

Dissertação apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Física Nuclear.

Igor Alves de Carvalho

**SISTEMAS DE TRÊS BÓSONS COM DUAS
MASSAS IDÊNTICAS NO LIMITE UNITÁRIO -
ESTADOS LIGADOS E DE ESPALHAMENTO**

Dissertação aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:

A handwritten signature in blue ink, consisting of several loops and a long horizontal stroke, followed by a period.

Prof. Dr. Lauro Tomio
Orientador

Prof. Dr. Pedro Teixeira Lacava
Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP - Brasil
2019

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Divisão de Informação e Documentação

Carvalho, Igor Alves de
Sistemas de Três Bósons com duas massas idênticas no Limite Unitário - Estados Ligados e de Espalhamento / Igor Alves de Carvalho.
São José dos Campos, 2019.
132f.

Dissertação de Mestrado – Curso de Física. Área de Física Nuclear – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2019. Orientador: Prof. Dr. Lauro Tomio.

1. Física de Poucos-Corpos. 2. Efeito Efimov. 3. Aproximação de Bohn-Oppenheimer. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Título.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

CARVALHO, Igor Alves de. **Sistemas de Três Bósons com duas massas idênticas no Limite Unitário - Estados Ligados e de Espalhamento**. 2019. 132f. Dissertação de Mestrado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

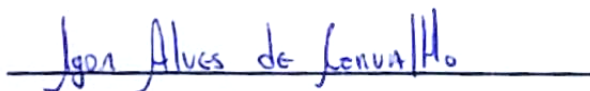
CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Igor Alves de Carvalho

TÍTULO DO TRABALHO: Sistemas de Três Bósons com duas massas idênticas no Limite Unitário - Estados Ligados e de Espalhamento.

TIPO DO TRABALHO/ANO: Dissertação / 2019

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta dissertação e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação pode ser reproduzida sem a autorização do autor.



Igor Alves de Carvalho
Rua República do Líbano, 2018
12216.590 – São José dos Campos-SP

SISTEMAS DE TRÊS BÓSONS COM DUAS MASSAS IDÊNTICAS NO LIMITE UNITÁRIO - ESTADOS LIGADOS E DE ESPALHAMENTO

Igor Alves de Carvalho

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr.	Manoel Malheiro	Presidente	-	ITA
Prof. Dr.	Lauro Tomio	Orientador	-	ITA
Prof. Dr.	Odilon Lourenço	Membro Interno	-	ITA
Prof. Dr.	Mahdi Shalchi	Membro Externo	-	IFT
Prof. Dra.	Mariana Dutra	Membro Interno	-	ITA(Suplente)
Prof. Dr.	Kazuo Tsushima	Membro Externo	-	UNIC-SUL(Suplente)

ITA

A Deus, o meu protetor que sempre esteve ao meu lado e que nunca deixou-me faltar nada. Aos os amigos e companheiros da Pós-Graduação do ITA que de alguma forma me ajudaram até a chegada deste momento.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por sempre me dar força para lutar em todos os momentos da minha vida, por me fazer um homem forte, valente e corajoso para conseguir vencer mais uma batalha da minha vida mais uma vez.

Agradeço ao Prof. Lauro Tomio pela orientação neste trabalho, pela paciência em se dedicar para me ensinar um pouco de física nuclear.

Muito grato ao Prof. Brett Carlson pelas disciplinas ministradas, agradeço pelo conhecimento compartilhado. Agradeço ao Prof Silvério Germano pelo apoio computacional.

Agradeço ao colega de pós-doutorado do ITA Emanuel Ydrefors, ao colega de doutorado Erick Rosa do IFT e ao colega de doutorado da UFAM Emanuel Costabille pelo conhecimento compartilhado, foi de muita importância para a construção deste trabalho.

Agradeço aos colegas de curso Lucas Souza e Ronaldo Lobato pela apoio tecnico nos problemas computacionais.

Muito grato aos grandes parceiros de curso, Natan Coleta e Romulo Moreira grandes amigos que fiz no ITA, foram decisivos em problemas como política, economia, futebol e um pouco de ciências.

Ao Prof. Ivan Ribeiro e aos colegas da Academia Ivan Ribeiro, grandes companheiros das artes marciais.

A todos os colegas e amigos que de alguma forma me ajudaram na elaboração deste trabalho.

"Mesmo que se compreenda que o significado de um conceito, jamais será definido com precisão absoluta, alguns conceitos são sempre parte integrante dos métodos da ciência, pelo fato de representarem, pelo menos por algum tempo, o resultado final do desenvolvimento do pensamento humano desde um passado assaz remoto; eles podem mesmo ter sido herdados e são, qualquer que seja o caso, instrumentos indispensáveis na execução do trabalho científico em nosso tempo. "

— WERNER HEISENBERG

Resumo

Neste trabalho estudamos o problema de três corpos em um sistema do tipo (AAB), sendo dois bósons pesados idênticos (AA) e uma terceira partícula leve (B), analisamos a possibilidade da existência do efeito Efimov para diferentes valores de relação de massa $\mathcal{A} = m_B/m_A$ no limite unitário de dois corpos usando a aproximação de Born-Oppenheimer. Verificamos o fator de escala discreto relacionado ao efeito Efimov, que ocorre em sistemas de três corpos próximo ao limite unitário; no qual o valor absoluto do comprimento de espalhamento se aproxima do infinito. Temos R como sendo a distância relativa entre os bósons pesados e r a distância entre o bóson leve e centro de massa dos bósons pesados, a interação entre os bósons pesados e o bóson leve conduz ao potencial efetivo entre os bósons pesados proporcionais a $1/R^2$ na aproximação de Born-Oppenheimer. Estudamos a solução do formalismo considerando $m_B \ll m_A$ para vários valores da razão m_B/m_A entre os bósons. O número de estados ligados cresce na medida que a energia de ligação entre duas partículas (leve-pesada) vai para zero. Diminuindo a diferença de massa entre os bósons encontramos um número menor de estados ligados de três corpos. Além do sistema ligado (AAB) de três corpos, também consideramos o espalhamento de A pelo estado ligado de (AB). Verificamos a física de Efimov na região de espalhamento, considerando o sistema AAB de três bósons na razão $m_B \ll m_A$, próximo ao limite unitário. Para o espectro de estados ligados, demonstrou-se que dois níveis são relacionados por um fator de escala exponencial dado por $\exp(2\pi/s_0)$, onde s_0 é uma constante que varia com a proporção de massa. Mostramos que o fator de escala discreto identificado no espectro de Efimov do estado ligado também pode ser identificado na colisão de baixa energia de uma partícula pesada A contra um sistema AB . Ao considerarmos o momento relativo da energia k , uma sequência de pólos surgiu no observável $k \cot \delta_0^R$ na onda S , onde δ_0^R é a parte real da mudança de fase da onda S . A sequência de polos, com a posição de momento dada por $k = k_n (n = 1, 2, \dots)$, dependerá da razão de massa m_B/m_A , bem como na energia do estado ligado do sistema leve-pesado. O fator de escala discreto pode ser identificado pela sequência de mínimos na seção de choque, que são dadas por k_n . A relação entre energias de espalhamento consecutivas desta sequência foi verificada como próxima da proporção já obtida no espectro de estado ligado de Efimov, à medida que nos aproximamos do limite $1/a_{AB} = 0$.

Abstract

In this work we study the problem of three bodies in a system of type (AAB), two identical heavy bosons (AA) and a third light particle (B), analyzing the possibility of the existence of the Efimov effect for different values of mass ratio $\mathcal{A} = m_B/m_A$ in the unity boundary of two bodies using the Born-Oppenheimer approximation. We verified the discrete scale factor related to the Efimov effect, which occurs in three-body systems near the unit limit; in which the absolute value of the scattering length approaches infinity. We have R as the relative distance between the heavy bosons and r the distance between the light boson and the center of mass of the heavy bosons, the interaction between the heavy bosons and the light boson leads to the effective potential between the proportional heavy bosons to $1/R^2$ in the Born-Oppenheimer approximation. We study the solution of formalism by considering $m_B \ll m_A$ for several values of the ratio m_B/m_A between the bosons. The number of bound states grows as the binding energy between two particles (light-heavy) goes to zero. By decreasing the mass difference between the bosons we find a smaller number of connected states of three bodies. In addition to the three-body bonded system (AAB), we also consider the scattering of A by the bound state of (AB). We verified the physics of Efimov in the region of scattering, considering the system AAB of three bosons in the ratio $m_B \ll m_A$, near the unit boundary. For the bound state spectrum, two levels have been shown to be related by an exponential scale factor given by $\exp(2\pi/s_0)$, where s_0 is a constant that varies with the mass ratio. We show that the discrete scale factor identified in the bound state Effimov spectrum can also be identified in the low energy collision of a heavy particle A against a system AB . When we consider the relative momentum of energy k , a sequence of poles will arise in the observable $k \cot \delta_R$ in the S wave, where δ_0^R is the real part of the phase shift of the S wave. The sequence of poles, with the momentum position given by $k = k_n (n = 1, 2, \dots)$, will depend on the mass ratio m_B/m_A , as well as on the energy of the connected state of the light-heavy system. The discrete scaling factor can be identified by the sequence of minima in the shock section, which are given by k_n . The ratio of consecutive scattering energies of this sequence was verified to be close to the ratio already obtained in the bound state spectrum of Efimov, as we approach the threshold $1/a_{AB} = 0$.

Lista de Figuras

- FIGURA 1.1 – O espectro Efimov em um sistema de três corpos. No lado negativo de a , onde o estado de dois corpos fracamente ligado não existe, os estados ligados de três corpos nascem diretamente do contínuo de três corpos (região azul superior) como $|a|$ aumenta. Infinitos números desses estados se acumulam em $a = \infty$. No lado positivo de $1/a$ onde existe um estado de dois corpos com fraca ligação, os estados do trímero Efimov fundem-se no contínuo do dímero-átomo como um decréscimo. 21
- FIGURA 1.2 – Adaptada da figura 4 (BHADURI *et al.*, 2011). Os círculos sólidos são pontos de dados experimentais 5 a 10 nK para a recombinação de três corpos observada: $Cs + Cs + Cs \rightarrow Cs_2 + Cs$. O comprimento de espalhamento é medido em unidades do raio de Bohr a_0 24
- FIGURA 1.3 – Ilustração de uma ressonância de Feshbach. O comprimento de espalhamento a da onda s é plotado como uma função do campo magnético B . A região verde ao redor do centro de ressonância indica a faixa universal que pode ser usada para estudar a física de Efimov. A largura deste intervalo depende das propriedades particulares da ressonância. 26
- FIGURA 2.1 – Cenário de Efimov: A energia de três corpos é ilustrada em função do inverso do comprimento de espalhamento de dois corpos $1/a$. Existem três diferentes regiões: A região onde se encontra presente três átomos livres $E > 0$ (Cinza), a região que apresenta o sistema de dois átomos ligados e um livre, átomo-dímero, para $a > 0$ e $\hbar^2/(ma^2) < E < 0$ (Azul), e a região de três átomos ligados (Verde). Os estados de Efimov são ilustrados pelas curvas sólidas verdes. Eles surgem no limiar entre as regiões de três átomos livres $a < 0$ e a região dos estados de três átomos ligados, e conectam com a região átomo-dímero para $a > 0$. As setas indicam onde os estados de Efimov se conectam as regiões de três átomos livres e a região átomo-dímero, nestas regiões encontramos os fenômenos de ressonância, ver (FERLAINO; GRIMM, 2010) 35

- FIGURA 2.2 – Os três conjuntos de coordenadas de Jacobi descrevem as posições relativas de três partículas idênticas. 38
- FIGURA 2.3 – O potencial efetivo $\epsilon(R)$ entre as duas partículas de massa pesada que surge na aproximação adiabática devido à interação com a partícula de massa leve. Para $R < R_0$, o potencial interatômico é irrelevante para o efeito Efimov. O comprimento de espalhamento a é marcado no eixo horizontal. Como $a \rightarrow \infty$, a ligação de dois corpos k_0^2 vai para zero, e $\epsilon(R) \rightarrow R^{-2}$ para todo $R > R_0$. As quatro regiões do potencial $\epsilon(R)$ são discutidas no texto. 43
- FIGURA 4.1 – Sistema de três corpos com duas massas pesadas m_A e m_B e uma leve m_C . 63
- FIGURA 4.2 – Sistema de três corpos formado por duas partículas pesadas idênticas com massa m_A , e uma partícula leve com massa m_B . Estamos considerando a faixa de validade de Born-Oppenheimer onde $m_B/m_A \ll 1$ 68
- FIGURA 4.3 – O potencial efetivo em função da distância entre as partículas pesadas para diferentes valores de massa m/M , em unidades de ($\hbar = |E_2| = 1$). . . 69
- FIGURA 4.4 – A função de onda na Eq.(4.23) como uma função do tamanho relativo, r/R , e a direção, $\cos(\theta_{rR})$, entre as duas coordenadas relativas, \mathbf{r} e \mathbf{R} , ver Fig.(4.2). As coordenadas superior e inferior são, respectivamente, resultados para $b = 1$ e 4. A constante na frente da Eq.(4.25) é fixado como $\frac{4\pi^2\mu_{B,AA}}{\hbar^2} = 1$ 72
- FIGURA 4.5 – Resultados para a função de onda da partícula leve para ângulos $\pi/2$ (ângulos entre \mathbf{r} e \mathbf{R}) e $\hbar = |E_2| = 1$ para $\psi(\mathbf{r}, 1)$ em função de r 73
- FIGURA 4.6 – Resultados para a função de onda da partícula leve para ângulos $\pi/2$ (ângulos entre \mathbf{r} e \mathbf{R}) e $\hbar = |E_2| = 1$. Resultados para $\psi(r, R)$ em função de r para $m/M=0.05$ 73
- FIGURA 4.7 – Resultados para a função de onda da partícula leve para ângulos $\pi/2$ (ângulos entre \mathbf{r} e \mathbf{R}) e $\hbar = |E_2| = 1$. Resultados para $\psi(1, R)$ em função de R 74
- FIGURA 4.8 – Resultados para a função de onda da partícula leve para ângulos $\pi/2$ (ângulos entre \mathbf{r} e \mathbf{R}) e $\hbar = |E_2| = 1$. Resultados para $\psi(r, R)$ em função de R para $m/M=0.05$ 74

- FIGURA 4.9 – Razão $\epsilon_{aproximado(s)}/\epsilon_{exato}(s)$ como função da coordenada adimensional s . As curvas tracejada e sólida (azul) apresentam resultados para $|R| \rightarrow 0$ em primeira e segunda ordem respectivamente, as curvas tracejada e sólida (vermelha) apresentam resultados para $|R| \rightarrow \infty$ em primeira e segunda ordem respectivamente. 77
- FIGURA 4.10 – Potencial adiabático $|\epsilon_{assintotico}(R)/E_2|$ em função da coordenada adimensional $s(R)$. A linha azul sólida é a solução numérica da Eq.(4.18) e a linha vermelha tracejada é a expressão assintótica da Eq.(4.37) respectivamente. 78
- FIGURA 4.11 – Nas figura (a-d) a função de onda $Y(x)$; potencial efetivo BO somado ao potencial gaussiano $V_B(x)$; energia de três corpos E_3 em vermelho, para diferentes valores de ν fixando $m/M=0.05$ e $\rho=1.0$. Agora para as figuras de (e-f) temos $m/M=0.20$ e $\rho=1.0$ 83
- FIGURA 4.12 – O potencial de Born-Oppenheimer (azul claro) e potencial dipolo-dipolo U_B (em verde) e potenciais totais (azul escuro). As linhas horizontais são o limiar de dois corpos $\hat{E}_2 \equiv (a_0/2Q_{eff}^2)E_2$. As figuras (a-c) os potenciais são plotados como funções de x e calculados para $x_0 = 4.0$ e relação de massa $m_B/m_A = 0.05$. As figuras (d-f) os potenciais são plotados como funções de x e calculados para $x_0 = 5.0$ e relação de massa $m_B/m_A = 0.20$. 86
- FIGURA 4.13 – Potencial efetivo BO somado ao potencial dipolo $U(x)$; Potencial efetivo BO somado ao potencial gaussiano $V(x)$; energia de três corpos E_3 em vermelho, para diferentes valores de ν e λ fixando $m/M=0.05$, $\rho=1.0$ e calculados para $x_0 = 4.0$ 88
- FIGURA 4.14 – Potencial efetivo BO somado ao potencial dipolo $U(x)$; Potencial efetivo BO somado ao potencial gaussiano $V(x)$; energia de três corpos E_3 em vermelho, para diferentes valores de ν e λ fixando $m/M=0.20$ e $\rho=4.0$ e calculados para $x_0 = 5.0$ 89
- FIGURA 5.1 – Mostramos a seção de choque transversal da onda S como uma função da energia de colisão E , em unidades de energia do estado ligado de três corpos \mathcal{B}_3 , para intervalo zero (linhas pontilhadas azuis) e intervalo finito gaussiano (linhas pontilhadas vermelhas). 97

FIGURA 5.2 – Resultados obtidos para σ (em unidades arbitrárias) como uma função da energia de colisão (em unidades de \mathcal{B}_3), para três valores da energia de ligação AB , $B_{AB}/\mathcal{B}_3 = 0.01$ (linhas azul-sólidas), 0.03 (linhas pontilhadas-vermelhas) e 0.05 (linhas pretas tracejadas), dadas em oito painéis. Cada painel é para um determinado valor fixo da relação de massa $\mathcal{A} \equiv m_B/m_A$ (indicado dentro dos painéis). 98

FIGURA 5.3 – Para $m_A/m_B = 100$, temos um gráfico de escala (para as massas a título de ilustração foi adota m_H a massa do bóson de maior massa, e m_L o bóson de menor massa) para as relações entre duas posições de energia consecutivas dadas pelos pólos da função de dispersão $k \cot \delta_0$, onde $k^2 = (m_A/\hbar^2)E_k$. Os pólos são identificados em $E_k = E_n$ (ou $k = k_n$, no espaço de tempo), com as proporções dadas por $\sqrt{E_{n1}/E_n} = k_{n1}/k_n$, que são plotados versus $1/(k_n a)$. Nesse caso, com $m_A = 100m_B$, $a^2 \approx \hbar^2/(2m_B B_{AB})$ e $1/(k_n a) \approx \sqrt{\frac{2B_{AB}}{100E_n}}$. No painel superior, para uma melhor visualização e comparação dos resultados adiabáticos com os dados pelo cálculo de Faddeev, $k_n a$ é multiplicado por 10 (para evitar a sobreposição com os resultados exatos mostrados no painel inferior). 99

FIGURA 5.4 – As relações entre as energias de espalhamento correspondentes às posições dos zeros para a seção transversal são mostradas com pontos azuis (para as massas a título de ilustração foi adota m_β a massa do bóson de maior massa, e m_α o bóson de menor massa), no mesmo gráfico já verificado para o espectro de Efimov, quando se varia a razão de massa. 100

FIGURA 5.5 – O mesmo que na Fig.(5.2), mas alterando a escala do eixo x para $\log_{10}(E_k/\mathcal{B}_3)$. Como mostrado, os mínimos para σ ficaram igualmente espaçados para $B_{AB}/\mathcal{B}_3 = 0.01$, tal que $\Delta[\log_{10}(E_k/\mathcal{B}_3)] \approx 0,6$. A partir dessa observação, podemos deduzir que $E_k^J/\mathcal{B}_3 = (1/2)^{3+2J}$, onde $J = 0, 1, 2, 3$. Nós também podemos substituir o enredo acima por outro dado em \ln ao invés de \log_{10} , tal que $\ln(E_k^J/\mathcal{B}_3) = (3 + 2J) * \ln(0,5)$ 101

FIGURA B.1 – Sistema de coordenadas para um sistema de três corpos. À esquerda (a) temos o esquema da posição das três partículas (A, B e C) com relação ao centro de massa do sistema de três corpos no espaço das configurações. Do lado direito o esquema dos momentos relativos de Jacobi das três partículas. 118

FIGURA B.2 – Relação das novas coordenadas com as coordenadas do laboratório para um sistema composto por uma partícula α e $m c_\alpha$ 121

Lista de Abreviaturas e Siglas

BO	Born-Oppenheimer
BEC	Condensados de Bose-Einstein
t	matriz de dois corpos
\mathbf{p}	momento da partícula
\mathbf{r}	espaço da partícula
H	hamiltoniano
H_0	energia cinética das partículas
V	energia potencial das partículas
I	matriz identidade
PVI	problema de valor inicial

Lista de Símbolos

m_A	massa da partícula A
m_B	massa da partícula B
m_C	massa da partícula C
m_H	massa da partícula pesada
m_L	massa da partícula leve
α, β, γ	índices das massas no sistema $\alpha\beta\gamma$
ϵ	potencial efetivo
Q_{eff}	carga modificada
ν	interação entre as partículas pesadas
a_0	raio de Bohr
s	coordenada adimensional para o sistema de três corpos
μ_{AB}	massa reduzida do sistema AB
$\mu_{C,AB}$	massa reduzida do sistema ABC
μ_{AA}	massa reduzida do sistema AA
$\mu_{B,AA}$	massa reduzida do sistema BAA
\mathbf{m}_1	momento de dipolo da partícula 1
\mathbf{m}_2	momento de dipolo da partícula 2
δ_{ij}	Delta de Kronecker no instante i e j
N_B	número de estados ligados
a_{AB}	comprimento de espalhamento de dois corpos AB
$B_3^{(n)}$	espectro de estados ligados de três corpos
\mathcal{B}_3	parâmetro de energia de três corpos

Sumário

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	Efeito Efimov no sistemas de três corpos	18
1.2	Objetivo	22
1.3	Motivação do Trabalho	23
1.3.1	Efeito Efimov. Por que é importante? Para quais sistemas?	24
1.3.2	Efeito Efimov em gases ultra frios.	25
1.4	Organização do trabalho	27
2	O ESTADO LIGADO DE TRÊS BÓSONS - EFEITO EFIMOV	30
2.1	As equações de Faddeev	30
2.2	O Efeito Efimov	34
2.2.1	Descrição do Efeito Efimov	34
2.2.2	A universalidade em sistemas de três bósons idênticos	36
2.2.3	Espectro de Efimov e o potencial radial	41
2.2.4	O modelo de três corpos	43
3	DINÂMICA DE DOIS E TRÊS CORPOS	45
3.1	Modelo de alcance zero e renormalização.	45
3.1.1	Matriz-T de dois corpos.	47
3.2	Notação e dinâmica de três corpos.	48
3.2.1	Matriz-T de três corpos.	49
3.3	Equações de estado ligado de três corpos	51
3.3.1	Renormalização do operador de transição de 3 corpos.	52
3.3.2	Equações integrais de estado ligado de três corpos.	53

3.4	Formalismo de Faddeev para as equações de três corpos.	57
3.4.1	Estado ligado de três corpos	57
3.4.2	Espalhamento partícula-dímero	58
3.4.3	Interações de alcance zero e alcance finito com os núcleos correspondentes	59
4	ESTADOS LIGADOS PARA O PROBLEMA DE TRÊS CORPOS	62
4.1	Formalismo para Aproximação Adiabática para o estado ligado	63
4.1.1	Cálculo para o potencial efetivo $\epsilon(R)$.	65
4.1.2	Formalismo para o sistema de três corpos do tipo AAB	68
4.2	Estados ligados para o problema de três corpos.	70
4.2.1	Função de onda para o partícula leve	70
4.2.2	Função de onda para as partículas pesadas	74
4.3	Resultados para um potencial de alcance finito	80
4.3.1	Potencial gaussiano entre os bósons de maior massa	81
4.3.2	Potencial dipolo-dipolo entre os bósons de maior massa	84
4.4	Resultados para potencial gaussiano e potencial dipolo-dipolo juntos	87
5	ESTADOS DE ESPALHAMENTO PARA O PROBLEMA DE TRÊS CORPOS	90
5.1	Formalismo para aproximação adiabática para o sistema de espalhamento	92
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	102
	REFERÊNCIAS	105
	APÊNDICE A – TEORIA DE ESPALHAMENTO	108
A.1	A equação de Lippmann-Schwinger	108
A.2	Expansão em ondas parciais	111
A.2.1	Pólos na matriz $T(E)$ e estados ligados	111
A.3	Espalhamento por um potencial delta de Dirac	113
A.4	Matriz de transição $T(E)$ para o problema de dois corpos	114

A.4.1	O Potencial delta de Dirac	117
APÊNDICE B – COORDENADAS E MOMENTOS RELATIVOS DE JACOBI		118
B.1	O problema clássico de três corpos	118
B.2	Momentos relativos de Jacobi	120
APÊNDICE C – FORMALISMO PARA AS SOLUÇÕES NUMÉRICOS . .		124
C.1	Solução numérica da equação do estado ligado de três corpos idênticos (AAA)	124
C.2	Solução numérica da equação do estado ligado de três corpos distintos (ABC)	126
C.3	O método de Runge-Kutta de quarta ordem	129
C.3.1	Sistemas de equações diferenciais	130

1 Introdução

1.1 Efeito Efimov no sistemas de três corpos

As décadas de 60 e 70 assistiram ao desenvolvimento de um formalismo rigoroso para sistemas de três corpos não relativísticos considerando interações arbitrárias para o sistema de dois corpos. As técnicas computacionais então existentes para resolver problemas de estado ligado de três corpos com interações mais complicadas entre as partículas constituintes. Métodos de aproximação foram desenvolvidos de modo a permitir cálculos detalhados para uma ampla gama de problemas de espalhamento de três corpos. Esses problemas podem ser divididos em duas classes amplas.

Primeiro, há problemas que dependem das propriedades gerais dos três corpos. Uma reação envolvendo três partículas é o exemplo não trivial mais simples de um processo em várias direções, mas ainda há modelos para reações nucleares que são baseados principalmente na intuição e preceitos obtidos a partir do estudo de sistemas de dois corpos.

Para ilustrar essa abordagem, esse trabalho começa com uma discussão sobre as características gerais dos estados de três corpos que não têm caso análogo de dois corpos; as equações de Faddeev e o efeito Efimov são considerados. No entanto, para átomos neutros ultra-frios com intensidades de interação ajustáveis, esses inconvenientes estão ausentes.

A segunda classe de problemas envolve o estudo detalhado do sistema de três corpos, a fim de obter informações básicas sobre as interações das partículas constituintes. Existem vários sistemas interessantes, mas neste trabalho nós lidamos apenas com as propriedades e interações dos sistemas de três partículas.

Considerando três bósons idênticos que ocupam um estado S com momento angular $l = 0$, Efimov previu em 1970 que o espectro obtido no limite unitário, no caso em que a energia de dois corpos tende a zero, ou que o comprimento de espalhamento vai para o infinito, obedece a uma lei de escala geométrica (EFIMOV, 1970), de tal forma que a razão entre os autovalores de energias de três corpos sucessivos do sistema é uma constante. Essa escala resulta em uma acumulação de estados de energias próximas a zero. A quantidade de estados ligados de três corpos é infinita quando o dímero de ligação é zero, entretanto

este número é diminuído quando a interação se torna mais atrativa.

O efeito Efimov é um dos mais contraintuitivos fenômenos de poucos corpos no mundo quântico, onde o sistema de três corpos pode estar ligado mesmo quando o subsistema de dois corpos passa não estar ligado sem a presença da terceira partícula. Mais contraintuitivamente, o efeito Efimov é exibido como um número infinito de estados ligados de três corpos mesmo quando não existe nenhum estado ligado de dois corpos. Qualquer variação nas interações de dois corpos saindo do limite unitário resultará apenas em uma diminuição dos estados ligados de três corpos para um número finito.

Os estudos sobre a física de Efimov podem ser rastreados até o trabalho seminal do físico nuclear Vitaly Efimov (EFIMOV, 1970) na década de 1970. Usando o modelo potencial de alcance zero (DEMKOV; OSTROVSKII, 2013), ele resolveu a equação de Faddeev (FADDEEV *et al.*, 1965) em coordenadas hipersféricas analiticamente, e encontrou uma interação de três corpos efetiva de longo alcance que pode suportar um número infinito de estados ligados quando os subsistemas de dois corpos têm estados ligados de energia zero.

No contexto da física nuclear, a observação experimental do efeito Efimov não tinha como ser confirmada, uma vez que as interações entre as partículas elementares são fixas por natureza e uma coincidência de energia de ligação zero é bastante improvável. No entanto, procurou-se efeitos indiretos considerando sistemas com energia de ligação próximo de zero.

A energia de ligação para duas partículas E_2 , está ligada às suas propriedades de espalhamento de baixa energia quando E_2 é muito menor que a escala de energia natural de uma interação, $1/\mu_2 r_0^2$ onde μ_2 é a massa reduzida de dois corpos para E_2 e r_0 é característica da interação de curto alcance. Em particular, E_2 está relacionado ao comprimento de espalhamento a da onda S e da energia $E_2 = \hbar^2/2\mu_2 a^2$, onde a é definido como o comprimento de espalhamento através do deslocamento da fase de espalhamento $\delta(k)$ como

$$a = - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\tan \delta(k)}{k}, \quad (1.1)$$

onde $k = \sqrt{2\mu_2 E/\hbar^2}$ é o número da onda incidente, E é a energia de dispersão assintótica e μ_2 é a massa reduzida de dois corpos. Fisicamente, o comprimento de espalhamento é uma medida melhor para o efeito Efimov do que E_2 , porque o estudo mais detalhado mostra que o efeito Efimov pode ser considerado como consequência das correlações de longo alcance entre os pares quando $|a|$ é grande.

O comprimento de espalhamento muda de $-\infty$ para $+\infty$ quando um estado de dois

corpos muda de estado virtual para fracamente ligado. Os estados ligados Efimov formados quando a é negativo são chamados estados "borromeanos" (JENSEN *et al.*, 2004), e são de particular interesse devido ao fato de que nenhum dos subsistemas de dois corpos é ser ligado.

Com $|a|$ aumentando para infinito, no limite o número de estados ligados de três corpos cresce para infinito, sendo que E_n obedecem uma série geométrica:

$$E_n = E_0 e^{-2\pi n/s_0}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.2)$$

onde a energia do estado fundamental E_0 depende dos detalhes das interações de três corpos a curta distância, e s_0 é uma constante universal determinada apenas pela simetria de partículas idênticas e a razão de massa das três partículas. Para bósons idênticos, $s_0 \approx 1.00624$. O valor máximo de n é determinado por $|a|$ e o alcance da interação r_0 , sendo dado por

$$n_{max} \approx \left\lceil \frac{s_0}{\pi} \ln \frac{|a|}{r_0} \right\rceil \quad (1.3)$$

A Figura 1.1 mostra um esboço do espectro de estado ligado a Efimov de três corpos. À esquerda da figura, quando $a < 0$, os estados Efimov de três corpos emergem do contínuo de três corpos quando $1/a$ se aproxima de zero. É interessante notar que esses estados Efimov de três corpos irão se quebrar quando qualquer uma das partículas for removida do sistema. As partículas em tais estados são altamente correlacionadas (JENSEN *et al.*, 2004). Na parte direita da figura, os estados de Efimov desaparecem no contínuo de separação de dois corpos, à medida que $1/a$ aumenta ainda mais.

Há outro fenômeno contraintuitivo de três corpos que tem estreita relação com o efeito Efimov, que é chamado de colapso Thomas (THOMAS, 1935). Comparado ao efeito Efimov, onde $|a|$ é levado ao limite do infinito enquanto r_0 é fixo, o colapso Thomas se manifesta por tomar o limite oposto: para o comprimento de espalhamento fixo a , quando r_0 diminui a escala do espectro de energia de três corpos como na Eq.(1.2), exceto que o valor de n toma $0, -1, -2, \dots$ e E_0 torna-se o limite superior das energias do estado ligado.

Assim, no limite $r_0 \rightarrow 0$, um sistema de três corpos com energias de ligação de dois corpos finita, não tem um limite inferior na energia de três corpos. Uma vez que quanto mais baixo o valor da energia, menor o tamanho do estado ligado, se espera que o sistema de três corpos que busca o estado de limite mais baixo colapse para o centro, dando origem ao colapso de Thomas.

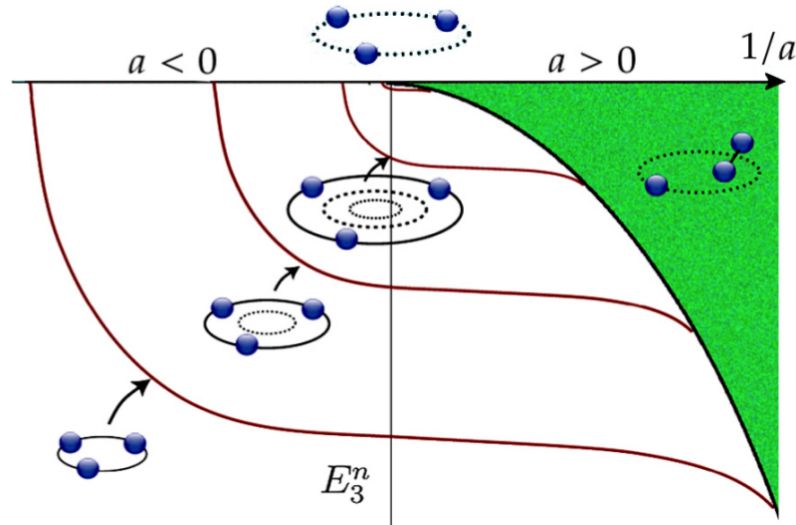


FIGURA 1.1 – O espectro Efimov em um sistema de três corpos. No lado negativo de a , onde o estado de dois corpos fracamente ligado não existe, os estados ligados de três corpos nascem diretamente do contínuo de três corpos (região azul superior) como $|a|$ aumenta. Infinitos números desses estados se acumulam em $a = \infty$. No lado positivo de $1/a$ onde existe um estado de dois corpos com fraca ligação, os estados do trímero Efimov fundem-se no contínuo do dímero-átomo como um decréscimo.

Curiosamente, na mecânica clássica, o colapso de um orbital ocorre no caso de duas partículas interagindo através de um potencial atrativo $1/r^2$ quando a força de interação é mais forte do que o potencial centrífugo, onde r é a distância entre as partes. De fato, como será discutido no próximo capítulo, o efeito Efimov e o colapso de Thomas compartilham a mesma origem física: a interação "efetiva" de três corpos se comporta de maneira atrativa como $1/R^2$, onde R é hiper raio que representa o tamanho total de um sistema de três corpos.

A estranheza do efeito Efimov também se eleva da maneira como nosso mundo é organizado pela natureza. Para três bósons idênticos, o efeito Efimov só ocorre na dimensão espacial D dentro de $2,3 < D < 3,8$ (NIELSEN *et al.*, 2001). Para sistemas com massas diferentes, os limites inferior e superior para a mudança de requisitos dimensionais, mas $D=3$ é o único número inteiro para o efeito Efimov (NIELSEN *et al.*, 2001).

Uma prova rigorosa das previsões de Efimov foi feita em 1972 (AMADO; NOBLE, 1972) e mais recentemente, uma solução analítica para três bósons idênticos que satisfazem o espectro de Efimov foi obtida (GOGOLIN *et al.*, 2008). Para verificar manifestações de sua teoria, Efimov examinou o núcleo de trítio e C^{12} (o último como um estado ligado de três partículas alfa). No entanto, para sistemas nucleares, a interação entre dois núcleons não pode ser ajustada para produzir um estado ligado de energia zero de dois corpos, ainda, o potencial de Coulomb para prótons restringe o número de candidatos a serem analisados.

As propriedades de um sistema quântico estão intimamente ligadas à dimensão em

que o sistema é estudado. Em 1975 foi observado que para um sistema de três corpos de massas iguais, o efeito Efimov não ocorre em duas dimensões (TJON, 1975), o mesmo foi encontrado para um sistema de massas diferentes também em duas dimensões (LIM; SHIMER, 1980). Para melhor ilustrar as diferenças que surgem em sistemas quânticos tratados em duas e três dimensões, podemos observar a energia cinética das partículas escritas em coordenadas polares e esféricas.

Em duas dimensões observamos que o autovalor do operador barreira centrífuga é negativo para um sistema com momento angular nulo, enquanto que em três dimensões os autovalores deste mesmo operador são sempre positivos ou nulo; isto significa que pelo menos uma pequena quantidade de energia é necessária para ligar um sistema em 3D, enquanto que em 2D apenas um infinitesimal de energia é suficiente para produzir um estado ligado para a onda-S (NIELSEN *et al.*, 1997).

A observação experimental do efeito Efimov foi primeiro feita por (KRAEMER *et al.*, 2006) com um gás diluído opticamente aprisionado de átomos de Césio ^{133}Cs a 10 nK. Em temperaturas tão baixas, o movimento térmico não mascara efeitos quânticos, essa observação motivou o interesse da comunidade científica para investigar fenômenos em sistemas de poucos corpos próximo do limite unitário. Para a observação experimental foi essencial o uso de técnicas de "ressonância de Feshbach", com as quais podem ser ajustadas as interações de dois corpos. Sob tais condições, as perdas de recombinação aumentam acentuadamente devido à formação de trímeros Efimov.

O efeito Efimov surge do comportamento de grande distância (assintótico) da interação do inverso do quadrado. O espectro resultante de tal potencial é bem conhecido, e suas implicações para a física Efimov são discutidas em (BRAATEN; HAMMER, 2006). Entendemos um sistema de poucos corpos quando tratamos um problema levando-se em consideração todas as interações entre as partículas, ou seja, olhamos individualmente para cada constituinte do sistema.

1.2 Objetivo

O objetivo deste trabalho é verificar o fator de escala discreto relacionado ao efeito Efimov, que ocorre em sistemas de três corpos próximo ao limite unitário; no qual o valor absoluto do comprimento de espalhamento se aproxima do infinito. Vamos verificar o comportamento do potencial efetivo com a adição de um potencial adicional entre duas partículas pesadas idênticas interagindo com uma partícula leve em um sistema de três corpos do tipo AAB composto por dois bósons pesados idênticos AA e um bóson leve B. Além do sistema ligado (AAB) de três corpos, vamos também considerar o espalhamento de A pelo estado ligado de (AB).

1.3 Motivação do Trabalho

Começando com o trabalho pioneiro de (KRAEMER *et al.*, 2006) com átomos de Cs ultra-frios em 2006, vários experimentos confirmaram as previsões de Efimov medindo as perdas de átomos por recombinação de três corpos através da reação $A + A + A \rightarrow A_2 + A$. O experimento com os átomos heteronucleares foi feito por (BARONTINI *et al.*, 2009). Todos estes experimentos requerem temperatura muito baixa $k_B T \leq \hbar^2/Ma^2$ para um comprimento de espalhamento muito grande para evitar a quebra de estados ligados de dois corpos. Por exemplo, para átomos Césio, foi necessário uma temperatura de $T = 10nK$ para eliminar amplamente os efeitos térmicos.

Os átomos em um gás tendem a formar dímeros de energia mais baixa diretamente para o comprimento de espalhamento $a > 0$. A formação de dímero é possível se um terceiro átomo estiver próximo a uma distância da ordem a . Este problema foi estudado em um gás de átomos idênticos com densidade numérica n , enquanto se observa perdas atômicas em condensados de Bose-Einstein.

Deixe o número de recombinações de três corpos por unidade de volume por unidade de tempo ser denotado por v_{rec} , que é proporcional a $n^2(\sigma v)(na^3)$. Aqui $n^2(\sigma v)$ é a probabilidade de dois átomos estarem no volume de interação (σv), onde σ é a seção transversal de espalhamento elástico e v é a velocidade relativa entre os dois átomos. A probabilidade de encontrar um terceiro átomo dentro de uma distância a é na^3 . Porque $v = \hbar k/m \simeq \hbar/(ma)$, e $\sigma \propto a^2$, nós obtemos

$$v_{rec} = C(a)n^3 \left(\frac{\hbar}{m} a^4 \right) \quad (1.4)$$

onde m é a massa de cada átomo e $C(a)$ é uma constante adimensional. A variação de $C(a)$ com o comprimento de espalhamento a exhibe a emergência de um trímero de Efimov (negativo a) e sua posterior dissolução para dímero mais átomo (positivo a), veja a Fig.(2.1). Ele foi calculado a partir de teoria. O comprimento de recombinação (a cordenada da Fig.1), é definido como $\rho_3(2\sqrt{3}C(a))^{1/4}a$, onde o fator numérico é incluído para levar em conta a massa reduzida do trímero, e o fato de que três átomos são perdidos para cada trímero.

A maior penetração da barreira permite que o sistema relaxe para um estado de dímero profundamente ligado (a partir do potencial interatômico), com o excesso de energia sendo levado pelo terceiro átomo. O pico ρ_3 no lado negativo está em $a = -850a_0$, onde a_0 é o raio de Bohr. O próximo pico deve estar no valor de um que é 22,7 vezes maior, isto é, $a = -19,295a_0$, que está fora da faixa de observação experimental. No entanto, estes múltiplos picos foram observados em experimentos posteriores. Apesar de múltiplos picos

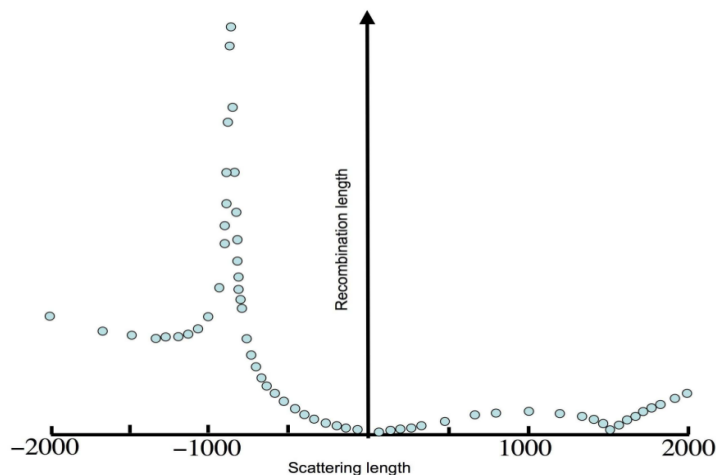


FIGURA 1.2 – Adaptada da figura 4 (BHADURI *et al.*, 2011). Os círculos sólidos são pontos de dados experimentais 5 a 10 nK para a recombinação de três corpos observada: $Cs + Cs + Cs \rightarrow Cs_2 + Cs$. O comprimento de espalhamento é medido em unidades do raio de Bohr a_0 .

de ressonância não terem sido vistos no experimento de (KRAEMER *et al.*, 2006).

