

Dissertação apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Física Nuclear.

**Abigail Rodrigues Castro**

**UTILIZAÇÃO DE REPRESENTAÇÕES  
INTEGRAIS PARA O CÁLCULO DO ESTADO  
LIGADO NO ESPAÇO DE MINKOWSKI**

Dissertação aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:



Prof. Dr. Wayne Leonardo Silva de Paula  
Orientador

Prof. Dr. Pedro Lacava  
Pró-Reitor de Pós-Graduação

Campo Montenegro  
São José dos Campos, SP - Brasil  
2019

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)**  
**Divisão de Informação e Documentação**

Castro, Abigail Rodrigues  
Utilização de Representações Integrais para o cálculo do Estado Ligado no Espaço de Minkowski  
/ Abigail Rodrigues Castro.  
São José dos Campos, 2019.  
65f.

Dissertação de Mestrado – Curso de Física. Área de Física Nuclear – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2019. Orientador: Prof. Dr. Wayne Leonardo Silva de Paula.

1. Equação de Bethe-Salpeter. 2. Espaço de Minkowski. 3. Modelos Bosônicos. 4. Física de Partículas. 5. Física. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Título.

## **REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA**

CASTRO, Abigail Rodrigues. **Utilização de Representações Integrais para o cálculo do Estado Ligado no Espaço de Minkowski**. 2019. 65f. Dissertação de Mestrado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

## **CESSÃO DE DIREITOS**

NOME DA AUTORA: Abigail Rodrigues Castro

TÍTULO DO TRABALHO: Utilização de Representações Integrais para o cálculo do Estado Ligado no Espaço de Minkowski.

TIPO DO TRABALHO/ANO: Dissertação / 2019

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta dissertação e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. A autora reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação pode ser reproduzida sem a autorização da autora.

---

Abigail Rodrigues Castro  
Campo Montenegro, 679  
12.233-066 – São José dos Campos-SP

# UTILIZAÇÃO DE REPRESENTAÇÕES INTEGRAIS PARA O CÁLCULO DO ESTADO LIGADO NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

Abigail Rodrigues Castro

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Manuel Máximo Bastos Malheiro de Oliveira	Presidente	-	ITA
Prof. Dr. Wayne Leonardo Silva de Paula	Orientador	-	ITA
Prof. Dr. Elias Leite Mendonça		-	UNESP
Prof. Dr. Odilon Lourenço da Silva Filho		-	ITA

*Ao meu pai, Edinaldo Castro, por ser meu amigo e incentivador. Cinara Lopes por ser uma amiga sem igual.*

# Agradecimentos

Há quem acredite e quem não acredite em uma entidade divina. De forma pessoal, eu acredito que existe um Deus e que Ele é quem me deu essa chance de crescer e desenvolver esse trabalho. Por isso, começo agradecendo Àquele que deu à mim: vida, família e amigos, alegria, amor e compaixão.

Agradeço a minha mãe, Suzana Campillay, por sua dedicação à mim, a minha saúde e bem-estar. Por cuidar de mim, por seu apoio e compreensão. Por estar ao meu lado em todos os momentos, por ser carinhosa e amiga. Ao meu pai, Edinaldo Castro, sou grata por seu apoio, amizade e carinho. Pelas longas conversas telefônicas onde sempre ouviu sobre os meus sonhos e sobre minha pesquisa. Sua amizade e apoio são essenciais na minha vida.

Agradeço ao meu orientador, Wayne de Paula, por me ensinar todos os dias algo novo sobre a física, sobre ser físico, sobre ser gente. Obrigada por acreditar em mim. Você é um profissional exemplar e tenho muito orgulho de trabalhar com você.

Às minhas irmãs, Adália, Karol e Karina, agradeço por serem minhas amigas, minhas líderes de torcida, por acreditarem em mim. Agradeço à minha tia Sandra Campillay, por suas orações e amor. Agradeço à minha amiga Cinara Lopes, como ela mesmo diz, foi Deus quem separou o tempo certo para nos conhecermos. Obrigada por me incluir na sua família, por ser minha família, por cuidar de mim.

Agradeço às meninas da pensão, Caroline, Miriam, Dayane, Geovana. Obrigada pelo apoio, comida e passeios divididos, pelas boas lembranças. Agradeço às amigas Evelin Enny e Raphaela Araújo, mesmo perto ou longe, sinto o apoio e carinho de vocês. Agradeço a Robson Dutra pelo apoio constante, pela fé e dedicação. Pela confiança e sinceridade!

Agradeço aos meus companheiros de sala, Odilon Mattos, Natan Coleta, Rômulo Moita, Natalie Oliveira, George Yabusaki, pelo companheirismo e discussões. Agradeço a Iolanda pelos bons papos e ajuda na resolução de listas. Ao Ulisses Farias pelo apoio e longas conversas.

Agradeço aos professores Tobias Frederico, Brett Carson e Manuel Malheiro pela pa-

ciência, ensinamentos e exemplo.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior -Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*“A knowledge of the truth depends not so much upon strength of intellect as upon pureness of purpose, the simplicity of an earnest, dependent faith.”*

— ELLEN G. WHITE

# Resumo

A equação de Bethe-Salpeter (BS) é uma descrição relativística do problema do estado ligado de duas partículas (SALPETER; BETHE, 1951). Com esta podemos determinar a energia do estado ligado e a amplitude de Bethe-Salpeter  $\Phi(k, p)$ . Porém, há polos presentes em seu kernel relativístico e uma alternativa para lidar com essas singularidades é a representação integral perturbativa de Nakanishi (NAKANISHI, 1971b), que utiliza uma representação paramétrica caracterizada por uma função peso e um denominador que depende dos momentos dos propagadores externos. A Representação Integral de Nakanishi pode ser utilizada tanto para representar a amplitude  $\Phi(k, p)$  quanto a amplitude amputada  $\Gamma(k, p)$ . Ambas amplitudes são alternativas para descrever o estado ligado completamente. Porém, a diferença entre elas é que a amplitude  $\Phi(k, p)$  possui mais polos em seu kernel de interação, o que torna mais difícil lidar com o problema de singularidades. Assim, ao optar por desenvolver a equação de Bethe-Salpeter para a amplitude amputada  $\Gamma(k, p)$  espera-se que obtenhamos uma solução mais estável para a função peso de Nakanishi. Neste trabalho, obtemos a equação de Bethe-Salpeter no espaço de Minkowski para a amplitude amputada para o sistema bosônico na aproximação de interação tipo escada. Para introduzir a descrição da amplitude amputada  $\Gamma(k, p)$ , inicialmente fazemos um estudo da amplitude  $\Phi(k, p)$  de Bethe-Salpeter para o caso bosônico, além de demonstrar a relação entre ambas as amplitudes. No caso da amplitude  $\Gamma(k, p)$ , obtivemos tanto a equação de Bethe-Salpeter completa quanto a equação no modelo de Wick-Cutkosky, utilizando o Teorema da Unicidade. Por fim, para um estado ligado fermiônico, utilizamos o Teorema da Unicidade e a Transformação de Stieltjes para inverter a equação de Bethe-Salpeter no limite de máxima energia  $B = 2M$ . Com isso, obtemos uma equação que pode ser resolvida com método iterativo.

# Abstract

The Bethe-Salpeter equation is a relativistic description of the problem of the bound state of two particles (SALPETER; BETHE, 1951). With this we can determine the energy of the connected state and the amplitude of Bethe-Salpeter  $\Phi(k, p)$ . However, there are poles present in its relativistic kernel and an alternative to dealing with these singularities is the Nakanishi Perturbative Integral Representation (NAKANISHI, 1971b), which uses a parametric representation characterized by a weight function and a denominator that depends on the moments of the external propagators. The integral representation of Nakanishi can be used to represent the amplitude  $\Phi(k, p)$  as the amputated amplitude  $\Gamma(k, p)$ . Both amplitudes are alternatives to describe the connected state completely. Nevertheless, the difference between them is that the amplitude  $\Phi(k, p)$  has more poles in the kernel, which makes it more difficult to deal with the singularities problem. Thus, by choosing to develop the Bethe-Salpeter equation for the amputated amplitude  $\Gamma(k, p)$  we are expected to obtain a more stable solution for the Nakanishi weight function. In this work, we obtain the Bethe-Salpeter equation in the Minkowski space for the amputated amplitude for the bosonic system in the ladder approximation. In order to introduce the amputated amplitude description  $\Gamma(k, p)$ , we first study the Bethe-Salpeter amplitude  $\Phi(k, p)$  for the bosonic case, and demonstrate the relation between both amplitudes. In the case of the amplitude  $\Gamma(k, p)$ , we obtained both the complete Bethe-Salpeter equation and the equation in the Wick-Cutkosky model, using the Uniqueness Theorem. Finally, for a fermionic bound-state state, we use the Uniqueness Theorem and the Stieltjes Transformation to invert the Bethe-Salpeter equation at the maximum energy limit  $B = 2M$ . With this, we obtain an equation that can be solved with iterative method.

# Lista de Figuras

FIGURA 3.1 – Equação de Bethe-Salpeter. . . . .	26
FIGURA B.1 – Contorno de integração de raio $y = 1$ para obter a transformação de Stieltjes. Adaptado da referência (CARBONELL <i>et al.</i> , 2017). . . . .	64

# Lista de Abreviaturas e Siglas

QFT	Teoria Quântica de Campos
SM	Modelo Padrão
BS	Bethe-Salpeter
QCD	Cromodinâmica Quântica

# Lista de Símbolos

$m$	Massa da partícula
$\mu$	Massa da partícula de interação
$M$	Massa do Estado Ligado
$g$	Constante de Acoplamento

# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	15
2	REPRESENTAÇÕES INTEGRAIS . . . . .	18
2.1	Representação de Källén-Lehmann . . . . .	18
2.2	Representação Integral de Nakanishi . . . . .	22
3	EQUAÇÃO DE BETHE-SALPETER PARA O ESTADO LIGADO BOSÔNICO . . . . .	26
3.1	Equação de Bethe-Salpeter para Amplitude . . . . .	26
3.2	Projeção na Frente de Luz da Equação de Bethe-Salpeter . . . . .	29
3.3	Equação de Bethe-Salpeter para Amplitude Amputada . . . . .	32
3.4	Amplitude Amputada no Modelo de Wick-Cutkosky . . . . .	36
3.4.1	Equação da Amplitude Amputada através do Teorema da Unicidade . . . . .	37
3.5	Equação de Bethe-Salpeter no Espaço Euclideano . . . . .	41
3.6	Relação entre a Amplitude e a Amplitude Amputada . . . . .	42
4	EQUAÇÃO DE BETHE-SALPETER PARA O ESTADO LIGADO FERMIÔNICO . . . . .	46
4.1	Equação de Bethe-Salpeter para Amplitude . . . . .	46
4.2	Amplitude de Bethe-Salpeter para férmions no limite de máxima energia $B = 2m$ . . . . .	49
4.2.1	Inversão utilizando o Teorema da Unicidade . . . . .	53
4.2.2	Inversão utilizando Transformação de Stieltjes . . . . .	56
5	CONCLUSÃO . . . . .	58

SUMÁRIO	xiv
REFERÊNCIAS . . . . .	60
APÊNDICE A – TEOREMA DA UNICIDADE . . . . .	62
APÊNDICE B – TRANSFORMAÇÃO INVERSA DE STIELDJES . . . . .	63
APÊNDICE C – QUANTIZAÇÃO NA FRENTE DE LUZ . . . . .	65

# 1 Introdução

Entender os constituintes fundamentais da natureza tem sido um desafio presente na física por mais de um século. A compreensão a respeito da composição da matéria, por conseguinte da natureza, tem ido desde a ideia grega de um ente fundamental indivisível até o que se aceita atualmente como sendo a divisão de matéria em bariônica e escura. A matéria comum ou bariônica estendeu-se além das partículas conhecidas desde os primeiros modelos atômicos. Hoje, a lista de partículas elementares é distribuída em termos de léptons, quarks, fótons, glúons, bósons  $W^+$ ,  $W^-$ ,  $Z^0$ , o bóson de Higgs e suas anti-partículas. Partindo do conceito de partículas indivisíveis temos a matéria ordinária dividida em léptons e hádrons, onde os últimos são entendidos como partículas compostas por estados ligados de quarks e glúons.

Os primeiros hádrons a serem descobertos foram os prótons e os nêutrons. Apesar disso, ainda há questões a serem respondidas a respeito destes. Por exemplo, no caso dos prótons tem-se em aberto o problema do seu decaimento, onde questiona se o próton é fundamentalmente estável ou possui uma vida útil finita, conforme previsto por algumas extensões do modelo padrão (SENJANOVI, 2010) (HELO *et al.*, 2018). Outra questão é o problema do spin do próton: Como os quarks e glúons contribuem para o spin dos prótons? Nesse sentido, para entender como o spin e a massa dos núcleons são distribuídos entre os constituintes destes, iniciativas experimentais tem sido tomadas em centros como SLAC (Stanford Linear Accelerator Center), CERN (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire), DESY (Deutsches Elektronen-Synchrotron) Laboratory, RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider). Um projeto recente é o HAS QCD PROJECT, que envolve iniciativas tanto experimentais como teóricas com objetivo de explorar e entender a estrutura interna dos núcleons em termos de quarks e glúons, além disso desenvolver um mapeamento 3D do próton.

