial_t \phi \partial_t \phi - \frac{1}{2} \partial_i \phi \partial^i \phi - V(\phi) \\
 &= -\frac{1}{2} \partial_{t_E} \phi \partial_{t_E} \phi - \frac{1}{2} \partial_i \phi \partial^i \phi - V(\phi) \\
 &= -\left(\frac{1}{2} \partial_{t_E} \phi \partial_{t_E} \phi + \frac{1}{2} \partial_i \phi \partial^i \phi + V(\phi) \right) \\
 &\equiv -\mathcal{L}_E.
 \end{aligned} \tag{E.5}$$

Assim, a Eq. (E.2) pode ser reescrita como

$$\langle \phi_f, t | \phi_i, 0 \rangle = \langle \phi_f | e^{-it\hat{H}} | \phi_i \rangle \tag{E.6}$$

$$= \int D\phi \exp \left[- \int_0^{it} dt_E \int d^3x_E \mathcal{L}_E(\phi) \right] \tag{E.7}$$

$$= \int D\phi e^{-S_E(\phi)}, \tag{E.8}$$

agora com $S_E(\phi)$ sendo a ação euclidiana e, para o caso particular em que $t_i = 0$ e $t_f = t$. De posse da amplitude de probabilidade na versão euclidiana, pode-se agora fazer a conexão com a Mecânica Estatística observando que a função de partição quântica, definida como

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} e^{-\beta\hat{H}} = \sum_n \langle n | e^{-\beta\hat{H}} | n \rangle, \tag{E.9}$$

com $\beta = 1/T$, pode ser representada por uma integral funcional, já que sua comparação com a expressão (E.6) junto às associações $\beta = it$ e $|\phi_f\rangle = |\phi_i\rangle = |n\rangle$ (BRANDT, 2004), levam à

$$\mathcal{Z} = \int D\phi \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}(\phi) \right], \tag{E.10}$$

onde devido à operação do traço, devem ser verificadas as condições de periodicidade, $\phi(0) = \phi(\beta)$, ou antiperiodicidade, $\psi(0) = -\psi(\beta)$, para campos bosônicos ou fermiônicos respectivamente. Embora esse tratamento tenha sido feito a partir de um exemplo específico e para o caso particular onde $t_i = 0$ e $t_f = t$, a conexão entre as teorias é válida para qualquer sistema.

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO DM	2. DATA 29 de janeiro de 2019	3. DOCUMENTO Nº DCTA/ITA/DM-002/2019	4. Nº DE PÁGINAS 99
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: Efeitos do confinamento no modelo PNJL no regime de temperatura nula			
6. AUTOR(ES): Odilon Ardizzon Mattos			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: Confinamento/desconfinamento; Temperatura nula; PNJL0; PNJL; NJL; Laço de Polyakov; Transição de fase; Quarks; Modelos efetivos; QCD			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Transição de fase; Cromodinâmica quântica; Quarks; Física de partículas; Física.			
10. APRESENTAÇÃO:		(X) Nacional () Internacional	
ITA, São José dos Campos. Curso de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Física Nuclear. Orientador: Prof. Dr. Odilon Lourenço da Silva Filho; coorientador: Prof. Dr. Tobias Frederico. Defesa em 17/01/2019. Publicada em 2019.			
11. RESUMO: O Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio (PNJL) é um modelo efetivo de quarks que incorpora os efeitos do desconfinamento no modelo original de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) através da inclusão do chamado laço de Polyakov (Φ) no regime de temperatura finita. Entretanto, em temperatura nula, a estrutura do modelo PNJL perde totalmente a informação do laço de Polyakov e, suas equações tornam-se as mesmas em comparação às do modelo NJL. Nesta dissertação, propomos uma variação nas magnitudes dos acoplamentos escalar e vetorial da versão de dois sabores do modelo PNJL, tornando-as dependentes do laço de Polyakov, com a única imposição de que todas as interações desapareçam na fase desconfinada (regime de quarks livres). Acrescentamos também um termo dependente de Φ no grande potencial termodinâmico do modelo, com o objetivo de favorecer soluções não nulas para Φ e também de limitá-lo ao valor $\Phi = 1$, facilitando a identificação da fase confinada/desconfinada. Como consequência de tais modificações, todas as equações do modelo PNJL em temperatura nula passam a registrar a dependência com o laço de Polyakov, diferentemente do que acontece originalmente. Chamamos essa nova versão de modelo PNJL0. Discutimos aqui sua termodinâmica, com atenção especial às transições de fase de primeira ordem e à fase quarkônica presentes agora em $T = 0$.			
12. GRAU DE SIGILO: (X) OSTENSIVO () RESERVADO () SECRETO			