1.3.1 Efeito Efimov. Por que é importante? Para quais sistemas?

A física de Efimov não é apenas notável por suas propriedades distintivas, é também parte do que é muitas vezes referido como a universalidade da física de baixas energias. Quando um sistema físico com interação de curto alcance tem uma energia suficientemente baixa, sua função de onda sofre mudanças em muitos detalhes devidos as interações microscópicas que se tornam irrelevantes, e a maioria de suas propriedades pode ser efetivamente descrita por alguns parâmetros. A física é universal, pois pode ser aplicado a muitos sistemas diferentes, independentemente de seus detalhes microscópicos. A física Efimov é um exemplo de tal situação, pois envolve estados em que as partículas, em média, possui separações maiores do que o intervalo de suas interações.

Por exemplo, a invariância de escala discreta dos estados Efimov é uma característica universal que depende apenas de algumas propriedades gerais, como as massas das partículas e as estatísticas quânticas. Como resultado dessa universalidade, a física Efimov aplica-se a praticamente qualquer campo da física quântica, seja física atômica e molecular (BRAATEN; HAMMER, 2007), física nuclear (JENSEN *et al.*, 2004) ou mesmo física de alta energia (HAMMER; PLATTER, 2010).

A universalidade da física Efimov não significa que ela ocorra em qualquer sistema. Isso significa que qualquer sistema que atenda às condições para seu aparecimento exibe os mesmos recursos universais. Estas condições acabam por ser bastante restritivas, razão pela qual demorou cerca de quarenta anos desde a previsão teórica original do efeito

Efimov para obter confirmações experimentais convincentes. De um modo geral, o efeito Efimov requer interações de curto alcance. Tais interações são raras, porque requerem um estado ligado ou virtual para existir acidentalmente logo abaixo do limiar do espalhamento de duas partículas.

Essa situação acaba sendo comum na física nuclear, mas a maioria das partículas nucleares obedece à estatística de Fermi, e a exclusão de Pauli entre os férmions supera a atração de Efimov na maioria dos casos, impedindo o efeito Efimov de ocorrer. Por outro lado, partículas ou excitações bosônicas são comuns em vários campos da física, mas sua interação raramente é ressonante.

No entanto, há agora um número significativo de sistemas físicos nos quais a física de Efimov foi observada, ou espera-se que seja observada. Em particular, com o avanço das técnicas de ressonâncias de Feshbach controláveis em gases atômicos ultra-frios, tornou-se possível cumprir as condições para a ocorrência da física Efimov, e estudá-la extensivamente.

1.3.2 Efeito Efimov em gases ultra frios.

O desenvolvimento de técnicas experimentais para o resfriamento de átomos no regime nano-Kelvin (PETHICK; SMITH, 2002) não só levou à realização de condensados de Bose-Einstein (BEC) e os gases degenerados de Fermi, mas também gerou a grande oportunidade para os estudos de vários fenômenos quânticos de poucos e muitos corpos. Em estudos de física de muitos corpos, por exemplo, a coerência da onda de matéria para um BEC pode ser usada para construir interferômetros para medições de alta precisão.

Para os gases degenerados de Fermi, muito esforço tem sido feito para a compreensão da superfluidez. Moléculas diatômicas fracamente ligadas também foram observadas, e sua dinâmica foi investigada. Nestes estudos, os sistemas que interagem fortemente são especialmente interessantes, uma vez que os sistemas estão longe do regime perturbativo e novos comportamentos físicos são esperados.

Em gases ultrafrios, as interações são caracterizadas pelo comprimento de espalhamento a de dois corpos. Com o rápido desenvolvimento nos últimos anos, os experimentais são capazes de ajustar o comprimento de espalhamento através de uma enorme gama de valores através do uso de ressonâncias de Feshbach. O sistema atômico pode ser facilmente mudado do regime de interação fraca ($|a| \rightarrow 0$) para o regime de interação forte ($|a| \rightarrow \infty$).

Em gases ultra frios, as energias de colisão são extremamente baixas (tipicamente na faixa pico-eV), de forma que as interações são dominadas pelo espalhamento da onda S para $l = 0$, e as ondas parciais mais altas podem ser desprezadas. Neste caso, o

comprimento de espalhamento a da onda S caracteriza totalmente a interação de dois corpos. No regime de interação onde $|a|$ é grande, a energia de ligação é pequena, ou inexistente (virtual ou ressonante). A física Efimov entra em jogo e pode ter um efeito significativo em estudos experimentais, especialmente em sistemas de bósons.

O fenômeno de ressonância, conhecido como "ressonância de Feshbach", fornece aos experimentais a possibilidade única de controlar a interação de dois corpos por meio de um campo magnético externo. As ressonâncias de Feshbach foram previstas para gases ultra frios no início da década de 1990 e foram observadas pela primeira vez em 1998. Desde então, eles se tornaram uma ferramenta essencial para muitas aplicações na física de átomos ultrafrios. Graças a uma ressonância de Feshbach, os experimentalistas não estão restritos a um único valor do comprimento de espalhamento, como estão na física nuclear onde são dados pela natureza.

Em gases ultrafrios, o mecanismo das ressonância de Feshbach funciona para ajustar com precisão as interações de dois corpos nos regimes desejados. A origem física de uma ressonância de Feshbach é o acoplamento do estado de espalhamento atômico a um estado molecular ligado quando ambos os estados se tornam degenerados. A dependência do campo magnético B e, portanto, a sintonização, resulta dos diferentes momentos magnéticos dos dois estados e leva a um comportamento típico, como mostrado na Figura.(2.2) e descrito pela expressão

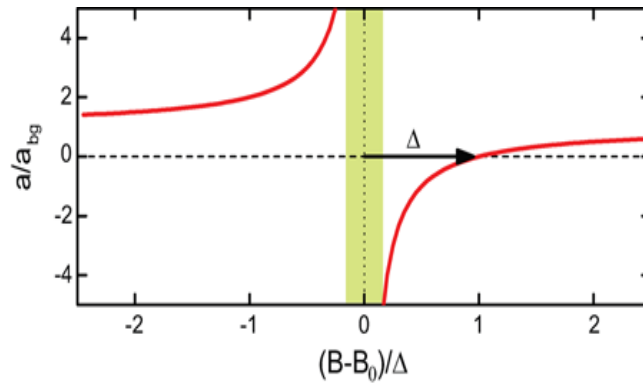


FIGURA 1.3 – Ilustração de uma ressonância de Feshbach. O comprimento de espalhamento a da onda s é plotado como uma função do campo magnético B . A região verde ao redor do centro de ressonância indica a faixa universal que pode ser usada para estudar a física de Efimov. A largura deste intervalo depende das propriedades particulares da ressonância.

$$a(B) = a_{bg} \left(\frac{1 - \Delta}{B - B_0} \right) \quad (1.5)$$

Aqui B_0 e Δ denotam a posição de ressonância e largura, respectivamente, e a_{bg} é o chamado comprimento de espalhamento de fundo. Perto do centro de ressonância, o

comprimento de espalhamento inverso $1/a$ usado no cenário de Efimov Figura.(2.1) é simplesmente proporcional à desintegração magnética $B - B_0$. Os parâmetros das ressonâncias de Feshbach podem variar fortemente, em particular dependendo das propriedades das espécies atômicas. Ressonâncias foram encontradas em diferentes sistemas com o parâmetro de largura Δ variando entre alguns miligauss a centenas de gauss.

Da Fig(1.3) que ilustra uma realização experimental do cenário de Efimov próximo a uma ressonância de Feshbach, duas condições precisam ser satisfeitas. Obviamente, o comprimento do espalhamento deve ser grande comparado a faixa de interação característica. Para átomos neutros, o último é determinado pela interação de van der Waals e é tipicamente encontrado entre $30a_0$ (para átomos de Lítio) e $100a_0$ (átomos de Césio), onde a_0 é o raio de Bohr. A segunda condição é mais sutil e está intrinsecamente relacionada à física de uma ressonância de Feshbach.

Perto do centro da ressonância, existe uma certa faixa onde o problema de interação de dois estados diferentes, (estado de espalhamento e estado molecular ligado) simplifica e a situação pode ser tratada como um potencial de interação molecular única com um estado ligado muito próximo do limite. Nesta faixa "universal", a física é descrita por um parâmetro único. O estado de dímero fracamente ligado para $a > 0$ com uma energia de $-\hbar^2/(ma^2)$ é um exemplo muito importante para essa universalidade.

Algumas ressonâncias tendem a ter um alcance universal próximo da largura Δ . Para outras ressonâncias, no entanto, o alcance universal se estende apenas sobre uma fração muito pequena da largura de ressonância. Ressonâncias amplas com $|\Delta| \gg 1$ gauss são geralmente ressonâncias do primeiro tipo e, portanto, as mais adequadas para sondar a física de Efimov.

1.4 Organização do trabalho

O trabalho consiste no estudo de sistemas de três corpos próximos ao regime universal no qual, as propriedades discutidas dos sistemas quânticos são independentes do modelo usado para descrever a interação entre duas partículas, isto é; o sistema fracamente ligado é muito maior que o tamanho da interação. Uma maneira natural de estudar tais propriedades é descrever a interação do par pesado com os potenciais delta de Dirac, uma vez que a condição para universalidade, onde a é o comprimento de espalhamento e r_0 a alcance do potencial.

Neste trabalho vamos estudar um problema de três corpos via aproximação de Born-Oppenheimer (BO) para um sistema constituído de duas partículas pesadas idênticas e uma leve. A aproximação de BO é usualmente aplicada em sistemas moleculares. Nesta aproximação as partículas pesadas movem-se muito lentamente comparadas ao movimento

da partícula leve, assim, a aproximação deve funcionar já que a energia cinética das partículas pesadas será bem menor que a energia cinética da partícula leve (FONSECA *et al.*, 1979a) para aplicações da aproximação de BO).

Considerando uma interação de contato pontual tipo delta de Dirac (constante no espaço dos momentos) entre a partícula leve e a pesada, e considerando um potencial de interação entre as partículas pesadas, será verificado que temos um aparente adensamento de níveis de energias, pois a razão entre 2 níveis diminui na medida que $m_B \ll m_A$.

Para a física nuclear de poucos corpos, trabalharemos com a física de Efimov utilizada no estudo de sistemas de três bósons idênticos e a estenderemos para sistemas de três corpos tendo um desses massa diferente. O formalismo que descreve esses sistemas nos permite entender a formação de trímeros fracamente ligados.

O formalismo de nosso trabalho consiste na introdução de escalas físicas nas equações de Faddeev para um potencial de alcance finito. O fato de resolvermos as equações de Faddeev usando um potencial separável como o tipo $-\delta$, que consiste numa forma especial de interação não local bastante utilizada em problemas de três corpos, pode nos levar à equação do estado ligado do sistema. Esse método resulta em uma forma simples da equação integral de Faddeev que leva ao efeito Efimov. Através da equação integral obtida para o estado ligado, é possível calcular as energias de ligação de três corpos e posteriormente podemos analisar o espectro de energia.

De posse do sistema de três corpos do tipo AAB temos em muitos trabalhos realizados como em (SHALCHI *et al.*, 2018) onde foi usado a aproximação adiabática para duas partículas pesadas e uma leve, fora considerado que o comportamento assintótico do potencial efetivo entre as partículas pesadas não era afetado, ou seja o potencial de interação entre as partículas era zero. Nossa principal motivação no capítulo 4 é considerar um potencial interação adicional entre as duas pesadas. Outra motivação importante no capítulo 5 foi verificar a existência do fator de escala no caso de espalhamento de uma partícula pesada pelo estado ligado das outras duas.

A organização do trabalho é seguida pela derivação das equações que descrevem a dinâmica de sistemas de dois e três corpos interagindo através de potenciais de variação diferente de zero. Observe que o problema consiste basicamente na solução de um problema de autovalores e autovetores, onde a energia e a função de onda do sistema de três corpos devem ser determinadas. No entanto, a complexidade do problema de três corpos, que não tem uma solução fechada, mesmo no nível clássico, leva o problema a ser descrito para um elaborado conjunto de equações integrais homogêneas acopladas.

No capítulo 2 será introduzido as propriedades gerais dos sistemas de poucos corpos, as equações de Faddeev dos estados de três partículas. É feita a derivação das equações de Faddeev inserindo escalas de energia para um potencial separável de curto alcance do

tipo delta de Dirac. É feita a demonstração analítica do Efeito Efimov.

No capítulo 3 será introduzido o formalismo a partir das funções espectadoras para se fazer a dinâmica de dois e três corpos. Mostrando o modelo de alcance zero e renormalização, notação e dinâmica de três corpos, as equações de estado ligado de três corpos e o formalismo de Faddeev para as equações de estado ligado e espalhamento de três corpos.

No capítulo 4 serão feitos os cálculos para o efeito Efimov na aproximação de Born-Oppenheimer, onde serão mostrados as equações para a aproximação adiabática e as equações dos estados ligados. Serão mostrados os resultados para a interação entre as partículas pesadas devido a partícula leve; ao potencial efetivo será acrescido um potencial de interação gaussiano e um potencial dipolo entre as partículas pesadas.

No capítulo 5 serão mostrados os resultados para o surgimento de um fator de escala discreto de Efimov considerando-se o espalhamento partícula-dímero próximo ao limite unitário para sistemas de três bósons com grande diferença em massa.

As conclusões e perspectivas são discutidas no Capítulo 6.

2 O Estado Ligado de três bósons - Efeito Efimov

2.1 As equações de Faddeev

A maior parte do progresso durante as últimas décadas no problema dos três corpos vem do trabalho de (FADDEEV *et al.*, 1965), que derivou um conjunto de equações integrais para o espalhamento de três partículas que, ao contrário das equações de Lippmann-Schwinger possuem soluções únicas. Para dar uma idéia da estrutura geral das equações de três partículas, daremos um esboço muito breve e simplificado da abordagem de Faddeev.

As equações de Faddeev são frequentemente usadas em formalismos não-perturbativos da mecânica quântica do problema de três corpos. Diferentemente do problema de três corpos na mecânica clássica, o problema quântico de três corpos é uniformemente solúvel. Em geral as equações de Faddeev precisam como entrada um potencial que descreve a interação entre duas partículas individuais.

Na física nuclear a interação nucleon-nucleon, a energia de ligação tem sido estudada pela análise das reações (n,2n) e (p,2p) nos alvos do deutério usando as equações de Faddeev como em (PHILLIPS, 1977). A interação nucleon-nucleon é expandida como uma série de potenciais separáveis como em (SOUZA *et al.*, 2016). A interação de Coulomb entre dois prótons é um problema especial na medida em que sua expansão em potenciais separáveis não converge, mas isso é feito combinado as soluções de Faddeev com soluções de Coulomb de longo alcance em vez de ondas planas.

Potenciais separáveis são aproximações não-locais para um sistema. Os potenciais locais comuns podem ser expressos como somas de potenciais separáveis. Não é esperado que a interação física nucleon-nucleon, que envolve a troca de mésons, seja local ou separável. Começamos por recordar algumas das ideias básicas usadas na teoria de espalhamento de duas partículas. O operador hamiltoniano, H , é dividido em duas partes, energia cinética e potencial H_0 e V . Nós introduzimos os autoestados de H_0 que também são autoestados do momento relativo:

$$H_0|\mathbf{p}\rangle = E_p|\mathbf{p}\rangle = \frac{p^2}{2m}|\mathbf{p}\rangle$$

onde m é a massa reduzida para o sistema de duas partículas. A função de onda plana correspondente no espaço dos momentos é representada

$$\langle \mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

onde a normalização é tal que

$$\langle \mathbf{p}|\mathbf{p}'\rangle = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad e \quad \langle \mathbf{r}|\mathbf{r}'\rangle = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Considere um processo de dispersão que envolve uma transição de um estado inicial com momento \mathbf{p} para um estado final com momento \mathbf{p}' . A amplitude de probabilidade para o transição é dada pela matriz S , que pode ser obtida encontrando-se a sobreposição de dois estados de espalhamento independentes do tempo

$$\langle \mathbf{p}'|S|\mathbf{p}\rangle = \langle \psi_{\mathbf{p}'}^{(-)}|\psi_{\mathbf{p}}^{(+)}\rangle \quad (2.1)$$

Onde os estados $\psi_{\mathbf{p}}^{(+)}$ e $\psi_{\mathbf{p}'}^{(-)}$ correspondem aos estados dependentes do tempo em um determinado tempo de interação. Primeiramente, $\psi_{\mathbf{p}}^{(+)}$ corresponde ao estado atual que evoluiria do estado inicial com o momento \mathbf{p} e, portanto, sua forma assintótica consiste em uma onda plana e uma onda esférica de saída. Segundo, $\psi_{\mathbf{p}'}^{(-)}$ corresponde ao estado atual que evoluiria para o estado final com o momento \mathbf{p}' e, portanto, sua forma assintótica consiste de uma onda plana e uma onda esférica de entrada.

Para a generalização do problema de espalhamento de três partículas. A discussão é simplificada, mas dá uma ideia da estrutura geral das equações de espalhamento de três partículas introduzidas por Faddeev e ampliadas por Sandhas. Considere um sistema de três partículas com hamiltoniano

$$H = H_0 + \sum_{\alpha=1}^3 V_{\alpha} \quad (2.2)$$

onde H_0 é o operador de energia cinética para as três partículas no centro de massa e V_{α} , representa a interação entre partículas; V_1 , por exemplo, é o potencial entre as partículas 2 e 3. Introduzimos autoestados de H_0 que também são autoestados de momento:

$$H_0|\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{q}_\alpha\rangle = E_{pq}|\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{q}_\alpha\rangle = \left(\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{q_\alpha^2}{2\mu_\alpha} \right) |\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{q}_\alpha\rangle \quad (2.3)$$

onde nós exploramos o fato de que o momento das partículas pode ser descrito por qualquer dos pares $(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{q}_\alpha)$ com $\alpha = 1, 2$ ou 3 . Por exemplo, \mathbf{p}_1 é o momento relativo de partículas 2 e 3 e \mathbf{q}_1 o momento da partícula 1 em relação ao par 2-3.

Além disso, m_1 é a massa reduzida para o subsistema 2-3 e μ_1 é a massa reduzida para o movimento relativo da partícula 1 em relação ao par 2-3. Note também que V_1 , é um operador de energia potencial no espaço de três partículas. Estamos relacionado com o operador de energia potencial V_1 no espaço 2-3 por

$$\langle \mathbf{p}'_1, \mathbf{q}'_1 | V_1 | \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1 \rangle = \delta^3(\mathbf{q}'_1 - \mathbf{q}_1) \langle \mathbf{p}_1 | V_1 | \mathbf{p}_1 \rangle$$

A principal diferença entre os problemas de dispersão de duas e três partículas é que neste último existem vários canais distintos que correspondem a autoestados de vários hamiltonianos assintóticos para os quais um ou mais dos termos de interação desaparecem. Existem quatro classes de canais que podem ser rotulados pelo índice 0, 1, 2 ou 3.

O canal (0) corresponde ao movimento livre de todas as três partículas e é descrito pelos autoestados de momento $|\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{q}_\alpha\rangle$ dado pela equação (2.14). O canal (1) correspondente ao movimento livre da partícula 1 e um estado ligado ϕ_n das partículas 2 e 3 com energia de ligação ϵ_n . É descrito pelo auto-estado de $H_0 + V_1$, ou seja,

$$[H_1 + V_1]|\Phi_{1nq}\rangle = E_{1nq}|\Phi_{1nq}\rangle \quad (2.4)$$

onde a energia é dada por

$$E_{1nq} = q_1^2/2\mu_1 - \epsilon_n \quad (2.5)$$

Definições semelhantes são válidas para os sistemas (2) e (3) que correspondem ao movimento livre das partículas 2 e 3, respectivamente. Em analogia com a equação para sistemas de 2 corpos, introduzimos os operadores de espalhamento dos canais

$$\Omega_0(s) = 1 - G(s)(V_1 + V_2 + V_3) \quad (2.6)$$

e

$$\Omega_\alpha(s) = 1 - G(s) \sum_{\beta \neq \alpha} V_\beta \quad (2.7)$$

onde $\alpha = 1, 2$ ou 3 . O operador $G(s) = [H - s]^{-1}$, é o operador de Green para o hamiltoniano total. Desde

$$[H - s]\Omega_0(s) = [H_0 - s] \quad e \quad [H - s]\Omega_\alpha(s) = [H_0 + V_\beta - s]$$

O estado de espalhamento do canal

$$|\Psi_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{(\pm)}\rangle = \Omega_0(E_{pq} \pm i\epsilon)|\mathbf{p}, \mathbf{q}\rangle \quad (2.8)$$

e

$$|\Psi_{\alpha nq}^{(\pm)}\rangle = \Omega_\alpha(E_{\alpha nq} \pm i\epsilon)|\Phi_{\alpha nq}\rangle \quad (2.9)$$

com $\alpha = 1, 2$ ou 3 , são autoestados de H . A matriz S para uma transição é a sobreposição entre os estados de espalhamento apropriados do canal.

Como no caso de duas partículas, podemos construir equações integrais do tipo Lippmann-Schwinger para descrever os estados de espalhamento. No entanto, no caso de três partículas, existem vários estados de espalhamento que podem ter a mesma energia, mas correspondem a canais diferentes. As equações integrais do tipo Lippmann-Schwinger, que tratam cada canal separadamente, têm soluções não exclusivas.

Considerando a idêntidade

$$G_s = G_0(s) - G_0(s)(V_1 + V_2 + V_3)G(s) \quad (2.10)$$

onde $G_0(s) = [H_0 - s]^{-1}$, da equação (2.6) nós encontramos

$$\Omega_0(s) = 1 - G_0(s)(V_1 + V_2 + V_3)\Omega_0(s) \quad (2.11)$$

e substituindo na equação (2.8) nós obtemos a equação de Lippmann-Schwinger para $\Psi_{pq}^{(+)}$

$$|\Psi_{pq}^{(+)}\rangle = |\mathbf{p}, \mathbf{q}\rangle - G_0(E_{pq} + i\epsilon)(V_1 + V_2 + V_3)|\Psi_{pq}^{(+)}\rangle \quad (2.12)$$

2.2 O Efeito Efimov

2.2.1 Descrição do Efeito Efimov

O comportamento dos sistemas de três bósons muda notavelmente de duas para três dimensões, uma vez que a dinâmica e as propriedades dos sistemas quânticos mudam drasticamente quando o sistema é restrito a diferentes dimensões. Dois exemplos importantes que ilustram a influência da dimensão espacial no setor de três corpos são o efeito Efimov (EFIMOV, 1970) e o colapso de Thomas (THOMAS, 1935). Os estados de Efimov, que foram previstos e observados para três bósons idênticos em sistemas 3D (KRAEMER *et al.*, 2006), estão ausentes em 2D mesmo no cenário mais favorável de sistemas desequilibrados em massa (ADHIKARI *et al.*, 1988).

Da mesma forma, Thomas descobriu em 1935 que a energia de um sistema de três bósons idênticos submetidos a interações curtas alcance em 3D cresce sem limites (colapsos) quando o intervalo da interação se aproxima de zero ($r_0 \rightarrow 0$). No entanto, este efeito não foi observado em sistemas 2D ainda. É mostrado na referência (ADHIKARI *et al.*, 1988) que tanto o colapso de Thomas quanto o efeito de Efimov estão matematicamente relacionados à mesma anomalia no kernel das equações de três corpos e ocorrem sempre que $|a|/r_0 \rightarrow \infty$.

Por exemplo, começando com valores finitos e não nulos de $|a|$ and r_0 , o finito e o espectro de três corpos bem comportado entrará em colapso quando $r_0 \rightarrow 0$. Por outro lado, infinitamente muitos estados fracamente ligados aparecerão para $|a| \rightarrow \infty$. Observe que a condição $|a|/r_0 \rightarrow \infty$ é cumprida em ambos os casos.

Um dos trabalhos fundamentais que aborda as correlações existentes entre sistemas de poucos nucleons é o trabalho de Thomas (THOMAS, 1935). Thomas verificou que a energia do trítio tende para infinito quando o alcance da interação de dois corpos (nêutron-próton) tende a zero com uma energia de ligação de dois corpos fixa. Atualmente esse efeito é chamado de colapso Thomas e está intimamente ligado ao acúmulo de estados de três corpos quando a energia de ligação de dois corpos é zero, conhecido como efeito Efimov (EFIMOV, 1970).

O aparecimento de uma infinidade de estados ligados entre duas partículas que não se vinculariam pela simples interação com uma terceira partícula, adicionada ao sistema inicial, é denominado efeito Efimov. Esses estados quânticos chamados de Efimov são constituídos por três corpos fracamente ligados e aparecem no limite em que as energias dos subsistemas de dois corpos na onda S tendem a zero. Esse efeito para um sistema de bósons interagentes com um potencial de curto alcance, mas pode ser evidenciado em sistemas de partículas não idênticas.

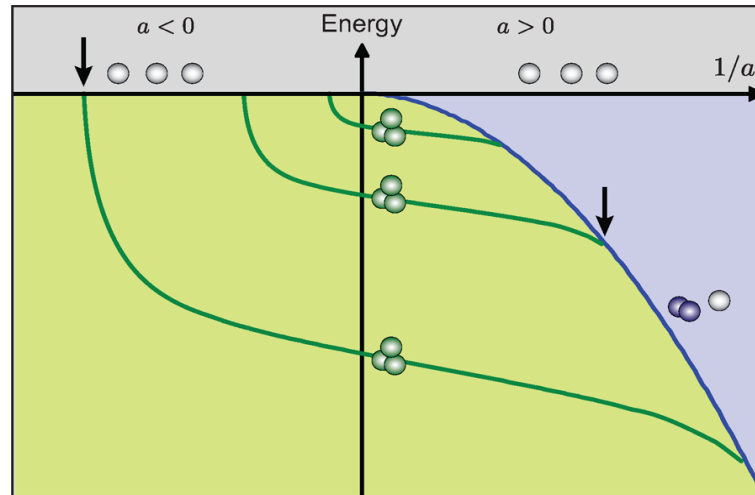


FIGURA 2.1 – Cenário de Efimov: A energia de três corpos é ilustrada em função do inverso do comprimento de espalhamento de dois corpos $1/a$. Existem três diferentes regiões: A região onde se encontra presente três átomos livres $E > 0$ (Cinza), a região que apresenta o sistema de dois átomos ligados e um livre, átomo-dímero, para $a > 0$ e $\hbar^2/(ma^2) < E < 0$ (Azul), e a região de três átomos ligados (Verde). Os estados de Efimov são ilustrados pelas curvas sólidas verdes. Eles surgem no limiar entre as regiões de três átomos livres $a < 0$ e a região dos estados de três átomos ligados, e conectam com a região átomo-dímero para $a > 0$. As setas indicam onde os estados de Efimov se conectam às regiões de três átomos livres e a região átomo-dímero, nestas regiões encontramos os fenômenos de ressonância, ver (FERLAINO; GRIMM, 2010)

Esses estados de três corpos são fracamente ligados com momento angular nulo, caracterizam-se principalmente por possuírem um comprimento de espalhamento de dois corpos, a , que se estende muito além do alcance efetivo do potencial, r_0 . Desta maneira, a conexão entre o efeito Efimov e o colapso Thomas pode ser feita imediatamente observando-se que em ambos os casos é necessário que a relação $\frac{a}{r_0} \gg 1$ seja satisfeita (FREDERICO *et al.*, 1999), justificando a utilização de potenciais do tipo delta de Dirac para a descrição de propriedades desses sistemas.

A diferença é que no colapso Thomas o alcance da interação tende a zero e no efeito Efimov o comprimento de espalhamento tende a infinito. Vale ressaltar que esses efeitos acontecem somente em três dimensões, sendo que para o efeito Efimov ocorrer é necessário que ao menos dois dos subsistemas de dois corpos tenham um comprimento de espalhamento infinito (NIELSEN *et al.*, 2001).

A interação de contato, ou alcance-zero, é o limite de potenciais de curto alcance e os observáveis dos sistemas físicos nos quais as partículas apresentam este tipo de interação dependem principalmente das escalas físicas que determinam os comportamentos assintóticos da função de onda. Nesta situação, aparecem no sistema de três corpos correlações entre os observáveis que independem do modelo do potencial e, portanto, apresentam uma universalidade nas previsões quando as escalas físicas de dois e três corpos são mantidas fixas.

O efeito Efimov foi previsto em 1970 por Vitaly Efimov e embora já tenha sido estabelecido teoricamente há bastante tempo, somente foi observado experimentalmente em 2006, com experimentos utilizando átomos ultrafrios (KRAEMER *et al.*, 2006). O efeito Efimov somente existe em um espaço com dimensões entre 2 e 4 ou, mais precisamente, entre 2.3 e 3.8 (NIELSEN *et al.*, 2001), logo a única dimensão inteira na qual os efeitos ocorrem é $D=3$. Além disso, para obtermos o efeito Efimov ao menos dois dos subsistemas de dois corpos devem ter um comprimento de espalhamento infinito.

Efimov percebeu que quando $a \rightarrow \pm\infty$ ou da mesma maneira $E_2 \rightarrow 0$ temos o aparecimento de infinitos estados ligados de três corpos com energia $E_3^n (n = 0, 1, \dots, \infty)$. Esses estados ligados resultam do aparecimento de um potencial efetivo proporcional a $1/\rho^2$ (FONSECA *et al.*, 1979b), onde ρ^2 é o hiper-raio do sistema de três corpos definido pela soma do quadrado das distâncias entre os bósons. No limite em que $E_2 = 0$, as razões das energias de ligação e dos hiper-raios quadráticos médios dos sucessivos estados de três corpos satisfazem às seguintes constantes universais:

$$\frac{E_3^{(n+1)}}{E_3^n} \rightarrow \frac{1}{22.7^2} \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.13)$$

e

$$\frac{\sqrt{\langle \rho^2 \rangle^{(n)}}}{\sqrt{\langle \rho^2 \rangle^{(n+1)}}} \rightarrow \frac{1}{22.7} \quad (2.14)$$

onde $n = 0$ indica o estado fundamental e ρ é o hiper-raio, $\rho^2 = r_{12}^2 + r_{13}^2 + r_{23}^2$ com $|r_{12}| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$. Estas constantes não dependem da forma do potencial de curto alcance.

2.2.2 A universalidade em sistemas de três bósons idênticos

A situação mais simples para a qual a física Efimov ocorre, é quando três bósons idênticos interagem através de um potencial de curto alcance como podemos ver em (NAIDON; ENDO, 2017). Consideramos partículas bosônicas idênticas de massa m , com sem grau interno de liberdade, interagindo através de interações de curto alcance de dois corpos (e possivelmente de três corpos). Aqui, interações de curto alcance significam que os potenciais de interação decaem mais rápido que $1/r^3$, onde r é a separação entre duas partículas.

Nesta situação, existe uma separação c , chamada de intervalo de interação, além do qual o movimento relativo de duas partículas é quase livre. É nesta região assintoticamente livre onde a energia das partículas é puramente cinética que o efeito Efimov tem suas raízes, e é por isso que é universal. Embora o movimento relativo de duas partículas esteja livre

nesta região, cada onda parcial angular da função de onda $\psi(\mathbf{r})$ descrevendo o movimento relativo de dois corpos tem uma mudança de fase δ_l em relação à função de onda não interagente, como um resultado das partículas interagindo em uma separação mais curta. Nomeadamente, na expansão de onda parcial de $\psi(\mathbf{r})$,

$$\psi(\vec{r}) = \psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f_l(r)}{r} P_l(\cos \theta) \quad (2.15)$$

onde P_l são os polinômios de Legendre, a componente de onda parcial $f_l(r)$ tem a forma,

$$f_l(r) = \begin{cases} \text{complicado,} & \text{para } r \leq c \text{ (interação)} \\ \propto \sin(kr - l\frac{\pi}{2} + \delta_l), & \text{para } r \gg c \text{ (região livre)} \end{cases} \quad (2.16)$$

onde k é o número de onda relativo entre as duas partículas. Na ausência de interação, a mudança de fase $\delta_l = 0$ (não ocorre espalhamento). Pelo contrário, a interação quanto mais forte pode induzir é $\delta_l = \pi/2$ (modulo π).

A física de Efimov surge quando a interação de dois corpos é quase ressonante na onda parcial da onda S ($l = 0$), o que significa que o deslocamento de fase δ_0 da onda S está próximo de $\pi/2$ (módulo π).

Derivação da interação Efimov: Para três bósons localizados em \vec{x}_1, \vec{x}_2 e \vec{x}_3 , pode-se eliminar o centro de massa, e o sistema pode ser descrito por dois vetores, chamados coordenadas de Jacobi:

$$\vec{r}_{ij} = \vec{x}_j - \vec{x}_i \quad (2.17)$$

$$\vec{\rho} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\vec{x}_j - \frac{\vec{x}_i + \vec{x}_j}{2} \right) \quad (2.18)$$

onde (i, j, k) devem ser escolhidos entre $(1, 2, 3)$. Existem, portanto, três conjuntos de coordenadas Jacobi possíveis, mostrados na figura (2.2), que são relacionados como segue:

$$\vec{r}_{23} = -\frac{1}{2}\vec{r}_{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\rho}_{12,3} \quad (2.19)$$

$$\vec{\rho}_{23,1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{r}_{12} - \frac{1}{2}\vec{\rho}_{12,3} \quad (2.20)$$

$$\vec{r}_{31} = -\frac{1}{2}\vec{r}_{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\rho}_{12,3} \quad (2.21)$$

$$\vec{\rho}_{31,2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{r}_{12} - \frac{1}{2}\vec{\rho}_{12,3} \quad (2.22)$$

Escolhendo um conjunto de coordenadas de Jacobi, a função de onda de três corpos independente do tempo satisfaz a equação de Schrodinger livre com energia total $E = \hbar^2 k^2 / 2m$

$$(-\nabla_{r_{12}}^2 - \nabla_{\rho_{12,3}}^2 - k^2)\Psi = 0 \quad (2.23)$$

Por causa da simetria da troca bosônica, a função de onda Ψ pode ser decomposta da seguinte forma:

$$\Psi = \chi(\vec{r}_{12}, \vec{\rho}_{12,3}) + \chi(\vec{r}_{23}, \vec{\rho}_{23,1}) + \chi(\vec{r}_{31}, \vec{\rho}_{31,2}) \quad (2.24)$$

onde a função Ψ (conhecida como componente de Faddeev (FEDOROV; JENSEN, 1993)) satisfaz a equação:

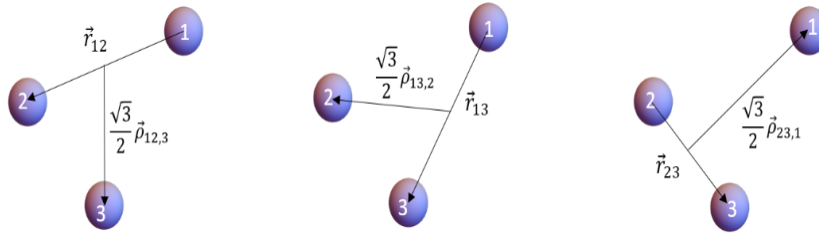


FIGURA 2.2 – Os três conjuntos de coordenadas de Jacobi descrevem as posições relativas de três partículas idênticas.

e depois de algumas manipulações para a função Ψ usando as coordenadas de Jacobi, pode ser consultada em (NAIDON; ENDO, 2017), logo para a equação (2.24) encontramos

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - k^2 \right) \chi_0(r, \rho) = 0 \quad (2.25)$$

e a condição limite para $r \rightarrow 0$, pode-se finalmente realizar uma transformação das coordenadas (r, ρ) para as coordenadas polares (R, α) conhecidas como coordenadas hipersféricas:

$$r = R \sin \alpha \quad (2.26)$$

$$\rho = R \cos \alpha \quad (2.27)$$

onde R é o hiper-raio satisfazendo

$$R^2 = r^2 + \rho^2 = \frac{2}{3}(r_{12}^2 + r_{32}^2 + r_{31}^2) \quad (2.28)$$

Nestas coordenadas, Obtém-se a equação:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - k^2 \right) \chi_0(R, \alpha) = 0 \quad (2.29)$$

com a condição limite para $a \rightarrow 0$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (\chi_0(R, \alpha)) \right]_{\alpha \rightarrow 0} + \frac{8}{\sqrt{3}} \chi_0(R, \pi/3) = -\frac{R}{a} \chi_0(R, 0) \quad (2.30)$$

O problema torna-se então separável em R e α , para o caso $a \rightarrow \pm\infty$ correspondente ao limite unitário. De fato, neste limite o lado direito da equação (2.30) desaparece e é deixado com uma condição de contorno em $\alpha = 0$ que é independente de R . Assim, pode-se encontrar uma solução de equação (2.29) na forma:

$$\chi_0(R, \alpha) = F(R)\phi(\alpha) \quad (2.31)$$

onde ϕ satisfaz $-\frac{d^2}{d\alpha^2}\phi(\alpha) = s_n^2\phi(\alpha)$ com as condições de contorno para $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi/2$. Isso fornece as seguintes soluções:

$$\phi_n(\alpha) = \sin(s_n(\pi/2 - \alpha)) \quad (2.32)$$

onde s_n é uma solução da equação:

$$-s_n \cos\left(s_n \frac{\pi}{2}\right) + \frac{8}{\sqrt{3}} \sin\left(s_n \frac{\pi}{6}\right) = 0 \quad (2.33)$$

Cada solução rotulada por n constitui uma direção para o movimento hiper-radial. Isto é, para cada solução ϕ_n existe uma função hiper-radial correspondente $F_n(R)$ tal que $F_n(R)\phi_n(\alpha)$ é uma solução da equação (2.29). Satisfaz a equação:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} - \frac{s_n^2}{R^2} - k^2\right) F_n(R) = 0 \quad (2.34)$$

que pode ser escrito como uma equação de Schrodinger unidimensional:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial R^2} + V_n(R) - k^2\right) \sqrt{R} F_n(R) = 0 \quad (2.35)$$

com o potencial hiper-radial,

$$V_n(R) = \frac{s_n^2 - 1/4}{R^2} \quad (2.36)$$

Todas as soluções da equação (2.33) são reais, exceto uma denotada como $s_0 \approx \pm 1.00624i$, que é puramente imaginária. Como resultado, o potencial efetivo de $\propto R^2$ na equação (2.30) é atraente para o canal $n = 0$. Isso está em contraste com o problema de três corpos não interagentes, onde a condição de contorno (2.32) é substituída por $\chi_0(R, \alpha) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$, levando à equação (2.36) com autovalores $s_n = 2(n + 1)$ isso é tudo real. Neste caso, o potencial efetivo $\propto R^2$ da equação (2.44) é repulsivo para todos os n .

Esta repulsão é interpretada como uma barreira centrífuga generalizada devido ao movimento livre de deformação do sistema de três corpos. No problema de interação na unitariedade, no entanto, a direção $n = 0$ leva a uma atração eficaz de três corpos

$$V_0(R) = -\frac{|s_0|^2 + 1/4}{R^2} \quad (2.37)$$

Essa atração inesperada é a base da física Efimov e é chamada de atração Efimov. Pode ser interpretado como o resultado de uma atração mediada entre duas partículas pela troca da terceira partícula.

2.2.3 Espectro de Efimov e o potencial radial

Para três bósons idênticos interagindo em pares por meio de potenciais de curto alcance, Efimov previu um número infinito de estados ligados de três corpos com escala geométrica, quando as interações de dois corpos são ressonantes, isto é, $|a| \rightarrow \infty$. A figura (2.1) (seguindo (FERLAINO; GRIMM, 2010)) vista na subseção (2.2.1), onde descreve o cenário Efimov para as energias de alguns dos estados de três bósons são plotadas como uma função de $1/a$; para $E > 0$ as energias dos três átomos formam um continuum.

Os estados Efimov ligados são mostrados esquematicamente por linhas sólidas, com um fator de escala (razão de autovalores de energia sucessivos) definido artificialmente em 2 em vez de 22.7. Os estados Efimov se separam no lado positivo de um no continuum dímero-átomo dado por $-\hbar^2/(Ma^2) < E < 0$ (veja a curva pontilhada na Fig.(2.1).

O espectro de Efimov para problema dos três corpos, é a assinatura de um potencial central atrativo que cai assintoticamente com a potência quadrada inversa da distância. Sugere-se um potencial de longo alcance de três corpos, observando que, para um positivo grande, o tamanho do dímero é muito grande e a presença de outro átomo, mesmo que muito distante, pode ser detectada pelo dímero. Para um negativo grande, os dois átomos, mesmo que não estejam ligados, estão espacialmente correlacionados em uma distância de ordem $|a|$ em um estado quase ligado.