A teoria predominante aceita para descrição dos constituintes hadrônicos é a Cromodinâmica Quântica (QCD), que fornece a dinâmica da interação entre quarks e glúons. A QCD é um tipo de Teoria Quântica de Campos (QFT) não-abeliana, com o grupo de simetria  $SU(3)$ . Esta teoria pertence ao Modelo Padrão (SM), que descreve a matéria e três interações fundamentais: força fraca, força forte e força eletromagnética (COTTINGHAM; GREENWOOD, 1998).

A QCD descreve os quarks ( $q$ ) como partículas de spin  $1/2$ , sendo que elas podem ter sabores chamados up ( $u$ ), down ( $d$ ), strange ( $s$ ), charm ( $c$ ), bottom ( $b$ ) e top ( $t$ ). Além disso, os quarks podem ser classificados em cores: vermelho, verde e azul. A QCD possui a propriedade de liberdade assintótica, onde as interações ficam mais fracas a medida que a energia aumenta. Isto faz com que a solução da teoria dependa da escala de energia. No limite de baixas energias configura como uma teoria não perturbativa e no limite de altas energias como uma teoria perturbativa.

A propriedade de liberdade assintótica está presente em teorias de calibre nas quais a interação entre as partículas para distâncias pequenas ou altas energias se torna arbitrariamente pequena. Em 1973, David Gross, Frank Wilczek e David Politzer mostraram que a cromodinâmica quântica apresenta esta propriedade (GROSS; WILCZEK, 1973) (POLITZER, 1973). Essa descoberta rendeu-lhes o prêmio nobel em 2004.

Outra propriedade da QCD é o confinamento, o que significa que quarks livres não são observados na natureza. Uma explicação pictórica para este fenômeno é a ideia de dois quarks conectados por uma corda, a força atrativa entre eles aumenta à medida que os quarks se afastam, o que exige mais e mais energia para aumentar sua separação. Contudo, com energia suficiente adicionada, em vez de um quark se libertar do outro em um hádron, o excesso de energia é utilizado para produzir um par de quark-antiquark (BEISER, 1995).

Em uma teoria de campos livre, a função de dois pontos  $\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle$  é interpretada como a amplitude para uma partícula propagar de um ponto  $x$  para um ponto  $y$ . Para uma teoria de campos interagente, a representação da função de dois pontos é chamada também de Representação de Källén-Lehmann (KALLEN, 1952), (Lehmann, 1954). Por sua vez, a Representação Integral de Nakanishi é uma representação integral perturbativa de duas variáveis, que é usada como ansatz para resolver a equação de Bethe-Salpeter (NAKANISHI, 1964).

No intuito de obter uma descrição relativística para partículas hadrônicas Bethe e Salpeter propuseram uma formulação no espaço de Minkowski (SALPETER; BETHE, 1951), onde obtiveram uma equação para o estado ligado de partículas obtendo a energia de ligação e a amplitude de Bethe-Salpeter (BS)  $\Phi(k, p)$ .

Um problema na descrição de Bethe-Salpeter é que a equação integral possui pólos em seu kernel. Para contornar esse problema Wick propôs uma rotação  $t \rightarrow i\tau$  no tempo, de tal forma, que a equação de BS é transformada, indo do espaço de Minkowski para o espaço Euclidiano (WICK, 1954), onde a energia de ligação fornecida pela equação de BS euclidiana é a mesma que a obtida no espaço de Minkowski. Ao utilizar a rotação de Wick é possível realizar uma comparação de resultados da equação de Bethe-Salpeter euclidiana com a de Minkowski.

Além da amplitude  $\Phi(k, p)$  há a amplitude amputada  $\Gamma(k, p)$  que pode ser obtida através da primeira. A amplitude  $\Gamma(k, p)$  possui menos polos em seu kernel do que a amplitude  $\Phi(k, p)$ , o que motiva um estudo mais aprofundado da amplitude amputada. A representação de Nakanishi pode ser usada para representar a amplitude  $\Phi(k, p)$  quanto amplitude amputada  $\Gamma(k, p)$  de Bethe-Salpeter. Além disso, é possível usá-la para obter equação integral para a função peso de Nakanishi através de uma inversão analítica da equação de BS. Esse método é conhecido como Teorema da Unicidade. Outro método para inverter a amplitude de Bethe-Salpeter é utilizar a transformada inversa de Stieltjes. Sendo possível realizar uma comparação entre ambos os métodos.

Optar por desenvolver a equação de Bethe-Salpeter para a amplitude amputada  $\Gamma(k, p)$  é objeto principal deste estudo. Iremos obter a equação completa para amplitude amputada para o estado ligado bosônico na aproximação tipo escada. Como um caso mais simples, vamos estudar a amplitude  $\Gamma(k, p)$  no modelo de Wick-Cutkosky, utilizando o Teorema da Unicidade para obter uma equação para função peso  $g_{\Gamma}$  da amplitude amputada.

Outro ponto que desenvolveremos neste trabalho será encontrar uma relação entre ambas as amplitudes. O que permitirá obter os observáveis hadrônicos utilizando ambas as amplitudes desde que se conheça uma delas. Além disso, será útil para comparar com os resultados de trabalhos anteriores que tiveram foco a amplitude de Bethe-Salpeter.

Além disso, iremos estudar a amplitude  $\Phi(k, p)$  para o caso fermiônico no limite de máxima energia para  $\Lambda$  finito, permitindo uma análise do problema para diferentes vértice de interação.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo 1, tem-se a contextualização do trabalho, das ferramentas utilizadas e apresentação da organização do mesmo. No capítulo 2, discorre-se a respeito das Representações Integrais que são bases da formulação teórica apresentada. No capítulo 3, o foco foi apresentar a equação de Bethe-Salpeter para Amplitude Amputada para um sistema bosônico. No capítulo 4, o objetivo é comparar os resultados da equação de BS para férmions no limite de máxima energia utilizando o teorema da unicidade e Transformação de Stieltjes. No capítulo 5, são apresentadas as conclusões do trabalho.

## 2 Representações Integrais

### 2.1 Representação de Källén-Lehmann

Para obter a representação de Källén-Lehmann vamos considerar uma teoria de campo escalar real interagente de tal forma que é válido para todos os tipos de interação, não dependendo de uma teoria de perturbação. Como consequência, assumimos que a hamiltoniana deve ser um invariante de Lorentz e o operador momento  $\hat{P}$  deve comutar com a hamiltoniana,  $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$ . Isto é verdade porque se tratam de estados livres ou estados representando um conjunto de partículas que tratamos como um único corpo, onde a energia de ligação já está contida na massa do estado ligado, que por sua vez é livre.

Seja  $|\lambda_{\vec{p}}\rangle$  o autoestado de  $\hat{H}$  e  $\hat{P}$ , onde  $\lambda$  carrega todos os números quânticos dos possíveis estados quânticos, tal que:

$$\hat{H}|\lambda_{\vec{p}}\rangle = E_p|\lambda_{\vec{p}}\rangle; \hat{P}|\lambda_{\vec{p}}\rangle = \vec{p}|\lambda_{\vec{p}}\rangle. \quad (2.1)$$

Cada  $|\lambda_{\vec{p}}\rangle$  é relacionado através de um boost de Lorentz com o estado correspondente ao repouso, chamado de  $|\lambda_0\rangle$ . O autoestado  $|\lambda_{\vec{p}}\rangle$  pode representar:

- Estado de 1-partícula,  $|1_{\vec{p}}\rangle$ , com energia  $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m_\lambda^2}$  e massa de repouso  $m_\lambda$ ;
- Estado ligado;
- Estado de N-partículas, com  $N \geq 2$ , formados por estado de 1-partícula e estados ligados.

Todos os estados são criados a partir do vácuo  $|\Omega\rangle$ . A diferença crucial entre a teoria de campo escalar interagente e a teoria de campo livre é que  $\phi(x)$  não pode ser simplesmente uma superposição de amplitudes de Fourier  $a(\vec{p})$  e  $a^\dagger(\vec{p})$ , pois não obedece as equações de movimento livre:

$$(\partial^2 + m^2)\phi \neq 0 \implies (\partial^2 + m^2)\phi = j, \quad (2.2)$$

onde  $j$  é a corrente. Assim, aplicando  $\phi$  em  $\Omega$  não criamos simplesmente um estado de 1-partícula como na teoria livre. Um outro ponto importante é notar que na relação de

completeza, no espaço de Hilbert,

$$\hat{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_p(\lambda)} |\lambda_{\vec{p}}\rangle\langle\lambda_{\vec{p}}|, \quad (2.3)$$

a soma em  $\lambda$  inclui os estados de 1-partícula, os estados ligados, e os estados de multi-partículas, enquanto que a integral em  $p$  refere-se ao momento do centro de massa  $\vec{p}$  dos estados  $\lambda$ . Em particular, especificar um estado de multi-partícula requer especificar o momento relativo de cada estado individual acrescido do momento  $\vec{p}$ . Assim, a soma sobre  $\lambda$  é uma soma sobre um contínuo de estados.

Na teoria de campo livre a função de dois pontos  $\langle\Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle$  é a amplitude para uma partícula propagar de  $y$  para  $x$ . A questão é, será que está interpretação segue na teoria interagente.

O primeiro objetivo é obter uma expressão para o propagador de Feynman interagente:

$$\langle\Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \begin{cases} \langle\Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle & \text{se } x_0 > y_0 \\ \langle\Omega|T\phi(y)\phi(x)|\Omega\rangle & \text{se } y_0 > x_0. \end{cases}$$

Inserindo a resolução da unidade entre  $\phi(x)$  e  $\phi(y)$ ,

$$\langle\Omega|\phi(x)\hat{1}\phi(y)|\Omega\rangle = \langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle\langle\Omega|\phi(y)|\Omega\rangle + \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_p(\lambda)} \langle\Omega|\phi(x)|\lambda_{\vec{p}}\rangle\langle\lambda_{\vec{p}}|\phi(y)|\Omega\rangle, \quad (2.4)$$

e assumindo que  $\langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle = 0$ , uma vez que

$$\phi(x) = e^{ix^\mu P_\mu} \phi_0 e^{-ix^\mu P_\mu}, \quad (2.5)$$

e que  $P^\mu|\Omega\rangle = 0$ , obtêm-se

$$\langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_p(\lambda)} \langle\Omega|\phi(x)|\lambda_{\vec{p}}\rangle\langle\lambda_{\vec{p}}|\phi(y)|\Omega\rangle, \quad (2.6)$$

Se  $c \equiv \langle\Omega|\phi(0)|\Omega\rangle \neq 0$  pode-se redefinir  $\phi$ , tal que,  $\phi \rightarrow \phi - c$ , podendo obter a equação 2.6. Por outro lado,

$$\langle\Omega|\phi(x)|\lambda_{\vec{p}}\rangle = \langle\Omega|e^{iP \cdot x} \phi_0 e^{-iP \cdot x}|\Omega\rangle = \langle\Omega|\phi_0|\Omega\rangle e^{-ip \cdot x}, \quad (2.7)$$

com  $e^{-iP \cdot x}|\Omega\rangle = |\Omega\rangle e^{-ip \cdot x}$  e  $\langle\Omega|e^{iP \cdot x} = \langle\Omega|$ . O próximo passo é relacionar  $|\lambda_{\vec{p}}\rangle$  com  $|\lambda_0\rangle$  usando um boost. O campo escalar clássico transforma-se como  $\phi(x) = U^{-1}(\Lambda)\phi(x')U(\Lambda)$ , assim

$$\langle\alpha'|\phi(x')|\beta'\rangle = \langle\alpha|U^{-1}(\Lambda)\phi(x')U(\Lambda)|\beta\rangle = \langle\alpha|\phi(x)|\beta\rangle. \quad (2.8)$$

De maneira análoga, definimos:

$$|\lambda_{\vec{p}}\rangle = U^{-1}|\lambda_0\rangle, \quad (2.9)$$

tal que,

$$\langle\Omega|\phi(x)|\lambda_{\vec{p}}\rangle = \langle\Omega|U^{-1}U\phi(0)U^{-1}U|\lambda_{\vec{p}}\rangle e^{-ip\cdot x}, \quad (2.10)$$

$$\langle\Omega|\phi(x)|\lambda_{\vec{p}}\rangle = \langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle e^{-ip\cdot x}. \quad (2.11)$$

Assim, o propagador de Feynman sem o ordenador temporal pode ser expresso como

$$\langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_p(\lambda)} |\langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle|^2 e^{-ip\cdot(x-y)}, \quad (2.12)$$

enquanto que o resultado do campo escalar da teoria livre é

$$D(x-y) = \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_p(\lambda)} e^{-ip\cdot(x-y)}. \quad (2.13)$$

Reescrevendo a integral presente na equação 2.12 como

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_p(\lambda)} e^{-ip\cdot(x-y)} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_{\lambda}^2 + i\epsilon} e^{-ip\cdot(x-y)}, \quad (2.14)$$

temos

$$\langle\Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \sum_{\lambda} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_{\lambda}^2 + i\epsilon} e^{-ip\cdot(x-y)} |\langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle|^2, \quad (2.15)$$

$$\langle\Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \sum_{\lambda} |\langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle|^2 D_F((x-y), m_{\lambda}^2), \quad (2.16)$$

com  $D_F$  sendo o propagador de Feynman. Para cada estado  $\lambda$  haverá uma contribuição na função de 2 pontos e na amplitude de criação a partir do vácuo.