Para obter a escala geométrica do espectro, é suficiente considerar o problema mais simples de uma única partícula de massa m em um potencial de inverso do quadrado $V(r) = (\hbar^2/2m)\lambda/r^2$, onde λ é um adimensional constante de acoplamento. Classicamente, a equação de movimento neste potencial é invariante de escala sob as transformações contínuas $\mathbf{r} \rightarrow \alpha\mathbf{r}$, e $t \rightarrow \alpha^2t$.

Em mecânica quântica, para $\lambda > -1/4$, não há estado ligado, e a escala contínua de invariância é válida. Um estado de energia zero aparece para $\lambda = -1/4$, e o sistema é anômalo para $\lambda < -1/4$, devido à singularidade de curto alcance do potencial. Uma consequência direta da anomalia para $\lambda < -1/4$ é que não há mais um limite inferior no espectro de energia, e uma regularização é necessária.

Estamos interessados na situação em que o potencial é quadrado inverso apenas para $r > r_c$, onde r_c é considerado como o corte de curta distância. Nós impomos a condição de contorno que as autofunções desaparecem em $r = r_c$, o que resulta em um discreto espectro. A propriedade de escala geométrica, ou seja, que as proporções dos autovalores de energia adjacentes permanecem constantes, é independente de r_c .

Nós escrevemos a equação de Schrodinger no estado-S para $r > r_c$ como

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(s_0^2 + 1/4)}{r^2} \right] u(r) = \frac{2m}{\hbar^2} E u(r), \quad (2.38)$$

onde neste estágio, $s_0^2 \geq 0$ é apenas uma maneira de parametrizar a força de um potencial de inversão do quadrado que é maior que $1/4$. Para estados ligados, definimos $(2m/\hbar^2)E = -\kappa^2$, e exigimos que as funções de onda desapareçam no infinito. Nós obtemos a solução $u(\kappa r) = \sqrt{\kappa r} K_{is_0}(\kappa r)$, onde K_{is_0} é a função modificada de Bessel de terceiro tipo de parte puramente imaginária is_0 . A condição de contorno que $u(\kappa r_c) = 0$ faz κ discreto, tal que $K_{is_0}(\kappa r_0) = 0$, com n um positivo inteiro. Para estados de limite raso tais que $(\kappa_n r_0 \ll 1)$, os zeros da função Bessel $K_{is_0}(\kappa r_0)$ são dados

$$\kappa_n r_c = \exp\left(\frac{-n\pi}{s_0}\right) (2e^{-\gamma}) [1 + O(s_0) + \dots], \quad (2.39)$$

onde γ é a constante de Euler. A equação (2.36) leva ao resultado desejado

$$\frac{E_{n+1}}{E_n} = \exp(-2\pi/s_0), \quad n = 1, 2, \dots \infty \quad (2.40)$$

que é a escala geométrica mencionada anteriormente. Observe que o valor real de E_n é dimensionado como r_c^{-2} , mas o dimensionamento geométrico é válido para os estados superficiais. Observe também que, quando n se torna maior, os estados tornam-se mais rasos, com um número infinito de estados acumulando energia zero.

No problema de três corpos em que três partículas interagem em pares, há seis graus de liberdade após o movimento do centro de massa ser eliminado. Este problema é comumente tratado em coordenadas hipersféricas com uma variável hiperradial R e cinco ângulos.

Para partículas de massa iguais $R = \sqrt{(r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{31}^2)}/\sqrt{3}$. Na aproximação adiabática para R fixo, resolvemos a equação de Schrodinger para as variáveis angulares, obtendo assim um conjunto completo de autovalores adiabáticos $\epsilon(R)$ e os autovalores correspondentes. A solução mostra que no limite ressonante $a \rightarrow \pm\infty$, desprezando o acoplamento de canal.

Para bósons idênticos, $\exp(\pi/s_0) \simeq 22,694$, (isto é, $s_0 \approx 1,00624$), mas, em geral, s_0 depende das proporções de massa. Se a é finito e muito grande, com $|a| \gg r_0$, a interação do inverso do quadrado $\epsilon(R)$ é cortada a uma curta distância da ordem de r_0 e a uma longa distância da ordem de $|a|$. O número de estados de ligados rasos é dado aproximadamente

$$N \simeq \frac{s_0}{\pi} \ln \frac{|a|}{r_0}. \quad (2.41)$$

2.2.4 O modelo de três corpos

Nosso objetivo de obter uma interação do inverso do quadrado no problema de três corpos é melhor se tomarmos duas partículas pesadas idênticas 1 e 2, cada uma com massa M e com uma partícula 3 de massa m , obedecendo proporção de massa $m \ll M$, a forma de um potencial estático de Yukawa surge naturalmente na física nuclear devido à troca de um bóson de massa leve (por exemplo, um pión) entre dois núcleos de massa pesada.

Na física nuclear, o alcance do potencial é determinado pela raiz quadrada da massa da partícula leve; no nosso caso, é a raiz quadrada da energia de ligação do átomo leve que desempenha o papel análogo.

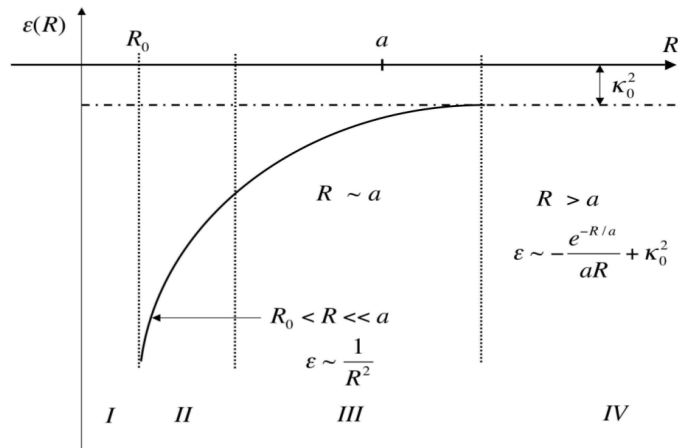


FIGURA 2.3 – O potencial efetivo $\epsilon(R)$ entre as duas partículas de massa pesada que surge na aproximação adiabática devido à interação com a partícula de massa leve. Para $R < R_0$, o potencial interatômico é irrelevante para o efeito Efimov. O comprimento de espalhamento a é marcado no eixo horizontal. Como $a \rightarrow \infty$, a ligação de dois corpos κ_0^2 vai para zero, e $\epsilon(R) \rightarrow R^{-2}$ para todo $R > R_0$. As quatro regiões do potencial $\epsilon(R)$ são discutidas no texto.

Esta situação é ilustrada na Fig.(2.3). Na região I, $R \leq R_0$, onde R_0 é o alcance do potencial interatômico entre as duas partículas pesadas. Nós cortamos o potencial para os estados rasos a essa distância. Na região II há um potencial $1/R^2$, que se estende às distâncias $R \ll a$, portanto, para todos os R como $a \rightarrow \infty$, como no caso (1). A região III é para $R \sim a$, onde ocorre a transição para a forma Yukawa. A região IV contém o comportamento assintótico do potencial.

Como a ligação de dois corpos κ_0^2 vai para zero, o potencial de longo alcance $\epsilon(R)$ assume a forma do quadrado inverso R^{-2} , que não tem escala de comprimento. A partir de considerações dimensionais, porque \hbar^2/M tem as dimensões de EL^2 , um potencial de

inverso do quadrado é a única forma possível na ausência de outras escalas de massa ou constantes de acoplamento.

Da Fig.(2.3), uma previsão relacionada associada ao colapso do sistema de três corpos chamado efeito Thomas também pode ser deduzida. Considere um sistema de dois corpos de alcance r_0 com uma ligação fixa κ_0^2 . Deixe o parâmetro de faixa r_0 ficar menor e menor, ajustando a força do potencial de dois corpos de modo que κ_0^2 permaneça constante.

O efeito Thomas afirma que o sistema de três corpos entrará em colapso com $r_0 \rightarrow 0$, com seu estado limite mais profundo indo para $-\infty$. Na Fig.(2.3), o corte de distância curta R_0 do potencial do inverso do quadrado $\epsilon(R)$ vai para zero quando r_0 vai para zero. Tal comportamento perto da origem causa um colapso na energia de três corpos.

O efeito de Thomas não requer que a forma assintótica do potencial seja inversa ao quadrado, mas está associada à singularidade a curta distância do potencial. Da Eq.(2.49) notamos que o número de estados ligados de três corpos diverge quando a razão $a/r_0 \rightarrow \infty$, o que pode ser feito deixando $a \rightarrow \infty$ com r_0 finito, como no efeito Efimov, ou deixando $r_0 \rightarrow 0$, com a finito, que corresponde ao efeito de Thomas. Ao contrário do efeito Efimov, o efeito Thomas não é passível de verificação experimental porque o alcance do potencial de dois corpos não pode, a partir de agora, ser ajustado para zero.

3 Dinâmica de dois e três corpos

Este capítulo está focado nas propriedades universais dos sistemas quânticos de três corpos, ou seja, quando o tamanho do sistema é muito maior do que o intervalo da interação entre as partículas. Tal problema já é desafiador e interessante por si só, já que não há equivalente clássico.

Uma breve apresentação da teoria quântica de espalhamento para dois corpos com potenciais de alcance zero, é dado no Apêndice A e o foco aqui é apenas nos conceitos e equações que são necessárias para tornar a leitura deste trabalho mais fácil. Mais detalhes são fornecidos nos Apêndices A, B e C. Descrições completas e formais da teoria do espalhamento nos problemas quânticos de três corpos são dados, por exemplo, em (MITRA, 1969).

O ponto principal aqui é a derivação das equações integrais para a matriz de transição de dois e três corpos (matrix-T) quando se assume que as partículas interagem através de potenciais de alcance zero. Embora esses potenciais não sejam realistas, sua importância no estudo dos sistemas quânticos de dois e três corpos é explicada na próxima seção.

3.1 Modelo de alcance zero e renormalização.

Os potenciais de alcance zero da onda S têm uma forma do operador separável.

$$V = \lambda|\chi\rangle\langle\chi| \quad (3.1)$$

e será usado para resolver a matriz T de dois corpos

$$t = V + Vg_0t \quad (3.2)$$

conforme mostrado no Apêndice A.2. Observe que a matriz T , assim como os propagadores livres e completos, dependem explicitamente da energia, ou seja, $t \equiv t(E)$, $g \equiv g(E)$ e $g_0 \equiv g_0(E)$. Para um potencial separável de onda S , a matriz de transição é

$$t(E) = |\chi\rangle\tau(E)\langle\chi| \quad (3.3)$$

com

$$\tau(E) = \left(\lambda^{-1} - \int d^D p \frac{g(p)^2}{E - p^2/2m_{red} + i\epsilon} \right)^{-1} \quad (3.4)$$

onde m_{red} é a massa reduzida de dois corpos e $g(p) \equiv \langle \mathbf{p} | \chi \rangle$ é o fator de forma do potencial V .

Apesar do fato de que Eq.(3.4) vale para qualquer potencial separável genérico que tenha a forma de operador dada na Eq.(3.1), nenhum potencial local tem esta forma além do alcance zero.

O modelo de escala zero da onda S é introduzido através de uma interação de delta de Dirac que também é chamada de interação de contato. Isso significa que as partículas só interagem quando se tocam. Além disso, o potencial de delta de Dirac tem a forma de operador dada pela Eq.(3.1). No espaço das configurações, o elemento da matriz de um potencial local V é escrito como

$$\langle \mathbf{R}' | V | \mathbf{R} \rangle = V(\mathbf{R}) \delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}) \quad (3.5)$$

O potencial delta de Dirac é local e $V(\mathbf{R}) = \lambda \delta(\mathbf{R})$. Assim, Eq.(3.5) se torna

$$\langle \mathbf{R}' | V | \mathbf{R} \rangle = \lambda \delta(\mathbf{R}) \delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}) = \lambda \delta(\mathbf{R}) \delta(\mathbf{R}') \quad (3.6)$$

o que significa que esse potencial também é separável.

No espaço dos momentos, o elemento de matrix do potencial δ -Dirac para um sistema D-dimensional é

$$\langle \mathbf{p}' | V | \mathbf{p} \rangle = \frac{\lambda}{(2\pi)^D} \int d^D R \int d^D R' e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{R}'} e^{-\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}} \delta(\mathbf{R}') \delta(\mathbf{R}) = \frac{\lambda}{(2\pi)^D} \quad (3.7)$$

É possível redefinir $|\chi\rangle \equiv (2\pi)^{D/2} |\chi\rangle$ para que Eq.(3.7) seja igual a λ . Desta forma o fator de forma $\langle \chi | \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{p} | \chi \rangle = g(p)$ é igual ao potencial delta de Dirac ao qual pode ser visto

$$g(p) = \langle \mathbf{p} | \chi \rangle = (2\pi)^{D/2} \int d^D R \frac{e^{-\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}}{(2\pi)^{D/2}} \delta(\mathbf{R}) = 1 \quad (3.8)$$

A forma do fator do potencial δ -Dirac na Eq.(3.8) introduz uma divergência na integração do momento em Eq.(3.4). Em 3 dimensões a divergência pode ser tratada pela introdução de uma escala física no problema (FREDERICO *et al.*, 2012), mas uma outra

forma de tornar a integral finita poderia ser feita pela introdução de um corte. Foi mostrado em (YAMASHITA *et al.*, 2004) que ambos os métodos são equivalentes quando o limite de momentum é deixado infinito.

A escala é introduzida definindo um valor físico para a matriz-T de dois corpos, λ_R , em um ponto de energia subtraído definido por $E = -\mu^2$. A matrix-T se torna

$$\tau_R(-\mu^2) = \lambda_R(-\mu^2), \quad (3.9)$$

onde o subscrito R significa renormalizado, e $\lambda_R(-\mu^2)$ é dado pela condição física.

Inserindo a condição da Eq.(3.9) no elemento de matrix dado pela Eq.(3.4)

$$\tau_R(-\mu^2) = \left(\lambda^{-1} - \int d^D p \frac{1}{-\mu^2 - p^2/2m_{red}} \right)^{-1} = \tau_R(-\mu^2) \quad (3.10)$$

que permite expressar a força λ como

$$\mu^{-1} = \mu_R^{-1}(-\mu^2) + \int d^D p \frac{1}{-\mu^2 - p^2/2m_{red}} \quad (3.11)$$

Uma expressão finita para a amplitude de espalhamento é encontrada substituindo λ , como dado na Eq.(3.11), no elemento da matrix na Eq.(3.4). O resultado é

$$\tau_R(E)^{-1} = \lambda_R^{-1}(-\mu^2) + \int d^D p \left(\frac{1}{-\mu^2 - p^2/2m_{red}} - \frac{1}{E - p^2/2m_{red} + i\epsilon} \right) \quad (3.12)$$

3.1.1 Matriz-T de dois corpos.

Considerando apenas estados ligados, isto é, $E < 0$, a integral no lado direito da Eq.(3.12) para sistemas tridimensionais ($D = 3$) é

$$\tau_R(E)^{-1} = \lambda_R^{-1}(-\mu^2) + \int d^3 p \left(\frac{1}{-\mu^2 - p^2/2m_{red}} - \frac{1}{E - p^2/2m_{red} + i\epsilon} \right) \quad (3.13)$$

onde, como antes, E é a energia, μ^2 o ponto de subtração, m_{red} a massa reduzida e o subscrito R significa renormalizado. Para $E < 0$ (estados ligados), a integral no lado direito da Eq.(3.13) é

$$I(E) = \int d^3p \left(\frac{1}{-\mu^2 - p^2/2m_{red}} - \frac{1}{E - p^2/2m_{red}} \right)$$

$$I(E) = -4\pi^2 m_{red} (\sqrt{2m_{red}|E|} - \sqrt{2m_{red}\mu^2}). \quad (3.14)$$

Para o caso 3D, o ponto de subtração é escolhido como a energia de ligação de dois corpos, ou seja, $-\mu^2 = E_B$ e Eq.(3.14) também mantém no caso 3D, ou seja, $\lambda_R^{-1}(E_B) = 0$. Então, deixando o subscrito R, a matriz-T de dois corpos para sistemas 3D é dada por

$$\tau(E)^{-1} = -2\pi^2 (2m_{red})^{3/2} (\sqrt{|E|} - \sqrt{E_B}) \quad (3.15)$$

que será usado no cálculo das propriedades dos sistemas de três corpos em 3D.

3.2 Notação e dinâmica de três corpos.

O sistema consiste em três partículas distinguíveis de massas m_α , momento k_α e interações em pares v_α , onde $\alpha = A, B, C$ rotula as partículas (A,B,C) e a notação do potencial é tal que v é a interação entre as partículas B e C. A equação de autovalor para o Hamiltoniano

$$(H_0 + V)\Psi = E\Psi, \quad (3.16)$$

NOTamos os estados nas regiões discreta ($E < 0$) e contínua ($E > 0$). O potencial dado pelos termos de dois corpos é $V = v_A + v_B + v_C$ e os propagadores livres e completos são dados respectivamente por

$$G_0(Z) \equiv \frac{1}{Z - H_0} \quad e \quad G(Z) \equiv \frac{1}{Z - H} \quad (3.17)$$

com $H = H_0 + V$. O hamiltoniano livre, no sistema do laboratório, é dado pela soma das energias cinéticas individuais das partículas e é escrito como

$$H_0 = \sum_{\alpha=A,B,C} \frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} \quad (3.18)$$

Um conjunto de coordenadas de Jacobi e o momento conjugado canônico, que são

mostrados na Fig.B.1 no apêndice B, são úteis quando se lida com problemas de três corpos, já que o movimento do CM é separado. Neste caso, o Hamiltoniano livre torna-se

$$H_0 = \frac{p_\alpha^2}{2m_{\beta\gamma}} + \frac{q_\alpha^2}{2m_{\beta\gamma,\alpha}} + \frac{Q^2}{m_\alpha + m_\beta + m_\gamma} \quad (3.19)$$

onde $\mathbf{Q} = \sigma_\alpha \mathbf{k}_\alpha$ é o momento do CM. Tendo em conta o quadro da partícula α em relação ao CM do par (β, γ) , \mathbf{q}_α é o momento da partícula α em relação ao CM do par, \mathbf{p}_α é o momento relativo do par, $m_{\beta\gamma}$ é a massa reduzida do par e $m_{\beta\gamma,\alpha}$ é a massa reduzida de três corpos. O momento relativo e as massas reduzidas são dadas por

$$\mathbf{q}_\alpha = \frac{m_\beta + m_\gamma}{m_\alpha + m_\beta + m_\gamma} \left[\mathbf{k}_\alpha - \frac{m_\alpha}{m_\beta + m_\gamma} (\mathbf{k}_\beta + \mathbf{k}_\gamma) \right] \quad (3.20)$$

$$\mathbf{p}_\alpha = \frac{m_\gamma \mathbf{k}_\beta - m_\beta \mathbf{k}_\gamma}{m_\beta + m_\gamma} \quad (3.21)$$

$$m_{\beta\gamma} = \frac{m_\beta m_\gamma}{m_\beta + m_\gamma}, \quad (3.22)$$

$$m_{\beta\gamma,\alpha} = \frac{m_\alpha (m_\beta + m_\gamma)}{m_\alpha + m_\beta + m_\gamma} \quad (3.23)$$

com $(\alpha\beta\gamma)$ como permutações cíclicas de (A, B, C) (consulte o Apêndice B para obter mais detalhes sobre o momento relativo de Jacobi). Também é útil especificar uma notação de operador, em que todos os operadores de dois corpos são representados com letras, isto é, v_α, g_0 e operadores de três partículas são representados por capital letras, isto é, H, V .

3.2.1 Matriz-T de três corpos.

O operador de transição de três corpos é escrito como

$$T(E) = V + VG(E + i\epsilon)V \quad (3.24)$$

Esse é o análogo formal da matriz T de dois corpos na Eq.(3.2). Além disso que o operador na Eq.(3.24) não está diretamente relacionado a seção de choque de espalhamento, como no caso de dois corpos, as relações em Eq.(3.2) também segure e leia

$$T(E) = V + VG_0(E + i\epsilon)T(E) = V + T(E)G_0(E + i\epsilon)V \quad (3.25)$$

Os componentes de Faddeev da matriz T de três corpos (ver (FADDEEV *et al.*, 1965))

$$T_\alpha(E) = v + vG_0(E + i\epsilon)T(E) \quad (3.26)$$

e desde que $V = v_A + v_B + v_C$, o operador de transição da Eq.(3.25) pode ser escrito em termos dos componentes dados pela Eq.(3.26) como

$$T(E) = T_A(E) + T_B(E) + T_C(E) \quad (3.27)$$

inserindo Eq.(3.27) de volta em Eq.(3.26) resulta em um sistema de equações acopladas, ao qual pode ser escrita em forma de matriz

$$\begin{pmatrix} T_A \\ T_B \\ T_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_A & v_A & v_A \\ v_B & v_B & v_B \\ v_C & v_C & v_C \end{pmatrix} G_0 \begin{pmatrix} T_A \\ T_B \\ T_C \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Isolando a componente T_A em Eq.(3.41) resulta na

$$(1 - v_a G_0)T_A = v_A + v_A G_0(T_B + T_C), \quad (3.29)$$

ao qual multiplicado por $(1 - v_a G_0)^{-1}$ da esquerda

$$T_A = t_a + t_A G_0(T_B + T_C), \quad (3.30)$$

onde a relação $t_A = [1 - v_A G_0]^{-1} v_A$ foi usada na terceira linha. A matriz T renormalizada de dois corpos no sistema abc é dada por

$$t_A \equiv t_A(E) = |\chi_A\rangle \tau_A(E) \langle \chi_A| \quad \text{com} \quad \tau_A(E)^{-1} = -4\pi m_{BC} \ln \left(\sqrt{\frac{-E}{E_{BC}}} \right) \quad (3.31)$$

Finalmente, o conjunto de equações acopladas para as componentes de Faddeev do operador de transição de três corpos são escritos em forma de

$$\begin{pmatrix} T_A \\ T_B \\ T_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_A \\ t_B \\ t_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t_A & t_A \\ t_B & 0 & t_B \\ t_C & t_C & 0 \end{pmatrix} G_0 \begin{pmatrix} T_a \\ T_b \\ T_c \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Essas equações têm a vantagem de conter apenas a matriz T de dois corpos e, conseqüentemente, as energias de dois corpos, em vez do potencial. Além disso, a Eq.(3.32) mostra como a amplitude de espalhamento de dois corpos se conecta com o espalhamento de três corpos. Em detalhe, a equação para um componente de Faddeev do operador de transição é dada por

$$T_A(E_3) = t_A \left(E_3 - \frac{q_A^2}{2m_{BC,A}} \right) \left\{ 1 + G_0(E_3 + i\epsilon) \left[T_B(E_3) + T_C(E_3) \right] \right\} \quad (3.33)$$

onde E_3 é a energia de três corpos e os outros componentes são encontrados por permutação cíclica dos rótulos das partículas.

Observe que o argumento da matriz T de dois corpos na Eq.(3.15) é a energia relativa de dois corpos, E_2^R , que foi substituída por $E_3 - \frac{q^2}{2m_{bc,a}}$ na Eq.(3.46). A energia relativa de dois corpos se conecta com a energia total, E_2^T , através de $E_2^T = E_2^R + \frac{q_2^2}{2(m_b+m_c)}$, onde q_2 é o momento total do par.

No referencial do centro de massa em um sistema de três corpos, isto é, $Q = 0$, a energia total do par é a diferença entre a energia de três corpos E_3 e a energia cinética da terceira partícula, ou seja, $E_2^T = E_3 - \frac{q_1^2}{2m_a}$. Além disso, se $Q = 0$, o momento do par é exatamente o momento da terceira partícula. Em outras palavras, $|\mathbf{q}_1| = |-\mathbf{q}_2| = q$ e a energia relativa de dois corpos como função da energia de três corpos é escrita

$$E_2^R = E_2 - \frac{q^2}{2m_A} - \frac{q_2^2}{2(m_B + m_C)} = E_3 - \frac{q^2}{2m_{BC,A}}, \quad (3.34)$$

como que é exatamente o argumento da matriz T de dois corpos na Eq.(3.46).

3.3 Equações de estado ligado de três corpos

A tentativa ingênua de escrever a equação integral do estado ligado de três corpos em 3D apenas alterando o fator de fase e a matriz T de dois corpos como no caso 2D

falha, uma vez que o núcleo de tal equação é não-compacto quando a interação entre as partículas é descrita para os potenciais de δ -Dirac (ADHIKARI *et al.*, 1988). Isso significa que as equações de três corpos devem ser renormalizadas. Uma discussão completa sobre o método de renormalização é dada em (ADHIKARI *et al.*, 1995), onde uma discussão sobre o método equivalente dentro da teoria de campo eficaz pode ser encontrado.

3.3.1 Renormalização do operador de transição de 3 corpos.

Para deduzirmos a equação subtraída para a matriz-T de três corpos iremos substituir diretamente na equação da matriz-T o potencial escrito em termos da matriz-T definida no ponto de subtração. Veremos que esse método é geral, aplicando-se, também, ao caso de dois corpos. A seguir descreveremos o método das equações subtraídas. A equação de Lippmann-Schwinger para o operador de transição é

$$T_R(E) = V + VG_0(E)T_R(E) = V + T_R(E)G_0(E), \quad (3.35)$$

que por causa da notação a energia é descartada.

O ponto de subtração é escolhido como $E = -\mu_{(3)}^2$ e a matriz de transição neste ponto é $T_R(-\mu_{(3)}^2)$. O potencial V pode ser expresso como

$$V = \left[1 + T_R(-\mu_{(3)}^2)G_0(-\mu_{(3)}^2) \right]^{-1} T_R(-\mu_{(3)}^2), \quad (3.36)$$

onde $T(-\mu_{(3)}^2)$ é definido como a soma das matrizes de transição de dois corpos no ponto de subtração (ADHIKARI *et al.*, 1995), nomeado

$$T_R(-\mu_{(3)}^2) = \sum_{n=A,B,C} t_n(-\mu_{(3)}^2), \quad (3.37)$$

com $t_n(E)$ dado na Eq.(3.31). Inserido o potencial de renormalização (3.36) na Eq.(3.35) dá

$$T_R(E) = T_R(-\mu_{(3)}^2) + T_R(-\mu_{(3)}^2)G_0(E, -\mu_{(3)}^2)T_R(E), \quad (3.38)$$

onde

$$G_1(E, -\mu_{(3)}^2)T_R(E) = G_0(E) - G_0(-\mu_{(3)}^2) = -(\mu_{(3)}^2 + E)G_0(E)G_0(-\mu_{(3)}^2). \quad (3.39)$$

Observe que a forma matricial da Eq.(3.38) é dado na Eq.(3.32), significando que cada componente da matriz de transição de três corpos renormalizada é dado por

$$T_A(E_3) = t_A \left(E_3 - \frac{q_A^2}{2m_{BC,A}} \right) \left\{ 1 + G_1(E_3, -\mu_{(3)}^2) \left[T_B(E_3) + T_C(E_3) \right] \right\} \quad (3.40)$$

que é análogo à Eq.(3.33), onde a única diferença é a propagador de três corpos.

3.3.2 Equações integrais de estado ligado de três corpos.

Partindo da equação subtraída para a matriz-T de três corpos obtida na seção anterior, podemos deduzir a equação homogênea para os estados ligados e virtuais de três corpos idênticos. Nesta seção iremos também calcular as energias das ressonâncias no sistema de três corpos. Mostraremos que partindo-se de uma certa energia para o estado ligado de dois corpos e diminuindo o seu módulo, um estado virtual de três corpos torna-se ligado (YAMASHITA *et al.*, 2002), esse estado ligado torna-se por sua vez uma ressonância quando a energia de dois corpos torna-se virtual.

Partindo-se da equação para a matriz-T podemos inserir nela a seguinte relação de completudeza:

$$1 = \sum_L |\Phi_L\rangle\langle\Phi_L| + \int d^3k |\Psi_k^{(+)}\rangle\langle\Psi_k^{(+)}|, \quad (3.41)$$

onde $|\Phi_B\rangle$ e $|\Psi_k^{(+)}\rangle$ são, respectivamente, a função de onda dos estados ligados e a função de onda de espalhamento das partículas de momento inicial igual a \mathbf{k} . Assim, inserindo a Eq.(3.41) na equação da matriz-T, Eq.(3.24) com $z = E$, temos que:

$$T(E) = V + \sum_L VG(E)|\Phi_L\rangle\langle\Phi_L|V + \int d^3k VG(E)|\Psi_k^{(+)}\rangle\langle\Psi_k^{(+)}|V;$$

$$T(E) = V + \sum_L \frac{V|\Phi_L\rangle\langle\Phi_L|V}{E - E_L + i\epsilon} \int d^3k \frac{V|\Psi_k^{(+)}\rangle\langle\Psi_k^{(+)}|V}{E - \bar{E}_k + i\epsilon} \quad (3.42)$$

onde o propagador completo, $G(E)$, foi escrito explicitamente em termos dos autovalores dos estados ligados, E_L , e dos estados de espalhamento, \bar{E}_k . A equação da matriz-T escrita na forma da Eq.(3.42) é chamada de equação de Low.

Para uma energia próxima a um estado ligado ($E \approx E_B$) temos que a segunda parcela é dominante (devido ao pólo correspondente ao estado ligado), assim:

$$T(E_3) \approx \frac{|\Gamma_L\rangle\langle\Gamma_L|}{E_3 - E_L} = \frac{|\Gamma_L\rangle\langle\Gamma_L|}{E_3 + |E_L|} \quad (3.43)$$

onde a função de vértice para o estado ligado é definida por $|\Gamma_L\rangle = V|\Phi_L\rangle$. Observando a equação da matriz-T para uma componente de Faddeev, Eq.(3.26), vemos que neste caso a eq.(3.43) é escrita como

$$T_A(E_3) \approx \frac{|\Gamma_L\rangle\langle\Gamma_\alpha|}{E_3 + |E_L|}, \quad (3.44)$$

onde $|\Gamma_\alpha\rangle = v_\alpha|\Phi_L\rangle$ e $\langle\Gamma_B| = \langle\Phi_B|V$. Assim, substituindo a Eq.(3.44) na eq.(3.40), temos que:

$$\frac{|\Gamma_A\rangle\langle\Gamma_L|}{E_3 + |E_L|} \approx t_A \left(E_3 - \frac{q_A^2}{2m_{BC,A}} \right) \left[1 + G_0(E_3, -\mu_{(3)}^2) \left(\frac{|\Gamma_B\rangle\langle\Gamma_L|}{E_3 + |E_L|} + \frac{|\Gamma_C\rangle\langle\Gamma_L|}{E_3 + |E_L|} \right) \right] \quad (3.45)$$

Quando a sistema de dois corpos é ligado, $E_3 \rightarrow -|E_L|$ e neste limite Eq.(3.58) temos a equação homogênea:

$$|\Gamma_A\rangle = t_A \left(E_3 - \frac{q_A^2}{2m_{BC,A}} \right) G_0(E_3, -\mu_{(3)}^2) (|\Gamma_B\rangle + |\Gamma_C\rangle). \quad (3.46)$$

Escrevendo a matriz T de dois corpos para um termo de potencial separável, como na Eq.(3.3), será

$$|\Gamma_A\rangle = |\chi_A\rangle \tau_A \left(E_3 - \frac{q_A^2}{2m_{BC,A}} \right) \langle\chi_A| G_0(E_3, -\mu_{(3)}^2) (|\Gamma_B\rangle + |\Gamma_C\rangle) \quad (3.47)$$

onde $\tau(E)$ é o elemento de matriz da matriz-T renormalizada dado por (A.41), e multiplicando Eq.(3.47) por $\langle\mathbf{p}_A, \mathbf{q}_A|$ pela esquerda resulta em

$$\langle \mathbf{p}_A, \mathbf{q}_A | \Gamma_A \rangle = \langle \mathbf{p}_A | \chi_A \rangle \tau_A \left(E_3 - \frac{q_A^2}{2m_{BC,A}} \right) \langle \chi_A, \mathbf{q}_A | G_0(E_3, -\mu_{(3)}^2) (|\Gamma_B\rangle + |\Gamma_C\rangle) \quad (3.48)$$

Para potenciais δ -Dirac, $\langle \mathbf{p}_a, \mathbf{q}_a | \Gamma_a \rangle = \langle \mathbf{p}_a | \chi_a \rangle \langle \mathbf{q}_a | f_a \rangle = g_a(\mathbf{p}_a) f_a(\mathbf{q}_a)$ e a i^{th} componente de Faddeev do estado ligado de três corpos, que satisfaz uma equação integral homogênea, é dada por

$$f_A(\mathbf{q}_A) = \tau_A \left(E_3 - \frac{q_A^2}{2m_{BC,A}} \right) \langle \chi_A, \mathbf{q}_A | G_0(E_3, -\mu_{(3)}^2) (|\chi_B\rangle |f_B\rangle + |\chi_C\rangle |f_C\rangle), \quad (3.49)$$

onde f_A é a função espectadora, que descreve a interação de cada partícula espectadora com o subsistema correspondente de dois corpos. As funções espectadoras f_B e f_C são facilmente encontradas pela permutação cíclica dos rótulos (a, b, c) na Eq. (3.49).

As componentes f_A , f_B e f_C satisfazem um conjunto de três equações integrais homogêneas acopladas, no caso em que a interação entre as partículas é descrita para potenciais de alcance zero. Para três bósons idênticos, apenas uma equação integral homogênea deve ser resolvida, pois $f_A(\mathbf{q}_A) = f_B(\mathbf{q}_B) = f_C(\mathbf{q}_C)$.

Do mesmo modo, para dois bósons idênticos mais uma partícula distinta, há um conjunto de duas equações integrais homogêneas acopladas, uma vez que $f_A(\mathbf{q}_A) = f_B(\mathbf{q}_B) \neq f_C(\mathbf{q}_C)$. Então, as equações acopladas homogêneas para a função do espectador para obter a energia do estado ligado são dadas por

$$f_A(\mathbf{q}_A) = \tau_A \left(E_3 - \frac{q_A^2}{2m_{BC,A}} \right) \langle \chi_A, \mathbf{q}_A | G_0(E_3, -\mu_{(3)}^2) (|\chi_B\rangle |f_B\rangle + |\chi_C\rangle |f_C\rangle) \quad (3.50)$$

$$f_B(\mathbf{q}_B) = \tau_B \left(E_3 - \frac{q_B^2}{2m_{CA,B}} \right) \langle \chi_B, \mathbf{q}_B | G_0(E_3, -\mu_{(3)}^2) (|\chi_A\rangle |f_A\rangle + |\chi_C\rangle |f_C\rangle) \quad (3.51)$$

$$f_C(\mathbf{q}_C) = \tau_C \left(E_3 - \frac{q_C^2}{2m_{AB,C}} \right) \langle \chi_C, \mathbf{q}_C | G_0(E_3, -\mu_{(3)}^2) (|\chi_A\rangle |f_A\rangle + |\chi_B\rangle |f_B\rangle) \quad (3.52)$$

Nota-se que os elementos de matriz nas Eqs.(3.50) a (3.52) tem a estrutura, nomeada

$$\langle \chi_A, \mathbf{q}_A | G_0(E_3, -\mu_{(3)}^2) | \chi_B \rangle | f_B \rangle. \quad (3.53)$$

O termo $G_0(E_3, -\mu_{(3)}^2)$ pode ser separado em dois termos, como na Eq.(3.52). O conjunto de três equações integrais homogêneas acopladas para o estado ligado de um sistema ABC é escrito em uma forma compacta como

$$\begin{aligned} f_A(\mathbf{q}) = & \left[2\pi^2 (2m_{BC})^{3/2} \left(\sqrt{\left(\frac{q^2}{2m_{BC,A}} - E_3 \right)} - \sqrt{E_{BC}} \right) \right]^{-1} \\ & \times \int d^3k \left[\left(\frac{1}{-E_3 + \frac{q^2}{2m_{AC}} + \frac{k^2}{2m_{BC}} + \frac{1}{m_C} \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} - \frac{1}{\mu^2 + \frac{q^2}{2m_{AC}} + \frac{k^2}{2m_{BC}} + \frac{1}{m_C} \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} \right) f_B(\mathbf{k}) \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{-E_3 + \frac{q^2}{2m_{AB}} + \frac{k^2}{2m_{BC}} + \frac{1}{m_B} \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} - \frac{1}{\mu^2 + \frac{q^2}{2m_{AB}} + \frac{k^2}{2m_{BC}} + \frac{1}{m_B} \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} \right) f_C(\mathbf{k}) \right] \end{aligned} \quad (3.54)$$

onde as partículas A, B e C , possuem massas m_A, m_B e m_C respectivamente.

A transformação para coordenadas esféricas na integração de d^3q é feita como,

$$\int_0^\infty d^3q \rightarrow \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\infty q^2 dq \int_0^{2\pi} d\phi.$$

Assim, obtemos as equações integrais acopladas para o estado ligado de três corpos distintos, onde introduzindo $\mathbf{k} = \mathbf{q}' \rightarrow \mathbf{q}' \cdot \mathbf{q} = q' \cdot q \cos \theta$. Escolhendo \mathbf{q} na direção z , dado que o momento angular total é conservado pelo potencial de contato na onda S.

As soluções das Eq.(3.54) com momento angular total zero são estudadas, e como a interação entre as partículas é descrita para os potenciais da ondas S, as funções do espectadoras dependem apenas dos módulos de momento, isto é, $f_A(\mathbf{q}) \equiv f_A(q)$. Então, a integração angular nas equações anteriores é resolvido usando

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta \sin \theta}{1 - z \cos \theta} = \ln \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \quad (3.55)$$

onde a constante z satisfaz $|z| < 1$.

A função de onda para (A, B, C) são permutações cíclicas dos rótulos (α, β, γ) . As soluções numéricas para (3.54) são discutidas no Apence C.

3.4 Formalismo de Faddeev para as equações de três corpos.

O formalismo para tratar os sistemas descritos na seção anterior consiste na introdução de escalas físicas nas equações de Faddeev. Uma das maneiras, a princípio, é resolver as equações de Faddeev usando um potencial separável, uma forma especial de interação não local que já foi muito utilizada em problemas de três corpos em física nuclear. Esse potencial leva a uma simplificação considerável das equações de Faddeev e o efeito Efimov aparece de forma natural no limite da energia.

Na presente subseção, corrigimos nossa notação e incluímos o formalismo padrão para o espalhamento elástico de uma partícula A colidindo com um dímero (AB), que é formado pela mesma partícula A com outra partícula B . No formalismo a seguir, estamos sempre que o sistema de três corpos (AAB), assim como os subsistemas (AB) e (AA) estão ligados, de tal forma que podemos tirar vantagem dos dados disponíveis correspondentes como entradas provenientes de diferentes modelos realistas, bem como de considerações experimentais.

As outras energias de ligação de entrada são obtidas de modelos específicos, que será discutido. Em particular, devemos notar a boa concordância entre a maioria dos modelos realistas sobre as outras energias de ligação ao dímero AB , de tal forma que as discrepâncias provenientes dos resultados do modelo são principalmente verificadas para as respectivas energias de três corpos. No formalismo, seguindo (SHALCHI *et al.*, 2017), nós assumimos unidades tal que $\hbar = 1$.

As energias do estado ligado para os dois e três corpos os sistemas são dados por $E_{AA} \equiv -B_{AA}$, $E_{AB} \equiv -B_{AB}$ e $E_3 = -B_3$, respectivamente; com a energia da onda partícula colidindo elasticamente da onda S dado por E_k . A seguir, primeiro recuperamos o formalismo de três corpos do estado ligado, restrito ao caso da onda S quando todos os sub-sistemas estão sendo ligado. Em seguida, introduzindo as condições de contorno apropriadas, estendemos o formalismo para a colisão de partícula-dímero.

3.4.1 Estado ligado de três corpos

A equação acoplada do estado ligado para potenciais separáveis é geralmente escrito em termos das funções do espectador para as partículas A e B , dadas por $\chi_A(\mathbf{q}; E_3)$. Para onda S essas equações acopladas são dadas por

$$\chi_A(q) = \tau_A(q; E_3) \int_0^\infty dk k^2 [K_2(q, k; E_3) \chi_A(k) + K_1(q, k; E_3) \chi_B(k)]$$

$$\chi_B(q) = \tau_B(q; E_3) \int_0^\infty dk k^2 K_1(k, q; E_3) \chi_A(k), \quad (3.56)$$

onde $\chi_A(q) \equiv \chi_A(q; E_3)$ e $\chi_B(q) \equiv \chi_B(q; E_3)$. τ_A e τ_B são respectivamente as matrizes t de dois corpos para os subsistemas AA e AB , com K_1 e K_2 sendo os núcleos apropriados, que será explicitamente dado a seguir de acordo com o tipo de fator de forma considerado para as interações de dois corpos.