Uma outra forma de escrever a soma em  $\lambda$  é

$$\langle\Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \int_0^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \sum_{\lambda} 2\pi\delta(M^2 - m_{\lambda}^2) |\langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle|^2 D_F((x-y), m^2), \quad (2.17)$$

sendo a densidade espectral  $\rho(M^2)$

$$\rho(M^2) = \sum_{\lambda} 2\pi\delta(M^2 - m_{\lambda}^2) |\langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle|^2, \quad (2.18)$$

a equação 2.17 torna-se:

$$\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) D_F((x-y), m_\lambda^2), \quad (2.19)$$

onde a equação acima corresponde a representação espectral de Källén-Lehmann.

Para um estado intermediário de uma partícula teremos  $m_\lambda = m$ , sendo  $m$  o autovalor de energia da hamiltoniana interagente no referencial de repouso da partícula. A massa  $m$  é a massa observável da partícula interagente e pode diferir da massa nua  $m_0$ . Nesse caso a densidade espectral será

$$\rho(M^2) = 2\pi\delta(M^2 - m^2)Z + \sigma(M^2), \quad (2.20)$$

com  $Z = |\langle \Omega | \phi(0) | 1_0 \rangle|^2$ , onde  $1_0$  é o estado de 1-partícula com momento zero, e  $\sigma(M^2)$  representa as contribuições de estados de N-partículas. Dependendo da energia pode haver produção de duas ou mais partículas reais “livres” ou estados ligados de duas ou mais partículas. No espaço dos momentos tem-se

$$\begin{aligned} \int d^4x e^{ipx} \langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle &= \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \\ &= \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{m_e^2}^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \sigma(M^2) \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

com  $m_e^2$  sendo a massa do estado ligado (PESKIN, 2018). Para o caso do campo livre tem-se

$$\int d^4x e^{ipx} \langle 0 | T \phi(x) \phi(0) | 0 \rangle = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}. \quad (2.22)$$

A representação de Källén-Lehmann é uma representação integral de uma variável para uma função de dois pontos. A seguir iremos discutir a respeito da representação integral de Nakanishi, que é uma representação integral de duas variáveis generalizada.

## 2.2 Representação Integral de Nakanishi

O formalismo da Representação Integral de Nakanishi de uma amplitude de transição de um espalhamento genérico de  $N$ -partículas é baseado em um tratamento perturbativo. Porém, apesar de ser formulada no regime perturbativo pode ser usada como ansatz no regime não-perturbativo. Esta representação tem sido usada em estudos de problemas de estado ligado, com resultados em acordo com outros métodos da literatura (KUSAKA; WILLIAMS, 1995) (FREDERICO *et al.*, 2012).

A amplitude de probabilidade de um certo processo pode ser escrita em termos de série de potências da constante de acoplamento, onde cada termo pode ser interpretado como uma soma de integrais de Feynman geradas por uma Lagrangiana em particular e que correspondem à um conjunto de gráficos de Feynman. Utilizando a integral paramétrica de Feynman, realizando uma mudança de variáveis de integração que leve à um novo conjunto de variáveis que seja igual ao número das variáveis independentes, pode-se obter a representação integral de Nakanishi.

Como notação tem-se o 4-momento externo designado por  $p_i$ , tal que,  $\sum_i^N p_i = 0$ , o 4-momento  $k_j$  e a massa  $m_j$  estão associados as partículas que se propagam dentro dos loops, e  $q_l$  é o 4-momento em que se realiza a integração no  $l$ -ésimo loop. Considerando conjuntos de gráficos de Feynman  $G$  tendo  $N$  linhas externas, com  $n$  propagações internas,  $V$  vértices externos e  $s$  loops, tem-se

$$k_j = \sum_{l=1}^s b_{jl} q_l + \sum_{i=1}^N c_{ji} p_i, \quad (2.23)$$

onde  $b_{jl}$  e  $c_{ji}$  podem assumir os valores  $(-1, 0, 1)$  devido a conservação dos momentos nos vértices. A integral de Feynman associada a  $G$  é representada (GÓMEZ, 2016) como

$$f_G = \delta^{(4)}\left(\sum_{i=1}^N p_i\right) \int \left(\prod_{s=1}^{n'} d^4 q_s\right) \frac{1}{\prod_{j=1}^n (k_j^2 - m_j^2 + i\epsilon)}, \quad (2.24)$$

onde  $n' = n - (V - 1)$ . Para combinar os  $n$ -denominadores usa-se a fórmula paramétrica de Feynman

$$\frac{1}{[A_1 A_2 \dots A_n]} = (n-1)! \prod_{i=1}^n \int_0^1 d\alpha_i \frac{\delta(1 - \sum_{j=1}^n \alpha_j)}{[A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 + \dots + A_n \alpha_n]^n}, \quad (2.25)$$

assim que,

$$f_G = (n-1)! \delta^{(4)}\left(\sum_{i=1}^N p_i\right) \int \left(\prod_{s=1}^{n'} d^4 q_s\right) \int_0^1 \prod_{j=1}^n d\alpha_j \frac{\delta(1 - \sum_{j=1}^n \alpha_j)}{[\sum_{j=1}^n (k_j^2 - m_j^2 + i\epsilon) \alpha_j]^n}. \quad (2.26)$$

Na equação 2.23 tem-se a relação entre  $k_j$  e  $q_l$ , ao substituir tal relação na equação 2.26 haverá termos quadráticos e lineares de  $q_j$  no denominador. De modo que pode-se escrever

$$\left[ \sum_{j=1}^n (k_j^2 - m_j^2 + i\epsilon) \alpha_j \right]^n = \left[ \sum_{s=1}^{n'} d_s q_s^2 + 2 \sum_{s=1}^{n'} \sum_{i=1}^N B_{si} (q_s \cdot p_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N C_{ii'} (p_i \cdot p_{i'}) - \sum_{j=1}^n m_j^2 \alpha_j + i\epsilon \right]^n, \quad (2.27)$$

fazendo a seguinte troca de variável,

$$q'_s = q_s + \frac{1}{d_s} \sum_{i=1}^N B_{si} p_i, \quad (2.28)$$

tem-se

$$\left[ \sum_{j=1}^n (k_j^2 - m_j^2 + i\epsilon) \alpha_j \right]^n = \left[ \sum_{s=1}^{n'} d_s q_s'^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N (p_i \cdot p_{i'}) (C_{ii'} - \sum_{s=1}^{n'} \frac{1}{d_s} B_{si} B_{si'}) - \sum_{j=1}^n m_j^2 \alpha_j + i\epsilon \right]^n, \quad (2.29)$$

onde  $d_s$  é o conjunto de autovalores correspondentes a matriz  $D_{ss'}$ ,  $D_{ss'} = \sum_j \alpha_j b_{js} b_{js'}$ , e com  $B_{ss'} = \sum_j \alpha_j b_{js} c_{ji}$  e  $C_{ss'} = \sum_j \alpha_j c_{ji} b_{cj'}$ . O próximo passo é realizar a integração em  $q'_s$ , assumindo que o integrando é convergente podemos fazer a inversão da ordem de integração:

$$\int \prod_{s=1}^{n'} d^4 q'_s \frac{1}{[\sum_{s=1}^{n'} d_s q_s'^2 + H(n, N, \alpha_j, p_i) + i\epsilon]^n} = \frac{(n - 2n' - 1)! (i\pi^2)^{n'}}{(n - 1)! [\prod_{n'} d_{n'}]^2 [H(n, N, \alpha_j, p_i) + i\epsilon]^{n-2n'}}, \quad (2.30)$$

com

$$H(n, N, \alpha_j, p_i) = \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N (p_i \cdot p_{i'}) (C_{ii'} - \sum_{s=1}^{n'} \frac{1}{d_s} B_{si} B_{si'}) - \sum_{j=1}^n m_j^2 \alpha_j. \quad (2.31)$$

Substituindo este resultado na integral de Feynman da equação 2.26, obtêm-se

$$f_G = \delta^{(4)} \left( \sum_{i=1}^N (p_i) \right) \frac{(n - 2n' - 1)! (i\pi^2)^{n'}}{[\prod_{n'} d_{n'}]^2} \int_0^1 \prod_{j=1}^n d\alpha_n \frac{\delta(1 - \sum_{j=1}^n \alpha_j)}{[H(n, N, \alpha_j, p_i) + i\epsilon]^{n-2n'}}. \quad (2.32)$$

Veja que na integral de Feynman o denominador depende das massas  $m_j$  e do número de loops. A ideia de Nakanishi é mover essa dependência para o numerador. Para mover a dependência do denominador para o numerador, será necessário escrever a função  $f_G$  em termos da função-peso  $\phi_G$ . Assim, reescrevemos a equação 2.32 utilizando uma função

delta, de tal modo que temos

$$f_G = \prod_h \int_0^1 dz_h \delta(1 - z_h) \int_0^\infty d\xi \frac{\phi_G(z, \xi)}{[\xi - \sum_h z_h a_h - i\epsilon]^{n-2n'}}, \quad (2.33)$$

com

$$\begin{aligned} \phi_G(z, \xi) \delta(1 - \sum_h z_h) &= \text{const} \prod_{j=1}^n \int d\alpha_j \frac{\delta(1 - \sum_{j=1}^n \alpha_j)}{[\prod_{n'} d_{n'}]^2 (-\beta)^{n-2n'}} \times \\ &\delta(z_h - \frac{\eta_h}{\beta}) \delta(\xi - \sum_l \frac{m_l^2 \alpha_l}{\beta}) \delta(1 - \sum_h z_h). \end{aligned} \quad (2.34)$$

As variáveis  $\eta_h$  e  $\beta$  são dadas pela seguintes relações:

$$\sum_h \eta_h \cdot s_h = \sum_i \sum_{i'} E_{ii'}(p_i \cdot p_{i'}) \quad , \quad \beta = \sum_h \eta_h, \quad (2.35)$$

onde  $s_h$  é o conjunto de todas as variáveis independentes que podem ser construídas com  $N$  momentos externos. Para remover a dependência em  $n$  e  $n'$  basta realizar integração por partes, onde os termos de superfície anulam-se devido a dependência de  $\phi_G$  em  $\xi$ . Após realizar  $n - 2n' - 1$  integrações, o resultado será

$$f_G = \prod_h \int_0^1 dz_h \delta(1 - \sum_h z_h) \int_0^\infty d\xi \frac{\phi'_G(z, \xi)}{[\xi - \sum_h z_h a_h - i\epsilon]}, \quad (2.36)$$

com  $\sum z_h \neq 1$  e  $z\phi'_G(z, \xi)$  escrito como

$$\phi'_G(z, \xi) = \frac{1}{n - 2n' - 1} \frac{\partial^{n-2n'-1} \phi_G(z, \xi)}{\partial \xi^{n-2n'-1}}. \quad (2.37)$$

Para obter a representação da amplitude amputada ou vértex, vamos calcular o caso de um diagrama de três pernas. Para  $G = 3$  temos

$$f_3 = \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \int_0^1 dz_3 \delta(1 - z_1 - z_2 - z_3) \int_0^\infty d\xi \frac{\phi_3(z_1, z_2, z_3, \xi)}{[\xi - z_1 a_1 - z_2 a_2 - z_3 a_3 - i\epsilon]}, \quad (2.38)$$

integrando em  $\alpha_3$

$$f_3 = \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \int_0^\infty \frac{d\xi}{z_1 + z_2} \frac{\phi_3(z_1, z_2, \xi) \theta(z_1 + z_2) \theta(1 - z_1 - z_2)}{\left[ \frac{\xi - z_1 a_1 - z_2 a_2 - (1 - z_1 z_2) a_3}{z_1 + z_2} - i\epsilon \right]}. \quad (2.39)$$

Realizando a seguinte troca de variável

$$\gamma = \frac{\xi}{z_1 + z_2} - \frac{(1 - z_1 - z_2)}{z_1 + z_2} a_3, \quad (2.40)$$

a equação 2.39 torna-se

$$f_3 = \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \int_{\gamma_0}^{\infty} d\gamma \frac{\phi_3(z_1, z_2, \xi) \theta(z_1 + z_2) \theta(1 - z_1 - z_2)}{[\gamma - \frac{z_1 a_1 + z_2 a_2}{z_1 + z_2} - i\epsilon]}, \quad (2.41)$$

com

$$\gamma_0 = -(1 - z_1 - z_2) \frac{a_3}{(z_1 + z_2)}. \quad (2.42)$$

Introduzindo as seguintes variáveis

$$y = z_1 + z_2 \quad , \quad y' = \frac{z_1}{z_1 + z_2}, \quad (2.43)$$

de tal forma que nós podemos redefinir a função peso como

$$g_{\Gamma}(y', \gamma) = \int_0^1 y dy \phi_3(z, y, \gamma) \theta(y) \theta(1 - y) \theta(\gamma + a_3 \frac{(1 - y)}{y}), \quad (2.44)$$

com

$$\gamma_0 = -a_3 \frac{(1 - y)}{y}. \quad (2.45)$$

Logo, a equação 2.41 será

$$f_3 = \int_0^1 dy' \int_{-\infty}^{+\infty} d\gamma \frac{g_{\Gamma}(y', \gamma)}{\gamma - y' a_1 - (1 - y') a_2 - i\epsilon}, \quad (2.46)$$

Considerando o estado ligado com momento  $p$  e as partículas constituintes com momentos  $p_1$  e  $p_2$ , onde

$$p = p_1 + p_2 \quad , \quad k = (p_1 - p_2)/2, \quad (2.47)$$

a expressão para o vertex, para  $z = 1 - 2y'$ , torna-se:

$$\Gamma(k, p) = \int_0^1 dz \int_{-\infty}^{+\infty} d\gamma \frac{g_{\Gamma}(z, \gamma)}{[\gamma - \frac{M^2}{4} - k^2 - zp \cdot k - i\epsilon]}, \quad (2.48)$$

A expressão que representa a amplitude de Bethe-Salpeter é

$$\Phi(k, p) = \int_{-1}^1 dz \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma \frac{g(\gamma, z)}{[k^2 + p \cdot kz - \kappa^2 - \gamma + i\epsilon]^3}, \quad (2.49)$$

sendo esta podendo ser obtida através da representação de Nakanishi da amplitude amputada e vice-versa.

# 3 Equação de Bethe-Salpeter para o Estado Ligado Bosônico

Em 1951, E.E. Salpeter e H.A. Bethe apresentaram uma formulação relativística para um sistema de dois corpos (SALPETER; BETHE, 1951). Formulada no espaço de Minkowski, a equação descreve o estado ligado de partículas, determinando a energia de ligação e a amplitude de Bethe-Salpeter. A equação de Bethe-Salpeter (BSE) pode ser vista como um análogo relativístico da equação de onda de Schrödinger.

## 3.1 Equação de Bethe-Salpeter para Amplitude

Considere um estado ligado, de massa  $M$  e momento  $p$ , de duas partículas com momento  $k_1 = p/2 + k$  e  $k_2 = p/2 - k$ , massas  $m_1 = m_2 = m$ , que interagem através da troca de um bóson escalar de massa  $\mu$ . Pictoricamente, podemos representar a formação desse estado ligado pelos diagramas de Feynman apresentados na figura 3.1.

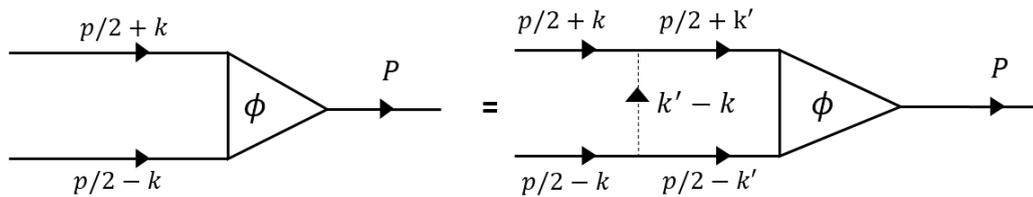


FIGURA 3.1 – Equação de Bethe-Salpeter.

Dessa forma, a equação de Bethe-Salpeter é dada por:

$$\Phi(k, p) = S(k + p/2) \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{i(-ig)^2}{[(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon]} \Phi(k', p) S(k - p/2), \quad (3.1)$$

onde  $\Phi(k, p)$  é a amplitude de Bethe-Salpeter e os propagadores bosônicos são dados por

$$S(k + p/2) = \frac{i}{[(p/2 + k)^2 - m^2 + i\epsilon]}, \quad (3.2)$$

$$S(k - p/2) = \frac{i}{[(p/2 - k)^2 - m^2 + i\epsilon]}. \quad (3.3)$$

Essa é uma equação integral que contém singularidades no seu Kernel. Para resolvê-la iremos representar a Amplitude de Bethe-Salpeter pela Representação Integral de Nakanishi:

$$\Phi(k, p) = \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \frac{g(\gamma', z')}{[k^2 + p \cdot kz' + M^2/4 - m^2 - \gamma' + i\epsilon]^3}. \quad (3.4)$$

A equação 3.1 torna-se

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} dz \int_0^\infty d\gamma \frac{g(\gamma, z)}{[k^2 + p \cdot kz + M^2/4 - m^2 - \gamma + i\epsilon]^3} &= \frac{i}{[(p/2 + k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \times \\ \frac{i}{[(p/2 - k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \frac{i(-ig)^2}{[(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon]} \times \\ \frac{g(\gamma', z')}{[k^2 + p \cdot kz' + M^2/4 - m^2 - \gamma' + i\epsilon]^3}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

Inicialmente, analisaremos o lado direito da equação (RHS-Right Hans Side). Iremos aplicar a parametrização de Feynman para obter um único denominador dentro da integração. Para este caso, a fórmula paramétrica de Feynman será

$$\frac{1}{A_1^m A_2^n} = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{\lambda^{n-1} d\lambda}{[A_1 + A_2\lambda]^{m+n}}. \quad (3.6)$$

Assim,

$$\frac{1}{A_1 A_2^3} = 3 \int_0^\infty \frac{\lambda^2 d\lambda}{[A_1 + A_2\lambda]^4}, \quad (3.7)$$

com

$$A_1 = \frac{1}{[(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon]}, \quad (3.8)$$

$$A_2 = \frac{1}{[k^2 + p \cdot kz' + M^2/4 - m^2 - \gamma' + i\epsilon]}. \quad (3.9)$$

Fazendo a troca de variável  $\lambda = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ :

$$\frac{1}{A_1 A_2^3} = 3 \int_0^1 \frac{\alpha^2 d\alpha}{[A_1 + (A_2 - A_1)\alpha]^4} \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{A_1 A_2^3} = \int_0^1 \frac{3\alpha^2 d\alpha}{[k'^2 + k'(pz'\alpha + 2k\alpha - 2k) + k^2 - \mu^2 - \alpha(k^2 + m^2 - M^2/4 + \gamma' - \mu^2) + i\epsilon]^4}, \quad (3.11)$$

tal que, Equação de Bethe-Salpeter completa torna-se

$$\int_{-1}^{+1} dz \int_0^{\infty} d\gamma \frac{g(\gamma, z)}{[k^2 + p \cdot kz + M^2/4 - m^2 - \gamma + i\epsilon]^3} = \frac{i}{[(p/2 + k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \times$$

$$\frac{i}{[(p/2 - k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^{\infty} d\gamma' \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \times$$

$$\frac{3\alpha^2 i (-ig)^2 g(\gamma', z')}{[k'^2 + k'(pz'\alpha + 2k\alpha - 2k) + k^2 - \mu^2 - \alpha(k^2 + m^2 - M^2/4 + \gamma' - \mu^2) + i\epsilon]^4}. \quad (3.12)$$

Para resolver a integral quadridimensional no momento, faremos uma troca de variável em  $k'$ :

$$k' = Q - (pz'/2\alpha + 2k\alpha - 2k)/2. \quad (3.13)$$

Escrevendo o denominador como  $C = Q^2 + b + i\epsilon$ , tem-se

$$b = -(pz'/2\alpha + 2k\alpha - 2k)^2/4 + k^2 - \mu^2 - \alpha(k^2 + m^2 - M^2/4 + \gamma' - \mu^2). \quad (3.14)$$

A integração na variável  $Q$  pode ser escrita como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 Q}{(Q^2 + b + i\epsilon)^4} = \frac{i\pi^2}{6(b + i\epsilon)^2}, \quad (3.15)$$

onde utilizamos coordenadas esféricas e realizamos a integral no plano complexo. Com esse resultado, a equação é dada por

$$\int_{-1}^{+1} dz \int_0^{\infty} d\gamma \frac{g(\gamma, z)}{[k^2 + p \cdot kz + M^2/4 - m^2 - \gamma + i\epsilon]^3} =$$

$$= \frac{g^2}{32\pi^2} \frac{1}{[(p/2 + k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \frac{1}{[(p/2 - k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^{\infty} d\gamma' \int_0^1 d\alpha \times$$

$$\frac{\alpha^2 g(\gamma', z')}{[-(pz'/2\alpha + 2k(\alpha - 1))^2/4 + k^2 - \mu^2 - \alpha(k^2 + m^2 - M^2/4 + \gamma' - \mu^2) + i\epsilon]^2}. \quad (3.16)$$

Na equação acima pode-se aplicar o Teorema da Unicidade para obter uma equação integral para função peso  $g(\gamma, z)$ . Outro caminho que podemos seguir é realizar a projeção na frente de luz dessa equação, que discutiremos a seguir.

## 3.2 Projeção na Frente de Luz da Equação de Bethe-Salpeter

Sejam as variáveis na frente de luz

$$k_{\perp}^2 = \gamma \quad , \quad k^+ = \frac{-zM}{2},$$

$$k^2 = k^-k^+ - k_{\perp}^2 \quad , \quad p \cdot k = (k^- + k^+)\frac{M}{2}, \quad (3.17)$$

reescrevemos os propagadores como

$$\begin{aligned} \frac{1}{[(p/2 - k)^2 - m^2 + i\epsilon]} &= \frac{2}{M(1-z)} \frac{1}{k^- + \frac{M}{2} - \frac{2}{M} \frac{(\gamma+m^2)}{(1-z)} + i\epsilon}, \\ \frac{1}{[(p/2 - k)^2 - m^2 + i\epsilon]} &= \frac{2}{M(1+z)} \frac{1}{k^- + \frac{M}{2} - \frac{2}{M} \frac{(\gamma+m^2)}{(1+z)} + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

O termo dentro do denominador no lado direito da equação 3.16 é reescrito como

$$\begin{aligned} &-(pz'/2\alpha + 2k(\alpha - 1))^2/4 + k^2 - \mu^2 - \alpha(k^2 + m^2 - M^2/4 + \gamma' - \mu^2) + i\epsilon = \\ &\alpha(1-\alpha)(z'-z)\frac{Mk^-}{2} + (1-\alpha)\left(-\frac{z'z\alpha M}{2} + \gamma(1-\alpha) - \mu^2 - \gamma\right) + \alpha(-\gamma' - m^2 + (1-\alpha z'^2))\frac{M^2}{4} + i\epsilon. \end{aligned} \quad (3.19)$$

O denominador no lado esquerdo da equação 3.16 pode ser escrito como

$$k^2 + p \cdot kz + M^2/4 - m^2 - \gamma + i\epsilon = (z' - z)\frac{Mk^-}{2} - \gamma - \gamma' - m^2 + (1 - zz')\frac{M^2}{4} + i\epsilon. \quad (3.20)$$

Projetar a equação de Bethe-Salpeter para amplitude na frente de luz corresponde a integrá-la na variável  $k^-$ . Assim, integrando ambos os lados da equação 3.16 por  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^-}{2\pi}$ , obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^-}{2\pi} \int_{-1}^{+1} dz \int_0^{\infty} d\gamma \frac{g(\gamma, z)}{[(z' - z)\frac{Mk^-}{2} - \gamma - \gamma' - m^2 + (1 - zz')\frac{M^2}{4} + i\epsilon]^3} = \\ &= \frac{g^2}{2(2\pi)^2 M^2} \frac{1}{(1-z)(1+z)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^-}{2\pi} \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^{\infty} d\gamma' \int_0^1 d\alpha g(\gamma', z') \times \\ &\quad \frac{1}{[(k^- - k_d + i\epsilon)(k^- - k_u + i\epsilon)]} \frac{\alpha^2}{[k_D k^- + l_D + i\epsilon]^2}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde,

$$k_d = -\frac{M}{2} + \frac{2}{M} \frac{(\gamma + m^2)}{(1-z)}, \quad k_u = \frac{M}{2} - \frac{2}{M} \frac{(\gamma + m^2)}{(1+z)}, \quad (3.22)$$

$$k_D = \alpha(1-\alpha)(z' - z) \frac{M}{2},$$

$$l_D = (\gamma(1-\alpha) - \mu^2 - \gamma - \frac{z'z\alpha M}{2})(1-\alpha) + \alpha(-\gamma' - m^2 + (1-\alpha z'^2) \frac{M^2}{4}). \quad (3.23)$$

Para realizar a integração em  $k^-$  utilizaremos a seguinte relação

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^-}{2\pi} \frac{1}{[xk^- - y + i\epsilon]^3} = -\frac{i\delta(x)}{2y^2}. \quad (3.24)$$

Assim, após realização da integração na variável  $k^-$ , o lado esquerdo da equação 3.21 torna-se

$$LHS = \frac{-i}{M} \int_0^{\infty} d\gamma \frac{g(\gamma, z)}{[\gamma + \gamma' + m^2 + (1-z^2) \frac{M^2}{4}]^2}. \quad (3.25)$$

O lado direito da equação 3.21 possui os polos  $k_d$  e  $k_u$ , que estão localizados abaixo e acima do eixo real, respectivamente. Enquanto que a localização do polo  $k_D$  depende do seu sinal.