Considerando as definições

$$\frac{k_A^2}{2\mu_{A(AB)}} \equiv E_3 - E_{AB}, \quad \frac{k_B^2}{2\mu_{B(AA)}} \equiv E_3 - E_{AA}, \quad (3.57)$$

com $j = A, B$, τ_j, χ_j e a Eq.(3.56) pode ser convenientemente redefinida. Como ambos os subsistemas estão ligados, temos

$$\tau_j(q; E_3) \equiv \frac{\bar{\tau}_j(q; E_3)}{q^2 + |k_j^2|}, \quad \chi_j(q) \equiv \frac{h_j(q; E_3)}{q^2 + |k_j^2|}, \quad (3.58)$$

com

$$h_A(q; E_3) = \bar{\tau}_A(q; E_3) \int_0^\infty dk k^2 \left[K_2(q, k; E_3) \frac{h_A(k; E_3)}{(k^2 + |k_A^2|)} + K_1(q, k; E_3) \frac{h_B(k; E_3)}{(k^2 + |k_B^2|)} \right],$$

$$h_B(q; E_3) = \bar{\tau}_B(q; E_3) \int_0^\infty dk k^2 K_1(k, q; E_3) \frac{h_A(k; E_3)}{(k^2 + |k_A^2|)} \quad (3.59)$$

As expressões para τ_j e kernels $K_{1,2}$ são dadas na seguinte subseção C, considerando o modelo do potencial específico que estamos usando.

3.4.2 Espalhamento partícula-dímero

Para o espalhamento de uma partícula A pelo subsistema de ligação AB , devemos primeiro redefinir a expressão para τ_A dada na Eq.(3.58) (considerando que k_A^2), de tal modo que $\tau_A(q; E_3) \equiv \bar{\tau}_A(q; E_3)/(q^2 - k_A^2 - i\epsilon)$. Em seguida, o formalismo é estendido para obter a amplitude de espalhamento introduzindo a condição limite obrigatória. Para a onda S esta condição é dada por

$$\chi_A(q) \equiv 2\pi^2 \frac{\delta(q - k_i)}{q^2} + 4\pi \frac{h_A(k; E_3)}{q^2 + k_A^2 - i\epsilon}, \quad (3.60)$$

onde k_A é dado pela Eq.(3.58), com $E_3 > 0$ neste caso. Então, as equações acopladas (3.59) são substituídas por

$$h_A(q; E_3) = \bar{\tau}_A(q; E_3) \left\{ \frac{\pi}{2} K_2(q, k; E_3) + \int_0^\infty dk k^2 \times \right. \\ \left. \left[K_2(q, k; E_3) \frac{h_A(k; E_3)}{(k^2 - k_A^2 - i\epsilon)} + K_1(q, k; E_3) \frac{h_B(k; E_3)}{q^2 - k_B^2} \right] \right\}, \quad (3.61)$$

$$h_B(q; E_3) = \bar{\tau}_B(q; E_3) \left\{ \frac{\pi}{2} K_1(q, k; E_3) + \int_0^\infty dk k^2 K_1(q, k; E_3) \frac{h_A(k; E_3)}{(k^2 + k_A^2 - i\epsilon)} \right\} \quad (3.62)$$

3.4.3 Interações de alcance zero e alcance finito com os núcleos correspondentes

Ao usar interações de alcance zero, um corte é necessário regularizar o formalismo, dentro da renormalização precedente. Para isso, nos núcleos, subtração precedente é usada com um parâmetro de regularização μ , de tal forma que os nucleos $K_{1,2}$ e $\bar{\tau}_j$ usados no formalismo é dado por

$$K_{i=1,2}(q, k; E_3) \equiv G_i(q, k; E_3) - G_i(q, k, -\mu_2),$$

$$G_1(q, k; E_3) = \int_{-1}^1 dx \left[E_3 + i\epsilon - \frac{q^2}{m} - \frac{k^2}{2\mu_{AB}} - \frac{kqx}{m} \right]^{-1}$$

$$G_2(q, k; E_3) = \int_{-1}^1 dx \left[E_3 + i\epsilon - \frac{q^2 + k^2}{m} - \frac{k^2}{2\mu_{AB}} - \frac{kqx}{Am} \right]^{-1}, \quad (3.63)$$

$$\bar{\tau}_A(q, E_3) \equiv \frac{\mu_{A(AB)}}{2\pi\mu_{AB}^2} [\kappa_{AB} + \kappa_{3,AB}(E_3)] \quad (3.64)$$

$$\bar{\tau}_B(q, E_3) \equiv \frac{\mu_{B(AA)}}{2\pi\mu_{AA}^2} [\kappa_{AA} + \kappa_{3,AA}(E_3)] \quad (3.65)$$

onde

$$\begin{aligned} \kappa_{AA} &\equiv \sqrt{-2\mu_{AA}E_{AA}}, & \kappa_{AB} &\equiv \sqrt{-2\mu_{AB}E_{AB}} \\ \kappa_{3AA}(E_3) &\equiv \sqrt{-2\mu_{AA} \left[E_3 - \frac{q^2}{2\mu_{B(AA)}} \right]}, \\ \kappa_{3AB}(E_3) &\equiv \sqrt{-2\mu_{AB} \left[E_3 - \frac{q^2}{2\mu_{A(AB)}} \right]}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Para interação de alcance finito, assumimos uma classificação de potencial de Yamaguchi, dado por

$$V_{ij}(p, p') = \lambda_{ij} \left(\frac{1}{p^2 + \gamma_{ij}^2} \right) \left(\frac{1}{p'^2 + \gamma_{ij}^2} \right), \quad (3.67)$$

onde $ij = AA$ ou AB , respectivamente, para os subsistemas AA ou AB de dois corpos. λ_{ij} e γ_{ij} referem-se à força e ao intervalo r_{ij} das respectivas interações de dois corpos. Como na presente abordagem, consideramos apenas ligado (negativo) subsistemas de dois corpos, $E_{ij} = -B_{ij}$, as relações correspondentes para os pontos fortes e intervalos são dadas por

$$\lambda_{ij}^{-1} = \frac{-2\pi\mu_{ij}}{\gamma_{ij}(\gamma_{ij} + \kappa_{ij})^2}, \quad r_{ij} = \frac{1}{\gamma_{ij}} + \frac{2\mu_{ij}}{(\gamma_{ij} + \kappa_{ij})^2}. \quad (3.68)$$

Nesse caso, $K_{1,2}$ e $\bar{\tau}_j$ são exemplificados em (SHALCHI *et al.*, 2018) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} K_1(q, k; E_3) &= \int_{-1}^1 dx \left[q^2 + \frac{k^2}{4} + qkx + \gamma_{AA}^2 \right]^{-1} \\ &\times \left[k^2 + \frac{q^2 A^2}{(A+1)^2} + \frac{2qkAx}{(A+1)^2} + \gamma_{AB}^2 \right]^{-1} \times \left[E_3 + i\epsilon - \frac{q^2}{m} - \frac{k^2}{2\mu_{AB}} - \frac{qkx}{m} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned}
K_2(q, k; E_3) &= \int_{-1}^1 dx \left[k^2 + \frac{q^2}{(A+1)^2} + \frac{2qkx}{(A+1)} + \gamma_{AB}^2 \right]^{-1} \\
&\times \left[q^2 + \frac{k^2}{(A+1)^2} + \frac{2qkx}{(A+1)} + \gamma_{AB}^2 \right]^{-1} \times \left[E_3 + i\epsilon - \frac{(q^2 + k^2)}{2\mu_{AB}} - \frac{qkx}{Am} \right]^{-1}, \quad (3.70)
\end{aligned}$$

$$\bar{\tau}_A(q; E_3) \equiv \frac{\mu_{A(AB)}}{\pi\mu_{AB}^2} \left[\frac{\gamma_{AB}(\gamma_{AB} + \kappa_{AB})^2}{2\gamma_{AB} + \kappa_{3AB}(E_3) + \kappa_{AB}} [\gamma_{AB} + \kappa_{3AB}(E_3)]^2 [\kappa_{AB} + \kappa_{3AB}(E_3)] \right] \quad (3.71)$$

$$\bar{\tau}_B(q; E_3) \equiv \frac{\mu_{B(AA)}}{\pi\mu_{AA}^2} \left[\frac{\gamma_{AA}(\gamma_{AA} + \kappa_{AA})^2}{2\gamma_{AA} + \kappa_{3AA}(E_3) + \kappa_{AA}} [\gamma_{AA} + \kappa_{3AA}(E_3)]^2 [\kappa_{AA} + \kappa_{3AA}(E_3)] \right] \quad (3.72)$$

Em nossa abordagem, os parâmetros da separação das interações são fixadas pelo estado ligado correspondente energias, bem como pelos intervalos efetivos (ao considerar interações de intervalo finito). Finalmente, os observáveis de espalhamento, os deslocamento de fase δ_0 da onda S , a seção de choque σ e parâmetro de absorção η são obtidos usando a amplitude de dispersão na camada $h_A(k; E_3)$, considerando que

$$h_A(k; E_3) = \frac{S_A - 1}{2ik}, \quad S_A = \eta e^{2is_0}, \quad (3.73)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |h_A(k; E_3)|^2, \quad (3.74)$$

onde S_A é a matriz de espalhamento para a onda elástica S e $\eta \leq 1$ é o parâmetro de absorção.

4 Estados ligados para o problema de três corpos

O efeito Efimov é demonstrado em um modelo que consiste em duas partículas pesadas e uma leve quando a interação leve-pesada leva a um estado ligado de dois corpos de energia zero. O modelo é resolvido na aproximação de Born-Oppenheimer, onde os termos pesado e leve têm significado relativo: duas partículas são mais pesadas que a terceira, com a interação leve-pesada vista como um elemento de potencial separável da onda S da forma de Yamaguchi. A situação em que uma partícula é muito mais leve do que as outras é adequadamente tratada na aproximação adiabática, ou seja, a aproximação de Born-Oppenheimer (BO).

Nesta aproximação, as partículas pesadas se movem muito lentamente, enquanto a partícula leve orbita em torno delas. De fato, para a aproximação de BO ser válida, basta considerar que a energia cinética relativa das partículas pesadas é muito menor que a da partícula leve. Uma implementação da aproximação de Born-Oppenheimer para se demonstrar o Efeito Efimov foi apresentada em (FONSECA *et al.*, 1979b), onde o problema de Efimov é resolvido em um modelo analítico. É mostrado que o efeito Efimov está relacionado a uma força efetiva de longo alcance.

Como no capítulo anterior, um sistema de três corpos com interações de curto alcance para massas gerais e forças de interação é considerado. As expressões para a aproximação adiabática são derivadas usando potenciais separáveis de alcance zero, e produzem um potencial adiabático conciso entre as duas partículas pesadas no sistema de partículas leve e pesadas quando a coordenada da partícula leve é integrada.

O potencial adiabático, que é encontrado como a solução de uma equação transcendental, depende da massa e revela um número crescente de estados ligados diminuindo a massa da partícula leve. Uma expressão assintótica para o potencial adiabático é derivada; e mostra-se que esta expressão analítica corresponde fielmente ao potencial adiabático calculado numericamente, mesmo na região não assintótica. O número de estados ligados para um sistema de partícula leve e pesada é estimado como uma função da relação de massa entre as partículas leve-pesada.

4.1 Formalismo para Aproximação Adiabática para o estado ligado

Seja um sistema de três corpos do tipo ABC em que as duas partículas pesadas têm massas m_A e m_B . É considerado que essas partículas pesadas tem movimento lento em relação a leve, e seus centros são separados por uma distância R . A partícula leve tem massa m_C e coordenada r em relação ao centro de massa CM do subsistema das partículas pesadas. A interação entre as partículas é descrita por potenciais em pares de partículas de alcance zero. A notação para o potencial que V_C significa a interação entre as partículas A e B , com V_A, V_B analogamente definida. A configuração do sistema de três corpos é mostrada na Fig.(4.1).

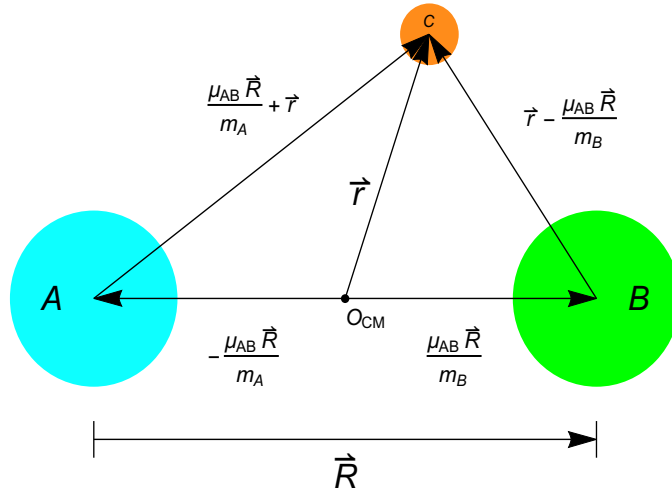


FIGURA 4.1 – Sistema de três corpos com duas massas pesadas m_A e m_B e uma leve m_C .

A equação de Schrodinger com os autovalores do sistema ABC é $H\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = E\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R})$. O Hamiltoniano H é escrito nas coordenadas \mathbf{R}, \mathbf{r} do CM de três corpos como

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu_{AB}} \nabla_{\mathbf{R}}^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu_{C,AB}} \nabla_{\mathbf{r}}^2 + V_A\left(\mathbf{r} - \frac{\mu_{AB}}{m_A} \mathbf{R}\right) + V_B\left(\mathbf{r} + \frac{\mu_{AB}}{m_B} \mathbf{R}\right) + V_C(\mathbf{R}) \quad (4.1)$$

onde as massas reduzida são $\mu_{AB} = \frac{m_A m_B}{(m_A + m_B)}$ e $\mu_{C,AB} = \frac{m_C (m_A + m_B)}{(m_A + m_B + m_C)}$.

A aproximação adiabática diz que é possível dividir a equação de autovalor de três corpos na solução de dois problemas de dois corpos: o movimento da partícula leve é considerado em relação ao sistema das partículas pesadas, e o movimento das partículas pesadas do sistema é separada.

Essas equações de autovalores são válidas sempre que o movimento da partícula leve é mais rápido comparado ao movimento das partículas pesadas, de modo que a dinâmica da

partícula leve pode ser resolvida enquanto as partículas pesadas estão instantaneamente em repouso. A função de onda é decomposta como

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \psi_R(\mathbf{r})\phi(\mathbf{R}), \quad (4.2)$$

onde $\psi_R(\mathbf{r})$ é a função de onda que descreve o estado da partícula leve para \mathbf{R} fixo e $\phi(\mathbf{R})$ é a função de onda pesada do subsistema. A aproximação é válida quando o termo de energia cinética, $-\frac{\hbar^2}{2\mu_{AB}}\nabla_{\mathbf{R}}^2\psi(\mathbf{r}, R)$, é pequeno comparado com os outros termos na Eq.(4.1). Usando a função de onda da Eq.(4.2), a equação de autovalor torna-se

$$\begin{aligned} H\psi_R(\mathbf{r})\phi(\mathbf{R}) &= E\psi_R(\mathbf{r})\phi(\mathbf{R}), \\ \phi(\mathbf{R})\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu_{AB,C}}\nabla_{\mathbf{r}}^2 + V_A\left(\mathbf{r} - \frac{\mu_{AB}}{m_A}\mathbf{R}\right) + V_B\left(\mathbf{r} + \frac{\mu_{AB}}{m_B}\mathbf{R}\right)\right)\psi_R(\mathbf{r}) \\ &+ \psi_R(\mathbf{r})\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu_{AB}}\nabla_{\mathbf{R}}^2 + V_C(\mathbf{R})\right)\phi(\mathbf{R}) = E\psi_R(\mathbf{r})\phi(\mathbf{R}), \\ \frac{\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu_{AB,C}}\nabla_{\mathbf{r}}^2 + V_A\left(\mathbf{r} - \frac{\mu_{AB}}{m_A}\mathbf{R}\right) + V_B\left(\mathbf{r} + \frac{\mu_{AB}}{m_B}\mathbf{R}\right)\right)\psi_R(\mathbf{r})}{\psi_R(\mathbf{r})} \\ &+ \frac{\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu_{AB}}\nabla_{\mathbf{R}}^2 + V_C(\mathbf{R})\right)\phi(\mathbf{R})}{\phi(\mathbf{R})} = E \end{aligned} \quad (4.3)$$

O primeiro termo do lado esquerdo da Eq.(4.3) é uma constante de separação, $\epsilon(R)$, que não depende de \mathbf{r} . Portanto, a equação para partícula leve é

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu_{C,AB}}\nabla_{\mathbf{r}}^2 + V_A\left(\mathbf{r} - \frac{\mu_{AB}}{m_A}\mathbf{R}\right) + V_B\left(\mathbf{r} + \frac{\mu_{AB}}{m_B}\mathbf{R}\right)\right]\psi(\mathbf{r}) = \epsilon(R)\psi(\mathbf{r}), \quad (4.4)$$

e o autovalor, $\epsilon(R)$, desempenha o papel de um potencial efetivo na equação do sistema partículas pesadas. Da Eq.(4.3), esta equação é

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu_{AB}}\nabla_{\mathbf{R}}^2 + V_C(\mathbf{R}) + \epsilon(R)\right)\phi_R(\mathbf{R}) = E\phi_R(\mathbf{R}) \quad (4.5)$$

Devido as características físicas do sistema foi possível, via aproximação BO, separar os movimentos relativos das partículas. A aproximação vai funcionar quando a energia cinética das partículas pesadas for bem menor que a energia cinética da partícula leve.

4.1.1 Cálculo para o potencial efetivo $\epsilon(R)$.

Nesta sessão iremos calcular a constante de separação $\epsilon(R)$ que entra na equação de Schrodinger para as partículas pesadas como um potencial efetivo. Considere a Eq.(4.3) para a partícula leve dada por:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu_{C,AB}} \nabla_{\mathbf{r}}^2 + V_A\left(\mathbf{r} - \frac{\mu_{AB}}{m_B} \mathbf{R}\right) + V_B\left(\mathbf{r} + \frac{\mu_{AB}}{m_A} \mathbf{R}\right) \right] \psi(\mathbf{r}) = \epsilon(R)\psi(\mathbf{r}), \quad (4.6)$$

Assumindo que os potenciais são separáveis e possuem a mesma amplitude para as interações entre a partícula leve e as pesadas, isto é, em uma base $V = \lambda|g\rangle\langle g|$, assim temos

$$\langle \mathbf{r} \pm \frac{\mu_{AB}}{m_{(A,B)}} \mathbf{R} | V | \psi(\mathbf{r}, R) \rangle = \lambda \langle \mathbf{r} \pm \frac{\mu_{AB}}{m_{(A,B)}} \mathbf{R} | g \rangle \langle g | \psi(\mathbf{r}, R) \rangle$$

vemos que

$$\langle \mathbf{r} \pm \frac{\mu_{AB}}{m_{(A,B)}} \mathbf{R} | V | \psi(\mathbf{r}, R) \rangle = \lambda \langle \mathbf{r} \pm \frac{\mu_{AB}}{m_{(A,B)}} \mathbf{R} | g \rangle \langle g | \mathbf{r}' \pm \frac{\mu_{AB}}{m_{(A,B)}} \mathbf{R} \rangle \langle \mathbf{r}' \pm \frac{\mu_{AB}}{m_{(A,B)}} \mathbf{R} | \psi(\mathbf{r}, R) \rangle$$

onde V_A e V_B são respectivamente os potenciais das partículas A e B

$$\langle \mathbf{r} \pm \frac{\mu_{AB}}{m_{(A,B)}} \mathbf{R} | V | \psi(\mathbf{r}, R) \rangle = \lambda \langle \mathbf{r} \pm \frac{\mu_{AB}}{m_{(A,B)}} \mathbf{R} | g \rangle \int d^3 r' \langle g | \mathbf{r}' \pm \frac{\mu_{AB}}{m_{(A,B)}} \mathbf{R} \rangle \langle \mathbf{r}' \pm \frac{\mu_{AB}}{m_{(A,B)}} \mathbf{R} | \psi(\mathbf{r}, R) \rangle$$

$$\langle \mathbf{r} \pm \frac{\mu_{AB}}{m_{(A,B)}} \mathbf{R} | V | \psi(\mathbf{r}, R) \rangle = \lambda g\left(\mathbf{r} \pm \frac{\mu_{AB}}{m_{(A,B)}} \mathbf{R}\right) \int d^3 r' g^\dagger\left(\mathbf{r} \pm \frac{\mu_{AB}}{m_{(A,B)}} \mathbf{R}\right) \psi(\mathbf{r}', R) \quad (4.7)$$

onde $g\left(\mathbf{r} \pm \frac{\mu_{AB}}{m_{(A,B)}} \mathbf{R}\right)$ é o fator de forma do potencial. Substituindo (4.6) em (4.5) e aplicando a transformada de Fourier vamos encontrar

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu_{AB,C}} p^2 \hat{\psi}(\mathbf{p}, R) + \lambda \int d^3 r e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} g\left(\mathbf{r} - \frac{\mu_{AB}}{m_B} \mathbf{R}\right) \int d^3 r' g^\dagger\left(\mathbf{r}' - \frac{\mu_{AB}}{m_B} \mathbf{R}\right) \psi(\mathbf{r}', R)$$

$$+\lambda \int d^3r e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} g\left(\mathbf{r} + \frac{\mu_{AB}}{m_A}\mathbf{R}\right) \int d^3r' g^\dagger\left(\mathbf{r}' + \frac{\mu_{AB}}{m_A}\mathbf{R}\right) \psi(\mathbf{r}', R) = \epsilon(E)\hat{\psi}(\mathbf{p}, R), \quad (4.8)$$

se nós definirmos

$$\begin{aligned} A_{(\pm)} &\equiv \int d^3r' g^\dagger\left(\mathbf{r}' \pm \frac{\mu_{AB}}{m_{(A,B)}}\mathbf{R}\right) \psi(\mathbf{r}', R) \\ &= \int d^3r' g^\dagger\left(\mathbf{r}' \pm \frac{\mu_{AB}}{m_{(A,B)}}\mathbf{R}\right) \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}'} \hat{\psi}(\mathbf{p}', R) \\ A_{(\pm)} &= \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \int d^3r' g^\dagger\left(\mathbf{r}' \pm \frac{\mu_{AB}}{m_{(A,B)}}\mathbf{R}\right) e^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}'} \hat{\psi}(\mathbf{p}', R) \end{aligned} \quad (4.9)$$

e após realizarmos uma mudança de variável do tipo $\mathbf{x}' = \mathbf{r}' \pm \frac{\mu_{AB}}{m_{(A,B)}}\mathbf{R}$, obteremos

$$A_{(\pm)} = \int d^3p' g^\dagger(\mathbf{p}') \frac{e^{\mp i\frac{\mu_{AB}}{m_B}\mathbf{p}'\cdot\mathbf{R}}}{(2\pi)^3} \hat{\psi}(\mathbf{p}', R), \quad (4.10)$$

assim podemos escrever a equação (4.7) como

$$\frac{\hbar^2}{2\mu_{C,AB}} p^2 \hat{\psi}(\mathbf{p}, R) + \lambda \int d^3r e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \left[g\left(\mathbf{r} - \frac{\mu_{AB}}{m_B}\mathbf{R}\right) A_- + g\left(\mathbf{r} + \frac{\mu_{AB}}{m_A}\mathbf{R}\right) A_+ \right] = \epsilon(R) \hat{\psi}(\mathbf{p}, R)$$

rearranjando os termos temos finalmente

$$\frac{\hbar^2}{2\mu_{C,AB}} p^2 \hat{\psi}(\mathbf{p}, R) + \lambda g(\mathbf{p}) \left[e^{-i\frac{\mu_{AB}}{m_B}\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} A_- + e^{+i\frac{\mu_{AB}}{m_A}\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} A_+ \right] = \epsilon(E) \hat{\psi}(\mathbf{p}, R), \quad (4.11)$$

e reagrupando para $\hat{\psi}(\mathbf{p}, R)$

$$\hat{\psi}(\mathbf{p}, R) = \lambda \frac{g(\mathbf{p})}{\epsilon(R) - \frac{\hbar^2}{2\mu_{C,AB}} p^2} \left[e^{+i\frac{\mu_{AB}}{m_A}\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} A_+ + e^{-i\frac{\mu_{AB}}{m_B}\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} A_- \right] \quad (4.12)$$

Multiplicando a equação (4.11) por $g^\dagger(\mathbf{p}) e^{\pm i\frac{\mu_{AB}}{m_B}\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}$ e integrando em $\frac{d^3p}{(2\pi)^3}$ para A_+ e A_- podemos escrever estes termos da seguinte forma

$$A_{\pm} = \lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{[e^{\mp i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} A_{(\mp)} + A_{(\pm)}]}{\epsilon(R) - \frac{\hbar^2}{2\mu_{C,AB}} p^2} \quad (4.13)$$

Verificamos que o sistema possui uma dinâmica onde \mathbf{p} e $-\mathbf{p}$ não modifica a física do problema, assim sendo $A_- = A_+$. Usando essa notação para resolver a equação (4.12) que resultará na solução para o autovalor da equação transcendental:

$$\frac{1}{\lambda} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1 + \cos(\mathbf{p}\cdot\mathbf{R})}{\epsilon(R) - \frac{\hbar^2}{2\mu_{C,AB}} p^2} \quad (4.14)$$

A integral é divergente para uma interação de contato entre a partícula leve e as partículas pesadas. Isto porque o fator de forma para este tipo de interação é dado por $g(\mathbf{p}) = 1$ (veja apêndice A.4.1), além disto, em três dimensões a solução da equação de Schrodinger para um potencial do tipo delta de Dirac apresenta divergências. Mas a divergência da integral (4.14) pode ser resolvida pela eliminação da constante de acoplamento λ em favor da energia de ligação de dois corpos e um polo na matriz de transição T , $T(E_2) = |\chi\rangle\tau(E_2)\langle\chi|$, onde o elemento de matriz τ é

$$\tau^{-1}(E_2) = \lambda^{-1} - \int d^3p \frac{1}{E_2 - \frac{p^2}{2\mu} + i0} \quad (4.15)$$

substituindo (4.14) em (4.15) e supondo que o sistema de dois corpos contenha um estado ligado ($E_2 < 0$) com energia $E_{AB} \equiv -|E_2|$, agora podemos eliminar $i0$, encontramos

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{1 + \cos(\mathbf{p}\cdot\mathbf{R})}{\epsilon(R) - \frac{\hbar^2}{2\mu_{C,AB}} p^2} + \frac{1}{|E_2| + \frac{\hbar^2}{2\mu_{C,AB}} p^2} \right] = 0 \quad (4.16)$$

Os resultados independentes do modelo são naturalmente obtidos com o uso de potenciais de alcance zero e o fator de forma de tal potencial no espaço de momento é uma constante, ou seja, como vimos $g(\mathbf{p}) = 1$. Neste caso, a equação (4.16) é finita e a integração dos dois termos leva à uma equação para o potencial adiabático, e pode ser resolvida analiticamente usando coordenadas esféricas na integração de dp^3 ; seu resultado é uma equação transcendental para o potencial efetivo $\epsilon(R)$ como mostrado abaixo

$$\frac{|\epsilon(R)|}{|E_2|} = \left(1 + \sqrt{\frac{\hbar^2}{2\mu_{C,AB}|E_2|}} e^{-\sqrt{\frac{2\mu_{C,AB}}{\hbar^2} |\epsilon(R)|R}} \right)^2 \quad (4.17)$$

O potencial efetivo $\epsilon(R)$ é exatamente definido como a solução da Eq.(4.16), e é uma ferramenta poderosa para entender sistemas de três corpos com desequilíbrio de massa. No entanto, uma equação transcendental envolvendo uma exponencial não é intuitiva. Na próxima seção, duas expressões limites para a expansão da Eq.(4.17) para R pequenos e grandes serão encontradas.

4.1.2 Formalismo para o sistema de três corpos do tipo AAB

Nesta seção, mostraremos o formalismo usado para resolver o sistema de três corpos formado por duas partículas pesadas idênticas com massas m_A e uma partícula leve com massa m_B , na aproximação de BO. Aqui temos $|E_2|$ o valor da energia de dois corpos dado pela interação entre cada partícula pesada interagindo com a partícula leve $|E_{AB}|$. Vamos considerar o sistema descrito esquematicamente na Fig.(4.2).

O Hamiltoniano é dado por pela equação (4.1), onde as massas reduzidas são dadas por $\mu_{AA} = m_A/2$ e $\mu_{B,AA} = 2m_A m_B / (2m_A + m_B)$, e por questão de simplicidade adotaremos $m = m_B$ e $M = m_A$. Estamos usando uma notação para os potenciais V_A e V_B que denotam, de forma explícita, as interações de dois corpos AB (bóson leve/ bóson pesado) e AA (dois bósons pesados idênticos). Notamos que a medida que m/M tende a zero o potencial efetivo se torna mais atrativo, dando origem à um número maior de estados ligados

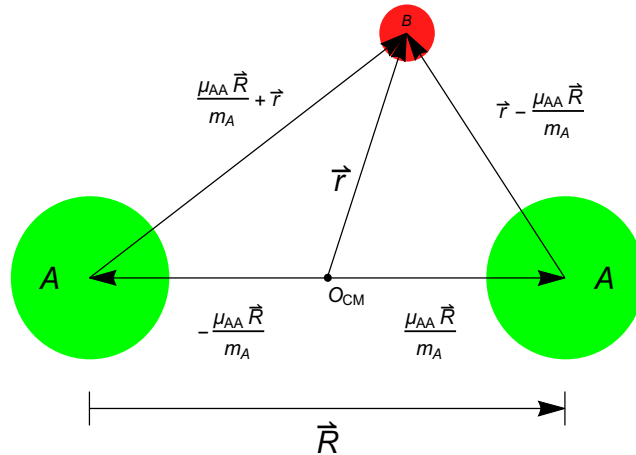


FIGURA 4.2 – Sistema de três corpos formado por duas partículas pesadas idênticas com massa m_A , e uma partícula leve com massa m_B . Estamos considerando a faixa de validade de Born-Oppenheimer onde $m_B/m_A \ll 1$.

Vamos considerar aqui que $m_B \ll m_A$ e obtendo as equações para a partícula leve e a equação para as partículas pesadas assim da mesma forma como na seção (4.1), e as unidades de r e R em picômetros.

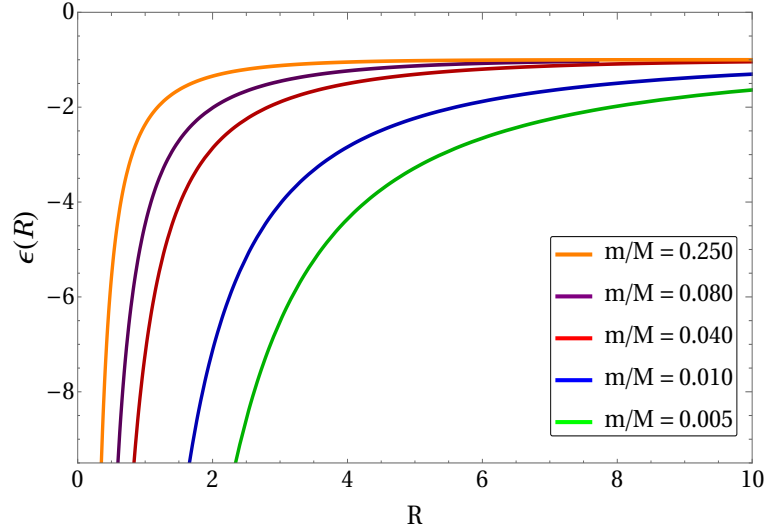


FIGURA 4.3 – O potencial efetivo em função da distância entre as partículas pesadas para diferentes valores de massa m/M , em unidades de ($\hbar = |E_2| = 1$).

O potencial efetivo $\epsilon(R)$ é obtido da equação transcendental (4.17) pode ser resolvida pela razão de massa dada $\mathcal{A} = m_B/m_A$. O potencial efetivo assume formas bastante simples nos limites de R grandes e pequenos. A seguir, investigamos os dois limites e os comparamos com os resultados bem conhecidos para três dimensões.

Regime de grandes distâncias, $R \gg 1$. Para R grande, a partícula leve está ligada a apenas uma das partículas pesadas, de tal forma que o problema de três corpos é reduzido aproximadamente ao problema de dois corpos com $|E_3| \rightarrow |E_2|$. O potencial efetivo pode então ser escrito como $\lim_{R \rightarrow \infty} |\epsilon(R)| = |E_2| + V(R)$, com $V(R) \rightarrow 0$ para $R \rightarrow \infty$. Substituindo este resultado assintótico na Eq.(4.17) temos que o potencial efetivo pode ser escrito como

$$|\epsilon_{R \rightarrow \infty}(R)| = 1 + \frac{2e^{-\sqrt{2\mu}R}}{\sqrt{2\mu}R} + \frac{e^{-2\sqrt{2\mu}R}}{2\mu R^2} \quad (4.18)$$

onde μ é a massa reduzida de três corpos CAB , e o problema em três dimensões, obtém-se um resultado bem conhecido de (FONSECA *et al.*, 1979b). Para a situação onde R se torna maior que o comprimento de espalhamento, temos

$$|\epsilon_{R \rightarrow \infty}(R)| = \frac{2e^{-\sqrt{2\mu}R}}{\sqrt{2\mu}R} \quad (4.19)$$

Para regime de pequenas distâncias, $R \rightarrow 0$ ou o comprimento de espalhamento tendendo ao infinito, nós encontramos o potencial efetivo. Este regime está diretamente relacionado com o aparecimento do efeito Efimov. Como o potencial efetivo diverge a curtas distâncias, pode-se isolar $|\epsilon_{R \rightarrow 0}(R)|$ e escrever

$$|\epsilon_{R \rightarrow 0}(R)| = \frac{1}{2\mu R^2} \quad (4.20)$$

Para o problema em três dimensões temos a reprodução dos resultados como mencionado em (FONSECA *et al.*, 1979b). A força efetiva desempenha aqui um papel central na ocorrência do efeito Efimov para uma dimensão inteira maior que 2.

4.2 Estados ligados para o problema de três corpos.

4.2.1 Função de onda para o partícula leve

A forma de $\epsilon(R)$ foi primeiramente derivada em (LIM; SHIMER, 1980) para dois fatores de forma diferentes de Yamaguchi. Após encontrar uma expressão para o potencial efetivo $\epsilon(R)$, vemos que a atração aumenta quando a razão de massa m_B/m_A diminuiu, como a partícula leve, que gera a atração efetiva, pode ser mais facilmente trocado entre as partículas pesadas e com isso podemos escrever a função de onda da partícula leve no espaço de configurações usando a transformada de Fourier como em (SOUZA *et al.*, 2015).

Devemos notar que os fatores λ e $g(\mathbf{p})$ na Eq.(4.12) podem ser absorvidos na normalização da função de onda, assim como $A_+ = A_-$. A transformada de Fourier da Eq.(4.12) pode ser escrita como

$$\psi(\mathbf{r}, R) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} + \frac{\mu_{AA}}{m_A} \mathbf{R})} + e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \frac{\mu_{AA}}{m_A} \mathbf{R})}}{\epsilon(R) - \frac{\hbar^2}{2\mu_{B,AA}} p^2}, \quad (4.21)$$

substituindo $\epsilon(R)$ pelo módulo temos

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = - \int d^3p \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} + \frac{\mu_{AA}}{m_A} \mathbf{R})}}{|\epsilon(R)| + \frac{\hbar^2}{2\mu_{B,AA}} p^2} - \int d^3p \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \frac{\mu_{AA}}{m_A} \mathbf{R})}}{|\epsilon(R)| + \frac{\hbar^2}{2\mu_{B,AA}} p^2} \quad (4.22)$$

vamos resolver a integral escolhendo um referencial tal que

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = - \int d^3p \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{z}}}{|\epsilon(R)| + \frac{\hbar^2}{2\mu_{B,AA}}p^2} - \int d^3p \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{z}'}}{|\epsilon(R)| + \frac{\hbar^2}{2\mu_{B,AA}}p^2} \quad (4.23)$$

onde $\mathbf{z} = \mathbf{r} + \frac{\mu_{AA}}{m_A}\mathbf{R}$ e $\mathbf{z}' = \mathbf{r} - \frac{\mu_{AA}}{m_A}\mathbf{R}$ são apenas variáveis mudas para facilitar o entendimento da integral, já que apenas é efetuada a integração nos espaços dos momentos. Resolvendo a integral usando coordenadas esféricas em d^3p podemos escrever

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = - \frac{4\pi^2\mu_{B,AA}}{\hbar^2} \frac{e^{-\sqrt{\frac{2\mu_{B,AA}}{\hbar^2}|\epsilon(R)||\mathbf{r} + \frac{\mu_{AA}}{m_A}\mathbf{R}|}}}{|\mathbf{r} + \frac{\mu_{AA}}{m_A}\mathbf{R}|} + e^{-\sqrt{\frac{2\mu_{B,AA}}{\hbar^2}|\epsilon(R)||\mathbf{r} - \frac{\mu_{AA}}{m_A}\mathbf{R}|}}}{|\mathbf{r} - \frac{\mu_{AA}}{m_A}\mathbf{R}|} \quad (4.24)$$

A energia de ligação entre a partícula leve e as pesadas, E_2 , para uma interação alcance zero renormalizada entra como uma entrada no potencial efetivo, $\epsilon(R)$, ver Eq.(4.17). A forma da função de onda dada na Eq.(4.24) pode ser usada para parametrizar a cauda de grandes distâncias da função de onda da partícula leve de qualquer potencial satisfazendo a condição de validade da aproximação de Born-Oppenheimer.

O potencial de curto alcance entre as partículas pesadas e leve é aproximado por uma interação de alcance zero. Este permite uma solução analítica com a função de onda no espaço de coordenadas explicitamente dada na Eq.(4.24). Reescrevendo o argumentos na função de onda e usando $\mu_{AA} = m_A/2$, nós temos

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = - \frac{4\pi^2\mu_{B,AA}}{\hbar^2} \sqrt{b} \left[\frac{e^{-\Omega_+}}{\Omega_+} + \frac{e^{-\Omega_-}}{\Omega_-} \right] \quad (4.25)$$

onde a função de onda é vista como uma função de duas coordenadas e um parâmetro de escala b , isto é,

$$\Omega_{\pm} = \sqrt{b \left(\frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{4} \pm \frac{r}{R} \cos(\theta_{rR}) \right)} \quad \text{onde} \quad b = \frac{2\mu_{B,AA}R^2|\epsilon(R)|}{\hbar^2} \quad (4.26)$$

Assim, a combinação adimensional em b da energia, massa reduzida e distância entre as partículas pesadas determina esta função de onda completamente junto com o tamanho relativo, r/R , e a direção, $\cos(\theta_{rR})$, entre as duas coordenadas relativas, \mathbf{r} e \mathbf{R} e Fig.(4.2).

A função de onda ψ é simétrica em torno de $\cos(\theta_{rR}) = 0$, e tem uma divergência quando seu argumento se aproxima de zero, o que no presente caso ocorre quando $R = 2r$

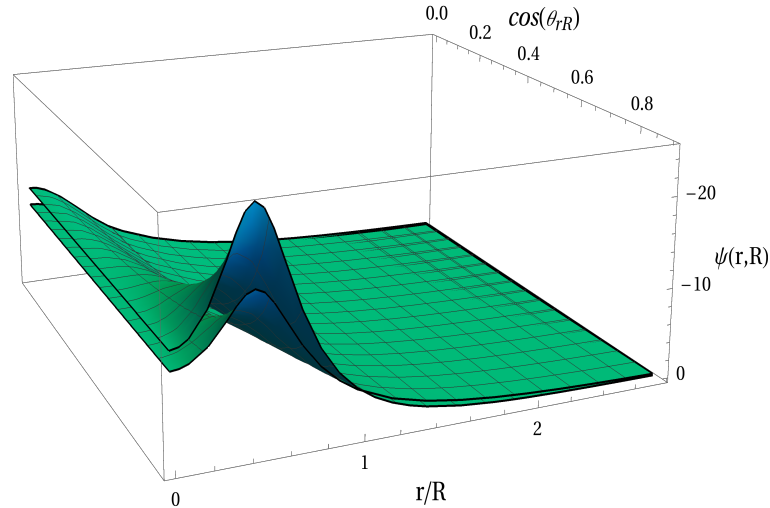


FIGURA 4.4 – A função de onda na Eq.(4.23) como uma função do tamanho relativo, r/R , e a direção, $\cos(\theta_{rR})$, entre as duas coordenadas relativas, \mathbf{r} e \mathbf{R} , ver Fig.(4.2). As coordenadas superior e inferior são, respectivamente, resultados para $b = 1$ e 4. A constante na frente da Eq.(4.25) e fixado como $\frac{4\pi^2 \mu_{B,AA}}{\hbar^2} = 1$.

e $\cos(\theta_{rR}) = \pm 1$. Isto é precisamente quando a partícula leve está no topo de uma das partículas pesadas. Para a atração empregada de curto alcance esta não é uma surpresa, já que a probabilidade é maior em tal situação, como visto na Fig.(4.4).

As duas superfícies para b diferentes mostram como o pico aumenta em torno das partículas pesadas a medida que a energia de ligação de dois corpos ou a distância de partículas pesadas aumenta. A partícula leve torna-se em ambos os casos cada vez mais localizada em torno de uma das partículas pesadas, o efeito de aumentar b é fazer a função de onda mais plana.

As propriedades vistas na Eq.(4.24) é ilustrada na Fig.(4.4) refletem o comportamento universal genuíno para qualquer interação de curto alcance na aproximação BO, desde que as distâncias entre as partículas leves e pesadas sejam muito maiores do que o alcance dos respectivos potenciais. Esta forma analítica da função de onda pode então ser usada como uma condição de contorno ou para parametrizar a cauda de uma função de onda geral.