O contorno de integração será realizado por cima do plano complexo se  $z' > z$  pois  $k_D > 0$ . Neste caso, o polo  $k_u$  contribuirá na integração. Portanto, ao realizar a integração em  $dk^-$  obtemos

$$RHS = \frac{(2i\pi)g^2}{2(2\pi)^2 M^2} \frac{1}{(1-z)(1+z)} \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^{\infty} d\gamma' \int_0^1 d\alpha g(\gamma', z') \frac{1}{(k_u - k_d)} \frac{\alpha^2}{(k_D k_u + l_D)^2}. \quad (3.26)$$

Analogamente, quando  $z' < z$  temos  $k_D < 0$ , de modo que o polo  $k_d$  contribuirá na integração. Assim,

$$RHS = \frac{(-2i\pi)g^2}{2(2\pi)^2 M^2} \frac{1}{(1-z)(1+z)} \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^{\infty} d\gamma' \int_0^1 d\alpha g(\gamma', z') \frac{1}{(k_d - k_u)} \frac{\alpha^2}{(k_D k_d + l_D)^2}. \quad (3.27)$$

Podemos escrever estes resultados em uma única expressão por meio de uma função  $\theta$ , obtendo a seguinte equação completa de Bethe-Salpeter para a amplitude:

$$\int_0^{\infty} d\gamma \frac{g(\gamma, z)}{[\gamma + \gamma' + m^2 + (1-z^2) \frac{M^2}{4}]^2} = \frac{g^2}{(4\pi)^2 M} \frac{1}{(1-z)(1+z)} \times$$

$$\int_{-1}^{+1} dz' \int_0^{\infty} d\gamma' g(\gamma', z') \int_0^1 \alpha^2 d\alpha \left[ \frac{\theta(z' - z)}{(k_d - k_u)} \frac{1}{(k_D k_u + l_D)^2} + \frac{\theta(z - z')}{(k_d - k_u)} \frac{1}{(k_D k_d + l_D)^2} \right]. \quad (3.28)$$

A equação de Bethe-Salpeter para amplitude usando a representação de Nakanishi envolve um integração em duas variáveis. Quando realiza-se a projeção na frente de luz a integração passa a ser em uma só variável. Como consequência, a equação de Bethe-Salpeter torna-se um problema de autovalor generalizado. Podendo ser invertida utilizando métodos como transformação generalizada de Stieltjes ou Teorema da Unicidade. Isto possibilita que ela seja resolvida numericamente, tendo como opção método de expansão em uma base de polinômios de Gegenbauer  $C_m^{5/2}(z)$  e Laguerre  $L_n(a\gamma)$ . Onde a função peso de Nakanishi  $g(\gamma, z)$  é decomposta como  $g_i(\gamma, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}^i G_m(z) L_n(\gamma)$ .

### 3.3 Equação de Bethe-Salpeter para Amplitude Amputada

Para obter a descrição física de um sistema ligado podemos usar tanto a amplitude  $\Phi(k, p)$  quanto a amplitude amputada  $\Gamma(k, p)$ . Para obter a equação de Bethe-Salpeter para amplitude amputada podemos utilizar a relação entre a amplitude  $\Phi(k, p)$  e o vértice  $\Gamma(k, p)$ . A vantagem de utilizar a amplitude amputada é que no kernel de interação há um número menor de polos, facilitando a resolução da equação de Bethe-Salpeter.

A equação integral de Bethe-Salpeter para amplitude  $\Phi$  é escrita como:

$$\Phi(k, p) = S(k + p/2) \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{i(-ig)^2}{(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon} \Phi(k', p) S(k - p/2). \quad (3.29)$$

Além disso, a amplitude  $\Phi(k, p)$  é descrita em termos da amplitude amputada  $\Gamma(k, p)$  como

$$\Phi(k, p) = S(k + p/2) \Gamma(k, p) S(k - p/2). \quad (3.30)$$

Substituindo a equação 3.30 na equação 3.29, temos:

$$S(k + p/2) \Gamma(k, p) S(k - p/2) = S(k + p/2) \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{i(-ig)^2}{(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon} \times$$

$$S(k' + p/2) \Gamma(k', p) S(k' - p/2) S(k - p/2). \quad (3.31)$$

Multiplicando a equação pelos inversos dos propagadores, temos:

$$\Gamma(k, p) = \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{i(-ig)^2}{(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon} S(k' + p/2) \Gamma(k', p) S(k' - p/2). \quad (3.32)$$

Por outro lado, iremos utilizar a Representação de Nakanishi para  $\Gamma(k, p)$ :

$$\Gamma(k, p) = \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty \frac{d\gamma g(\gamma, z)}{[k^2 + p \cdot kz - \kappa^2 - \gamma + i\epsilon]}, \quad (3.33)$$

obtendo

$$\int_{-1}^1 dz \int_0^\infty \frac{d\gamma g(\gamma, z)}{[k^2 + p \cdot kz - \kappa^2 - \gamma + i\epsilon]} = \int_{-1}^1 dz' \int_0^\infty \frac{d\gamma' g(\gamma', z')}{[k'^2 + p \cdot k'z' - \kappa^2 - \gamma' + i\epsilon]} \times$$

$$\int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{i(-ig)^2}{(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon} S(k' + p/2) S(k' - p/2). \quad (3.34)$$

Como foi realizado para a amplitude, o próximo passo é usar a parametrização de

Feynman para tornar os denominadores uma única função. Denominamos:

$$A_1 = (k' - p/2)^2 - m^2 + i\epsilon \quad , \quad A_2 = (k' + p/2)^2 - m^2 + i\epsilon \quad (3.35)$$

$$A_3 = (k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon \quad , \quad A_4 = k'^2 + p \cdot k' z' - \kappa^2 - \gamma' + i\epsilon \quad (3.36)$$

temos:

$$\frac{1}{A_1 A_2 A_3 A_4} = \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \int_0^1 \frac{3d\alpha_3}{[\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) A_4]^4}. \quad (3.37)$$

Reescrevendo o RHS da equação 3.34, temos:

$$\begin{aligned} RHS = & \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \int_{-1}^1 dz' \int_0^\infty d\gamma' \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \int_0^1 d\alpha_3 \times \\ & \frac{3g(\gamma', z') i(-ig)^2}{[\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) A_4]^4}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Assim a equação completa é:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty \frac{d\gamma g(\gamma, z)}{[k^2 + p \cdot k z - \kappa^2 - \gamma' + i\epsilon]^3} = & \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \int_{-1}^1 dz' \int_0^\infty d\gamma' \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \int_0^1 d\alpha_3 \times \\ & \frac{3g(\gamma', z') i(-ig)^2}{[\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) A_4]^4}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

O próximo passo é resolver a integral quadridimensional. Para tal vamos reescrever o denominador da equação acima. Seja o denominador do lado direito:

$$L = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) A_4, \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} L = & \alpha_1((k' - p/2)^2 - m^2) + \alpha_2((k' + p/2)^2 - m^2) + \alpha_3((k - k')^2 - \mu^2) + \\ & + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)(k'^2 + p \cdot k' z' - \kappa^2 - \gamma'), \end{aligned} \quad (3.41)$$

vamos reagrupar os termos para que possamos realizar a integração em uma outra variável.

$$L = k'^2 + [-\alpha_1 + \alpha_2 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)z']p \cdot k' - 2\alpha_3 k \cdot k'$$

$$-(1 - \alpha_3)(m^2 - p^2/4) + \alpha_3(k^2 - \mu^2) + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)\gamma', \quad (3.42)$$

$$L = k'^2 - [((\alpha_1 - \alpha_2 - (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)z')p + 2\alpha_3k) \cdot k' +$$

$$-(1 - \alpha_3)(m^2 - p^2/4) + \alpha_3(k^2 - \mu^2) + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)\gamma'. \quad (3.43)$$

Somando e subtraindo o quadrado do termo entre colchete temos:

$$L = [k' + (\alpha_1 - \alpha_2 - (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)z')p/2 + \alpha_3k]^2 - [((\alpha_1 - \alpha_2 - (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)z')p + 2\alpha_3k)^2/4$$

$$-(1 - \alpha_3)(m^2 - p^2/4) + \alpha_3(k^2 - \mu^2) + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)\gamma'. \quad (3.44)$$

Denominando:

$$Q = k' + (\alpha_1 - \alpha_2 - (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)z')p/2 + \alpha_3k, \quad (3.45)$$

$$h = -[((\alpha_1 - \alpha_2 - (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)z')p + 2\alpha_3k)^2/4$$

$$-(1 - \alpha_3)(m^2 - p^2/4) + \alpha_3(k^2 - \mu^2) + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)\gamma', \quad (3.46)$$

reescrevemos:

$$RHS = i(-ig)^2 \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} \int_{-1}^1 dz' \int_0^\infty d\gamma' \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \int_0^1 \frac{3g(\gamma', z')d\alpha_3}{[Q^2 + h + i\epsilon]^4}. \quad (3.47)$$

Usando a identidade

$$\int \frac{d^4Q}{[Q^2 + h + i\epsilon]^n} = \frac{1}{n-1} \frac{1}{n-2} \frac{i\pi^2}{h^{n-2}}, \quad (3.48)$$

temos:

$$RHS = \frac{g^2}{32\pi^2} \int_{-1}^1 dz' \int_0^\infty d\gamma' \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \int_0^1 g(\gamma', z') \frac{d\alpha_3}{(h + i\epsilon)^2}. \quad (3.49)$$

Equação completa:

$$\int_{-1}^1 dz \int_0^\infty d\gamma \frac{g(\gamma, z)}{[k^2 + p.kz - \kappa^2 - \gamma + i\epsilon]} = \frac{g^2}{32\pi^2} \int_{-1}^1 dz' \int_0^\infty d\gamma' \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \int_0^1 d\alpha_3 \times$$

$$\frac{g(\gamma', z')}{\left[ - [(\alpha_1 - \alpha_2 - \bar{s}z')p + 2\alpha_3k]^2/4 - (1 - \alpha_3)(m - p^2/4) + \alpha_3(k^2 - \mu^2) + \bar{s}\gamma' + i\epsilon \right]^2}, \quad (3.50)$$

com

$$\bar{s} = (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3). \quad (3.51)$$

Esta é a equação completa de Bethe-Salpeter para amplitude amputada  $\Gamma(k, p)$ . Tal equação pode ser projetada na frente de luz e ser resolvida numericamente utilizando expansão em base de polinômios de Gegenbauer e Laguerre, como realizada para amplitude de Bethe-Salpeter. Esperamos que os resultados numéricos para equação de Bethe-Salpeter para amplitude amputada sejam mais estáveis do que para amplitude de Bethe-Salpeter.

### 3.4 Amplitude Amputada no Modelo de Wick-Cutkosky

Um caso particular interessante é o limite de Wick-Cutkosky, no qual é considerada uma partícula mediadora de massa nula ( $\mu = 0$ ) e emprega-se o ansatz  $g(\gamma', z') = \delta(\gamma')f(z')$  para função peso de Nakanishi (WICK, 1954) (CUTKOSKY, 1954).

A equação completa para o vértice é

$$\int_{-1}^1 dz \int_0^\infty d\gamma \frac{g(\gamma, z)}{[k^2 + p.kz - \kappa^2 - \gamma + i\epsilon]} =$$

$$\frac{g^2}{(4\pi)^2} \int_{-1}^1 dz' \int_0^\infty d\gamma' \prod_{i=1}^3 \int_0^1 d\alpha_i \frac{\theta(1 - \sum_{j=1}^3 \alpha_j)}{\alpha_3^2(1 - \alpha_3)} \frac{g(\gamma', z')}{[k^2 + k.p\bar{z} - \bar{\gamma} - \kappa^2 + i\epsilon]^2}, \quad (3.52)$$

onde

$$\bar{\gamma} = \frac{(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)z'\gamma'}{(1 - \alpha_3)\alpha_3} + \frac{(1 - \alpha_3)^2(m^2 - p^2/4 + \bar{z}^2 p^2/4) + \alpha_3 \mu^2}{(1 - \alpha_3)\alpha_3}, \quad (3.53)$$

$$\bar{z} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)z'}{(1 - \alpha_3)}. \quad (3.54)$$

Fazendo  $\mu = 0$ , a variável  $\bar{\gamma}$  torna-se

$$\bar{\gamma} = \frac{(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)z'\gamma'}{(1 - \alpha_3)\alpha_3} + \frac{(1 - \alpha_3)^2(m^2 - p^2/4 + \bar{z}^2 p^2/4)}{(1 - \alpha_3)\alpha_3}. \quad (3.55)$$

Substituindo o ansatz  $g(\gamma', z') = \delta(\gamma')f(z')$  em ambos os lados da equação

$$\int_{-1}^1 dz \int_0^\infty d\gamma \frac{\delta(\gamma)f(z)}{[k^2 + p.kz - \kappa^2 - \gamma + i\epsilon]} =$$

$$\frac{g^2}{(4\pi)^2} \int_{-1}^1 dz' \int_0^\infty d\gamma' \prod_{i=1}^3 \int_0^1 d\alpha_i \frac{\theta(1 - \sum_{j=1}^3 \alpha_j)}{\alpha_3^2(1 - \alpha_3)} \frac{\delta(\gamma')f(z')}{[k^2 + k.p\bar{z} - \bar{\gamma} - \kappa^2 + i\epsilon]^2}, \quad (3.56)$$

e resolvendo as integrações em  $\gamma$  e  $\gamma'$ , temos a seguinte equação

$$\int_{-1}^1 \frac{dz f(z)}{[k^2 + p.kz - \kappa^2 + i\epsilon]} = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \int_{-1}^1 dz' \prod_{i=1}^3 \int_0^1 d\alpha_i \frac{\theta(1 - \sum_{j=1}^3 \alpha_j)}{\alpha_3^2(1 - \alpha_3)} \frac{f(z')}{[k^2 + k.p\bar{z} - \bar{\gamma} - \kappa^2 + i\epsilon]^2}, \quad (3.57)$$

com

$$\bar{\gamma} = \frac{(1 - \alpha_3)}{\alpha_3} (m^2 - p^2/4 + \bar{z}^2 p^2/4). \quad (3.58)$$

Analisando a expressão  $\bar{\gamma} + \kappa^2$ , onde  $\kappa^2 = m^2 - \frac{p^2}{4}$  podemos reescrever a equação 3.57 de tal modo que possamos aplicar posteriormente a transformação de Stieltjes. Assim, seja  $\bar{\gamma} + \kappa^2$  escrito como

$$\bar{\gamma} + \kappa^2 = \frac{(1 - \alpha_3)}{\alpha_3} (m^2 - p^2/4 + \bar{z}^2 p^2/4) + m^2 - \frac{p^2}{4}, \quad (3.59)$$

onde

$$\bar{z} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)z'}{(1 - \alpha_3)}, \quad (3.60)$$

encontramos a seguinte expressão

$$\bar{\kappa}^2 = \bar{\gamma} + \kappa^2 = \frac{1}{\alpha_3} \left[ (m^2 - p^2/4) + (\alpha_2 - \alpha_1 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)z') \frac{p^2}{4} \right]. \quad (3.61)$$

Reescrevendo a equação 3.57, temos o seguinte resultado

$$\int_{-1}^1 \frac{dz f(z)}{[k^2 + p.kz - \kappa^2 + i\epsilon]} = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \int_{-1}^1 dz' \prod_{i=1}^3 \int_0^1 d\alpha_i \frac{\theta(1 - \sum_{j=1}^3 \alpha_j)}{\alpha_3^2 (1 - \alpha_3)} \frac{f(z')}{[k^2 + k.p\bar{z} - \bar{\kappa}^2 + i\epsilon]^2}. \quad (3.62)$$

Ao utilizar o limite de Wick-Cutkosky, a equação para amplitude amputada torna-se mais simples. Uma maneira de ampliar o cálculo analítico e numérico da equação 3.62 é utilizar as transformações de Stieltjes. Outro método é utilizar o Teorema da Unicidade. Para isso, será necessário reescrever a equação 3.52.