Analisando a função de onda de Eq.(4.24) para a partícula leve, teremos o comportamento de $\psi(\mathbf{r}, R)$ na Fig.(4.5). Notamos que fixando-se a energia entre a partícula leve e as pesadas $|E_2|$, a distância R e diminuindo a razão de m/M a extremidade da função de onda se estende para distâncias r maiores. O motivo disto é que aumentando a diferença de massa da partícula leve e as pesadas, aumentamos a intensidade do potencial efetivo, para que R e $|E_2|$ se mantenham constantes, a partícula leve tende a se afastar do CM do par pesado.

Da mesma forma analisando a função de onda de Eq.(4.24) mas agora mantendo-se R

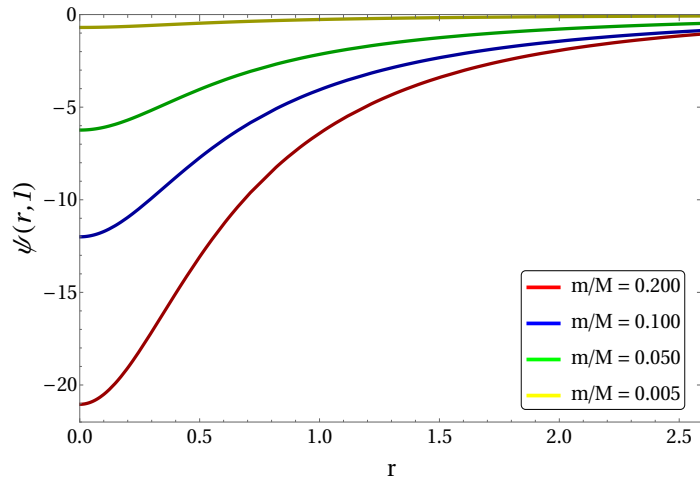


FIGURA 4.5 – Resultados para a função de onda da partícula leve para ângulos $\pi/2$ (ângulos entre \mathbf{r} e \mathbf{R}) e $\hbar = |E_2| = 1$ para $\psi(\mathbf{r}, 1)$ em função de r .

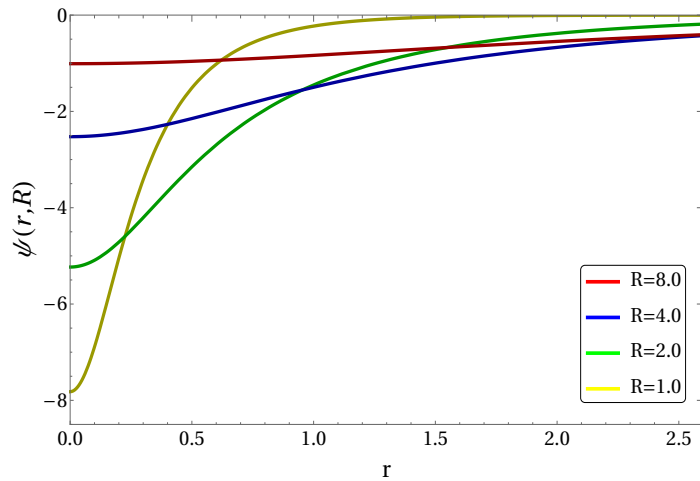


FIGURA 4.6 – Resultados para a função de onda da partícula leve para ângulos $\pi/2$ (ângulos entre \mathbf{r} e \mathbf{R}) e $\hbar = |E_2| = 1$. Resultados para $\psi(r, R)$ em função de r para $m/M=0.05$.

e m/M fixos e aumentando r o sistema evolui no sentido de se desligar. A distância entre as partículas pesadas vai aumentando à medida que a função de onda evolui.

Comportamento semelhante é observado mantendo-se r e $|E_2|$ constantes e variando m/M na Fig(4.7), notamos neste caso que o raio quadrático medio $\langle R^2 \rangle$ vai aumentando, ou seja, a distância entre as partículas pesadas aumenta conforme aumentamos a intensidade do potencial efetivo.

De forma semelhante ocorre quando mantemos r e m/M fixos e aumentamos R na Fig(4.8). O sistema evolui no sentido de se desligar pois aumentado o valor de R a partícula leve tende a se afastar do centro de massa do sistema das duas partículas pesadas.

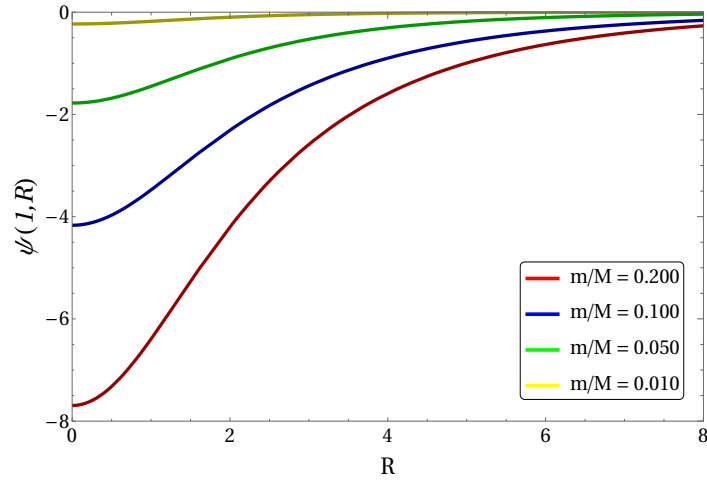


FIGURA 4.7 – Resultados para a função de onda da partícula leve para ângulos $\pi/2$ (ângulos entre \mathbf{r} e \mathbf{R}) e $\hbar = |E_2| = 1$. Resultados para $\psi(1, R)$ em função de R .

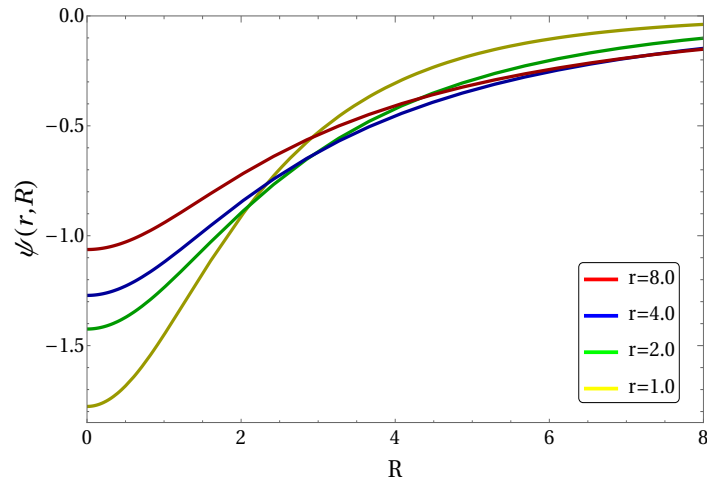


FIGURA 4.8 – Resultados para a função de onda da partícula leve para ângulos $\pi/2$ (ângulos entre \mathbf{r} e \mathbf{R}) e $\hbar = |E_2| = 1$. Resultados para $\psi(r, R)$ em função de R para $m/M=0.05$.

4.2.2 Função de onda para as partículas pesadas

A função de onda para o movimento das partículas pesadas é dada pela Eq.(4.4), onde o operador Laplaciano escrito em coordenadas esféricas é dado por

$$\nabla_R^2 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (4.27)$$

escrevendo $\phi(\mathbf{R}) = \frac{\mathcal{R}(R)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)}{R}$, substituindo a equação do operador laplaciano em coordenadas esféricas na Eq.(4.26) em Eq.(4.4), multiplicando os termos por $R^2 \sin \theta$, dividindo tudo por $\mathcal{R}(R)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ e organizando os termos para agrupar todos os itens dependen-

tes de R e Θ para a esquerda, e depois agrupar o termo dependente de φ para a direita encontramos

$$\begin{aligned} \frac{R^2 \sin^2 \theta}{\mathcal{R}(R)} \frac{\partial^2 \mathcal{R}(R)}{\partial R^2} + \frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) - \frac{2\mu_{AA}}{\hbar^2} [V_B(R) + \epsilon(R) \\ - E(R)] R^2 \sin \theta = \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Esta equação deve ser satisfeita para qualquer combinação de R e θ . Como o lado direito não depende de R e o lado esquerdo não depende de φ , então ambas equações devem ser iguais a uma constante. Vamos definir convenientemente essa constante por m^2 , assim teremos

$$\frac{R^2 \sin^2 \theta}{\mathcal{R}(R)} \frac{\partial^2 \mathcal{R}(R)}{\partial R^2} + \frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) - \frac{2\mu_{AA}}{\hbar^2} [V_B(R) + \epsilon(R) - E(R)] R^2 \sin \theta = m^2 \quad (4.29)$$

e agora isolando a componente R da equação da direita e isolando θ

$$\frac{R^2}{\mathcal{R}(R)} \frac{\partial^2 \mathcal{R}(R)}{\partial R^2} - \frac{2\mu_{AA}}{\hbar^2} [V_B(R) + \epsilon(R) - E(R)] R^2 = \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\sin \theta \Theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) \quad (4.30)$$

onde o termo da esquerda para a variável θ é a equação diferencial generalizada de Legendre. Quando $m = 0$ teremos a equação diferencial de Legendre

$$\frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\sin \theta \Theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) = l(l+1)$$

e agora para a parte radial que conduzirá à função de onda

$$\frac{R^2}{\mathcal{R}(R)} \frac{\partial^2 \mathcal{R}(R)}{\partial R^2} - \frac{2\mu_{AA}}{\hbar^2} [V_B(R) + \epsilon(R) - E(R)] R^2 = l(l+1) \quad (4.31)$$

Rearranjamos os termos podemos escrever a parte radial da função de onda das partículas pesadas como

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu_{AA}} \frac{\partial^2 \mathcal{R}(R)}{\partial R^2} + \left[V_B(R) + \epsilon(R) + \frac{\hbar^2}{2\mu_{AA}} \frac{l(l+1)}{R^2} \right] \mathcal{R}(R) = E_3 \mathcal{R}(R) \quad (4.32)$$

reescrevendo $\mathcal{R}(R) = \frac{Y(R)}{\sqrt{R}}$ e reescalonamento R e $\epsilon(R)$ como na seção anterior, a Eq.(4.32) pode ser reescrita como

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu_{AA}} \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{l(l+1) - 1/4}{R^2} \right) Y(R) + [V_B(R) + \epsilon(R)] Y(R) = E_3 Y(R) \quad (4.33)$$

onde E_3 é a energia dos três corpos $\epsilon(R)$. Estados genuinamente ligados estão presentes quando $E_3 - E_2 \leq 0$, ou equivalentemente $|E_3| \geq |E_2|$, já que estados ligados possuem energias negativas. A equação diferencial (4.33) é resolvida numericamente para estimar o número de estados ligados (N_B) para um sistema com relação de massa μ quando as partículas pesadas interagem entre si.

Nossos resultados anteriores, generalizando o fator de escala de Efimov foram obtidos no limite unitário ideal. No entanto, em experimentos, o efeito de energias finitas está sempre presente. Nesta seção generalizamos o Equação de Schrodinger em três dimensões espaciais para obter o espectro de energia de três corpos.

Cálculo do potencial efetivo para $R \rightarrow \infty$

Conhecendo o potencial efetivo $\epsilon(R)$, vamos estudar inicialmente o seu comportamento em dois limites diferentes. Primeiramente onde a separação entre as duas partículas de maior massa m_A tende ao infinito $R \rightarrow \infty$. Neste caso a partícula leve de massa m_B sente apenas a interação de uma das partículas de maior massa, assim o problema de três corpos se reduz a um problema de dois corpos, onde $|E_3| \rightarrow |E_2|$.

Logo, nós podemos escrever o potencial efetivo como $|\epsilon(R)| = |E_2| + V(R)$, no caso limite onde $R \rightarrow \infty$, e portanto teremos como consequência o valor do potencial $V(R) \rightarrow 0$, substituindo estes resultados na Eq.(4.17) temos

$$\frac{|E_2| + V(R)}{|E_2|} = \left(1 + \sqrt{\frac{\hbar^2}{2\mu_{B,AA}}} \frac{e^{-\sqrt{\frac{2\mu_{B,AA}}{\hbar^2}}(|E_2| + V(R))R}}{\sqrt{|E_2|R}} \right)^2 \quad (4.34)$$

expandindo em $V(R)$ até primeira e segunda ordem respectivamente, e substituindo no potencial efetivo, obtemos para primeira ordem

$$|\epsilon_{R \rightarrow \infty}(R)| = |E_2| + \frac{2s^2(R) + e^{-2s(R)} + 2s(R)e^{-s(R)}}{s^2(R) - s^2(R)e^{-2s(R)} - s(R)e^{-s(R)}} \quad (4.35)$$

onde $s(R) = \sqrt{\frac{2\mu_{B,AA}|E_2|}{\hbar^2}} R$ é uma quantidade adimensional para a distância R entre as partículas pesadas. Podemos notar pela Fig.(4.9) que de fato a equação (4.35) fornecem uma boa aproximação para o potencial efetivo quando $|R| \rightarrow \infty$, pois o valor do potencial efetivo tende ao limite unitário de dois corpos quando $R \rightarrow \infty$.

Além disso, para $R \rightarrow \infty$, o potencial na Eq.(4.35) é de longo alcance rastreado por um fator

m_B , que se torna menos importante para $m_B \rightarrow 0$. Portanto, um número crescente de estados ligados é esperado quando a partícula B é muito mais leve do que as outras, ou seja, $m_B \rightarrow 0$, uma vez que o potencial adiabático se torna mais atraente e menos filtrado neste limite.

Ainda assim, esses estados irão se acumular em $|R| \rightarrow 0$, à medida que a força do potencial similar a Coulomb aumenta, e em $|R| \rightarrow \infty$, onde mais estados são permitidos porque o exponencial se move para distâncias maiores. No entanto, para m_B finito, ainda o número de estados ligados é finito.

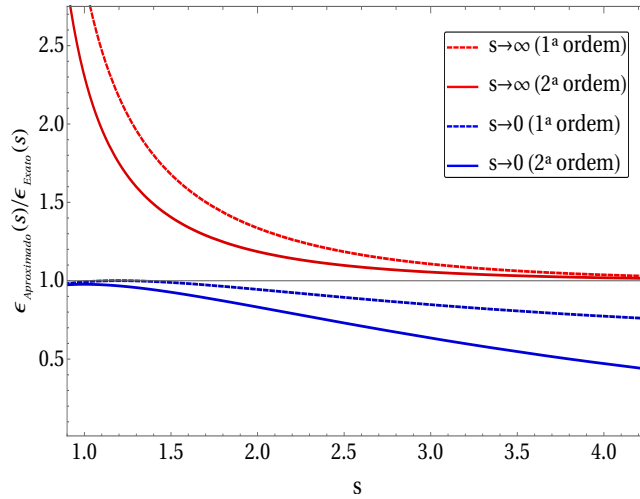


FIGURA 4.9 – Razão $\epsilon_{aproximado}(s)/\epsilon_{exato}(s)$ como função da coordenada adimensional s . As curvas tracejada e sólida (azul) apresentam resultados para $|R| \rightarrow 0$ em primeira e segunda ordem respectivamente, as curvas tracejada e sólida (vermelha) apresentam resultados para $|R| \rightarrow \infty$ em primeira e segunda ordem respectivamente.

Apesar do fato de que o potencial assintótico nas Eqs.(4.35) e (4.36) são válidas respectivamente nos limites extremos $R \rightarrow \infty$ e $R \rightarrow 0$, reproduz perfeitamente o potencial efetivo em quase toda a faixa das coordenadas dimensionada $s(R)$, uma vez que sua diferença para o potencial calculado numericamente da Eq.(4.17) é notada muita próxima a curva calculada analiticamente. Essas características são mostradas na Fig.(4.9).

Pode-se argumentar que o limite $|E_2| \rightarrow 0$ deve produzir o mesmo efeito que $m_B \rightarrow 0$ na forma assintótica do potencial adiabático nas Eqs. (4.35) e (4.36).

Cálculo do potencial efetivo para $R \rightarrow 0$

Podemos agora estudar o comportamento da Eq.(4.17) para $R \rightarrow 0$, usando a forma assintótica da função de Bessel de ordem zero (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965), temos

$$|\epsilon_{R \rightarrow 0}(R)| = \frac{2|E_2|e^{-\gamma}}{s(R)} \left(1 - \frac{e^{-\gamma}}{2}s(R) \left[(1 - \gamma) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{e^{-\gamma}}{2}s(R) \right) \right] \right)^{-1} \quad (4.36)$$

onde $\gamma = 0.5772$ é a constante de Euler. Vemos que para pequenas distâncias o potencial efetivo se comporta como um potencial tipo Coulomb, ou seja, neste limite nosso problema se resume

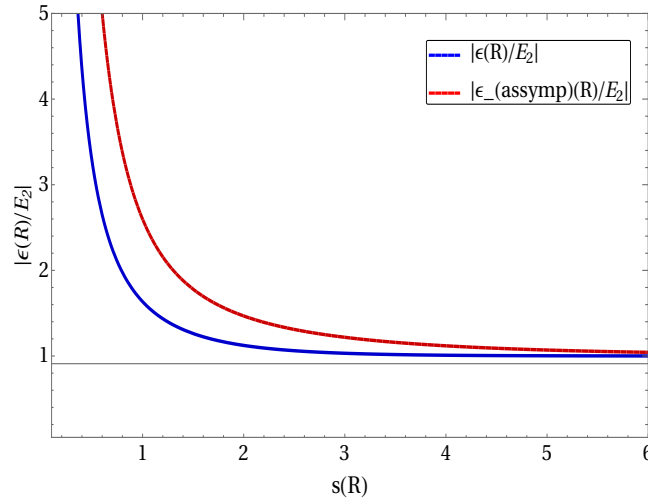


FIGURA 4.10 – Potencial adiabático $|\epsilon_{assintotico}(R)/E_2|$ em função da coordenada adimensional $s(R)$. A linha azul sólida é a solução numérica da Eq.(4.18) e a linha vermelha tracejada é a expressão assintótica da Eq.(4.37) respectivamente.

à um átomo de hidrogênio com uma carga modificada Q_{eff}^2 dada por

$$Q_{eff}^2 = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2\mu_{B,AA}|E_2|}} 2e^{-\gamma}|E_2| \quad (4.37)$$

Substituindo a forma assintótica do potencial efetivo no limite de $R \approx 0$

$$\lim_{R \approx 0} \epsilon(R) = -\sqrt{\frac{\hbar^2}{2\mu_{B,AA}|E_2|}} 2e^{-\gamma} \frac{1}{2\mu_{B,AA}R^2}$$

$$\lim_{R \approx 0} \epsilon(R) \approx -\frac{Q_{eff}^2}{2\mu_{B,AA}R^2} \quad (4.38)$$

na Eq.(4.33), podemos escrever

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{(l(l+1) - 1/4)}{R^2} \right) Y(R) - \frac{2\mu_{AA}}{\hbar^2} [V_B(R) + \epsilon(R)] Y(R) = -\frac{2\mu_{AA}}{\hbar^2} E_3 Y(R) \quad (4.39)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{(l(l+1) - 1/4)}{R^2} \right) Y(R) - \frac{2\mu_{AA}}{\hbar^2} \left[V_B(R) - \frac{Q_{eff}^2}{2\mu_{B,AA}R^2} \right] Y(R) = -\frac{2\mu_{AA}}{\hbar^2} E_3 Y(R) \quad (4.40)$$

fazendo uma mudança de variável $R = \frac{\hbar^2}{2\mu_{AA}Q_{eff}^2} x$, rearranjando os termos temos encontramos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{l(l+1) - 1/4}{x^2}\right)Y(x) - \frac{\hbar^2}{2\mu_{AA}Q_{eff}^4} \left[V_B(x) - \frac{2\mu_{AA}Q_{eff}^4}{\hbar^2 x^2} \right] Y(x) = -\frac{\hbar^2}{2\mu_{AA}Q_{eff}^4} E_3 Y(x) \quad (4.41)$$

Nosso problema não é o átomo de hidrogênio com uma carga modificada, e sim um problema com um potencial $\epsilon(R)$ que no limite de $R \rightarrow 0$ se comporta como um potencial de Coulomb. Precisamos então fixar as unidades de forma que no limite de $R \rightarrow 0$ tenhamos os resultados que conhecemos, assim a equação de Schrodinger que precisamos resolver é escrita como

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{l(l+1) - 1/4}{x^2}\right)Y(x) + \frac{e^{2\gamma}}{4} \frac{\mu_{B,AA}}{\mu_{AA}|E_2|} [\epsilon(x) - V_B(x)] Y(x) = -\frac{e^{2\gamma}}{4} \frac{\mu_{B,AA}}{\mu_{AA}} \frac{E_3}{|E_2|} Y(x) \quad (4.42)$$

Vamos definir $\bar{\epsilon}(x) \equiv \frac{|\epsilon(x)|}{|E_2|}$, podemos calcular os valores de $\bar{\epsilon}(x)$ resolvendo a equação transcendental Eq.(4.17), escrita na forma

$$|\bar{\epsilon}(x)| = \left(1 + 2 \frac{\mu_{AA}}{\mu_{B,AA}} e^{-\gamma} \frac{e^{-\frac{\mu_{B,AA}}{\mu_{AA}} \frac{\sqrt{\bar{\epsilon}(x)}}{e^{-\gamma}} x}}{x} \right)^2 \quad (4.43)$$

Agora fazendo uma expansão para se obedecer os limites de (FONSECA *et al.*, 1979b) para o limite $R \rightarrow 0$ e considerando os primeiros termos, temos que

$$|\bar{\epsilon}(x)| = 4 \left(\frac{\mu_{AA}}{\mu_{B,AA}} \right)^2 \frac{e^{-2\gamma}}{x^2} \quad (4.44)$$

Perceba que nosso problema de três corpos depende da razão $\frac{\mu_{B,AA}}{\mu_{AA}}$, da razão entre a amplitude do potencial entre as partículas de maior massa e da energia de dois corpos, do alcance do potencial repulsivo R_0 e do momento angular l . Como nosso problema para $R \rightarrow 0$ se comporta como um potencial do tipo Coulomb, podemos associar a este problema um raio análogo ao raio de Bohr, dado por $a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$. Considerando o potencial dado na Eq.(4.38) e a carga modificada (4.37) temos

$$a_0^{AA} = \frac{\hbar^2}{\mu_{AA} Q_{eff}^2}$$

$$a_0^{AA} = \frac{\hbar^2}{2\mu_{AB}|E_2|} \sqrt{\frac{2\mu_{B,AA}|E_2|}{\hbar^2}} \frac{1}{e^{-\gamma}} \quad (4.45)$$

assim se escrevermos o alcance do nosso potencial repulsivo em unidades deste raio $R_0 \equiv \rho a_0^{AA}$ onde $\rho \in \mathcal{R}^+$,

O potencial diverge em $R \rightarrow 0$ e precisa ser regularizado. Nós escolhemos uma função de regularização da forma $(1 - e^{(-R/R_0)^3})$, onde o parâmetro R_0 está relacionado ao comprimento de van der Waals que corta a região de curta distância relacionado com a química das partículas de maior massa.

Potências mais altas da função de regularização podem ser compensadas com uma ligeira mudança de R_0 , a fim de preservar os resultados presentes. A equação regularizada de Schodinger em três dimensões é dada por

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{l(l+1) - 1/4}{x^2} \right) Y(x) + \frac{e^{2\gamma}}{4} \frac{\mu_{B,AA}}{\mu_{AA}|E_2|} \left[-V_B(x) \right. \\ \left. + \left(1 - e^{-\frac{x^3}{(2\rho)^3}} \right) \bar{\epsilon}(x) \right] Y(x) = -\frac{e^{2\gamma}}{4} \frac{\mu_{B,AA}}{\mu_{AA}} \frac{E_3}{|E_2|} Y(x) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Esta é a equação para energia de três corpos E_3 para um sistema AAB . Como veremos na próxima seção, será verificado diferentes valores para o potencial de interação entre as partículas de maior massa $V_B(x)$ para um sistema proposto; com duas partículas de maior massa idênticas AA e uma partícula leve B . A Eq.(4.46) reproduz resultados próximos do potencial de Coulomb quando $x \rightarrow 0$, possibilitando sempre comparar nossos resultados com um problema que conhecemos a solução exata.

4.3 Resultados para um potencial de alcance finito

Nesta seção vamos trabalhar com a Eq.(4.46) para a seguinte situação: vamos apresentar resultados para $V_B \neq 0$, ou seja, vamos assumir que existe um potencial de interação entre as partículas de maior massa, vamos assumir uma interação de alcance finito (atrativa e repulsiva) entre os partículas de maior massa.

Nesta primeira etapa vamos explorar este problema variando a razão de massa m_B/m_A entre as partículas e mantendo o momento angular l constante. Para $l = 0$ é conhecido que o sistema possui pelo menos dois estados ligados independente da razão de massa entre as partículas. Resolvemos o potencial de interação em três dimensões utilizando o formalismo de Faddeev cuja comparação com os resultados nos permite verificar a validade da aproximação de Born-Oppenheimer.

Estudamos um sistema de três corpos, formado por dois bósons idênticos e terceira partícula leve de massa bem menor que os bósons anteriores, na aproximação de Born-Oppenheimer. Derivamos o potencial efetivo entre os bósons de maior massa idênticos proporcionais a R (onde R é a distância relativa entre as partículas de maior massa), que é responsável pelo efeito Efimov. Verificamos o comportamento do potencial efetivo acrescido de um potencial adicional e analisamos a possibilidade da existência do efeito Efimov. Todos os cálculos foram feitos considerando um sistema do tipo AAB , representado na Fig.(4.2) na subseção (4.1.2).

4.3.1 Potencial gaussiano entre os bósons de maior massa

Da Eq.(4.32) onde a equação diferencial para o cálculo da energia de três corpos em três dimensões, que se originou da função de onda das partículas pesadas; agora escolhendo um potencial de interação adicional do tipo

$$V_B(R) = V_0 e^{-R^2/R_0^2} \quad (4.47)$$

Podemos então reescrever a Eq.(4.46), depois de fazer a mudança de variável de R para x , isto é, $R = (a_0^{AA}/2)x$, como

$$V_B(R) = \nu e^{-\frac{x^2}{(2\rho)^2}} \quad (4.48)$$

para então termos o potencial total com a forma

$$U_G(x) = \nu e^{-\frac{x^2}{(2\rho)^2}} + \left(1 - e^{-\frac{x^3}{(2\rho)^3}}\right)\bar{\epsilon}(x) \quad (4.49)$$

Após escolher um potencial Gaussiano $V_B(R) = V_0 e^{-R^2/R_0^2}$ para a interação entre as partículas de maior massa, e fazendo as substituições de Eq.(4.47) para o potencial tipo Coulomb onde escrevemos o alcance do nosso potencial repulsivo em unidades do raio de Bohr $R_0 \equiv \rho a_0^{AA}$, e ainda $V_0 \equiv \nu |E_2|$ onde $\nu \in \mathcal{R}$ e $\rho \in \mathcal{R}^+$; teremos para a equação de Schrodinger para a energia de três corpos E_3 usando um potencial gaussiano a seguinte expressão:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{(l(l+1) - 1/4)}{x^2}\right)Y(x) + \frac{e^{2\gamma}}{4} \frac{\mu_{B,AA}}{\mu_{AA}} \left[-\nu e^{-\frac{x^2}{(2\rho)^2}}\right]$$

$$\left(1 - e^{-\frac{x^3}{(2\rho)^3}}\right)\bar{\epsilon}(x)\Big]Y(x) = -\frac{e^{2\gamma}\mu_{B,AA}}{4}\frac{E_3}{\mu_{AA}|E_2|}Y(x) \quad (4.50)$$

Como veremos a seguir a Eq.(4.50) de fato reproduz resultados próximos do potencial de Coulomb quando $x \rightarrow 0$, possibilitando sempre comparar nossos resultados com um problema que conhecemos a solução exata. Verificamos que o valor do potencial total apresentou modificações quando se variou a relação de massa m_B/m_A .

Adicionando ao sistema uma interação gaussiana entre os bósons de maior massa, esperamos ser capazes de dissociar o sistema para vários valores de relação de massa m_B/m_A . Notamos na Fig.(4.11) que para um sistema AAB e uma razão de $m_B/m_A = 0.05$. A importância do alcance do potencial gaussiano fica evidente neste resultado: percebemos que não é possível dissociar o sistema apenas fazendo a amplitude do potencial consideravelmente maior que $|E_2|$.

Ao observar a Eq.(4.49) onde mostra o potencial total formado pela soma do potencial efetivo e o potencial gaussiano, vemos a importância do alcance do potencial adicional; fica evidente neste resultado: percebemos que não é possível dissociar o sistema apenas fazendo a amplitude do potencial consideravelmente maior que $|E_2|$, precisamos combinar a amplitude e o alcance do potencial se quisermos romper o sistema de três corpos.

Ao verificar a Fig.(4.11), vemos que o potencial efetivo na aproximação de Born-Oppenheimer somado ao potencial gaussiano; mas nas figuras de (a-d) onde temos a razão de massa $m/M=0.05$ e $\rho = 1.0$, ou seja um alcance de potencial $R_0 = a_0^{AA}$; vemos para diferentes valores de ν ao acrescentar um maior valor do potencial temos uma formação de barreira de potencial.

Notamos que diminuir a diferença de massa entre o bóson leve e os bósons de maior massa, torna mais fácil a dissociação dos sistema variando a repulsão gaussiana, isso porque o potencial efetivo se torna menos atrativo à medida que $m/M \rightarrow 1$. Para uma razão de massa de $m/M = 0.05$ e uma amplitude $V_0 = 20|E_2|$, já são suficientes para romper o sistema de três corpos.

Da mesma forma ao verificar a Fig.(4.11), vemos o potencial efetivo na aproximação de Born-Oppenheimer somado ao potencial gaussiano; mas figura de (e-f) onde temos a razão de massa $m/M=0.20$ e $\rho = 1.0$, ou seja um alcance de potencial $R_0 = a_0^{AA}$; vemos para diferentes valores de ν , que agora ao diminui valor do potencial temos as curvas praticamente sobrepostas.

Notamos que aumentar a diferença de massa entre o bóson leve e os bósons pesados torna mais difícil a dissociação dos sistema variando a repulsão gaussiana, isso porque o potencial efetivo se torna mais atrativo à medida que $m/M \rightarrow 1$. Para uma razão de massa de $m/M=0.20$ e uma amplitude $V_0 = 1|E_2|$, já não são mais suficientes para romper o sistema de três corpos.

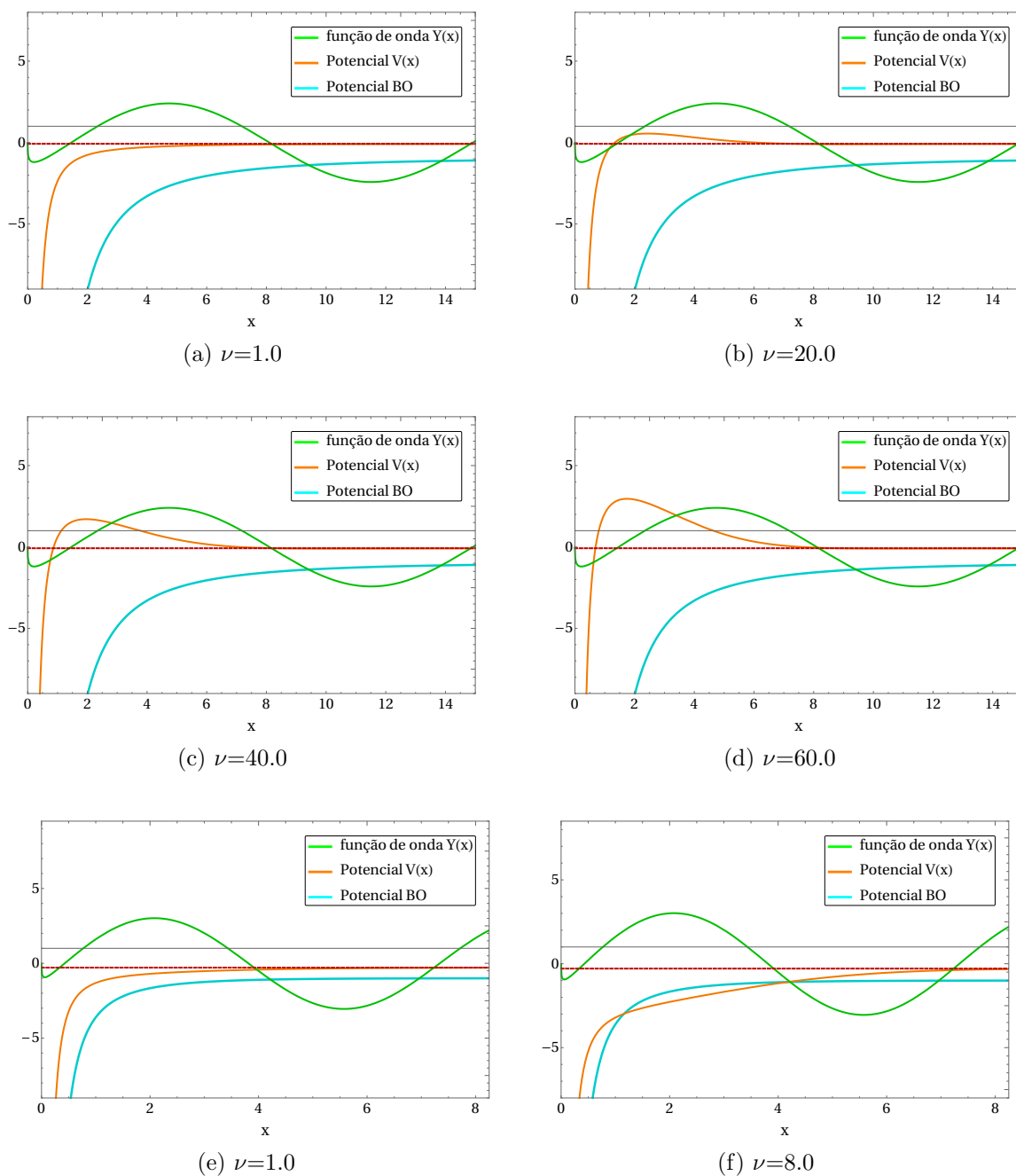


FIGURA 4.11 – Nas figura (a-d) a função de onda $Y(x)$; potencial efetivo BO somado ao potencial gaussiano $V_B(x)$; energia de três corpos E_3 em vermelho, para diferentes valores de ν fixando $m/M=0.05$ e $\rho=1.0$. Agora para as figuras de (e-f) temos $m/M=0.20$ e $\rho=1.0$

4.3.2 Potencial dipolo-dipolo entre os bósons de maior massa

Estudamos um sistema de três corpos, formado por uma partícula leve e dois dipolos pesados idênticos na aproximação BO. O autovalor da Eq.(4.5), $\epsilon(R)$, depende da posição relativa dos dipolos pesados, R , e da mesma forma como na seção anterior, entra como um potencial efetivo na Eq.(4.3). O autovalor desta equação de dipolos pesados retorna a energia de ligação de três corpos, E_3 . A energia de ligação partícula-dipolo, $|E_2|$, para uma interação alcance zero renormalizada entra no potencial efetivo, $\epsilon(R)$, ver Eq.(4.16).

Normalmente, por dois dipolos, \mathbf{m}_1 e \mathbf{m}_2 , que são chamados momentos de dipolo conectados por um vetor \mathbf{R} , a interação dipolar é dada por (HANSEN *et al.*, 2015)

$$V_B(\mathbf{R}) = C \left[\frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2}{R^3} - \frac{3(\mathbf{m}_1 \cdot \vec{R})(\mathbf{m}_2 \cdot \vec{R})}{R^5} \right] \quad (4.51)$$

onde $C = \mu_0/4\pi$ e $C = 1/4\pi\epsilon_0$ para dipolos magnéticos e elétricos, respectivamente. Aqui, μ_0 é a permeabilidade ao vácuo e ϵ_0 a permissividade do vácuo. Para dois dipolos idênticos no plano-xy com momento de dipolo \mathbf{D} formando um ângulo θ com eixo-z e um ângulo azimutal ϕ nós reescrevemos a Eq.(4.51) em

$$V_B(R, \theta, \phi) = \frac{CD^2}{R^3} (1 - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \quad (4.52)$$

onde \mathbf{R} está ao longo da direção x . Essa interação é repulsiva para dois dipolos em um plano quando \mathbf{D} é perpendicular a esse plano. No entanto, a medida que o ângulo θ aumenta, a repulsão diminui até que desapareça e eventualmente se torne atraente quando \mathbf{D} é um vetor no plano xy . A direção do dipolo seria, no entanto, determinada por um campo externo de polarização. Nós manteremos a seguinte orientação dipolar arbitrária, mas fixa.

Alterar a coordenada relativa pesada-pesada para x por $R = (a_0^{AA}/2)x$, nós temos

$$V_B(x, \theta, \phi) = \frac{8CD^2}{a_0^3 x^3} (1 - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \phi), \quad (4.53)$$

que tem uma divergência cúbica em $x = 0$. Isto é tanto impraticável como não-físico, já que x é suficientemente pequeno significa distâncias menores entre os átomos onde as liberdades das ligações químicas se tornam menos inevitáveis (AVANCINI *et al.*, 2003). Nós, portanto, regularizamos da maneira mais suave possível, modificando para distâncias x menores que uma constante x_0 , que pode ser considerada como determinada pelo comprimento de van der Waals (BRAATEN; HAMMER, 2006) ou dipolo. Todo o potencial da Eq.(4.46) e então correspondentemente dado por

$$U_D(x) = \frac{e^{2\gamma}}{4} \frac{\mu_{B,AA}}{\mu_{AA}} (1 - e^{-\frac{x^3}{(2\rho)^3}}) \bar{\epsilon}(x) + \lambda x_0^3 \frac{1}{x^3 + x_0^3}, \quad (4.54)$$

$$\lambda \equiv 4e^{-\gamma} C D^2 \sqrt{\frac{2\mu_{AA}^4 |E_2|}{\mu_{B,AA} \hbar^6}} (1 - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \phi), \quad (4.55)$$

onde a força, λ , agora é adimensional.

A parte do potencial de Born-Oppenheimer é atrativa em todos os pontos do espaço. É semelhante a Coulomb a pequenas distâncias e essencialmente desaparecendo exponencialmente a grandes distâncias. A força de Coulomb e o raio de corte exponencial estão aumentando com a diminuição da razão de massa m_B/m_A . Assim, pequenas e grandes distâncias permitem mais estados ligados a medida que a proporção de massa diminui.

Da equação da energia de três corpos Eq.(4.46) acrescida do potencial dipolo-dipolo Eq.(4.53), temos;

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{(l(l+1) - 1/4)}{x^2} \right) Y(x) + \frac{e^{2\gamma}}{4} \frac{\mu_{B,AA}}{\mu_{AA}} \left[\lambda x_0^3 \frac{1}{x^3 + x_0^3} + \left(1 - e^{-\frac{x^3}{(2\rho)^3}} \right) \bar{\epsilon}(x) \right] Y(x) = -\frac{e^{2\gamma}}{4} \frac{\mu_{B,AA}}{\mu_{AA}} \frac{E_3}{|E_2|} Y(x) \quad (4.56)$$

Adicionar um potencial repulsivo sem qualquer divergência ainda deixa o comportamento de Coulomb a uma pequena distância, mas não necessariamente permitindo quaisquer estados ligados. Uma repulsão de alcance relativamente curto, por outro lado, deixa a atração de longa distância muito menos afetada. No entanto, uma força repulsiva suficiente, por exemplo, no potencial de dipolo, deve eventualmente remover toda a atração e, portanto, todos os estados ligados.

As forças intermediárias permitem então duas regiões onde os estados ligados podem existir a pequenas e grandes distâncias separadas por uma barreira, ver Fig.(4.12). Esses dois estados são para λ pequenos positivos, respectivamente localizados nos mínimos internos e externos. A medida que λ aumenta em direção a 1, o estado fundamental é mais afetado.

Após o cruzamento, eles trocam as propriedades da estrutura, mas logo em seguida, o tom alto desaparece abruptamente no continuum. Não ha espaço suficiente no mínimo interno para manter um estado ligado, enquanto o estado subjacente permanece relativamente não afetado no minimo externo.