### 3.4.1 Equação da Amplitude Amputada através do Teorema da Unicidade

Para aplicar o Teorema da Unicidade na equação 3.52 é preciso os denominadores de ambos os lados da equação fiquem similares, ou seja

$$\int_{-1}^1 dz \int_0^\infty d\gamma \frac{g(\gamma, z)}{[k^2 + p.kz - \kappa^2 - \gamma + i\epsilon]} = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \times$$

$$\int_{-1}^1 dz \int_0^\infty d\gamma \int_{-1}^1 dz' \int_0^\infty d\gamma' \prod_{i=1}^3 \int_0^1 d\alpha_i \frac{\theta(1 - \sum_{j=1}^3 \alpha_j)}{\alpha_3^2 (1 - \alpha_3)} \frac{g(\gamma', z') \delta'(\gamma - \bar{\gamma}) \delta(z - \bar{z})}{[k^2 + k.p\bar{z} - \bar{\gamma} - \kappa^2 + i\epsilon]}. \quad (3.63)$$

com  $\mu = 0$ , fazendo com que  $\bar{\gamma}$  seja

$$\bar{\gamma} = \frac{(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)z'\gamma'}{(1 - \alpha_3)\alpha_3} + \frac{(1 - \alpha_3)^2(m^2 - p^2/4 + \bar{z}^2 p^2/4)}{(1 - \alpha_3)\alpha_3}. \quad (3.64)$$

Ao substituir o ansatz  $g(\gamma', z') = \delta(\gamma')f(z')$  na equação 3.63, a expressão torna-se

$$\int_{-1}^1 dz \int_0^\infty d\gamma \frac{\delta(\gamma)f(z)}{[k^2 + p.kz - \kappa^2 - \gamma + i\epsilon]} = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \times$$

$$\int_{-1}^1 dz \int_0^\infty d\gamma \int_{-1}^1 dz' \int_0^\infty d\gamma' \prod_{i=1}^3 \int_0^1 d\alpha_i \frac{\theta(1 - \sum_{j=1}^3 \alpha_j)}{\alpha_3^2(1 - \alpha_3)} \frac{\delta(\gamma')f(z')\delta'(\gamma - \bar{\gamma})\delta(z - \bar{z})}{[k^2 + k.p\bar{z} - \bar{\gamma} - \kappa^2 + i\epsilon]}. \quad (3.65)$$

Com isto, o próximo passo é aplicar o Teorema da Unicidade. Aplicando-o na variável de integração  $z$ , obtemos:

$$\int_0^\infty d\gamma \delta(\gamma)f(z) = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \int_0^\infty d\gamma \int_{-1}^1 dz' \int_0^\infty d\gamma' \prod_{i=1}^3 \int_0^1 d\alpha_i \frac{\theta(1 - \sum_{j=1}^3 \alpha_j)}{\alpha_3^2(1 - \alpha_3)} \times$$

$$\delta(\gamma')f(z')\delta'(\gamma - \bar{\gamma})\delta(z - \bar{z}). \quad (3.66)$$

Uma vez que é realizada a integração nas variáveis  $\gamma$  e  $\gamma'$ , o resultado será

$$f(z) = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \int_0^\infty d\gamma \int_{-1}^1 dz' f(z') \frac{\partial}{\partial \gamma} \prod_{i=1}^3 \int_0^1 d\alpha_i \frac{\theta(1 - \sum_{j=1}^3 \alpha_j)}{\alpha_3^2(1 - \alpha_3)} \delta(\gamma - \bar{\gamma})\delta(z - \bar{z}), \quad (3.67)$$

com

$$\bar{\gamma} = \frac{(1 - \alpha_3)}{\alpha_3} (m^2 - p^2/4 + \bar{z}^2 p^2/4). \quad (3.68)$$

Para realizar as integrações dentro do kernel da equação 3.67 é necessário reescrever as funções delta. Reescrevendo a função  $\delta(z - \bar{z})$ , temos:

$$\delta(z - \bar{z}) = \delta\left((1 - \alpha_3)z - \alpha_2 - \alpha_1 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)z'\right), \quad (3.69)$$

$$\delta(z - \bar{z}) = \delta\left((1 - \alpha_3)(z - z') - \alpha_2(1 - z') + \alpha_1(1 + z')\right). \quad (3.70)$$

$$\delta(z - \bar{z}) = \frac{\delta(\alpha_1 - \eta)}{|(1 + z')|}, \quad (3.71)$$

com

$$\eta = \frac{-(1 - \alpha_3)(z - z') + \alpha_2(1 - z')}{(1 + z')}. \quad (3.72)$$

Reescrevendo a função  $\delta(\gamma - \bar{\gamma})$ , temos:

$$\delta(\gamma - \bar{\gamma}) = \delta\left(\alpha_3\gamma - (1 - \alpha_3)(m^2 - p^2/4 + \bar{z}^2 p^2/4)\right), \quad (3.73)$$

$$\delta(\gamma - \bar{\gamma}) = \delta\left(\alpha_3(\gamma + m^2 - p^2/4 + \bar{z}^2 p^2/4) - (m^2 - p^2/4 + \bar{z}^2 p^2/4)\right), \quad (3.74)$$

porém,

$$\bar{z}^2 = \frac{[\alpha_2 - \alpha_1 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)z']^2}{(1 - \alpha_3)^2}, \quad (3.75)$$

logo

$$\begin{aligned} \delta(\gamma - \bar{\gamma}) &= \delta\left(\alpha_3[\gamma(1 - \alpha_3)^2 - (1 - \alpha_3)(1 - \alpha_3)^2(+m^2 - p^2/4) \right. \\ &\quad \left. - (1 - \alpha_3)[\alpha_2(1 - z') - \alpha_1(1 + z') + (1 - \alpha_3)z']^2 p^2/4\right]. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Com as funções delta reescritas, podemos integrar na variável  $\alpha_1$ , cujo o resultado é

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\alpha_1 \frac{\theta(\bar{s})}{\alpha_3^2(1 - \alpha_3)} \delta(\gamma - \bar{\gamma}) \frac{\delta(\alpha_1 - \eta)}{|(1 + z')|} &= \frac{\theta(\bar{s})\theta(1 - \eta)\theta(\eta)}{\alpha_3^2(1 - \alpha_3)} \frac{\delta(\gamma - \bar{\gamma})}{|(1 + z')|} \Big|_{\alpha_1=\eta} \\ &= \frac{\theta(\bar{s})\theta(1 - \eta)\theta(\eta)}{\alpha_3^2(1 + z')(1 - \alpha_3)^3} \delta\left(\alpha_3\gamma - (1 - \alpha_3)(m^2 - p^2/4 + z^2 p^2/4)\right), \end{aligned} \quad (3.77)$$

com

$$\bar{s} = (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) \Big|_{\alpha_1=\eta} = 1 - \eta - \alpha_2 - \alpha_3, \quad (3.78)$$

$$\eta = \frac{-(1 - \alpha_3)(z - z') + \alpha_2(1 - z')}{(1 + z')}. \quad (3.79)$$

Retomando a equação completa

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{g^2}{(4\pi)^2} \int_0^\infty d\gamma \int_{-1}^1 dz' f(z') \frac{\partial}{\partial \gamma} \prod_{i=2}^3 \int_0^1 d\alpha_i \frac{\theta(\bar{s})\theta(1 - \eta)\theta(\eta)}{\alpha_3^2(1 + z')(1 - \alpha_3)^3} \times \\ &\quad \delta\left(\alpha_3\gamma - (1 - \alpha_3)(m^2 - p^2/4 + z^2 p^2/4)\right). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Para realizar outra integração, novamente, reescrevemos a função delta:

$$\delta\left(\alpha_3\gamma - (1 - \alpha_3)(m^2 - p^2/4 + z^2 p^2/4)\right) = \frac{\delta(\alpha_3 - \beta)}{|\gamma + m^2 - (1 - z^2)p^2/4|}, \quad (3.81)$$

com

$$\beta = \frac{m^2 - (1 - z^2)p^2/4}{\gamma + (m^2 - (1 - z^2)p^2/4)}. \quad (3.82)$$

Assim, integrando na variável  $\alpha_3$ , obtemos:

$$\int_0^1 d\alpha_3 \frac{\theta(\bar{s})\theta(1-\eta)\theta(\eta)}{\alpha_3^2(1+z')(1-\alpha_3)^3} \frac{\delta(\alpha_3 - \beta)}{|\gamma + m^2 - (1 - z^2)p^2/4|} =$$

$$\frac{\theta(\bar{s})\theta(1-\eta)\theta(\eta)\theta(1-\beta)\theta(\beta)}{\beta^2(1+z')(1-\beta)^3} \frac{1}{|\gamma + m^2 - (1 - z^2)p^2/4|}, \quad (3.83)$$

com

$$\bar{s} = (1 - \eta - \alpha_2 - \beta), \quad (3.84)$$

$$\eta = \frac{-(1-\beta)(z-z') + \alpha_2(1-z')}{(1+z')}. \quad (3.85)$$

Veja que  $\beta \geq 0$ , uma vez que  $-1 \leq z \leq 1$  e  $\gamma \geq 0$ . Além disso,  $\theta(1-\beta) = 1$ , pois:

$$\theta(1-\beta) = \theta\left(1 - \frac{m^2 - (1 - z^2)p^2/4}{\gamma + (m^2 - (1 - z^2)p^2/4)}\right) = \theta\left(\frac{\gamma}{\gamma + (m^2 - (1 - z^2)p^2/4)}\right). \quad (3.86)$$

Com isto, a equação completa é escrita como

$$f(z) = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \int_0^\infty d\gamma \int_{-1}^1 dz' f(z') \frac{\partial}{\partial \gamma} \int_0^1 d\alpha_2 \frac{\theta(\bar{s})\theta(1-\eta)\theta(\eta)}{\beta^2(1+z')(1-\beta)^3} \frac{1}{|\gamma + m^2 - (1 - z^2)p^2/4|}, \quad (3.87)$$

onde

$$\bar{s} = \frac{(1-\beta)(1+z) - 2\alpha_2}{1+z'}. \quad (3.88)$$

Reescrevendo o termo

$$\frac{1}{\beta^2(1-\beta)^3} = \frac{[\gamma + (m^2 - (1 - z^2)p^2/4)]^5}{\gamma^3[m^2 - (1 - z^2)p^2/4]^2}, \quad (3.89)$$

obtemos a expressão

$$f(z) = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \int_{-1}^1 dz' f(z') \int_0^\infty d\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \int_0^1 d\alpha_2 \frac{[\gamma + m^2 - (1 - z^2)p^2/4]^4}{\gamma^3[m^2 - (1 - z^2)p^2/4]^2} \times$$

$$\theta((1-\beta)(1+z) - 2\alpha_2) \theta(1+z+\beta(z'-z) + \alpha_2(1-z')) \theta((1-\beta)(z'-z) + \alpha_2(1-z')), \quad (3.90)$$

que corresponde a amplitude amputa, no modelo de Wick-Cutkosky, por meio do teorema da unicidade.

### 3.5 Equação de Bethe-Salpeter no Espaço Euclidiano

O trabalho de Bethe-Salpeter (SALPETER; BETHE, 1951), apesar de desenvolver uma formulação relativística para o problema de um estado ligado de dois corpos, apresenta singularidades no kernel da integração. Em 1954, G.C. Wick apresenta uma alternativa para lidar com esse problema. Ele demonstrou que, para o problema de estado ligado, a métrica de Lorentz pode ser transformada em uma métrica Euclidiana através de uma rotação de uma variável temporal relativa:  $t \rightarrow i\tau$  (WICK, 1954). Para ilustrar, vamos realizar a rotação de Wick na equação de Bethe-Salpeter para amplitude amputada de um estado ligado de dois corpos com 4-momento  $P$ .

Realizaremos a rotação de Wick nos quadrivetores  $k, k', P$ , ou seja

$$k_0 = ik_{0e} \quad , \quad k'_0 = ik'_{0e} \quad , \quad P_0 = iP_{0e}, \quad (3.91)$$

onde o índice  $e$  corresponde a respectiva variável no espaço euclidiano, obtemos a equação da amplitude amputada no espaço euclidiano.

No espaço de Minkowski, a equação de Bethe-Salpeter para um estado ligado bosônico é

$$\Gamma(k; P) = ig^2 \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{\Gamma(k'; P)}{((k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon)} \frac{1}{((\frac{1}{2}P + k')^2 - m^2 + i\epsilon)((\frac{1}{2}P - k')^2 - m^2 + i\epsilon)}. \quad (3.92)$$

Ao substituir as variáveis rotacionadas no primeiro termo do denominador da equação 3.92 temos

$$(k - k')^2 - \mu^2 = (ik_{0e} - ik'_{0e})^2 - (\vec{k} - \vec{k}')^2 - \mu^2 = -(k_{0e} - k'_{0e})^2 - (\vec{k} - \vec{k}')^2 - \mu^2, \quad (3.93)$$

analogamente,

$$\left(\frac{1}{2}P + k'\right)^2 - m^2 = -\left(\frac{1}{2}P_{0e} + k'_{0e}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\vec{P} + \vec{k}'\right)^2 - m^2, \quad (3.94)$$

$$\left(\frac{1}{2}P - k'\right)^2 - m^2 = -\left(\frac{1}{2}P_{0e} - k'_{0e}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\vec{P} - \vec{k}'\right)^2 - m^2. \quad (3.95)$$

Assim, após a rotação de Wick, a equação 3.92 torna-se

$$\Gamma(k; P) = g^2 \int \frac{dk_{0e} d^3 k'}{(2\pi)^4} \frac{\Gamma(k'; P)}{[(k_{0e} - k'_{0e})^2 + (\vec{k} - \vec{k}')^2 + \mu^2]} \times \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{2}P_{0e} + k'_{0e}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\vec{P} + \vec{k}'\right)^2 + m^2\right] \left[\left(\frac{1}{2}P_{0e} - k'_{0e}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\vec{P} - \vec{k}'\right)^2 + m^2\right]}. \quad (3.96)$$

Esta é a equação de Bethe-Salpeter da amplitude amputada no espaço euclidiano após realizar a rotação de Wick. Note que esta equação não apresenta pólos, deixando de ter singularidade nos termos do denominador da equação. Uma alternativa é com a equação de Bethe-Salpeter euclidiana obter a amplitude no espaço de Minkowski. Para isso deve-se realizar uma rotação, girando a equação integral e homogênea euclidiana. Ao realizar a rotação em pequenos ângulos de rotação, aproxima-se a solução euclidiana da de Minkowski, O que pode levar, por exemplo, a extração das funções de densidade partônica longitudinal e amplitude de distribuição de momento (CASTRO *et al.*, 2019).

### 3.6 Relação entre a Amplitude e a Amplitude Amputada

A Representação Integral de Nakanishi de  $\Gamma(k, p)$  e de  $\Phi(k, p)$  é

$$\Gamma(k, p) = \int_{-1}^1 dz \int_{\gamma_{min}}^{\infty} d\gamma \frac{g_{\Gamma}(\gamma, z)}{[k^2 + p \cdot kz - \kappa^2 - \gamma + i\epsilon]}, \quad (3.97)$$

$$\Phi(k, p) = \int_{-1}^1 dz \int_0^{\infty} d\gamma \frac{g_{\Phi}(\gamma, z)}{[k^2 + p \cdot kz - \kappa^2 - \gamma + i\epsilon]^3}. \quad (3.98)$$

A conexão entre  $g_{\Phi}(\gamma, z) = g(\gamma, z)$  e  $g_{\Gamma}(\gamma, z)$  é dada por

$$\Phi(k, p) = S(k + \frac{p}{2})\Gamma(k, p)S(k - \frac{p}{2}), \quad (3.99)$$

onde

$$S(k + \frac{p}{2}) = \frac{1}{[(k + \frac{p}{2})^2 - m^2 + i\epsilon]} \quad , \quad S(k - \frac{p}{2}) = \frac{1}{[(k - \frac{p}{2})^2 - m^2 + i\epsilon]}. \quad (3.100)$$

Logo

$$\int_{-1}^1 dz \int_0^{\infty} d\gamma \frac{g(\gamma, z)}{[k^2 + p \cdot kz - \kappa^2 - \gamma + i\epsilon]^3} = \int_{-1}^1 dz \int_0^{\infty} d\gamma S(k + \frac{p}{2}) \frac{g_{\Gamma}(\gamma, z)}{[k^2 + p \cdot kz - \kappa^2 - \gamma + i\epsilon]} S(k - \frac{p}{2}), \quad (3.101)$$

Ao utilizar a parametrização de Feynman no RHS da equação encontrar-se

$$\begin{aligned}
 RHS &= 2 \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty g_\Gamma(\gamma, z) d\gamma \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \times \\
 &\quad \frac{1}{\left( \alpha_1 \left[ \left( k + \frac{p}{2} \right)^2 - m^2 + i\epsilon \right] + \alpha_2 \left[ \left( k - \frac{p}{2} \right)^2 - m^2 + i\epsilon \right] + (1 - \alpha_1 - \alpha_2) [k^2 + p \cdot kz - \kappa^2 - \gamma + i\epsilon] \right)^3},
 \end{aligned} \tag{3.102}$$

$$\begin{aligned}
 RHS &= 2 \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty g_\Gamma(\gamma, z) d\gamma \times \\
 &\quad \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \frac{1}{\left( k^2 + p \cdot k [\alpha_1 - \alpha_2 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2)z] - (1 - \alpha_1 - \alpha_2)\gamma - \kappa^2 + i\epsilon \right)^3},
 \end{aligned} \tag{3.103}$$

$$\begin{aligned}
 RHS &= 2 \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty g_\Gamma(\gamma, z) d\gamma \times \\
 &\quad \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \frac{1}{\left( k^2 + p \cdot k [\alpha_1 - \alpha_2 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2)z] - (1 - \alpha_1 - \alpha_2)\gamma - \kappa^2 + i\epsilon \right)^3}.
 \end{aligned} \tag{3.104}$$

Usando o Teorema da Unicidade

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 dz' \int_0^\infty d\gamma' \frac{g(\gamma', z')}{[k^2 + p \cdot kz' - \kappa^2 - \gamma' + i\epsilon]^3} &= 2 \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty g_\Gamma(\gamma, z) d\gamma \\
 &\quad \int_{-1}^1 dz' \int_0^\infty d\gamma' \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \frac{\delta(z' - \bar{z})\delta(\gamma' - \bar{\gamma})}{\left( k^2 + p \cdot kz' - \gamma' - \kappa^2 + i\epsilon \right)^3},
 \end{aligned} \tag{3.105}$$

onde

$$\bar{z} = \alpha_1 - \alpha_2 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2)z, \tag{3.106}$$

$$\bar{\gamma} = (1 - \alpha_1 - \alpha_2)\gamma. \tag{3.107}$$

O resultado será

$$g(\gamma', z') = 2 \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty d\gamma \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \delta(z' - \bar{z})\delta(\gamma' - \bar{\gamma})g_\Gamma(\gamma, z). \tag{3.108}$$

O próximo passo é resolver as integrais dos parâmetros de Feynman. Para isso

reescreve-se a função delta:

$$\delta(f(\alpha_2)) = \delta(\gamma' - \bar{\gamma}) = \frac{1}{\gamma} \delta(\alpha_2 - \beta_2) \quad (3.109)$$

com

$$\beta_2 = \frac{-\gamma' + (1 - \alpha_1)\gamma}{\gamma}. \quad (3.110)$$

Agora a equação fica

$$g(\gamma', z') = 2 \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty d\gamma \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \delta(z' - \alpha_1 + \alpha_2 - (1 - \alpha_1 - \alpha_2)z) \frac{1}{\gamma} \delta(\alpha_2 - \beta_2) g_\Gamma(\gamma, z). \quad (3.111)$$

$$g(\gamma', z') = 2 \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty d\gamma \int_0^1 d\alpha_1 \delta(z' - \alpha_1 + \beta_2 - (1 - \alpha_1 - \beta_2)z) \frac{1}{\gamma} g_\Gamma(\gamma, z). \quad (3.112)$$

$$g(\gamma', z') = 2 \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty d\gamma \int_0^1 d\alpha_1 \delta(z' - \alpha_1 + \beta_2 - (1 - \alpha_1 - \beta_2)z) \frac{1}{\gamma} g_\Gamma(\gamma, z). \quad (3.113)$$

$$g(\gamma', z') = 2 \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty d\gamma \int_0^1 d\alpha_1 \delta(1 + z' - 2\alpha_1 - \frac{\gamma'}{\gamma}(1 + z)) \frac{1}{\gamma} g_\Gamma(\gamma, z). \quad (3.114)$$

Reescrevendo a delta como função de  $\alpha_1$

$$\delta(f(\alpha_1)) = \delta(1 + z' - 2\alpha_1 - \frac{\gamma'}{\gamma}(1 + z)) = \frac{1}{2} \delta(\alpha_1 - \beta_1), \quad (3.115)$$

onde

$$\beta_1 = \frac{1}{2} [(1 + z') - \frac{\gamma'}{\gamma}(1 + z)], \quad (3.116)$$

e realizando a integral em  $\alpha_1$

$$g(\gamma', z') = 2 \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty d\gamma \int_0^1 d\alpha_1 \frac{1}{2} \delta(\alpha_1 - \beta_1) \frac{1}{\gamma} g_\Gamma(\gamma, z). \quad (3.117)$$

$$g(\gamma', z') = \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty d\gamma \int_0^1 \theta(1 - \beta_1) \theta(\beta_1) \frac{1}{\gamma} g_\Gamma(\gamma, z). \quad (3.118)$$

$$g(\gamma', z') = \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty d\gamma \theta(1 - \frac{1}{2} [(1 + z') - \frac{\gamma'}{\gamma}(1 + z)]) \theta(\frac{1}{2} [(1 + z') - \frac{\gamma'}{\gamma}(1 + z)]) \frac{1}{\gamma} g_\Gamma(\gamma, z). \quad (3.119)$$

$$g(\gamma', z') = \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty d\gamma \theta(2 - (1+z') + \frac{\gamma'}{\gamma}(1+z)) \theta((1+z') - \frac{\gamma'}{\gamma}(1+z)) \frac{1}{\gamma} g_\Gamma(\gamma, z). \quad (3.120)$$

$$g(\gamma', z') = \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty d\gamma \theta((1-z')\gamma + (1+z)\gamma') \theta((1+z')\gamma - (1+z)\gamma') \frac{1}{\gamma} g_\Gamma(\gamma, z). \quad (3.121)$$

Observe que  $(1-z')\gamma + (1+z)\gamma' > 0$ , então,  $\theta((1-z')\gamma + (1+z)\gamma') = 1$ . Assim,

$$g(\gamma', z') = \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty d\gamma \theta((1+z')\gamma - (1+z)\gamma') \frac{1}{\gamma} g_\Gamma(\gamma, z). \quad (3.122)$$

Reescrevendo o limite da integral  $\gamma$

$$g(\gamma', z') = \int_{-1}^1 dz \int_{\tilde{\gamma}}^\infty \frac{d\gamma}{\gamma} g_\Gamma(\gamma, z). \quad (3.123)$$

onde

$$\tilde{\gamma} = \max\left(\gamma_{min}, \frac{(1+z)\gamma'}{(1+z')}\right), \gamma_{min} \geq 0. \quad (3.124)$$

Para descrever o problema do estado ligado pode-se utilizar tanto a amplitude quanto a amplitude amputada. Ao obter uma relação entre ambas, tem-se a oportunidade de obter a amplitude conhecendo amplitude amputada e vice-versa.

# 4 Equação de Bethe-Salpeter para o Estado Ligado Fermiônico

Nessa seção apresentaremos a equação de Bethe-Salpeter para amplitude de um estado ligado fermiônico, com ênfase no limite de máxima energia  $B = 2m$ . Em (SCAFI, 2017) estudou-se o limite do vértice pontual ( $\Lambda \rightarrow \infty$ ). Nesse caso, é possível demonstrar que o modelo possui uma divergência e, conseqüentemente, os resultados numéricos são instáveis. Nosso objetivo é ampliar esse estudo para o estado ligado fermiônico com um fator de forma  $\Lambda$  finito, o que possibilitará a obtenção de soluções numéricas estáveis.