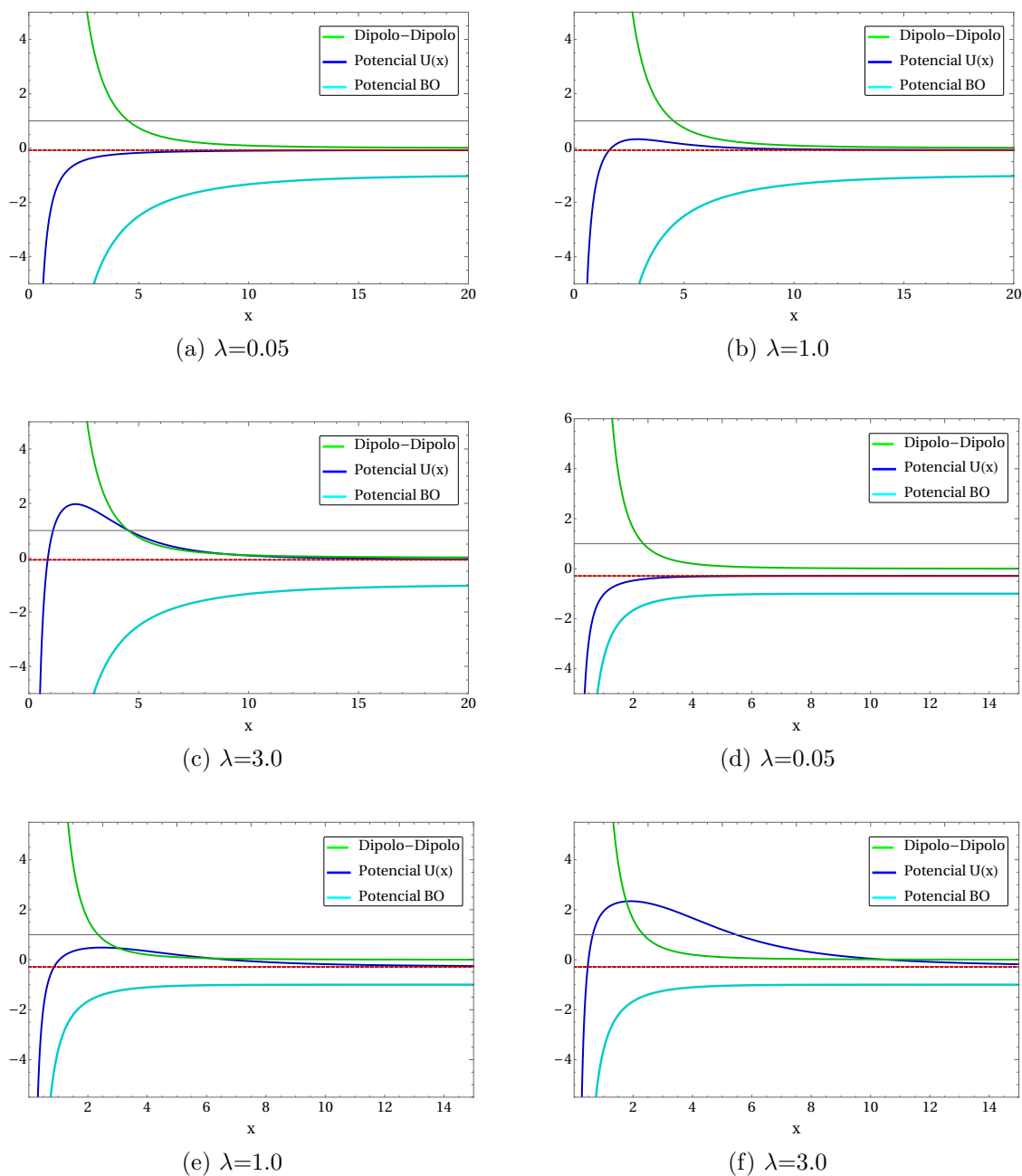


FIGURA 4.12 – O potencial de Born-Oppenheimer (azul claro) e potencial dipolo-dipolo U_B (em verde) e potenciais totais (azul escuro). As linhas horizontais são o limiar de dois corpos $\hat{E}_2 \equiv (a_0/2Q_{eff}^2)E_2$. As figuras (a-c) os potenciais são plotados como funções de x e calculados para $x_0 = 4.0$ e relação de massa $m_B/m_A = 0.05$. As figuras (d-f) os potenciais são plotados como funções de x e calculados para $x_0 = 5.0$ e relação de massa $m_B/m_A = 0.20$.

Neste ponto, queremos enfatizar que a força do dipolo pode ser simplesmente alterada pela variação da direção do dipolo em relação ao plano bidimensional onde eles se movem. Essas propriedades dependem dos parâmetros escolhidos dos cálculos. Nós fixamos a razão de massa, m_B/m_A , e a força de dois corpos parametrizada por E_2 . Diminuir m_B/m_A ou aumentar E_2 deve levar a mais potenciais atraentes de Born-Oppenheimer: isso, por sua vez, fornece mais estados ligados a uma determinada força dipolar repulsiva, λ , tanto no mínimo interno quanto no mais distante.

O potencial total $U(x)$, como mostrado na Fig.(4.12), para uma resistência de dipolo, têm um mínimo profundo estreito a pequenas distâncias e um mínimo raso muito largo a distâncias muito maiores. Os detalhes desses recursos característicos dependem um pouco das opções de parâmetros, isto é, taxa de massa, m_B/m_A , energia de dois corpos, E_2 e força de dipolo λ . O número de estados ligados abaixo do limiar contínuo de dois corpos aumenta dramaticamente com a diminuição de m_B/m_A , mas a maioria desses estados seria localizada no mínimo externo.

4.4 Resultados para potencial gaussiano e potencial dipolo-dipolo juntos

As relações entre os potenciais totais entre o potencial efeito somado aos potenciais adicionais e energia de ligação de três corpos são mostradas nas Fig.(4.13) e Fig.(4.14) para o estado fundamental em torno do ponto para evitar o cruzamento. A barreira de potencial é quase inalterada com a altura $\approx 0.1(2Q_{eff}^2/a_0)$ em $x \approx 0.5$. No entanto, isso reflete apenas que a variação muito pequena de λ resulta em uma grande mudança na função de onda.

Os potenciais totais $U_G(x)$ e $U_D(x)$, que são os potenciais dipolo e potencial gaussiano acrescido do potencial efetivo como mostrado nas Fig.(4.13) e Fig.(4.14), tem uma variação bem acentuada quando se variam os parâmetros usados. Os detalhes desses recursos característicos dependem um pouco das opções de parâmetros, isto é, taxa de massa, m_B/m_A , energia de três corpos, E_3 e força de dipolo λ e o fator de interação ν . O número de estados ligados abaixo do limiar contínuo de dois corpos aumenta dramaticamente com a diminuição de m_B/m_A .

Consideramos uma interação gaussiana entre os bósons pesados e notamos que a introdução desse potencial tornou possível a dissociação do sistema de três corpos, isso tem um efeito semelhante a aumentar o momento angular. Fixando, por exemplo, uma razão de massa próxima a encontrada em sistemas reais para onde $m/M \approx 0.05$, observamos que uma amplitude $V_0 = 10|E_2|$ e um alcance de $R_0 = 8a_0^{AA}$ são suficientes para romper a energia de ligação do sistema.

Incluimos a interação dipolo-dipolo, orientada para produzir repulsão entre os bósons de maiores massas juntamente com o potencial gaussiano para tornar a ligação mais atrativa. O potencial total entre as partículas pesadas e agora o resultado de uma competição entre as duas contribuições. Nas menores distâncias, a atração semelhante a Coulomb sobrevive com uma escala de energia traduzida. Para forças repulsivas moderadas, uma barreira aparece antes de um mínimo amplo em distâncias maiores.

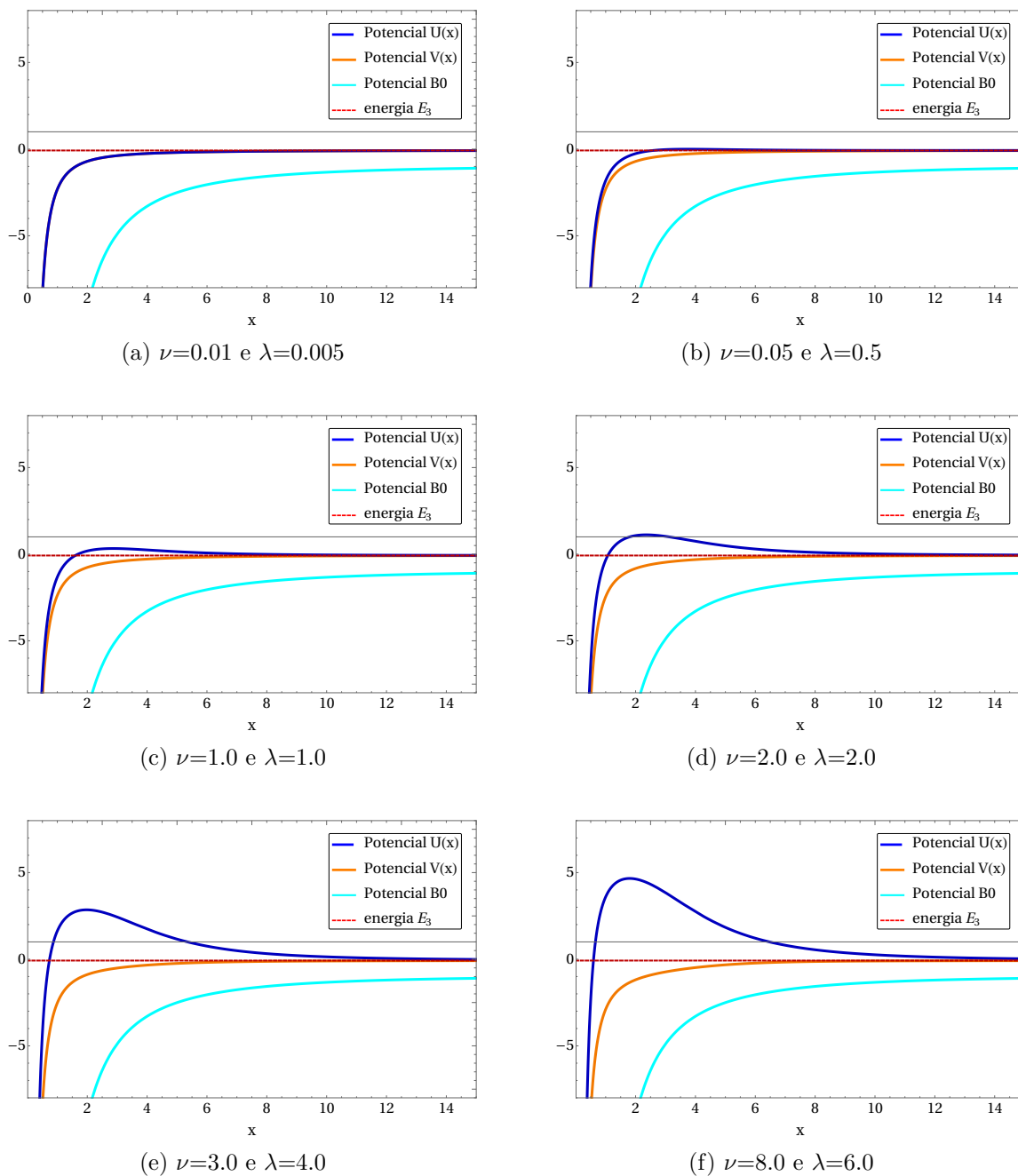


FIGURA 4.13 – Potencial efetivo BO somado ao potencial dipolo $U(x)$; Potencial efetivo BO somado ao potencial gaussiano $V(x)$; energia de três corpos E_3 em vermelho, para diferentes valores de ν e λ fixando $m/M=0.05$, $\rho=1.0$ e calculados para $x_0 = 4.0$.

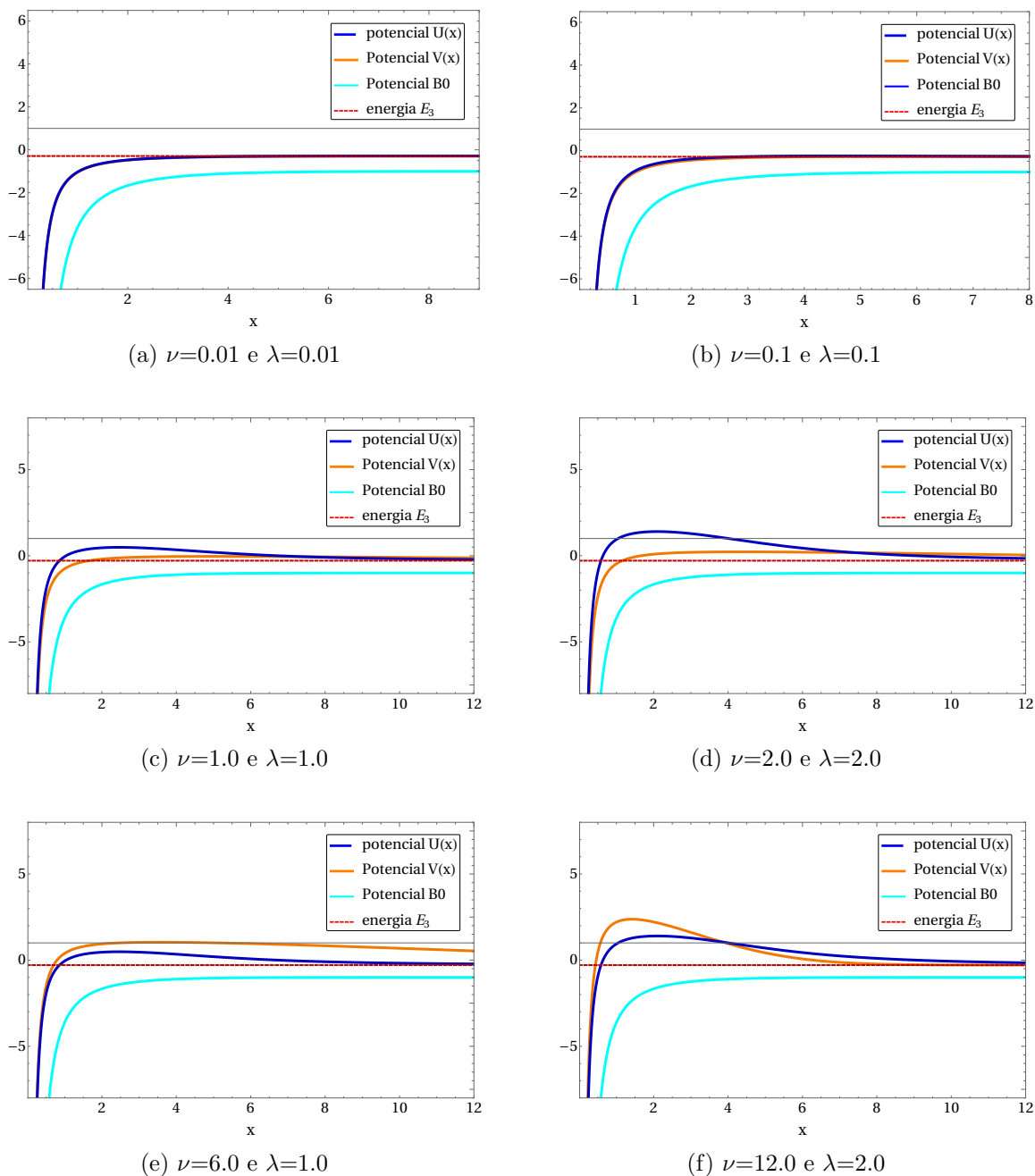


FIGURA 4.14 – Potencial efetivo BO somado ao potencial dipolo $U(x)$; Potencial efetivo BO somado ao potencial gaussiano $V(x)$; energia de três corpos E_3 em vermelho, para diferentes valores de ν e λ fixando $m/M=0.20$ e $\rho=4.0$ e calculados para $x_0 = 5.0$.

5 Estados de espalhamento para o problema de três corpos

Neste capítulo veremos como o fator de escala de Efimov, para o sistema de duas partículas pesadas e uma leve (AAB), pode ser verificado também no espalhamento da partícula pesada (A) pelo estado fracamente ligado (AB). Para isso seguimos a referência (SHALCHI *et al.*, 2018), as quantidades que iremos estudar serão os deslocamentos de fase da onda S (com momento angular nulo) e correspondentes seções de choque, variando as energias de colisão da partícula que é espalhada. Neste caso iremos utilizar a aproximação de Born-Oppenheimer. Iniciaremos recordando alguns resultados para o estado ligado de três corpos, que demonstram a validade desta aproximação. A seguir aplicaremos esta mesma aproximação para o caso de espalhamento.

O surgimento de um fator de escala discreto é demonstrado considerando-se o espalhamento átomo-molécula próximo ao limite unitário para sistemas de três bósons com grande diferença de massa. Este fator de escala é verificado para corresponder ao fator de escala de Efimov obtido para o espectro da ligação de três corpos. Em nossa abordagem, consideramos a dependência de energia do deslocamento de fase δ_0 da onda S no espalhamento elástico de um bóson pesado com massa m_A por um dímero fracamente ligado formado por um bóson com massa bem mais leve m_B , para a relação de massa $m_B \ll m_A$.

Nosso objetivo neste capítulo é explorar a física de Efimov na região de espalhamento, considerando um caso geral de AAB sistema de três bósons com massas diferentes tais que $m_B \gg m_A$, próximo ao limite unitário dos subsistemas. Para isso, é importante lembrar que no limite unitário, para o espectro de estados ligados, foi demonstrado que dois níveis são relacionados por um fator de escala exponencial dado por $\exp(2\pi/s_0)$, onde s_0 é uma constante que varia de acordo com a proporção m_B/m_A (BRAATEN; HAMMER, 2006).

No caso do sistema de massas idênticas, temos a relação de energia máxima prevista para ser ~ 515 , tal que será bastante difícil para uma verificação experimental, devido à grande divisão entre os níveis de energia. No entanto, pode-se facilmente identificar a partir da dependência de massa do fator de escala discreto que as situações ideais, melhor que os casos de massa igual detectados por exemplo em (KNOOP *et al.*, 2009), pode ocorrer para desequilíbrio de massa sistemas com $m_B \ll m_A$, quando a divisão de níveis poderia ser mais facilmente identificada experimentalmente.

Por exemplo, no caso de $m_B = 100m_A$, a razão entre os níveis consecutivos do espectro de

energia do estado ligado é dada por $\exp(2\pi/s_0) \sim 4,7$. Com as pesquisas sobre essa linha de investigação em experimentos com átomos frios, dentro de uma perspectiva mais geral, onde podemos também incluir outras espécies atômicas possíveis, consideramos o espalhamento de uma espécie atômica pesada A em um sistema AB fracamente ligado, para o caso que $m_A \gg m_B$.

Além disso, controlando a força do subsistema do estado ligado $A-B$ em laboratório através do mecanismo de ressonância de Feshbach, com mistura de gás apropriada de B e A de espécies atômicas, tendo uma nuvem formada por partículas A com AB moléculas fracamente ligadas, podemos criar as condições para a colisão de moléculas de átomos com energias de espalhamento muito baixa.

Como vamos mostrar, o fator de escala discreto acima discutido identificado no espectro Efimov de estado ligado também pode ser identificado na colisão de baixa energia de uma partícula pesada A contra um sistema de dois corpos $A-B$. Como estamos demonstrando, ao considerarmos o momento relativo da energia (entrada e final) k , uma sequência de pólos surgirá no observável $k \cot \delta_0^R$ na onda S , onde δ_0^R é a parte real da mudança de fase da onda S .

O número de pólos, com a posição de momento correspondente dada por $k = k_n (n = 1, 2, \dots)$, dependerá da razão de massa m_B/m_A , bem como na energia do estado ligado do sistema leve-pesado. Neste caso, o fator de escala discreto pode ser facilmente identificado pela sequência de mínimos na seção transversal correspondente, que são dadas por k_n .

A relação entre energias de espalhamento consecutivas desta sequência é verificada como próxima da proporção já obtida no espectro de estado ligado de Efimov, à medida que nos aproximamos do limite $1/a_{AB} = 0$. Com relação à dependência da razão de massa, como já apontado, a situação mais favorável a ser investigada ocorrerá por $m_A \gg m_B$, quando a relação entre os níveis de Efimov não for grande e pode ser mais facilmente identificado.

Com relação à dependência da razão de massa, como já apontado, a situação mais favorável a ser investigada ocorrerá por $m_B \ll m_A$, quando a relação entre os níveis de Efimov não for grande e puder ser mais facilmente identificada. Aproveitando-se do controle experimental real dos parâmetros que foram alcançados em laboratórios de átomos frios, a rica física emergente perto do limite unitário pode agora ser mais explorada. A esse respeito, entendemos que é bastante promissor e de grande interesse explorar os observáveis de espalhamento de baixa energia para o sistema de duas partículas pesadas e uma leve perto do limite unitário.

Podemos começar analisando os resultados obtidos para o caso particular que $m_B = 0.01m_A$, onde não há interação entre o sistema dos bósons de maior massa (AA), com o par leve-pesado (AB) que é fracamente ligado (com grande comprimento de espalhamento de dois corpos a_{AB}).

Nesta situação, espera-se que apareça uma sequência de níveis para o espectro de estados ligados de três corpos, como previsto por Efimov, implicando que $B_3^{(n)} \rightarrow e^{(2n\pi/s_0)} B_3$, onde B_3 é um parâmetro de energia de três corpos, que pode ser definido até um fator multiplicativo $e^{(\pi/s_0)}$. No limite que $B_{AB} \rightarrow 0$ o fator de escala discreto obtido em Ref.(BRAATEN; HAMMER, 2006), $\exp(\pi/s_0) = 2.1675$, nos permite prever que a relação entre os dois níveis de energia de três corpos mais próximos é dada por $B_3^{(n)} \sim 4.698B_3^{(n+1)}$.

5.1 Formalismo para aproximação adiabática para o sistema de espalhamento

Para o formalismo básico de três corpos de Faddeev que foi usado para resolver o sistema AAB na região de espalhamento, pode-se seguir (SHALCHI *et al.*, 2017), onde a interação para as partículas leve e pesada é dada pelo potencial de alcance zero renormalizado, bem como por interações separáveis de curto alcance.

Em nossa abordagem, considerando a colisão de baixa energia de uma partícula pesada A em um sistema AB de dois corpos fracamente ligados, as duas partículas pesadas não estão interagindo, com as interações de pares dadas somente pela energia fracamente ligada do sistema de dois corpos, B_{AB} . Ao longo do texto, essa energia de estado ligado também será representada pelo comprimento de espalhamento de dois corpos muito grande correspondente, que é dado por $a \equiv a_{AB} = \sqrt{(2\mu_{AB}/\hbar^2)/B_{AB}}$, onde μ_{AB} é a massa reduzida entre as partículas A e B .

Da mesma maneira como na seção (4.1) temos a aproximação adiabática para o sistema de três corpos composto de duas partículas pesadas idênticas AA e uma partícula leve B . Para o propósito de mostrar como a interação do inverso do quadrado emerge no problema de três corpos de baixa energia, consideramos duas partículas pesadas idênticas (1 e 2) com massas iguais m_A , com a terceira partícula (3) tendo massa $m_B \ll m_A$.

Das coordenadas correspondentes, \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 e \mathbf{r}_3 , introduzindo as relativas $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ e $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_3 - \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2})$, assim como tirar $m_B \ll m_A$ e unidades tais que $\hbar = 2m = 1$, podemos escrever a equação de Schrodinger de três corpos com os autovalores do sistema AAB é $H\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = E\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R})$. O Hamiltoniano H é escrito nas coordenadas \mathbf{R}, \mathbf{r} do CM de três corpos como

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu_{AA}}\nabla_R^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu_{B,AA}}\nabla_r^2 + V_A\left(\mathbf{r} - \frac{\mu_{AA}}{m_A}\mathbf{R}\right) + V_A\left(\mathbf{r} + \frac{\mu_{AA}}{m_A}\mathbf{R}\right) + V_B(\mathbf{R}) \quad (5.1)$$

onde as massas reduzida são $\mu_{AA} = \frac{m_A}{2}$ e $\mu_{B,AA} = \frac{2m_A m_B}{(2m_A + m_B)}$.

Como as partículas de maior massa são muito lentas em comparação com a partícula leve, aplicamos a aproximação de Born-Oppenheimer, decompondo a função de onda como $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \psi_{\mathbf{R}}(\mathbf{r})\phi(\mathbf{R})$, onde \mathbf{R} é um parâmetro em $\psi_{\mathbf{R}}(\mathbf{r})$. Desta forma, a solução da equação para o sistema das partículas pesadas e leve fornecerá o potencial adiabático, $\epsilon(R)$, para as duas partículas pesadas. O sistema acoplado é dado por

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu_{B,AA}}\nabla_r^2 + V_A\left(\mathbf{r} - \frac{\mu_{AA}}{m_A}\mathbf{R}\right) + V_A\left(\mathbf{r} + \frac{\mu_{AA}}{m_A}\mathbf{R}\right) \right] \psi_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) = \epsilon(R)\psi_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) \quad (5.2)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu_{AA}}\nabla_R^2 + V_B(\mathbf{R}) + \epsilon(R) \right) \phi(\mathbf{R}) = E\phi(\mathbf{R}) \quad (5.3)$$

O comportamento assintótico de $\epsilon(R)$ não é afetado por $V_3(\mathbf{R})$, de modo que se pode assumir $V_3(\mathbf{R}) = 0$. Para as partículas mais leves, pode-se ter interações separáveis de curto alcance, com V_1 e V_2 tendo o operador na forma $\lambda|g\rangle\langle g|$. O sistema de partículas leve-pesadas, que pode ser facilmente resolvido no espaço dos momentos considerando os fatores de forma de Yamaguchi com $g(p) \equiv (p^2 + \beta^2)^{-1}$, é considerado um estado de limite raso com $B_{AB} = \hbar^2/(2ma_{AB}^2)$, onde $a_{AB} \equiv a$ é o comprimento de espalhamento do sistema leve-pesado. O comprimento de espalhamento para o subsistema de dois corpos é assumido como sendo infinito.

O potencial efetivo $\epsilon(R)$ (considerando $V_3(R) = 0$) na equação de $\phi(\mathbf{R})$, dentro da aproximação de Born-Oppenheimer (FONSECA *et al.*, 1979a) e limite de escala, é dado por

$$\epsilon(R) = -\frac{\hbar^2}{2m_B\mu_{B,AA}}\kappa^2, \quad (5.4)$$

onde $\kappa \equiv \kappa(R)$ e

$$\left[\kappa - \frac{1}{a} \right] R = e^{-\kappa R} \quad (5.5)$$

a solução no limite $a \rightarrow \infty$ conduz

$$\epsilon(R) = -\frac{\hbar^2}{2m_B\mu_{B,AA}R^2} A^2, \quad \text{onde } A = e^{-A} = 0.5671433 \quad (5.6)$$

A expressão (5.5), para $\kappa(R)$, pode ser ajustada considerando valores arbitrários de a , ao qual pode ser dado por

$$\kappa(R) \approx \frac{1}{a} + \left(\frac{A}{R} + \frac{c}{a} \right) e^{-\frac{R}{a}} \quad (5.7)$$

onde $c \equiv 0.185$. Com isso, a expressão do potencial,

$$\epsilon(R) = -\frac{\hbar^2}{2m_B\mu_{B,AA}a^2} \left[1 + \left(c + \frac{Aa}{R} \right) e^{-\frac{R}{a}} \right]^2, \quad (5.8)$$

irá satisfazer ambos os limites $R \ll a$ e $R \gg a$.

No limite $R \ll a$, a equação radial para dois corpos pesados é

$$\frac{\hbar^2}{m_A} \left[-\frac{d^2}{dR^2} - \left(\frac{2m_A + m_B}{4m_B} \right) \frac{A^2}{R^2} \right] u = E_3 u, \quad (5.9)$$

onde $u \equiv u(R) \equiv R\phi(\mathbf{R})$.

Para um potencial radial Λ/R^2 , onde Λ é adimensional, o sistema não tem um estado vinculado para $\Lambda > -1/4$ e é anormal para $\Lambda < -1/4$ devido à singularidade de $R \rightarrow 0$. Não há limite inferior no espectro de energia, o que requer uma regularização, tal que $R > r_c$, onde r_c é um corte radial. Portanto, para uma condição de contorno, fixamos a função de onda em zero em

$R = r_c$. Importante observar que a propriedade de escala geométrica é independente do valor de r_c . Então, vamos reescrever Eq.(5.9) como

$$\left[-\frac{d^2}{dR^2} - \frac{s_a^2 + \frac{1}{4}}{R^2} \right] u = \frac{m_A}{\hbar^2} E_3 u = k^2 u \quad (5.10)$$

$$s_a = \sqrt{\frac{2m_A + m_B}{4m_B} A^2 - \frac{1}{4}} \quad e \quad k \equiv \sqrt{\frac{m_A E_3}{\hbar^2}} \quad (5.11)$$

Aqui, usamos a definição s_a correspondente ao fator numérico exato, definido como s_0 . Vamos verificar os valores numéricos obtidos em (5.11), para alguns valores de relação de massa $m_B \ll m_A$, em comparação com os valores de s_0 fornecidos em (BRAATEN; HAMMER, 2006):

TABELA 5.1 – Valores do fator de escala s_a e $e^{\frac{\pi}{s_a}}$, obtidos pela expressão adiabática (5.11) em comparação com os respectivos valores exatos, que pode ser obtido em (BRAATEN; HAMMER, 2006). Note que, o escalonamento para as energias é $e^{\frac{2\pi}{s_a}} = 4.83$ ($s_a = 3.99$) no caso adiabático, com $e^{\frac{2\pi}{s_0}} = 4.70$ ($s_0 = 4.06$) para o caso exato.

m/M	0.1	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.001
s_a	1.1995	1.7456	1.9624	2.2784	2.8057	3.9891	12.675
s_0	1.4682	1.9194	2.1142	2.4067	2.9084	4.0612	12.698
$e^{\frac{\pi}{s_a}}$	13.725	6.0483	4.9574	3.9703	3.0641	2.1980	1.2813
$e^{\frac{\pi}{s_0}}$	8.4977	5.1383	4.4193	3.6889	2.9452	2.1675	1.2807

Para o caso de estados ligados com $E_3 = -\mathcal{B}_3 = -\frac{\hbar^2}{m_A} \kappa^2$, as soluções são dadas pelos zeros de uma função de Bessel modificada do terceiro tipo com ordem imaginária pura $i s_0$, $u(R) = \sqrt{\kappa R} K_{i s_0}(\kappa R)$. Como a função de onda deve ser zero na condição de fronteira, onde $R = r_c$, isso é satisfeito por valores discretos de $\kappa = \kappa_n$, em que $K_{i s_0}(\kappa_n r_c) = 0$, emergindo a escala geométrica do espectro:

$$\frac{\mathcal{B}_3^{(n)}}{\mathcal{B}_3^{(n+1)}} = e^{2\pi/s_0} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.12)$$

No caso de espalhamento, quando $E_3 = \frac{\hbar^2}{m_A} k^2$, a solução para Eq.(5.10) pode ser encontrada no *WolframAlpha General Differential Equation Solver* em termos de Funções de Bessel $J_\nu(z)$:

$$u(R) = \sqrt{R} [c_1 J_{i s_0}(kR) + c_2 J_{-i s_0}(kR)], \quad (5.13)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, que podem ser dadas pela normalização da função de onda e continuidade da derivada logarítmica. Primeiro, a razão c_2/c_1 pode ser dada pela condição de que $u(R)$ é zero para alguns $R = 1$ fixos. Em seguida, fixamos as condições para a continuidade da derivada logarítmica em $R = a \gg 1$. Com $z \equiv ka$, temos as seguintes expressões para obter

os desvios de fase da onda s onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, que podem ser dadas pela normalização da função de onda e continuidade da derivada logarítmica.

Primeiro, a razão c_2/c_1 pode ser dada pela condição de que $u(R)$ é zero para alguns $R = 1$ fixos. Em seguida, fixamos as condições para a continuidade da derivada logarítmica em $R = a \gg 1$. Com $z \equiv ka$, temos as seguintes expressões para obter os desvios de fase $\delta_0 \equiv \delta_0(k)$ da onda S :

$$z \cot(z + \delta_0) = \frac{1}{2} + z \left[\frac{J'_{is_0}(z)J_{-is_0}(k) - J_{is_0}(k)J'_{is_0}(z)}{J_{is_0}(z)J_{-is_0}(k) - J_{is_0}(k)J_{-is_0}(z)} \right]_{z=ka}$$

e nós obtemos que

$$\delta_0 = -z + \cot^{-1} \left(\frac{1}{2z} + \frac{J'_{is_0}(z)J'_{-is_0}(k) - J_{is_0}(z)J'_{is_0}(k)}{J_{is_0}(z)J'_{-is_0}(k) - J_{is_0}(z)J'_{-is_0}(k)} \right) \quad (5.14)$$

Aqui nós devemos notar a continuidade da derivada logarítmica da função de onda em $R=a$, ao qual um erro é esperado nos resultados, porque nós temos $R \ll a$ na expansão para Eq.(5.8). Na ordem para aprimorar esta aproximação, nos vamos incluir um potencial efetivo tipo Coulomb $1/R$, com a Eq.(5.11) sendo reescrita como

$$\left(-\frac{d^2}{dR^2} - \frac{s_a^2 + \frac{1}{4}}{R^2} \left[g\left(\frac{R}{a}\right) \right] \right) u = \frac{m_A}{\hbar^2} E_3 u = k^2 u \quad (5.15)$$

onde $g(y) \approx 1 + 1.64y$ para nossa aproximação ser válida não apenas para $R \ll a$, mas também para $R/a \sim 1$, foi preciso ajustar a potencial (5.8). No caso para um ajuste válido para $R \sim 3a$.

A continuidade logarítmica derivada implica

$$\begin{aligned} \delta_0 &= -ka + \cot^{-1} \left(\frac{1}{ku} \frac{du}{dR} \Big|_{R=a} \right) = -ka + \theta \\ \cot \delta_0 &= \frac{\cot(ka) \cot \theta + 1}{\cot(ka) - \cot \theta} \\ \cot \theta &= \left(\frac{1}{ku} \frac{du}{dR} \Big|_{R=a} \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Portanto, os zeros $1/(k \cot \delta_0)$ são dados por

$$\cot(ka) = \left(\frac{1}{ku} \frac{du}{dR} \Big|_{R=a} \right) \quad (5.17)$$

Usando a seção de choque diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |h_n(k; E)|^2 \quad (5.18)$$

para a amplitude de espalhamento, nós temos

$$h_n(k; E) = \frac{e^{i\delta_0} \sin \delta_0}{k} = \frac{1}{k \cot \delta_0 - ik} \quad (5.19)$$

onde para a equação da amplitude de espalhamento $h_n(k; E)$ de três corpos pode ser consultada em (SHALCHI *et al.*, 2017).

TABELA 5.2 – Valores para $E^{(n)}$ correspondente aos pólos de $k \cot \delta$ ou aos zeros de σ , para o caso $m_B/m_A = 0.01$ ($s_0 = 4.06$). Para o espectro de estado ligado, temos a relação Efimov $B^{(n)}/B^{(n+1)} = e^{\frac{2\pi}{s_0}} = 4.7$, com $s_0 = 4.06$. Neste caso de espalhamento, os pólos estão sendo identificados de modo que $E^{(n+1)} > E^{(n)}$.

n	$E^{(n)}$	$E^{(n)}/E^{(n-1)}$
1	0.00070042	-
2	0.00359401	5.131
3	0.0175357	4.879
4	0.0836705	4.771
5	0.392811	4.694

Os resultados correspondentes para as seções transversais σ da onda S são mostrados nas Figs.(5.2). Ao considerar diferentes taxas de massa $\mathcal{A} \equiv m_B/m_A$, variando de 0,01 a 0,08, nossos resultados para as seções de choque σ (em unidades arbitrárias) são apresentados na Fig.(5.1) para uma energia fixa de dois corpos com ligação fraca $B_{AB}/B_3 = 0.01$.

Nos oito painéis indicados, apresentamos σ em função de E/B_3 , onde E é a energia de colisão no centro de massa do sistema AA , com B_3 sendo a energia de três corpos do estado fundamental, que está sendo usada como uma escala de energia. A partir desses seções nos gráficos, pode-se notar uma seqüência de zeros (ou mínimos) que podem aparecer por σ à medida que diminuimos a razão de massa, considerando um intervalo fixo para a energia de colisão, tal que $E/B_3 < 1$.

Nesse intervalo, quando o desequilíbrio de massa é menos pronunciado ($\mathcal{A} = 0,08$), podemos verificar a ocorrência de apenas um zero para σ dentro do intervalo dado, enquanto o sistema mais forte de desequilíbrio de massa ($\mathcal{A} = 0,01$) é possível verificar a existência de até seis zeros. Isso já indica que, sistemas de desequilíbrio de massa mais fortes são mais favoráveis para identificar as posições de energia $E^{(n=1,2,\dots)}$ onde temos a ocorrência de zeros por σ , também como as proporções correspondentes entre as energias.

A fim de verificar o surgimento de um possível fator de escala entre os zeros de σ , em correspondência com o espectro do estado ligado de Efimov para cada relação de massa determinada, deve-se ser capaz de extrapolar as energias de estado ligado de dois corpos para o limite unitário (ou seja, para $B_{AB} = 0$).

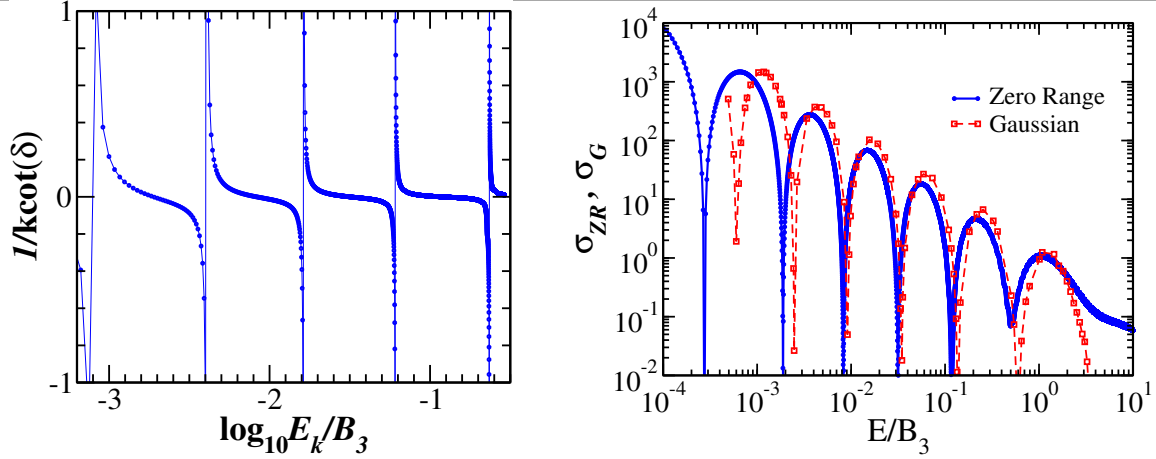


FIGURA 5.1 – Mostramos a seção de choque transversal da onda S como uma função da energia de colisão E , em unidades de energia do estado ligado de três corpos \mathcal{B}_3 , para intervalo zero (linhas pontilhadas azuis) e intervalo finito gaussiano (linhas pontilhadas vermelhas).

Devemos primeiro observar que a precisão numérica dos resultados presentes foi verificada para ser suficiente para dar zeros bem definidos dentro do intervalo das energias de colisão mostradas na Fig.(5.1), exceto para os lados extremos do intervalo por E , onde as posições zero são menos precisas. Em vista disso, para extrair os pontos de energia onde temos os mínimos para $\sigma = 0$, consideramos principalmente a região de energia onde E não é muito maior ou muito menor que a energia de ligação de dois corpos. Correspondendo à Fig.(5.1) nós adicionamos a Tabela (5.1) onde os valores de $E^{(n)}/\mathcal{B}_3$ são melhor identificados (como uma convenção, $E^{(n)} > E^{(n+1)}$).

Na primeira linha desta tabela, por $\mathcal{A} = 0,01$, podemos facilmente extrair $E_k^J/\mathcal{B}_3 \approx (1/2)^{1+2J}$, onde $J = 1, 2, 3, \dots$. Para o painel superior esquerdo da Fig.(5.2), quando $\mathcal{B}_{AB}/\mathcal{B}_3 = 0.01$ e $\mathcal{A} = 0,01$, estendendo o eixo x para 1 a fim de mostrar que é possível observar outro mínimo em σ para uma energia de colisão maior que $E = 50\mathcal{B}_{AB}$.

Como podemos observar, neste caso, o mínimo em σ já está sendo afetado pela absorção, um comportamento esperado para energias acima do rompimento. Portanto, σ não está sendo reduzido a zero, mas tem um mínimo, com o valor da energia E sendo desviado ligeiramente para a direita. Como mostrado no comportamento de escala mostrado na Fig.(5.3), este efeito empurra o ponto correspondente para cima. Como se poderia esperar, a escala Efimov (verificada para o estado ligado de três corpos no limite unitário) será distorcida pelos efeitos de absorção.

Os mínimos da seção de choque são bastante próximos de zero, mesmo para energias tão grandes, profundamente imersas no contínuo de três corpos, onde ainda o parâmetro de inelasticidade da onda S está muito próximo da unidade. Esta surpreendente supressão do rompimento de energias de duas ordens de magnitude da ligação de dois corpos, em nosso entendimento, é uma manifestação da coerência de longo alcance entre as partículas pesadas e leves e a diluição associada do alvo, tornando-se difícil para destruir o sistema onde a partícula leve se liga a qualquer uma das partículas pesadas.

TABELA 5.3 – Posições de energia, $E^{(n)}/\mathcal{B}_3$, para os zeros de σ mostrados na Fig.(5.2) para $\mathcal{B}_{AB}/\mathcal{B}_3 = 0.01$. Na última coluna temos razões de energia, com limite unitário correspondente entre parênteses. Para $\mathcal{A} = 0.01$, também temos o resultado $n = 6$, $E^{(6)}/\mathcal{B}_3 = 0.4978$ (indicado por um mínimo para σ), com a energia proporção $\frac{E^{(6)}}{E^{(5)}} = 4.24$ sendo ainda mais próxima do fator de escala unitária 4.7.

\mathcal{A}	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$\frac{E^{(1)}}{E^{(2)}} (\text{ul})$
0.01	0.117488	0.031569	0.008279	0.001886	0.000275	3.7(4.7)
0.02	0.220402	0.032841	0.004805	0.000424	-	6.7(8.7)
0.03	0.125390	0.012351	0.000905	-	-	10.2(13.6)
0.04	0.079298	0.005296	-	-	-	15.0(19.5)
0.05	0.053320	0.002500	-	-	-	21.3(26.4)

Portanto, conforme diminuimos a energia E_k , observamos (nos resultados plotados) o primeiro zero para σ quando $E_k = (1/8)\mathcal{B}_3$; o segundo zero, quando $E_k = (1/32)\mathcal{B}_3$; o terceiro zero, quando $E_k = (1/128)\mathcal{B}_3$; o quarto zero em $E_k = (1/512)\mathcal{B}_3$; etc.

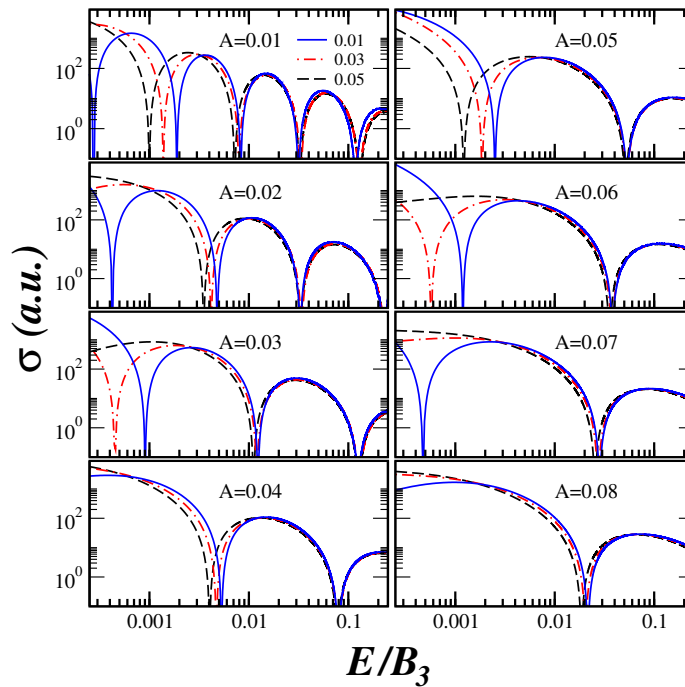


FIGURA 5.2 – Resultados obtidos para σ (em unidades arbitrárias) como uma função da energia de colisão (em unidades de \mathcal{B}_3), para três valores da energia de ligação AB , $\mathcal{B}_{AB}/\mathcal{B}_3 = 0.01$ (linhas azul-sólidas), 0.03 (linhas pontilhadas-vermelhas) e 0.05 (linhas pretas tracejadas), dadas em oito painéis. Cada painel é para um determinado valor fixo da relação de massa $\mathcal{A} \equiv m_B/m_A$ (indicado dentro dos painéis).

A partir dessa observação, identificamos claramente o fator de escala discreto entre os níveis de Efimov, $\mathcal{B}_3^{(n)} \sim 4\mathcal{B}_3^{(n+1)}$. Portanto, podemos supor que em nossos resultados plotados dados em Fig.(5.9) faltam um zero para σ , o que acontece com $E_k = (1/2)\mathcal{B}_3^{(0)}$. Portanto, identificando os zeros de σ com o rótulo n em E_k , obtemos

$$\sigma = 0, \quad \text{para} \quad E_k^{(n)} = (1/2)\mathcal{B}_3^{(n)}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Inspecionando os resultados obtidos para os casos em que $\mathcal{B}_{AB}/\mathcal{B}_3 > 0,01$, dado na Figs.(5.2) para $\mathcal{B}_{AB}/\mathcal{B}_3 = 0.03$ e $\mathcal{B}_{AB}/\mathcal{B}_3 = 0.05$, em comparação com os de $\mathcal{B}_{AB}/\mathcal{B}_3 = 0.01$, podemos concluir que os últimos são efetivamente c tende ao limite unitário, em que $1/a_{AB} = 0$.

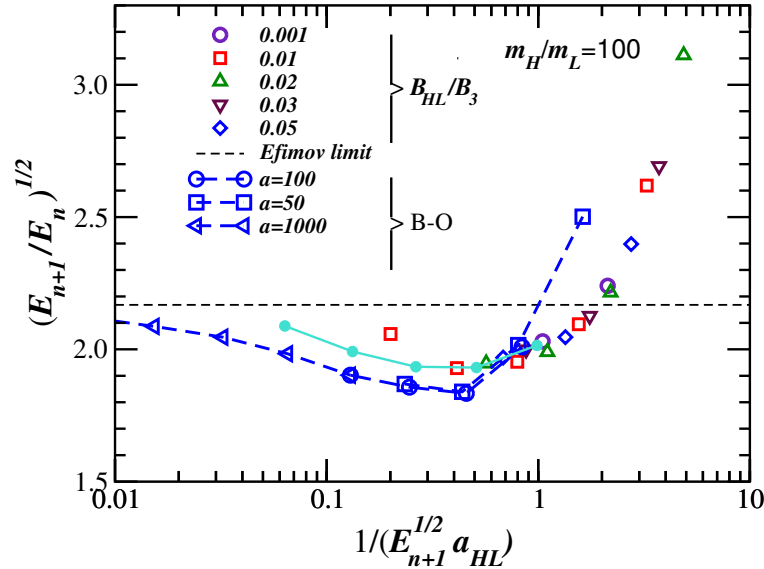


FIGURA 5.3 – Para $m_A/m_B = 100$, temos um gráfico de escala (para as massas a título de ilustração foi adota m_H a massa do bóson de maior massa, e m_L o bóson de menor massa) para as relações entre duas posições de energia consecutivas dadas pelos pólos da função de dispersão $k \cot \delta_0$, onde $k^2 = (m_A/\hbar^2)E_k$. Os pólos são identificados em $E_k = E_n$ (ou $k = k_n$, no espaço de tempo), com as proporções dadas por $\sqrt{E_{n+1}/E_n} = k_{n+1}/k_n$, que são plotados versus $1/(k_n a)$. Nesse caso, com $m_A = 100m_B$, $a^2 \approx \hbar^2/(2m_B \mathcal{B}_{AB})$ e $1/(k_n a) \approx \sqrt{\frac{2\mathcal{B}_{AB}}{100E_n}}$. No painel superior, para uma melhor visualização e comparação dos resultados adiabáticos com os dados pelo cálculo de Faddeev, $k_n a$ é multiplicado por 10 (para evitar a sobreposição com os resultados exatos mostrados no painel inferior).

Dos dados mostrados na Tabela (5.3), mostramos na Fig.(5.4), com pontos azuis (para as massas a título de ilustração foi adota m_β a massa do bóson de maior massa, e m_α o bóson de menor massa), a razão entre as energias correspondentes do primeiro e segundo zeros para a seção de choque, no caso de $\mathcal{B}_{AB} = 0.05\mathcal{B}_3$. Podemos verificar a partir deste gráfico, temos aproximadamente o mesmo escalonamento já verificado para o espectro de estado ligado de Efimov.

TABELA 5.4 – $E_k^{(n)}$ ($n = 1, 2, 3, 4$) em unidades de escala de três corpos \mathcal{B}_3 e as razões entre valores consecutivos de $E_k^{(n)}$, correspondendo aos zeros de σ , para o caso $m_B/m_A=0,01$. Consideramos quatro valores para as energias do átomo-dímero, \mathcal{B}_{AB} , também em unidades de \mathcal{B}_3 , com $\mathcal{B}_{AB} = 0$ mostrando uma extrapolação.

$\mathcal{B}_{AB} =$	0.05	0.03	0.02	0.01	0.001
$10E_k^{(1)}$	1.304	1.289	1.243	1.175	0.224
$10^2 E_k^{(2)}$	3.264	3.324	3.280	3.157	0.626
$10^3 E_k^{(3)}$	7.224	7.943	8.285	8.279	1.822
$10^3 E_k^{(4)}$	0.997	1.381	1.689	1.886	0.443
$10^4 E_k^{(5)}$	-	0.45	1.74	2.75	0.887
$E_k^{(1)}/E_k^{(2)}$	3.996	3.878	3.790	3.722	3.58
$E_k^{(2)}/E_k^{(3)}$	4.518	4.185	3.959	3.813	3.44
$E_k^{(3)}/E_k^{(4)}$	7.246	5.752	4.905	4.390	4.11
$E_k^{(4)}/E_k^{(5)}$	-	30.55	9.685	6.858	4.99

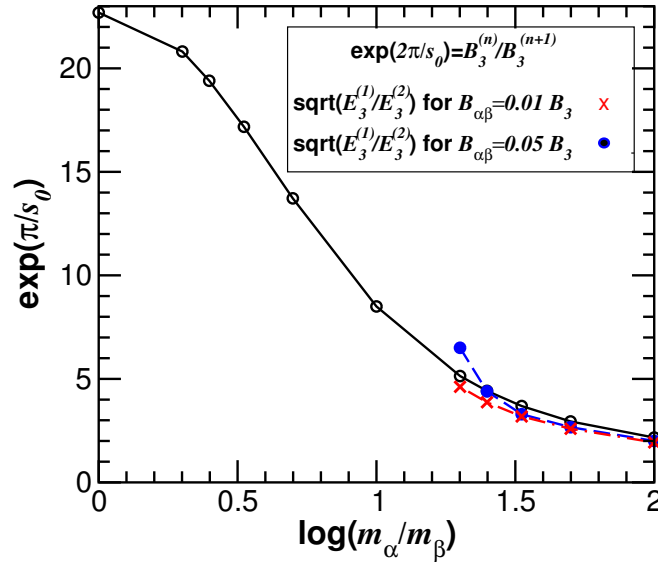


FIGURA 5.4 – As relações entre as energias de espalhamento correspondentes às posições dos zeros para a seção transversal são mostradas com pontos azuis (para as massas a título de ilustração foi adota m_β a massa do bóson de maior massa, e m_α o bóson de menor massa), no mesmo gráfico já verificado para o espectro de Efimov, quando se varia a razão de massa.

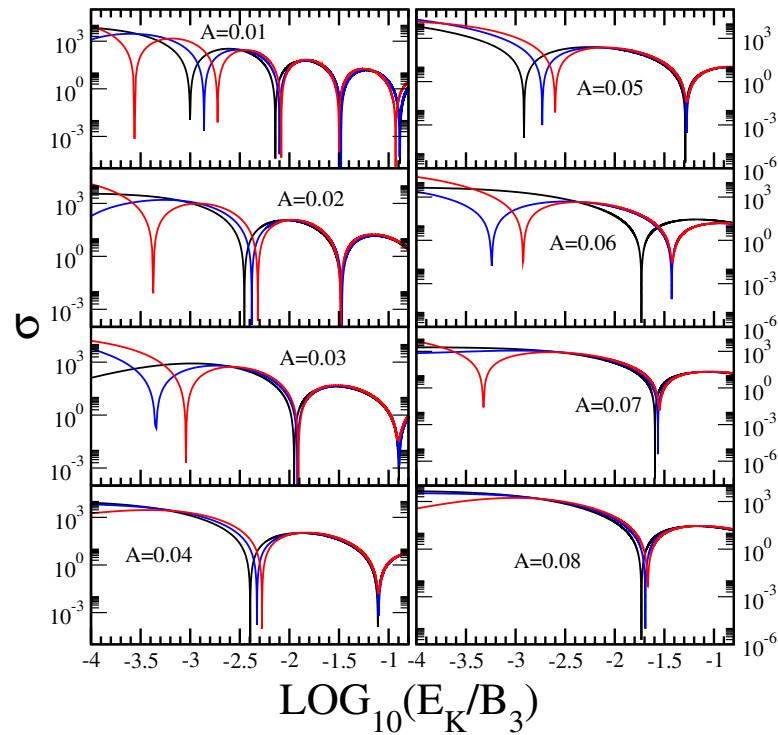


FIGURA 5.5 – O mesmo que na Fig.(5.2), mas alterando a escala do eixo x para $\log_{10}(E_k/B_3)$. Como mostrado, os mínimos para σ ficaram igualmente espaçados para $B_{AB}/B_3 = 0.01$, tal que $\Delta[\log_{10}(E_k/B_3)] \approx 0,6$. A partir dessa observação, podemos deduzir que $E_k^J/B_3 = (1/2)^{3+2J}$, onde $J = 0, 1, 2, 3$. Nós também podemos substituir o enredo acima por outro dado em \ln ao invés de \log_{10} , tal que $\ln(E_k^J/B_3) = (3 + 2J) * \ln(0,5)$.

6 Considerações Finais

Neste trabalho analisamos um sistema de três bósons utilizando a aproximação de Born-Oppenheimer para um sistema constituído por dois bósons pesados idênticos e um bóson leve. Estudamos inicialmente a dinâmica do bóson leve e derivamos analiticamente a forma do potencial efetivo ao qual chamamos de equação transcendental gerado por ela. Através do procedimento de Born-Oppenheimer, derivamos uma expressão analítica para a função de onda, dependendo das coordenadas relativas de Jacobi de três corpos. Nós reescrevemos e exibimos a função de onda em termos de duas coordenadas adimensionais e um parâmetro de escala adimensional.

Escolhemos um potencial de alcance zero para a interação entre o bóson leve e os bósons pesados. Calculamos analiticamente, também, a função de onda no espaço das configurações. No formalismo de Born-Oppenheimer utilizado, a distância de separação entre os bósons pesados, R , entra como um parâmetro externo na função de onda do bóson leve, $\psi(\mathbf{r}, R)$.

Analisando o comportamento de $\psi(\mathbf{r}, R)$ notamos que fixando-se a energia entre o bóson leve e os bósons pesados ($|E_2|$), a distância R e diminuindo a razão de m/M a cauda da função de onda se estende para distâncias r maiores. O motivo disto é que aumentando-se a intensidade do potencial efetivo, para que R e $|E_2|$ se mantenham constante, o bóson leve tem que se afastar. Comportamentos semelhantes podem ser observados fixando-se os outros parâmetros disponíveis, por exemplo: mantendo-se r e $|E_2|$ constantes e diminuindo m/M , mantendo-se r e m/M e aumentando R o sistema evolui no sentido de se desligar.

Após estudarmos a dinâmica do bóson leve, iniciamos o estudo do comportamento do par de bósons pesados idênticos. Para isso, consideramos duas situações que apesar de distintas mostram diversas coisas em comum (a interação entre o bóson leve e os pesados continua sendo a mesma): na primeira situação, nós consideramos a interação entre os bósons pesados acrescentando uma interação gaussiana e considerando o momento angular nulo e da diferença de massa entre os bósons. Na segunda situação, acrescentamos uma interação do tipo dipolo-dipolo, e também para um momento angular nulo e da diferença de massa entre os bósons, consideramos um potencial entre os bósons pesados.

Para o potencial gaussiano concluímos que o aumento da diferença de massa entre os bósons dá origem a um número maior de estados ligados por causa do aumento da intensidade do potencial efetivo. Utilizando uma imagem da área de partícula, a partícula leve (que gera uma interação efetiva entre as pesadas) pode ser mais facilmente trocada quanto mais leve for. Aumentar o momento angular tem efeito equivalente de acrescentar ao sistema um potencial

repulsivo, tornando o sistema mais fracamente ligado.

Consideramos uma interação gaussiana entre os bósons pesados e notamos que a introdução desse potencial tornou possível a dissociação do sistema de três corpos, isso tem um efeito semelhante a aumentar o momento angular. Fixando, por exemplo, uma razão de massa próxima a encontrada em sistemas reais para onde $m/M \approx 0.05$, observamos que uma amplitude $V_0 = 10|E_2|$ e um alcance de $R_0 = 8a_0^{AA}$ são suficientes para romper a energia de ligação do sistema.

Para a situação com um potencial dipolo, foi considerado um sistema de dois dipolos pesados onde foi estudado um sistema de três corpos composto de um bóson leve e dois dipolos pesados idênticos, todos confinados em três dimensões espaciais. Usamos uma interação de intervalo zero entre o bóson leve e cada um dos dois dipolos pesados idênticos. Concluimos que diminuindo a energia de ligação entre os subsistemas de dois corpos o sistema tende a se desligar. Acrescentar um potencial adicional ao potencial efetivo age apenas como um acréscimo ao potencial inicial.

Essa interação de alcance extremamente curto tem várias vantagens: primeiro, serve como um protótipo esquemático de uma interação de curto alcance; segundo, as propriedades podem ser derivadas semi-analiticamente; e terceiro, os resultados são universais por definição. A força é parametrizada em termos da energia ligando o sistema dos bósons leve-pesado que então é um de nossos parâmetros de entrada.

Nós nos limitamos a uma pequena razão de massa leve-pesada permitindo o uso da aproximação de Born-Oppenheimer para um potencial efetivo entre as duas partículas pesadas. O número de estados ligados cresce à medida que a energia de ligação entre dois bósons (leve-pesado) vai para zero. Diminuindo a diferença de massa entre os bósons encontramos um número menor de estados ligados de três corpos.

Os dois dipolos pesados que se movem lentamente também podem interagir diretamente com o potencial de Born-Oppenheimer. Aqui nós consideramos apenas a possibilidade real da interação dipolo-dipolo que tem uma dependência cúbica inversa de sua separação. A força dessa interação e, além do tamanho do momento dipolar, determinada pela direção dos momentos de dipolo em relação ao confinamento planar bidimensional. Ajustando essa orientação, que pode ser alcançada experimentalmente através de campos externos, a interação pode variar de um potencial atrativo a um potencial repulsivo que passa por zero. Temos neste trabalho essencialmente considerados apenas os potenciais repulsivos.

Depois de termos estabelecido o formalismo, discutimos as propriedades de três corpos emergindo do potencial de Born-Oppenheimer e evitando a interação direta entre os bósons. A partícula leve gera uma interação efetiva como consequência de sua troca entre as duas partículas pesadas. Portanto, quanto mais leve a partícula, mais fácil ela pode ser trocada, o que aumenta a atração efetiva do potencial.

Para a seção de espalhamento, foi verificado que o fator de escala de Efimov, para o sistema de duas partículas de maior massa (AA) e uma leve (B) para a configuração (AAB), pode ser verificado também no espalhamento da partícula pesada (A) pelo estado fracamente ligado (AB). Nosso principal objeto para essa seção foi explorar a física de Efimov na região de espalhamento

para o caso $(A - A - B)$, no sistema de três bósons com de massas não idéticas para a relação de massa $m_B \ll m_A$, próximo ao limite unitário dos subsistemas de dois bósons (AA) .

As quantidades que foram estudadas foram os deslocamentos de fase da onda S e suas correspondentes seções de choque, variando as energias de colisão da partícula que é espalhada. Neste caso foram utilizadas a aproximação de Born-Oppenheimer; iniciamos revisando alguns resultados para o estado ligado de três corpos, que demonstram a validade desta aproximação. A seguir aplicou-se esta mesma aproximação para o caso de espalhamento.

O discreto comportamento do fator de escala de Efimov, bem conhecido no espectro de baixa energia de sistemas ligados de três corpos para grandes comprimentos de espalhamento (limite unitário), foi identificado na dependência energética de uma seção de choque elástica de molécula-átomo em sistemas em desequilíbrio de massa. Isso acontece na colisão de um átomo pesado com massa m_A com um dímero fracamente ligado formado pelas partículas pesadas e uma partícula mais leve com relação de massa $m_B \ll m_A$.

Como mostrado, o observável δ_0 pode apresentar uma sequência de pólos seguindo a lei de escala de Efimov, quando a ligação de dois corpos de um dos pares se aproxima do limite unitário. Esse comportamento nos permite prever uma sequência de mínimos na seção de choque correspondente, que poderia ser verificado experimentalmente considerando misturas binárias de átomos ultra-frios com grande desequilíbrio de massa.

Os pólos de $k \cot \delta_0^R$, que correspondem aos zeros da seção de choque da onda S , estão diretamente conectados com o espectro Efimov de um sistema do tipo AAB próximo do limite unitário. Isto foi mostrado considerando um sistema com desequilíbrio de massa onde $m_B \ll m_A$, com os dois corpos AA interagindo no limite unitário exato e para um limite de energia de dois corpos AB próximo de zero ($B_{AB} = 0,01\mathcal{B}_3$).

Aproximando-se do limite unitário o sistema leve-pesado, a seção de choque elástica da onda S apresentou uma sequência de zeros ou mínimos em energias de colisão, seguindo de perto a lei geométrica de Efimov. Nossos resultados, obtidos com cálculos de Faddeev e suplementados por uma análise de Born-Oppenheimer, abriu uma perspectiva para detectar o discreto comportamento de escala a partir de dados de espalhamento de baixa energia.

Referências

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables**. [S.l.]: Courier Corporation, 1965.
- ADHIKARI, S. K.; DELFINO, A.; FREDERICO, T.; GOLDMAN, I.; TOMIO, L. Efimov and thomas effects and the model dependence of three-particle observables in two and three dimensions. **Physical Review A**, APS, v. 37, n. 10, p. 3666, 1988.
- ADHIKARI, S. K.; FREDERICO, T.; GOLDMAN, I. Perturbative renormalization in quantum few-body problems. **Physical Review letters**, APS, v. 74, n. 4, p. 487, 1995.
- AMADO, R.; NOBLE, J. Efimov's effect: a new pathology of three-particle systems. ii. **Physical Review D**, APS, v. 5, n. 8, p. 1992, 1972.
- AVANCINI, S.; MARINELLI, J.; KREIN, G. Compositeness effects in the bose-einstein condensation. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, IOP Publishing, v. 36, n. 34, p. 9045, 2003.
- BARONTINI, G.; WEBER, C.; RABATTI, F.; CATANI, J.; THALHAMMER, G.; INGUSCIO, M.; MINARDI, F. Observation of heteronuclear atomic efimov resonances. **Physical review letters**, APS, v. 103, n. 4, p. 043201, 2009.
- BHADURI, R. K.; CHATTERJEE, A.; ZYL, B. P. van. An elementary exposition of the efimov effect. **American Journal of Physics**, AAPT, v. 79, n. 3, p. 274–281, 2011.
- BRAATEN, E.; HAMMER, H.-W. Universality in few-body systems with large scattering length. **Physics Reports**, Elsevier, v. 428, n. 5-6, p. 259–390, 2006.
- BRAATEN, E.; HAMMER, H.-W. Efimov physics in cold atoms. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 322, n. 1, p. 120–163, 2007.
- DEM KOV, Y. N.; OSTROVSKII, V. N. **Zero-range potentials and their applications in atomic physics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- EFIMOV, V. Energy levels arising from resonant two-body forces in a three-body system. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 33, n. 8, p. 563–564, 1970.
- FADDEEV, L. D.; STEKLOVA, A. nauk SSSR. Matematicheski institut im. V.; GUTFREUND, C.; MEROZ, I. **Mathematical aspects of the three-body problem in the quantum scattering theory**. [S.l.]: Israel Program for Scientific Translations Jerusalem, 1965.
- FEDOROV, D.; JENSEN, A. Efimov effect in coordinate space faddeev equations. **Physical review letters**, APS, v. 71, n. 25, p. 4103, 1993.

- FERLAINO, F.; GRIMM, R. Trend: Forty years of efimov physics: How a bizarre prediction turned into a hot topic. **Physics**, APS, v. 3, p. 9, 2010.
- FONSECA, A.; REVAI, J.; MATVEENKO, A. Three-body molecular description of $9\text{be}(i)$. born-opperheimer approximation. **Nuclear Physics A**, Elsevier, v. 326, n. 1, p. 182–192, 1979.
- FONSECA, A. C.; REDISH, E. F.; SHANLEY, P. Efimov effect in an analytically solvable model. **Nuclear Physics A**, Elsevier, v. 320, n. 2, p. 273–288, 1979.
- FREDERICO, T.; DELFINO, A.; TOMIO, L.; YAMASHITA, M. T. Universal aspects of light halo nuclei. **Progress in Particle and Nuclear Physics**, Elsevier, v. 67, n. 4, p. 939–994, 2012.
- FREDERICO, T.; TOMIO, L.; DELFINO, A.; AMORIM, A. Scaling limit of weakly bound triatomic states. **Physical Review A**, APS, v. 60, n. 1, p. R9, 1999.
- GOGOLIN, A. O.; MORA, C.; EGGER, R. Analytical solution of the bosonic three-body problem. **Physical review letters**, APS, v. 100, n. 14, p. 140404, 2008.
- HAMMER, H.-W.; PLATTER, L. Efimov states in nuclear and particle physics. **Annual Review of Nuclear and Particle Science**, Annual Reviews, v. 60, p. 207–236, 2010.
- HANSEN, K.; FEDOROV, D.; JENSEN, A.; ZINNER, N. Classical crystal formation of dipoles in two dimensions. **Physica Scripta**, IOP Publishing, v. 90, n. 12, p. 125002, 2015.
- JENSEN, A.; RIISAGER, K.; FEDOROV, D. V.; GARRIDO, E. Structure and reactions of quantum halos. **Reviews of modern physics**, APS, v. 76, n. 1, p. 215, 2004.
- KNOOP, S.; FERLAINO, F.; MARK, M.; BERNINGER, M.; SCHBEL, H.; NAGERL, H.-C.; GRIMM, R. Observation of an efimov-like trimer resonance in ultracold atom–dimer scattering. **Nature Physics**, Nature Publishing Group, v. 5, n. 3, p. 227, 2009.
- KRAEMER, T.; MARK, M.; WALDBURGER, P.; DANZL, J.; CHIN, C.; ENGESER, B.; LANGE, A.; PILCH, K.; JAAKKOLA, A.; NAGERL, H.-C. *et al.* Evidence for efimov quantum states in an ultracold gas of caesium atoms. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 440, n. 7082, p. 315, 2006.
- LIM, T.; SHIMER, B. The fonseca-redish-shanley solvable model for a molecular three-body system and the efimov effect in two dimensions. **Zeitschrift fur Physik A Atoms and Nuclei**, Springer, v. 297, n. 3, p. 185–188, 1980.
- MITRA, A. The nuclear three-body problem. In: **Advances in nuclear physics**. [S.l.]: Springer, 1969. p. 1–70.
- NAIDON, P.; ENDO, S. Efimov physics: a review. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 80, n. 5, p. 056001, 2017.
- NIELSEN, E.; FEDOROV, D.; JENSEN, A. Three-body halos in two dimensions. **Physical Review A**, APS, v. 56, n. 4, p. 3287, 1997.
- NIELSEN, E.; FEDOROV, D. V.; JENSEN, A. S.; GARRIDO, E. The three-body problem with short-range interactions. **Physics Reports**, Elsevier, v. 347, n. 5, p. 373–459, 2001.
- PETHICK, C. J.; SMITH, H. **Bose-Einstein condensation in dilute gases**. [S.l.]: Cambridge university press, 2002.

- PHILLIPS, A. Three-body systems in nuclear physics. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 40, n. 8, p. 905, 1977.
- PIZA, A. F. R. de T. **Mecânica quântica**. [S.l.]: Edusp Sao Paulo, 2003.
- SAKURAI. **Modern quantum mechanics, revised edition**. [S.l.]: AAPT, 1995.
- SHALCHI, M.; DELFINO, A.; FREDERICO, T.; TOMIO, L. Scattering of cold 4He on 4He – 6Li and 4He – ^{23}Na molecules. **arXiv preprint arXiv:1809.09140**, 2018.
- SHALCHI, M.; YAMASHITA, M.; HADIZADEH, M.; FREDERICO, T.; TOMIO, L. Neutron- ^{19}C scattering: Emergence of universal properties in a finite range potential. **Physics letters B**, Elsevier, v. 764, p. 196–202, 2017.
- SHALCHI, M.; YAMASHITA, M.; HADIZADEH, M.; GARRIDO, E.; TOMIO, L.; FREDERICO, T. Probing efimov discrete scaling in an atom-molecule collision. **Physical Review A**, APS, v. 97, n. 1, p. 012701, 2018.
- SOUZA, L. A.; BELLOTTI, F. F.; FREDERICO, T. Wave function for two-neutron halo states. In: IOP PUBLISHING. **Journal of Physics: Conference Series**. [S.l.], 2015. v. 630, n. 1, p. 012043.
- SOUZA, L. A.; BELLOTTI, F. F.; YAMASHITA, M. T.; FREDERICO, T.; TOMIO, L. Core momentum distribution in two-neutron halo nuclei. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 757, p. 368–375, 2016.
- THOMAS, L. The interaction between a neutron and a proton and the structure of h^3 . **Physical review**, APS, v. 47, n. 12, p. 903, 1935.
- TJON, J. Bound states of 4He with local interactions. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 56, n. 3, p. 217–220, 1975.
- YAMASHITA, M. T.; FREDERICO, T.; DELFINO, A.; TOMIO, L. Scaling limit of virtual states of triatomic systems. **Physical Review A**, APS, v. 66, n. 5, p. 052702, 2002.
- YAMASHITA, M. T.; TOMIO, L.; FREDERICO, T. Radii in weakly-bound light halo nuclei. **arXiv preprint nucl-th/0401063**, 2004.

Apêndice A - Teoria de espalhamento

Vamos tratar do espalhamentos de partículas por um potencial central de curto alcance. Esta teoria também pode ser aplicada a duas partículas que interagem por um potencial que depende apenas da posição relativa entre as partículas, o comportamento de um potencial local pode ser expresso pela seguinte expressão

$$\lim_{r \rightarrow \infty} rV(r) = 0, \quad (\text{A.1})$$

ou seja, no limite assintótico as autofunções do hamiltoniano total diferem das soluções livres apenas por uma defasagem $\delta(E)$ (PIZA, 2003). Como veremos a seção de choque do problema pode ser encontrada em termos desta defasagem.

A.1 A equação de Lippmann-Schwinger

Vamos partir com um problema independente do tempo, onde a hamiltoniana geral do problema pode ser escrita como

$$H = H_0 + V \quad (\text{A.2})$$

H_0 representa o operador hamiltoniano livre do problema, este por sua vez satisfaz a seguinte equação

$$H_0|\varphi\rangle = E_0|\varphi\rangle \quad (\text{A.3})$$

porém, estamos interessados na solução do problema completo

$$(H_0 + V)|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (\text{A.4})$$

Como estudamos um caso onde o potencial é local, podemos inferir que longe da região de espalhamento a solução para a função de onda total do sistema deve ser uma soma da solução da equação de Schrodinger homogênea e não homogênea, sendo que a solução homogênea é a

solução da partícula livre. Assim a solução geral do problema deve ser dada por

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{E - H_0 + i\eta} V |\psi^\pm\rangle + |\varphi\rangle \quad (\text{A.5})$$

esta expressão é conhecida como Equação de Lippmann-Schwinger, o significado físico do sinal (\pm) vai ser discutido no momento em que estudarmos a solução geral do sistema a longas distâncias.

Vamos estudar a equação (A.5) no espaço de configurações, para isso multiplicamos por $\langle \mathbf{x} |$ pela esquerda

$$\langle \mathbf{x} | \psi_k^{(\pm)} \rangle = \langle \mathbf{x} | \frac{1}{E - H_0 + i\eta} V |\psi^\pm\rangle + \langle \mathbf{x} | \varphi \rangle, \quad (\text{A.6})$$

onde $\langle \mathbf{x} | \varphi \rangle$ é a representação de uma onda plana, que para uma partícula com momento \mathbf{p} é dada por

$$\langle \mathbf{x} | \varphi \rangle = \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \quad (\text{A.7})$$

Inserindo uma unidade no primeiro termo podemos definir a função de Green do problema no espaço de configurações

$$\langle \mathbf{x} | \psi_k^{(\pm)} \rangle = \int d^3x' \langle \mathbf{x} | \frac{1}{E - H_0 + i\eta} | \mathbf{x}' \rangle \langle \mathbf{x}' | V | \psi^{(\pm)} \rangle + \langle \mathbf{x} | \varphi \rangle$$

$$\langle \mathbf{x} | \psi_k^{(\pm)} \rangle = \int d^3x' G_{(\pm)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | V | \psi^{(\pm)} \rangle + \langle \mathbf{x} | \varphi \rangle \quad (\text{A.8})$$

Resolvemos a equação de Green a fim de escrever a equação de Lippmann-Schwinger na sua forma integral

$$\begin{aligned} G_{(\pm)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &\equiv \frac{\hbar^2}{2m} \langle \mathbf{x} | \frac{1}{E - H_0 \pm i\eta} | \mathbf{x}' \rangle \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3p' \int d^3p'' \langle \mathbf{x} | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}' | \frac{1}{E - H_0 \pm i\eta} | \mathbf{p}'' \rangle \langle \mathbf{p}'' | \mathbf{x}' \rangle \end{aligned}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \int d^3p' \frac{d^3p''}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{E - p^2/2m \pm i\eta} \quad (\text{A.9})$$

para solucionar a integral vamos fazer uma mudança de variável $\mathbf{p}' = \hbar\mathbf{q}$ e substituir a energia total do sistema por $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$$G_{(\pm)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\hbar^2}{2m} \int \frac{dq \hbar^3 q^2}{(2\pi\hbar)^3} \int d\phi \int d(\cos\theta) \frac{e^{\frac{ip'|x-x'|}{\hbar} \cos\theta}}{\frac{\hbar^2}{2m} k^2 - \frac{\hbar^2}{2m} q^2 \pm i\eta}, \quad (\text{A.10})$$

resolvendo a integral nos ângulos

$$G_{(\pm)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{i|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \int dq q \frac{(e^{iq|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - e^{iq|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|})}{q^2 - k^2 \pm i\eta} \quad (\text{A.11})$$

e usando o teorema de resíduos podemos escrever

$$G_{(\pm)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (\text{A.12})$$

Voltando a equação de Lippmann-Schwinger no espaço de configurações temos

$$\langle \mathbf{x} | \psi_k^{(\pm)} \rangle = \langle \mathbf{x} | \varphi \rangle - \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3x' \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \langle \mathbf{x}' | V | \psi_k^{(\pm)} \rangle. \quad (\text{A.13})$$

A função de onda total do sistema $\langle \mathbf{x} | \psi^{(\pm)} \rangle$ é escrita como uma contribuição da onda incidente, mais uma contribuição do efeito de espalhamento. Vamos assumir que como observadores estamos a uma distância suficientemente grande do centro espalhador. Fazendo algumas manipulações algébricas assumindo $x \gg x'$ assim podemos usar algumas aproximações e com isso podemos escrever uma expressão integral para a equação de Lippmann-Schwinger para um observador distante do centro espalhador (SAKURAI, 1995)

$$\langle \mathbf{x} | \psi_k^{(\pm)} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle - \frac{2m}{4\pi\hbar^2} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r} \int d^3x' e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'} V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \psi_k^{(\pm)} \rangle$$

$$\langle \mathbf{x} | \psi_k^{(\pm)} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \frac{e^{ikr}}{r} f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \right]. \quad (\text{A.14})$$

Note que temos uma onda plana com momento \mathbf{k} em direção ao centro espalhador e uma contribuição da onda espalhada que pode estar entrando ou saindo do centro espalhador após ser espalhada, ambas soluções fazem sentido matemático porém, apenas a solução com sinal positivo é fisicamente válida. Escrevemos a equação (B.18) observando que a onda que sai possui uma amplitude de de ser espalhada $f(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ que é dada por

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{2m}{4\pi\hbar^2}(2\pi)^3 \int d^3\mathbf{x}' \frac{e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'}}{(2\pi)^{3/2}} V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \psi_k^{(\pm)} \rangle$$

de onde podemos encontrar a sessão de choque diferencial do espalhamento

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2. \quad (\text{A.15})$$

Vamos escrever a amplitude de espalhamento na sua forma integral [47], para isso vamos substituir na equação da amplitude de espalhamento (B.19) o resultado encontrado para a função de onda total do sistema (B.8)

$$\begin{aligned} f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = & -\frac{2m}{4\pi\hbar^2}(2\pi)^3 \int d^3\mathbf{x}' \frac{e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'}}{(2\pi)^{3/2}} V(\mathbf{x}') \\ & \times \left[e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'} + \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right) \int d^3\mathbf{x}'' G(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') V(\mathbf{x}'') \psi_k(\mathbf{x}'') \right], \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

reescalando o potencial como $V(r) = \frac{\hbar^2}{m}v(r)$ e utilizando algumas manipulações analíticas podemos escrever

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \approx -\frac{1}{4\pi}v(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) + \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{v(\mathbf{k}' - \mathbf{q})}{k^2 - q^2 + i\eta} f(\mathbf{q}, \mathbf{k}), \quad (\text{A.17})$$

foi feita uma mudança de variável $q = p/\hbar$ encontrou-se uma equação integral para a amplitude de espalhamento, onde $v(k)$ é a transformada de Fourier do potencial $v(r)$. A contribuição predominante para a amplitude de espalhamento ocorre para vetores de onda \mathbf{q} tal que $q^2 = k^2$, esta expressão é muito útil para realizar uma expansão a fim de encontrar a amplitude de espalhamento.

A.2 Expansão em ondas parciais

Como estudamos o caso de um potencial que depende apenas da posição relativa entre as partículas, podemos esperar para a função de onda espalhada tenha um comportamento axialmente simétrico. Isto sugere que uma boa base para a solução do problema é a base de ondas parciais. Estudar a relação dos pólos na matriz $T(E)$ com os estados ligados.

A.2.1 Pólos na matriz $T(E)$ e estados ligados

A solução formal para a matriz de transição pode ser escrita como

$$T = \frac{1}{1 - VG_E} V. \quad (\text{A.18})$$

Existem singularidades quando o denominador da Eq.(B.64) é zero, estes pólos podem ser encontrados usando

$$\det(1 - G_E) = 0. \quad (\text{A.19})$$

Esta condição é satisfeita para alguns valores de energia onde alguns destes valores representam estados ligados [48]. Para certos valores do potencial a matriz de transição também vai apresentar pólos, porém estes pólos são menos interessantes pois refletem apenas uma propriedade matemática do potencial.

Os estados ligados são encontrados mais familiarmente solucionando a equação de Schrödinger

$$(H_0 + V)|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (\text{A.20})$$

Porém, para solucionar o problema (A.20) usamos o formalismo das funções de Green, onde encontramos solucionando a equação diferencial que representa a equação de Schrödinger uma solução da forma

$$|\psi\rangle = |\varphi\rangle + G_E V |\psi\rangle \quad (\text{A.21})$$

Perceba que a contribuição da solução homogênea para a solução da função de onda total não obedece um comportamento que esperamos para uma função de onda de um estado ligado. Para um estado ligado esperamos que a função de onda satisfaça

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = 0, \quad (\text{A.22})$$

como sabemos a partícula livre não respeita este comportamento. Voltando a matriz de transição notamos que este operador pode ser escrito em termos da amplitude de espalhamento

$$T_l(k) = -\frac{f_l(k)k}{\pi}, \quad (\text{A.23})$$

assim, um pólo na matriz T é um pólo na amplitude de espalhamento

$$\begin{aligned} f_{l=0} &= \frac{1}{k} \frac{1}{\cot \delta_0 - ik} \\ &= \frac{1}{k} \frac{\tan \delta_0(k)}{1 - i \tan \delta_0(k)}. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Notamos que, os pólos ocorrem para valores onde $\tan \delta_0 = -i$, lembrando da definição do comprimento de espalhamento podemos concluir que os pólos ocorrem para valores de $k = i/a$, assim notamos que a energia de ligação possui um valor dado por

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \\ &= -|E_B| \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

onde

$$E = \hbar^2 k^2 / 2m$$

A.3 Espalhamento por um potencial delta de Dirac

Considerando um potencial delta de Dirac é possível mostrar que independente da energia da partícula incidente apenas a onda-S contribui para a amplitude de espalhamento, ou seja, apenas valores de $l = 0$ devem ser levados em conta na soma dos momentos angulares. Este resultado pode ser obtido escrevendo a equação (A.17) da seguinte forma

$$\sum_l (2l+1) f_l(k) P_l(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}) = \frac{v(\mathbf{k}' - \mathbf{k})}{4\pi} + \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{v(\mathbf{k}' - \mathbf{q}) f(\mathbf{q}, \mathbf{k})}{k^2 - q^2 + i\eta} \quad (\text{A.26})$$

multiplicando em ambos os lados por $\int d\Omega P_{l'}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})$ e lembrando que a transformada de Fourier da delta é uma constante temos

$$\begin{aligned} \int d\Omega \sum_l (2l+1) f_l(k) P_l(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}) P_{l'}(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}) &= - \int d\Omega \frac{v_0}{4\pi} P_{l'}(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}) \\ + \sum_l \int d\Omega \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{v_0}{k^2 - q^2 + i\eta} (2l+1) f_l(k) P_l(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}) P_{l'}(\mathbf{q}' \cdot \mathbf{k}) & \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Usando a propriedade da ortogonalidade dos polinômios de Legendre encontramos

$$\sum_l 2f_l(k)\delta_{l'l} = \frac{v_0}{4\pi} \frac{2}{2l'+1} \delta_{l'0}$$

$$+ \sum_l \int d\Omega \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{v_0}{k^2 - q^2 + i\eta} (2l+1) f_l(k) P_{l'}(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}) P_{l'}(\mathbf{q}' \cdot \mathbf{k}) \quad (\text{A.28})$$

Logo, percebemos que apenas os termos de $l' = 0$ podem existir. Substituindo $l' = 0$ na Eq.(A.28) temos

$$\sum_l 2f_l(k)\delta_{0l} = -\frac{2v_0}{4\pi} + \sum_l \int d\Omega \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{v_0}{k^2 - q^2 + i\eta} (2l+1) f_l(k) P_0(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}) P_{l'}(\mathbf{q}' \cdot \mathbf{k})$$

$$2f_0(k) = -\frac{2v_0}{2\pi} + \sum_l \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{v_0}{k^2 - q^2 + i\eta} (2l+1) f_l(k) \frac{2}{2l'+1} \delta_{l0}, \quad (\text{A.29})$$

rearranjando os termos podemos escrever

$$f_0(k) = -\frac{v_0}{4\pi} + \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{v_0}{k^2 - q^2 + i\eta} f_0(k) \quad (\text{A.30})$$

Concluimos que somente a onda-s contribui para o espalhamento por um potencial delta de Dirac.

A.4 Matriz de transição $T(E)$ para o problema de dois corpos

A matriz de transição T é um operador fundamental no estudo de teoria de espalhamento e problemas de poucos corpos. Podemos escrever este operador como

$$T(E) = V + VG_0(E)T(E), \quad (\text{A.31})$$

para um potencial diagonal temos $V = \lambda|\chi\rangle\langle\chi|$, assim encontramos

$$T(E) = \lambda|\chi\rangle\langle\chi| + \lambda|\chi\rangle\langle\chi|G_0(E)T(E) \quad (\text{A.32})$$

Multiplicando pela esquerda por $\langle\chi|G_0$

$$\langle \chi | G_0 T(E) = \lambda \langle \chi | G_0 | \chi \rangle \langle \chi | + \langle \chi | G_0 \langle \chi | G_0 T(E) \quad (\text{A.33})$$

e rearranjando os termos podemos escrever

$$\langle \chi | G_0 T(E) = \frac{\lambda \langle \chi | G_0 | \chi \rangle}{1 - \lambda \langle \chi | G_0 | \chi \rangle} \langle \chi | \quad (\text{A.34})$$

Substituindo em Eq.(A.85) temos

$$T(E) = \lambda | \chi \rangle \langle \chi | + \lambda | \chi \rangle \frac{\lambda \langle \chi | G_0 | \chi \rangle}{1 - \lambda \langle \chi | G_0 | \chi \rangle} \langle \chi |,$$

e reescrevendo esta expressão como

$$T(E) = | \chi \rangle \frac{\lambda}{1 - \lambda \langle \chi | G_0 | \chi \rangle} \langle \chi |$$

$$T(E) = | \chi \rangle \tau(E) \langle \chi | \quad (\text{A.35})$$

onde o elemento de matrix $\tau(E)$ é dado por

$$\tau(E) = \left(\lambda^{-1} - \langle \chi | G_0 | \chi \rangle \right)^{-1} \quad (\text{A.36})$$

Introduzindo a unidade $I = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} |$ podemos escrever

$$\tau(E) = \left(\frac{1}{\lambda} - \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \langle \chi | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}' | G_0(E) | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \chi \rangle \right)^{-1}$$

$$\tau(E) = \left(\frac{1}{\lambda} - \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{|g(p)|^2}{E - \frac{p^2}{2m_{red}} + i\epsilon} \right)^{-1} \quad (\text{A.37})$$

Sendo m_{red} a massa reduzida e $g(p) = \langle \mathbf{p} | \chi \rangle$ o fator de forma do potencial V . No caso do potencial δ -Dirac o fator de forma do potencial $g(p)$ é igual a 1 e neste caso a integral que aparece na eq. (A.37) é divergente para grandes momentos. A divergência pode ser eliminada utilizando-se um corte ou através da introdução de uma escala física (no capítulo seguinte será mostrado que os dois métodos são equivalentes).

A informação física é introduzida atribuindo-se um valor físico, λ_R , para a matriz-T num ponto de subtração de energia $E = -\mu_{(2)}^2$ (o índice entre parênteses subscrito em μ^2 indica que estamos considerando a escala de 2-corpos), ou seja,

$$\tau_R(-\mu_{(2)}^2) = \lambda_R(-\mu_{(2)}^2) \quad (\text{A.38})$$

o índice subscrito R significa renormalizado.

$$\begin{aligned} \tau_R(-\mu_{(2)}^2) &= \left(\lambda^{-1} - \int d^3p \frac{1}{-\mu_{(2)}^2 - \frac{p^2}{2m_{red}}} \right)^{-1} = \lambda_R(-\mu_{(2)}^2), \\ \lambda^{-1} - \int d^3p \frac{1}{-\mu_{(2)}^2 - \frac{p^2}{2m_{red}}} &= \lambda_R^{-1}(-\mu_{(2)}^2), \\ \lambda^{-1} &= \lambda_R^{-1}(-\mu_{(2)}^2) + \int d^3p \frac{1}{-\mu_{(2)}^2 - \frac{p^2}{2m_{red}}} \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Substituindo agora o resultado de $\lambda^{-1} =$ em (A.37) chegamos na forma da equação subtraída:

$$\tau_R^{-1}(E) = \lambda_R^{-1}(-\mu_{(2)}^2) + (E + \mu_{(2)}^2) \int d^3p \frac{1}{(-\mu_{(2)}^2 - \frac{p^2}{2m_{red}})(E - \frac{p^2}{2m_{red}} + i\epsilon)} \quad (\text{A.40})$$

Agora a integral que aparece em (A.39) é finita. Calculando a integral utilizando o método dos resíduos, substituindo a massa dos dois corpos e substituindo $E = k^2$ (em unidades de $\hbar = m = 1$), chegamos na forma final da equação da matriz-T renormalizada para dois corpos idênticos:

$$\tau_R^{-1}(E) = \lambda_R^{-1}(-\mu_{(2)}^2) + 2\pi^2(\mu_{(2)} + ik) \quad (\text{A.41})$$

Agora a Eq.(A.40) pode ser interpretada em termos da amplitude de espalhamento, $f_0 \approx 1/(-1/a - ik)$ (para k tendendo a zero):

$$f_0 = -2\pi^2\tau_R(E)$$

$$f_0 = \frac{1}{-\frac{\lambda_R^{-1}(-\mu_{(2)}^2)}{2\pi^2} - \mu_{(2)} - ik}$$

assim para $\mu_{(2)} = 0$ temos que o comprimento de espalhamento é dado por $a = 2\pi^2\lambda_R(0)$.

A.4.1 O Potencial delta de Dirac

Um potencial local escrito em coordenadas espaciais é dado por

$$\langle \mathbf{R}' | V | \mathbf{R} \rangle = V(\mathbf{R})\delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}), \quad (\text{A.42})$$

onde $V(\mathbf{R}) = (2\pi)^D\lambda\delta(\mathbf{R})$. No espaço dos momentos este potencial pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}' | V | \mathbf{p} \rangle &= \langle \mathbf{p}' | \left\{ \int d^D \mathbf{R}' | \mathbf{R}' \rangle \langle \mathbf{R}' | \right\} V \left\{ \int d^D \mathbf{R} | \mathbf{R} \rangle \langle \mathbf{R}' | \right\} | \mathbf{p} \rangle \\ &= \int d^D \mathbf{R} \int d^D \mathbf{R}' \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} e^{-i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{R}'} \langle \mathbf{R}' | V | \mathbf{R} \rangle \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}} \\ &= \lambda \int d^D \mathbf{R} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}} \delta(\mathbf{R}) \int d^D \mathbf{R}' e^{-i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{R}'} \delta(\mathbf{R}') \end{aligned}$$

$$\langle \mathbf{p}' | V | \mathbf{p} \rangle = \lambda g^*(p)g(p'), \quad (\text{A.43})$$

onde $g(p)$ é o fator de forma do potencial, no caso de um potencial delta de Dirac temos $g(p) = 1$.

Apêndice B - Coordenadas e momentos relativos de Jacobi

B.1 O problema clássico de três corpos

Devido a quantidade de variáveis e as dimensões do potencial, aplicamos uma transformação para as coordenadas de Jacobi as quais formam uma base ortogonal e permitem reescrever em termos de coordenadas internas do sistema, como mostrado na Figura B.1. Do lado esquerdo da figura posição das partículas é configurada de maneira a se ter um sistema de coordenadas com relação ao sistema e massa de três corpos no espaço das configurações. Do lado direito podemos notar o sistema na configuração dos momentos de Jacobi.

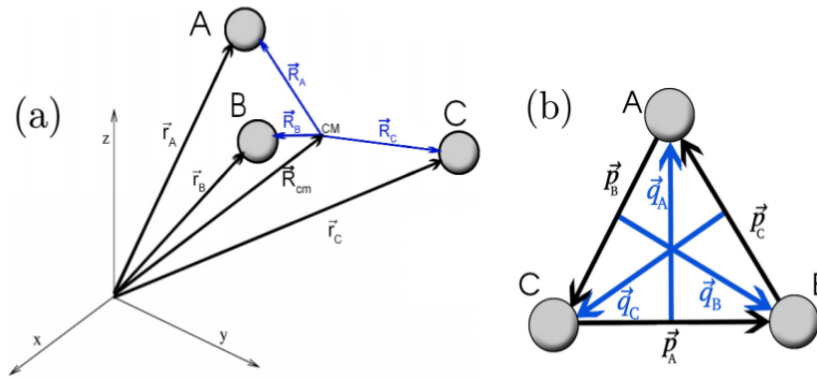


FIGURA B.1 – Sistema de coordenadas para um sistema de três corpos. À esquerda (a) temos o esquema da posição das três partículas (A, B e C) com relação ao centro de massa do sistema de três corpos no espaço das configurações. Do lado direito o esquema dos momentos relativos de Jacobi das três partículas.

Os atributos físicos das três partículas são rotulados como $\alpha = i, j, k$. Essas massas são m_α , e suas posições e velocidades no quadro do laboratório são respectivamente dadas por r_α e $\mathbf{v}_\alpha = \frac{d\mathbf{r}_\alpha}{dt}$. O momento de cada partícula é $K_\alpha = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$. O momento total K e o livre Hamiltoniano H_0 do sistema de três corpos são escritos como

$$\mathbf{K} = m_i \mathbf{v}_i + m_j \mathbf{v}_j + m_k \mathbf{v}_k = \mathbf{K}_i + \mathbf{K}_j + \mathbf{K}_k, \quad (\text{B.1})$$

$$H_0 = \frac{\mathbf{K}_i^2}{2m_i} + \frac{\mathbf{K}_j^2}{2m_j} + \frac{\mathbf{K}_k^2}{2m_k} \quad (\text{B.2})$$

A posição e velocidade do centro de massa (CM) são encontradas

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{m_i \mathbf{r}_i + m_j \mathbf{r}_j + m_k \mathbf{r}_k}{M}, \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{V}_{cm} = \frac{d\mathbf{R}_{cm}}{dt} = \frac{m_i \mathbf{v}_i + m_j \mathbf{v}_j + m_k \mathbf{v}_k}{M} \quad (\text{B.4})$$

onde a massa total é $M = m_i + m_j + m_k$. A velocidade e as coordenadas relativas entre cada partícula α e o centro de massa CM do sistema são mostrados na Fig.B.1 e lidas

$$\mathbf{R}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{R}_{cm}, \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{V}_{cm} = \frac{d\mathbf{R}_\alpha}{dt} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{V}_{cm}. \quad (\text{B.6})$$

No centro de massa CM , o momento da partícula α é escrito como

$$\mathbf{k}_\alpha = m_\alpha \mathbf{V}_\alpha \quad (\text{B.7})$$

onde V_α é dado pela Eq.(B.6). Além disso, no centro de massa CM os três momentos devem cumprir

$$\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j + \mathbf{k}_k = 0. \quad (\text{B.8})$$

Inserindo a velocidade do CM da Eq.(B.4) e a velocidade relativa da partícula α da Eq.(B.6) na Eq.(B.7), o momento da partícula α o centro de CM torna-se

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_\alpha &= m_\alpha \left(\mathbf{v}_\alpha - \frac{m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\beta \mathbf{v}_\beta + m_\gamma \mathbf{v}_\gamma}{M} \right), \\ &= \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta + m_\gamma} \left[(m_\alpha + m_\beta + m_\gamma) \mathbf{v}_\alpha - m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\beta \mathbf{v}_\beta + m_\gamma \mathbf{v}_\gamma \right], \end{aligned}$$

$$\mathbf{k}_\alpha = \frac{m_\alpha(m_\beta + m_\gamma)}{m_\alpha + m_\beta + m_\gamma} \left(\mathbf{v}_\alpha - \frac{m_\beta \mathbf{v}_\beta + m_\gamma \mathbf{v}_\gamma}{m_\beta + m_\gamma} \right), \quad (\text{B.9})$$

Relembrando que (α, β, γ) representa a permutação cíclica de (i, j, k) , o momento de cada partícula no centro de massa CM tem a forma

$$\mathbf{k}_i = \frac{m_i(m_j + m_k)}{m_i + m_j + m_k} \left(\mathbf{v}_i - \frac{m_j \mathbf{v}_j + m_k \mathbf{v}_k}{m_j + m_k} \right), \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{k}_j = \frac{m_j(m_i + m_k)}{m_i + m_j + m_k} \left(\mathbf{v}_j - \frac{m_i \mathbf{v}_i + m_k \mathbf{v}_k}{m_i + m_k} \right), \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{k}_k = \frac{m_k(m_i + m_j)}{m_i + m_j + m_k} \left(\mathbf{v}_k - \frac{m_i \mathbf{v}_i + m_j \mathbf{v}_j}{m_i + m_j} \right). \quad (\text{B.12})$$

notar que os momentos dados em Eqs.(B.10) a (B.12) formam a relação na Eq.(B.8). Assim podemos escrever os momentos das três partículas com relação ao centro de massa como, sendo $i, j, k = \alpha, \beta, \gamma$ e $\alpha \neq \beta \neq \gamma$.

$$\mathbf{k}_\alpha = \frac{m_\alpha(m_\beta + m_\gamma)}{m_\alpha + m_\beta + m_\gamma} \left(\mathbf{v}_\alpha - \frac{m_\beta \mathbf{v}_\beta + m_\gamma \mathbf{v}_\gamma}{m_\beta + m_\gamma} \right), \quad (\text{B.13})$$

$$\mathbf{k}_\beta = \frac{m_\beta(m_\alpha + m_\gamma)}{m_\alpha + m_\beta + m_\gamma} \left(\mathbf{v}_\beta - \frac{m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\gamma \mathbf{v}_\gamma}{m_\alpha + m_\gamma} \right), \quad (\text{B.14})$$

e

$$\mathbf{k}_\gamma = \frac{m_\alpha(m_\beta + m_\gamma)}{m_\alpha + m_\beta + m_\gamma} \left(\mathbf{v}_\gamma - \frac{m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\beta \mathbf{v}_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \right). \quad (\text{B.15})$$

B.2 Momentos relativos de Jacobi

Como foi dito no Capítulo 3, uma vantagem no uso do momento de Jacobi no estudo do problema dos três corpos é que o movimento do CM pode ser separado. Os momentos de Jacobi são ilustrados na Fig. 3.1, onde q_α é identificado como o momento da partícula α em relação a

mc_α , o CM das partículas (β, γ) . Além disso, p_α é o momento relativo do sistema de dois corpos (β, γ) . Para identificar todos esses momentos relativos, o movimento de três corpos é dividido no movimento de uma partícula α mais o movimento do CM do par restante, cm_α . Considerando cm_α como uma partícula, o problema é aproximadamente reduzido a um problema de dois corpos, como mostrado na Fig. B.2.

Na Fig. B.2, os parentes coordenam ρ e velocidade σ são

$$\rho_\alpha = \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{R}_{cm_\alpha}, \quad (\text{B.16})$$

$$\sigma_\alpha = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{V}_{cm_\alpha}. \quad (\text{B.17})$$

A massa da partícula mc_α é dado por

$$M_{cm_\alpha} = m_\beta + m_\gamma \quad (\text{B.18})$$

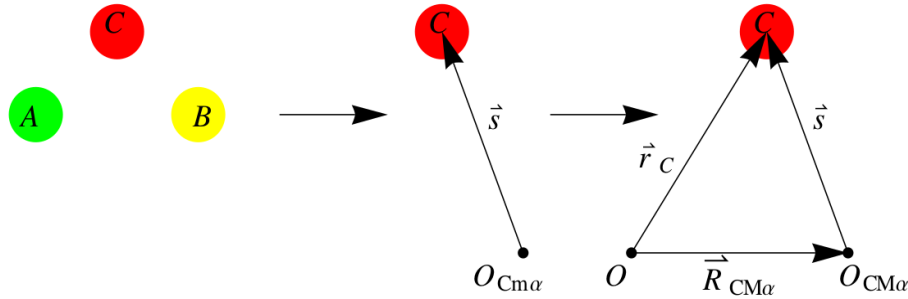


FIGURA B.2 – Relação das novas coordenadas com as coordenadas do laboratório para um sistema composto por uma partícula α e mc_α .

Do mesmo modo, a sua posição e velocidade na estrutura do laboratório são

$$R_{cm_\alpha} = \frac{m_\beta \mathbf{r}_\beta + m_\gamma \mathbf{r}_\gamma}{m_\beta + m_\gamma} \quad (\text{B.19})$$

$$V_{cm_\alpha} = \frac{m_\beta \mathbf{v}_\beta + m_\gamma \mathbf{v}_\gamma}{m_\beta + m_\gamma} \quad (\text{B.20})$$

A partir do problema clássico de dois corpos, não deve ser difícil identificar o momento relativo entre as partículas α e mc_α como

$$\mathbf{q}_\alpha = \mu_\alpha \boldsymbol{\sigma}_\alpha, \quad (\text{B.21})$$

onde a massa reduzida μ_α se lê

$$\mu_\alpha = \frac{m_\alpha M_{cm_\alpha}}{m_\alpha + M_{cm_\alpha}} = \frac{m_\alpha(m_\beta + m_\gamma)}{m_\alpha + m_\beta + m_\gamma} \quad (\text{B.22})$$

Inserindo a velocidade relativa da Eq.(B.16) e a massa reduzida (B.19) na Eq. (B.18), o momento relativo entre a partícula α e o CM do subsistema (β, γ) é

$$\mathbf{q}_\alpha = \mathbf{k}_\alpha = \frac{m_\alpha(m_\beta + m_\gamma)}{m_\alpha + m_\beta + m_\gamma} \left(\mathbf{v}_\alpha - \frac{m_\beta \mathbf{v}_\beta + m_\gamma \mathbf{v}_\gamma}{m_\beta + m_\gamma} \right). \quad (\text{B.23})$$

Notar que o momentum de Jacobi Eq.(B.20) é idêntica ao momento na Eq.(B.9) significa que

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{k}_i, \mathbf{q}_j = \mathbf{k}_j, \mathbf{q}_k = \mathbf{k}_k \quad (\text{B.24})$$

Os momentos relativos entre as partículas β e γ , \mathbf{p}_α , é

$$\mathbf{p}_\alpha = \frac{m_\beta m_\gamma}{m_\beta + m_\gamma} \mathbf{v}_{\beta\gamma} = \frac{m_\beta m_\gamma}{m_\beta + m_\gamma} (\mathbf{v}_\beta - \mathbf{v}_\gamma) = \frac{m_\gamma \mathbf{k}_\beta - m_\beta \mathbf{k}_\gamma}{m_\beta + m_\gamma}, \quad (\text{B.25})$$

e usando Eq.(B.24) se torna

$$\mathbf{p}_i = \frac{m_k \mathbf{q}_j - m_j \mathbf{q}_k}{m_j + m_k}, \quad (\text{B.26})$$

$$\mathbf{p}_j = \frac{m_i \mathbf{q}_k - m_k \mathbf{q}_i}{m_i + m_k}, \quad (\text{B.27})$$

$$\mathbf{p}_k = \frac{m_j \mathbf{q}_i - m_i \mathbf{q}_j}{m_j + m_i}, \quad (\text{B.28})$$

Escrevendo o momento de cada partícula como função dos momentos de Jacobi $(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)$, o

hamiltoniano livre em Eq.(B.2) se torna

$$H_0 = \frac{\mathbf{q}_\alpha^2}{2m_{\beta\gamma,\alpha}} + \frac{\mathbf{p}_\alpha^2}{2m_{\beta\gamma}} + \frac{Q^2}{m_\alpha + m_\beta + m_\gamma} \quad (\text{B.29})$$

onde $\mathbf{Q} = \Sigma_\alpha \mathbf{k}_\alpha = \Sigma_\alpha \mathbf{q}_\alpha$ é o momento total e a massas reduzidas são

$$m_{\beta\gamma,\alpha} = \frac{m_\alpha(m_\beta + m_\gamma)}{m_\alpha + m_\beta + m_\gamma}, \quad (\text{B.30})$$

$$m_{\beta\gamma} = \frac{m_\beta m_\gamma}{m_\beta + m_\gamma}. \quad (\text{B.31})$$

Os argumentos deslocados das funções do espectador na função de onda da Eq.(2.66) são encontrados pela manipulação de Eqs. (B.8), (B.21), (B.23), (B.24) e (B.25). O momento $q_j(q_i, p_i)$ lê

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_j(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i) &= \frac{m_j + m_k}{m_k} \mathbf{p}_i + \frac{m_j}{m_k} \mathbf{q}_k = \frac{m_j + m_k}{m_k} \mathbf{p}_i + \frac{m_j}{m_k} (-\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j, \\ &\left(1 + \frac{m_j}{m_k}\right) \mathbf{q}_j(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i) = \frac{m_j + m_k}{m_k} \mathbf{p}_i - \frac{m_j}{m_k} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_j(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i) &= \mathbf{p}_i + \frac{m_j}{m_j + m_k} \mathbf{q}_i. \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

da mesma forma, o momento $\mathbf{q}_k(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i)$ é encontrado para ser

$$\mathbf{q}_k(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i) = -\left(\mathbf{p}_i + \frac{m_j}{m_j + m_k} \mathbf{q}_i\right). \quad (\text{B.33})$$

A mesma manipulação pode ser feita para o momenta $q_i(q_j, p_j)$, $q_k(q_j, p_j)$, $q_i(q_k, p_k)$ e $q_j(q_k, p_k)$. Introduzindo as variáveis (α, β, γ) como permutação cíclica dos rótulos das partículas (i, j, k) , as seis combinações necessárias podem ser simplesmente escrito como

$$\mathbf{q}_\beta(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha) = \mathbf{p}_\alpha - \frac{m_\beta}{m_\beta + m_\gamma} \mathbf{q}_\alpha, \quad (\text{B.34})$$

$$\mathbf{q}_\gamma(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha) = -\left(\mathbf{p}_\alpha + \frac{m_\gamma}{m_\beta + m_\gamma} \mathbf{q}_\alpha\right). \quad (\text{B.35})$$

Apêndice C - Formalismo para as soluções numéricos

A solução numérica para a energia de ligação de três corpos da equação do estado ligado (E_3) deve ser obtida numericamente. Foram usadas técnicas numéricas como a quadratura de Gauss-Legendre para a discretização da equação integral, e o método de Newton-Legendre para a discretização da equação integral, e o método de Newton-Raphson para encontrar os zeros do determinante da matriz, bem como uma subrotina para se encontrar o determinante.

C.1 Solução numérica da equação do estado ligado de três corpos idênticos (AAA)

No caso Efimov em que temos três bósons idênticos, as equações acopladas se resumem a apenas uma equação para o estado ligado. Fazendo $m_A = m_B = m_C = 1$ temos,

$$f(\mathbf{q}) = \frac{\pi^{-2}}{\mu_2 - \sqrt{-(E_3 - \frac{3}{4}q^2)}} \int d^3 q' \left(\frac{1}{E_3 - q^2 - q'^2 - \mathbf{q}' \cdot \mathbf{q}} - \frac{1}{-\mu_{(3)}^2 - q^2 - q'^2 - \mathbf{q}' \cdot \mathbf{q}} \right) f(q')$$
(C.1)

Analisando a equação (C.1), onde a interação na onda-S se faz valer, fazendo $\mathbf{k} = \mathbf{q}'$ nós podemos reescrever essa equação na forma compacta como,

$$f(q) = \int_0^\infty K(E_3, q, q') f(q') dq'$$
(C.2)

onde o kernel K é escrito como,

$$K(E_3, q, q') = \frac{\pi^{-2} \times 2\pi}{\mu_2 - \sqrt{(\frac{3}{4}q^2 - E_3)}} \int_1^{-1} q'^2 d \cos \theta \left(\frac{1}{E_3 - q^2 - q'^2 - \mathbf{q}' \cdot \mathbf{q} \cos \theta} - \frac{1}{-\mu_{(3)}^2 - q^2 - q'^2 - \mathbf{q}' \cdot \mathbf{q} \cos \theta} \right)$$
(C.3)

onde $\mu_2 = \pm\sqrt{E_2}$ e escalamos a energia em unidades de $\mu_{(3)}^2 = 1$.

A interação numérica é feita através do método Gauss-Legendre onde pontos de Gauss serão definidos para discretizar os momentos relativos q e q' e definidos também os pesos de Gauss-Legendre (ω_i). Os pontos e pesos são generalizados para cálculos de integral com limites entre -1 e 1. Transformamos os limites de integração para a discretização de q e q' válida no intervalo de 0 à infinito. Chamando de x_i e ω_i os pontos e pesos, respectivamente, a mudança na variável de integração é feita da forma,

$$x = \frac{1 + x_i}{1 - x_i},$$

e os pesos são dados por,

$$\omega_i = \frac{2}{\sqrt{1 - x_i}} \omega_i$$

O numero de pontos de Gauss N é definido pela quantidade de zeros dos polinômios de Legendre. A integral da equação (C.2) pode ser discretizado como,

$$f(q_i) = \sum_{j=1}^N K(E_3, q_i, q_j) f(q_j) \omega_j, \quad (\text{C.4})$$

$$f(q_i) - \sum_{j=1}^N K(E_3, q_i, q_j) f(q_j) \omega_j, \quad (\text{C.5})$$

$$\left(\delta_{ij} - K(E_3, q_i, q_j) f(q_j) \omega_j \right) f(q_j) = 0 \quad (\text{C.6})$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker e a variação do índice $1 \leq i \leq N$ onde N é o numero de pontos da integração numérica. A discretização da equação (C.2) nos momentos pode ser escrita como,

$$K(E_3, q_i, q'_j) = \frac{2\pi^{-1}}{\mu_2 - \sqrt{\left(\frac{3}{4}q_i^2 - E_3\right)}} \int q_j^2 d\cos\theta \left(\frac{1}{E_3 - q_i^2 - q_j'^2 - q_i q_j \cos\theta} - \frac{1}{-1 - q_i^2 - q_j'^2 - q_i q_j \cos\theta} \right) \quad (\text{C.7})$$

O *kernel* pode ser escrito na forma de matriz como,

$$\begin{pmatrix} 1 - K(E_3, q_1, q_1)\omega_1 & -K(E_3, q_1, q_2)\omega_2 & \cdots & -K(E_3, q_1, q_N)\omega_N \\ -K(E_3, q_2, q_1)\omega_1 & 1 - K(E_3, q_2, q_2)\omega_2 & \cdots & -K(E_3, q_2, q_N)\omega_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -K(E_3, q_N, q_1)\omega_1 & -K(E_3, q_N, q_2)\omega_2 & \cdots & 1 - K(E_3, q_N, q_N)\omega_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(q_1) \\ f(q_2) \\ \vdots \\ f(q_N) \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{C.8})$$

admitindo solução não trivial quando,

$$\det \left(\delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K(E_3, q_i, q_j)\omega_j \right) = 0 \quad (\text{C.9})$$

O determinante da matriz (C.8) é calculado pelo método de Gauss e fixamos o resultado com uma função de escala da energia de ligação de três corpos E_3 ,

$$F(E_3^n) = \det \left(\delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K(E_3, q_i, q_j)\omega_j \right) \quad (\text{C.10})$$

onde n denomina o n -ésimo estado excitado para a energia de três corpos.

Usamos o método de Newton-Raphson expandindo $F(E_3^n)$ em primeira ordem ao redor de E_3 como,

$$F(E_3^n) = F(E_3) + (E_3^n - E_3)F'(E_3) = 0 \quad (\text{C.11})$$

$$E_3^n = E_3 - \frac{F(E_3^n)}{F'(E_3)} \quad (\text{C.12})$$

em que

$$F'(E_3) = \left. \frac{d}{dE_3^n} F(E_3^n) \right|_{E_3^n = E_3}$$

C.2 Solução numérica da equação do estado ligado de três corpos distintos (ABC)

No caso com três bósons de massas distintas a energia de ligação de três corpos E_3 é encontrada como a solução das equações acopladas para o estado ligado calculadas na seção anterior. Assim como foi feito para as equações de três corpos idênticos (C.1) discretizando as equações

(3.72), (3.73) e (3.74), temos,

$$f_A(q_i) = \sum_{j=1}^N K_{BA}(E_3, q_i, q_j) \omega_j f_C(q_j) + \sum_{j=1}^N K_{CA}(E_3, q_i, q_j) \omega_j f_B(q_j), \quad (\text{C.13})$$

$$f_B(q_i) = \sum_{j=1}^N K_{AB}(E_3, q_i, q_j) \omega_j f_C(q_j) + \sum_{j=1}^N K_{CB}(E_3, q_i, q_j) \omega_j f_A(q_j), \quad (\text{C.14})$$

$$f_C(q_i) = \sum_{j=1}^N K_{AC}(E_3, q_i, q_j) \omega_j f_B(q_j) + \sum_{j=1}^N K_{BC}(E_3, q_i, q_j) \omega_j f_A(q_j), \quad (\text{C.15})$$

Podemos reescrever essas expressões como,

$$f_A(q_i) - \sum_{j=1}^N K_{BA}(E_3, q_i, q_j) \omega_j f_C(q_j) - \sum_{j=1}^N K_{CA}(E_3, q_i, q_j) \omega_j f_B(q_j) = 0 \quad (\text{C.16})$$

$$f_B(q_i) - \sum_{j=1}^N K_{AB}(E_3, q_i, q_j) \omega_j f_C(q_j) - \sum_{j=1}^N K_{CB}(E_3, q_i, q_j) \omega_j f_A(q_j) = 0 \quad (\text{C.17})$$

$$f_C(q_i) - \sum_{j=1}^N K_{AC}(E_3, q_i, q_j) \omega_j f_B(q_j) - \sum_{j=1}^N K_{BC}(E_3, q_i, q_j) \omega_j f_A(q_j) = 0 \quad (\text{C.18})$$

Podemos introduzir o delta de Kronecker como feito no caso de bósons idênticos e as expressões (C.16), (C.17) e (C.18) ficam dadas por,

$$\left(\delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K_{BA}(E_3, q_i, q_j) \omega_j - \sum_{j=1}^N K_{CA}(E_3, q_i, q_j) \omega_j \right) \begin{pmatrix} f_A(q_i) \\ f_B(q_i) \\ f_C(q_i) \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{C.19})$$

$$\left(\delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K_{AB}(E_3, q_i, q_j) \omega_j - \sum_{j=1}^N K_{CB}(E_3, q_i, q_j) \omega_j \right) \begin{pmatrix} f_A(q_i) \\ f_B(q_i) \\ f_C(q_i) \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{C.20})$$

$$\left(\delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K_{AC}(E_3, q_i, q_j)\omega_j - \sum_{j=1}^N K_{BC}(E_3, q_i, q_j)\omega_j \right) \begin{pmatrix} f_A(q_i) \\ f_B(q_i) \\ f_C(q_i) \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{C.21})$$

e as soluções não triviais das expressões são dadas por,

$$\det \left(\delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K_{BA}(E_3, q_i, q_j)\omega_j + \sum_{j=1}^N K_{CA}(E_3, q_i, q_j)\omega_j \right) = 0 \quad (\text{C.22})$$

$$\det \left(\delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K_{AB}(E_3, q_i, q_j)\omega_j + \sum_{j=1}^N K_{CB}(E_3, q_i, q_j)\omega_j \right) = 0 \quad (\text{C.23})$$

$$\det \left(\delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K_{AC}(E_3, q_i, q_j)\omega_j + \sum_{j=1}^N K_{BC}(E_3, q_i, q_j)\omega_j \right) = 0 \quad (\text{C.24})$$

Podemos escrever as expressões como uma matriz 3×3 onde cada elemento será uma matriz $N \times N$ por,

$$M = \begin{pmatrix} I & (\delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K_{BA}(E_3, q_i, q_j)\omega_j) & (\delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K_{BA}(E_3, q_i, q_j)\omega_j) \\ (\delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K_{AB}(E_3, q_i, q_j)\omega_j) & I & (\delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K_{CB}(E_3, q_i, q_j)\omega_j) \\ (\delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K_{AC}(E_3, q_i, q_j)\omega_j) & (\delta_{ij} - \sum_{j=1}^N K_{BC}(E_3, q_i, q_j)\omega_j) & I \end{pmatrix} \quad (\text{C.25})$$

onde I é a matriz identidade. Assim devemos implantar uma rotina que calcule uma energia E_3 que satisfaça,

$$\det M = 0 \quad (\text{C.26})$$

Assim finalmente encontramos a energia de três corpos que será usada para escrever as funções de onda.

C.3 O método de Runge-Kutta de quarta ordem

Talvez o método mais empregado para a solução de PVI's, o Método de Runge-Kutta de quarta ordem faz uso das informações fornecidas por $f(x, y)$ em 3 pontos (ou fórmulas) intermediários antes de calcular a aproximação para y_{n+1} . Neste apêndice estudaremos o método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4). O método de Runge-Kutta consiste em um cálculo iterativo implícito e explícito para a resolução numérica (aproximação) de soluções de equações diferenciais ordinárias. Se uma função $y(x)$ possuir $k+1$ derivadas contínuas em um intervalo entre β e x , podemos escrever usando o polinômio de Taylor

$$y(x) = y(\beta) + y^{(1)}(\beta)(x - \beta) + \dots + y^{(k)}(\beta) \frac{(x - \beta)^k}{k!} + y^{(k+1)}(\gamma) \frac{(x - \beta)^{k+1}}{(k+1)!}, \quad (\text{C.27})$$

onde γ pertence ao intervalo entre β e x . Substituindo β por x_n e x por x_{n+1} onde $x_{n+1} = x_n + h$, podemos escrever a Eq.(C.27) como

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + y^{(1)}(x_n)h + \frac{h^2}{2!}y^{(2)}(x_n) + \dots + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\gamma) \quad (\text{C.28})$$

agora temos que γ pertence ao intervalo entre x_n e x_{n+1} .

Fazendo $k = 4$ na Eq.(C.28) temos

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + y^{(1)}(x_n)h + \frac{h^2}{2!}y^{(2)}(x_n) + \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(x_n) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_n) + \frac{h^5}{5!}y^{(5)}(\gamma) \quad (\text{C.29})$$

O procedimento de Runge-Kutta de quarta ordem consiste em encontrar constante apropriadas tal que

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4 \quad (\text{C.30})$$

A maneira mais popular de escolher estas constantes consiste em

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3),$$

e por fim podemos calcular

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (\text{C.31})$$

Do ponto de vista computacional é importante notar que k_2 depende de k_1 assim como k_4 depende de k_3 , logo na implementação do código computacional deve-se levar em conta a dependências destas funções uma das outras. Como o *RK4* deve satisfazer um polinômio de quarta ordem, podemos estimar o erro deste método como sendo proporcional a h^5 . O método de ordem 4 requer 4 cálculos de $f(x, y)$ por passo h . Isto significa que este método deve ser superior que o método de ordem 2 se o valor de h neste caso puder ser, pelo menos, 2 vezes maior que o valor para o método de ordem 2, para se obter a mesma precisão.

C.3.1 Sistemas de equações diferenciais

As fórmulas para se chegar em (C.11) para a aplicação do Método de Runge-Kutta de quarta ordem supõe a existência de um PVI simples do tipo da integração numérica da série de Tylor o qual consiste em uma equação diferencial de primeira ordem (linear ou não linear) com uma condição inicial simples. Contudo, grande parte dos problemas que surgem em ciências exatas e naturais envolvem PVI's compostos por uma ou mais equações diferenciais de segunda ordem ou ordens mais altas, com um correspondente número de condições iniciais.

Desejamos então estender o método apresentado na seção na seção anterior para esta situação mais geral. Para exemplificar a generalização do método, vamos considerar o caso de uma ODE de ordem N com N condições iniciais. A extensão para o caso onde há mais de uma equação diferencial, inclusive de diferentes ordens, segue diretamente do exemplo apresentado. O PVI a ser considerado pode ser escrito a partir da solução da equação diferencial ordinária de ordem n como

$$y^{(N)} = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(N-1)}(x)), \quad (\text{C.32})$$

juntamente com as condições iniciais

$$g_0(y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(N-1)}(x_0)) = a_0$$

$$g_1(y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(N-1)}(x_0)) = a_1$$

até

$$g_{N-1}(y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(N-1)}(x_0)) = a_{N-1} \quad (\text{C.33})$$

Definindo inicialmente $y_1(x) = y(x)$, podemos escrever:

$$y_1'(x) = y_2(x)$$

$$y_2'(x) = y_3(x)$$

$$y_3'(x) = y_4(x)$$

$$y_{N-1}(x) = y_N(x), \quad (\text{C.34})$$

finalmente, fazendo uso de (C.32),

$$y_N'(x) = f(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_N(x)), \quad (\text{C.35})$$

com as condições iniciais escritas

$$g_0(y_1(x_0), y_2(x_0), \dots, y_N(x_0)) = a_0$$

$$g_1(y_1(x_0), y_2(x_0), \dots, y_N(x_0)) = a_1$$

até

$$g_{N-1}(y_1(x_0), y_2(x_0), \dots, y_N(x_0)) = a_{N-1} \quad (\text{C.36})$$

Ou seja, ao invés procurarmos uma forma do método de Runge-Kutta para resolver 1 ODE de ordem N , o que iremos fazer é resolver N equações de ordem 1. Quando o PVI for composto por mais de uma ODE de diferentes ordens, busca-se reduzir este sistema sempre a um sistema de primeira ordem. Neste caso, ao invés de somente uma equação de primeira ordem do tipo (C.35), teremos um sistema de N equações do tipo:

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

até

$$y_N' = f_N(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

onde neste sistema já estão incluídas as equações auxiliares (C.36). É muitas vezes conveniente pensar este sistema na forma vetorial,

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \tag{C.37}$$

onde \mathbf{y} e \mathbf{f} são vetores com N componentes cada.

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO DM	2. DATA 07 de março de 2019	3. DOCUMENTO Nº DCTA/ITA/DM-016/2019	4. Nº DE PÁGINAS 132
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: Sistemas de Três Bósons com duas massas idênticas no Limite Unitário - Estados Ligados e de Espalhamento			
6. AUTOR(ES): Igor Alves de Carvalho			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: Física de Poucos Corpos; Efeito Efimov; Aproximação de Born-Oppenheimer			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Três Corpos; Estado Ligado; Estado de Espalhamento			
10. APRESENTAÇÃO: <input checked="" type="checkbox"/> Nacional <input type="checkbox"/> Internacional ITA, São José dos Campos. Curso de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Física Nuclear. Orientador: Prof. Dr. Lauro Tomio. Defesa em 07/03/2019. Publicada em 2019.			
11. RESUMO: Neste trabalho estudamos o problema de três corpos em um sistema do tipo (AAB), sendo dois bósons pesados idênticos (AA) e uma terceira partícula leve (B), analisamos a possibilidade da existência do efeito Efimov para diferentes valores de relação de massa $\mathcal{A} = m_B/m_A$ no limite unitário de dois corpos usando a aproximação de Born-Oppenheimer. Verificamos o fator de escala discreto relacionado ao efeito Efimov, que ocorre em sistemas de três corpos próximo ao limite unitário; no qual o valor absoluto do comprimento de espalhamento se aproxima do infinito. Temos R como sendo a distância relativa entre os bósons pesados e r a distância entre o bóson leve e centro de massa dos bósons pesados, a interação entre os bósons pesados e o bóson leve conduz ao potencial efetivo entre os bósons pesados proporcionais a $1/R^2$ na aproximação de Born-Oppenheimer. Estudamos a solução do formalismo considerando $m_B \ll m_A$ para vários valores da razão m_B/m_A entre os bósons. O número de estados ligados cresce na medida que a energia de ligação entre duas partículas (leve-pesada) vai para zero. Diminuindo a diferença de massa entre os bósons encontramos um número menor de estados ligados de três corpos. Além do sistema ligado (AAB) de três corpos, também consideramos o espalhamento de A pelo estado ligado de (AB). Verificamos a física de Efimov na região de espalhamento, considerando o sistema AAB de três bósons na razão $m_B \ll m_A$, próximo ao limite unitário. Para o espectro de estados ligados, demonstrou-se que dois níveis são relacionados por um fator de escala exponencial dado por $\exp(2\pi/s_0)$, onde s_0 é uma constante que varia com a proporção de massa. Mostramos que o fator de escala discreto identificado no espectro de Efimov do estado ligado também pode ser identificado na colisão de baixa energia de uma partícula pesada A contra um sistema AB. Ao considerarmos o momento relativo da energia k , uma sequência de pólos surgiu no observável $k \cot \delta_0^R$ na onda S, onde δ_0^R é a parte real da mudança de fase da onda S. A sequência de polos, com a posição de momento dada por $k = k_n (n = 1, 2, \dots)$, dependerá da razão de massa m_B/m_A , bem como na energia do estado ligado do sistema leve-pesado. O fator de escala discreto pode ser identificado pela sequência de mínimos na seção de choque, que são dadas por k_n . A relação entre energias de espalhamento consecutivas desta sequência foi verificada como próxima da proporção já obtida no espectro de estado ligado de Efimov, à medida que nos aproximamos do limite $1/a_{AB} = 0$.			
12. GRAU DE SIGILO: <input checked="" type="checkbox"/> OSTENSIVO <input type="checkbox"/> RESERVADO <input type="checkbox"/> SECRETO			