## 4.1 Equação de Bethe-Salpeter para Amplitude

A equação de Bethe-Salpeter para um sistema fermiônico trocando um bóson de massa  $\mu$  é na aproximação de escada dada por

$$\Phi(k, p) = S(k + p/2) \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{(-ig)^2 F^2(k - k')}{(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon} \Phi(k', p) S(k - p/2), \quad (4.1)$$

e pode ser representada graficamente como apresentado na figura 3.1, onde o propagador de Dirac é descrito como

$$S(k) = \frac{i(\not{k}_\mu + m)}{\not{k}_\mu^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (4.2)$$

Utilizaremos um fator de forma  $F(k - k')$  no vértice de interação, que para a troca de um bóson escalar é dado por (PAULA *et al.*, 2017):

$$F(k - k') = \frac{\mu^2 - \Lambda^2}{(k - k')^2 - \Lambda^2 + i\epsilon}. \quad (4.3)$$

Para o estado ligado fermiônico  $0^+$ , a amplitude de BS pode ser decomposta da seguinte maneira

$$\Phi(k, p) = \sum_{i=1}^4 S_i(k, p) \phi_i(k, p), \quad (4.4)$$

com  $\phi_i$  sendo funções escalares em termos de  $(k^2, p^2, k \cdot p)$ , na qual para  $i = 1, 2, 4$  elas precisam ser pares e para  $i = 3$  ímpares (PAULA *et al.*, 2017). As estruturas de Dirac  $S_i$  são

$$S_1(k, p) = \gamma^5 \quad (4.5)$$

$$S_2(k, p) = \frac{\not{p}}{M} \gamma^5 \quad (4.6)$$

$$S_3(k, p) = \frac{k \cdot p}{M^3} \not{p} \gamma^5 - \frac{\not{k}}{M} \gamma^5 \quad (4.7)$$

$$S_4(k, p) = \frac{i\sigma^{\mu\nu} p_\mu k_\nu}{M} \gamma^5. \quad (4.8)$$

Introduzindo a decomposição da amplitude (4.4) na equação 4.1, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 S_i(k, p) \phi_i(k, p) &= \frac{i(\not{k} + \frac{\not{p}}{2} + m)}{(k + p/2)^2 - m^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{(-ig)^2 F^2(k - k')}{(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon} \sum_{i=1}^4 S_i(k', p) \phi'_i(k', p) \times \\ &\quad \frac{i(\not{k} - \frac{\not{p}}{2} + m)}{(k - p/2)^2 - m^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Multiplicando a equação 4.9 pela base  $S_j$  e calculando o traço, temos

$$\begin{aligned} N_j \phi_j &= \frac{i}{(k + p/2)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(k - p/2)^2 - m^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{(-ig)^2 F^2(k - k')}{(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon} \times \\ &\quad \sum_{i=1}^4 C_{ji}(k, k', p) \phi'_i(k', p) N_j, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \phi_j &= \frac{i}{(k + p/2)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(k - p/2)^2 - m^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{(-ig)^2 F^2(k - k')}{(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon} \times \\ &\quad \sum_{i=1}^4 C_{ji}(k, k', p) \phi'_i(k', p). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Os coeficientes  $N_j$  e  $C_{ij}$  são descritos como

$$N_j = Tr[S_j^2], \quad (4.12)$$

$$C_{ji} = \frac{1}{N_j} Tr[S_j(\not{k} + \frac{\not{p}}{2} + m) \Delta_\rho S_i \bar{\Delta}_\rho (\frac{\not{p}}{2} - \not{k} - m)], \quad (4.13)$$

com  $\Delta_\rho$  representando as estruturas do vértice, onde acoplamento pode ser escalar ( $\Delta_\rho =$

$ig$ ), pseudoescalar ( $\Delta_\rho = -g\gamma^5$ ) ou vetorial ( $\Delta_\rho = ig\gamma^\mu$ ). Para o caso em que o acoplamento é vetorial, podemos escrever a seguinte relação entre o coeficiente  $C_{ji}^e$  do acoplamento escalar e o acoplamento vetorial  $C_{ji}^v$ :

$$C_{ji}^v = \zeta_{ji} C_{ji}^e, \quad (4.14)$$

com

$$\zeta_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Os coeficientes  $C_{ji}^e$  são

$$C_{11}^e = m^2 + \frac{M^2}{4} - k^2, \quad (4.16)$$

$$C_{12}^e = mM, \quad (4.17)$$

$$C_{13}^e = 0, \quad (4.18)$$

$$C_{14}^e = -\frac{1}{M^2}[(p \cdot k)(p \cdot k') - M^2(k \cdot k')], \quad (4.19)$$

e os coeficientes  $C_{ji}^v$  são

$$C_{11}^v = 4(m^2 + \frac{M^2}{4} - k^2), C_{12}^v = 2mM, C_{13}^v = C_{14}^v = 0. \quad (4.20)$$

Assim, para a componente  $j = 1$  da equação 4.11, obtemos

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{(k + p/2)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(k - p/2)^2 - m^2 + i\epsilon} \times \\ &\int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{(\mu^2 - \Lambda^2)^2}{[(k - k') - \Lambda^2 + i\epsilon]^2} \frac{g^2 [C_{11}\phi'_1 + C_{12}\phi'_2]}{(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Sendo a Representação de Nakanishi para amplitude  $\phi(k, p)$

$$\phi(k, p) = \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty d\gamma \frac{g(\gamma, z)}{[k^2 + p \cdot kz - \kappa^2 - \gamma + i\epsilon]^3}, \quad (4.22)$$

escrevemos a equação de Bethe-Salpeter, referente a componente  $j = 1$ , como sendo

$$\int_{-1}^1 dz \int_0^\infty d\gamma \frac{g_1(\gamma, z)}{[k^2 + p \cdot kz - \kappa^2 - \gamma + i\epsilon]^3} = \frac{1}{(k + p/2)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(k - p/2)^2 - m^2 + i\epsilon} \times$$

$$\int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{(\mu^2 - \Lambda^2)^2}{[(k - k') - \Lambda^2 + i\epsilon]^2} \frac{g^2}{(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon} \int_{-1}^1 dz' \int_0^\infty d\gamma' \frac{[C_{11}g_1(\gamma', z') + C_{12}g_2(\gamma', z')]}{[k^2 + p \cdot kz - \kappa^2 - \gamma + i\epsilon]^3}. \quad (4.23)$$

Destacamos a equação de BS para a componente  $j = 1$ , pois os componentes  $C_{1i}$  são nulos, exceto  $C_{11}$ , no limite de máxima energia. O que possibilita o desacoplamento da equação 4.4.

## 4.2 Amplitude de Bethe-Salpeter para férmions no limite de máxima energia $B = 2m$

No limite de máxima energia, temos a energia de ligação como sendo  $B = 2m$ . Isto quer dizer que a massa do estado ligado  $M$  é nula. Nesse limite, após realização da integração quadridimensional e projeção na frente de luz, a equação de Bethe-Salpeter (4.23) é escrita como (SCAFI, 2017)

$$\int_0^\infty \frac{d\gamma' g_1(\gamma', z)}{[\gamma + \gamma' + m^2]^2} = \frac{(\mu^2 - \Lambda^2)^2 g^2}{8\pi^2} \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^1 g_1(\gamma', z') C v^2 (1-v)^2 dv \frac{\theta(k_D^+)}{1+z}$$

$$+[z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z'], \quad (4.24)$$

onde

$$k_D^+ = \frac{1}{2} v (1-v) (z' - z), \quad (4.25)$$

$$C = \frac{[3D_2(\gamma, z, \gamma', z', v) + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)]}{[D_2(\gamma, z, \gamma', z', v) + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)]^3 [D_2(\gamma, z, \gamma', z', v)]^2}, \quad (4.26)$$

$$D_2(\gamma, z, \gamma', z', v) = \frac{-v}{1+z} [m^2 + vzm^2 + z'(1-v)m^2 + (1-v)(1+z')\gamma + (1+z)\gamma' + \frac{(1-v)}{v}(1+z)\mu^2]. \quad (4.27)$$

As seguintes manipulações algébricas serão realizadas para obter a equação 4.24 de tal maneira que possamos aplicar o Teorema da Unicidade. Iniciamos escrevendo  $D_2$  como sendo:

$$D_2(\gamma, z, \gamma', z', v) = \alpha_1 \gamma + \alpha_0, \quad (4.28)$$

de modo que:

$$\alpha_1 = \frac{-v(1-v)(1+z')}{1+z}, \quad (4.29)$$

$$\alpha_0 = \frac{-v}{1+z} [m^2 + vzm^2 + z'(1-v)m^2 + (1+z')\gamma' + \frac{(1-v)}{v}(1+z)\mu^2], \quad (4.30)$$

então, podemos reescrever  $C$  como sendo

$$C = \frac{[3(\alpha_1\gamma + \alpha_0) + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)]}{[(\alpha_1\gamma + \alpha_0) + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)]^3 [\alpha_1\gamma + \alpha_0]^2} \quad (4.31)$$

Usaremos a parametrização de Feynman para tornar os termos do denominador de  $C$  uma única função só. A parametrização é dada por:

$$\frac{1}{A^m B^n} = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{\lambda^{m-1} d\lambda}{[A\lambda + B]^{m+n}} \quad (4.32)$$

Sendo  $A = (\alpha_1\gamma + \alpha_0) + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)$ ,  $B = \alpha_1\gamma + \alpha_0$ ,  $m = 3$  e  $n = 2$ , teremos:

$$\frac{1}{A^3 B^2} = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(3)\Gamma(2)} \int_0^\infty \frac{\lambda^2 d\lambda}{[A\lambda + B]^5}, \quad (4.33)$$

considerando

$$\lambda = \frac{\xi}{1-\xi}, \quad d\lambda = \frac{d\xi}{(1-\xi)^2} \quad (4.34)$$

a equação 4.32 torna-se

$$\frac{1}{A^3 B^2} = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(3)\Gamma(2)} \int_0^1 \frac{(\frac{\xi}{1-\xi})^2 (\frac{d\xi}{(1-\xi)^2})}{[A(\frac{\xi}{1-\xi}) + B]^5}, \quad (4.35)$$

$$\frac{1}{A^3 B^2} = 12 \int_0^1 \left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^4 \frac{d\xi(1-\xi)^5}{[A\xi + B(1-\xi)]^5}, \quad (4.36)$$

$$\frac{1}{A^3 B^2} = 12 \int_0^1 \frac{\xi^2(1-\xi)d\xi}{[B + (A-B)\xi]^5}, \quad (4.37)$$

$$\frac{1}{A^3 B^2} = 12 \int_0^1 \frac{\xi^2(1-\xi)d\xi}{[\alpha_1\gamma + \alpha_0 + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)\xi]^5}, \quad (4.38)$$

logo,

$$C = 12 \int_0^1 \frac{\xi^2(1-\xi)[3(\alpha_1\gamma + \alpha_0) + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)]d\xi}{[\alpha_1\gamma + \alpha_0 + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)\xi]^5} \quad (4.39)$$

Assim, a equação 4.24 ficará

$$\int_0^\infty \frac{d\gamma' g_1(\gamma', z)}{[\gamma + \gamma' + m^2]^2} = \frac{3(\mu^2 - \Lambda^2)^2 g^2}{2\pi^2} \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^1 g_1(\gamma', z') v^2 (1-v)^2 dv \frac{\theta(k_D^+)}{1+z} \times$$

$$\int_0^1 \frac{\xi^2 (1-\xi) [3(\alpha_1 \gamma + \alpha_0) + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)] d\xi}{[\alpha_1 \gamma + \alpha_0 + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2) \xi]^5} + [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z'], \quad (4.40)$$

Para reorganizar a expressão do integrando na integração em  $\xi$ , denominamos  $I$  como sendo:

$$I = \frac{[3(\alpha_1 \gamma + \alpha_0) + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)]}{[\alpha_1 \gamma + \alpha_0 + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2) \xi]^5} = \frac{1}{(\alpha_1)^5} \frac{[3(\alpha_1 \gamma + \alpha_0) + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)]}{[\gamma + \frac{\alpha_0}{\alpha_1} + \frac{(1-v)}{\alpha_1}(\mu^2 - \Lambda^2) \xi]^5}. \quad (4.41)$$

Utilizando o conjunto de variáveis  $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$  :

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1^5} [3\alpha_0 + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)], \quad (4.42)$$

$$\alpha_3 = \left[ \frac{\alpha_0}{\alpha_1} + \frac{\xi}{\alpha_1} (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2) \right], \quad (4.43)$$

$$\alpha_4 = \frac{3}{\alpha_1^4}, \quad (4.44)$$

$$\alpha_5 = \alpha_2 - \frac{3\alpha_3}{\alpha_1^4}, \quad (4.45)$$

encontramos:

$$I = \frac{\alpha_5}{(\gamma + \alpha_3)^5} + \frac{\alpha_4}{(\gamma + \alpha_3)^4}. \quad (4.46)$$

Assim, a integral em  $\xi$  será escrita como

$$\int_0^1 \xi^2 (1-\xi) \left[ \frac{\alpha_5}{(\gamma + \alpha_3)^5} + \frac{\alpha_4}{(\gamma + \alpha_3)^4} \right] d\xi, \quad (4.47)$$

logo, a equação completa é

$$\int_0^\infty \frac{d\gamma' g_1(\gamma', z)}{[\gamma + \gamma' + m^2]^2} = \frac{3(\mu^2 - \Lambda^2)^2 g^2}{2\pi^2} \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^1 g_1(\gamma', z') v^2 (1-v)^2 dv \frac{\theta(k_D^+)}{1+z} \times$$

$$\int_0^1 \xi^2 (1-\xi) \left[ \frac{\alpha_5}{(\gamma + \alpha_3)^5} + \frac{\alpha_4}{(\gamma + \alpha_3)^4} \right] d\xi + [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z'], \quad (4.48)$$

Usando a seguinte identidade

$$\int f(y)\delta'(y-x)dy = f(y)\delta(y-x)|_a^b - \int_a^b f'(y)\delta(y-x)dx, \quad (4.49)$$

para o caso em que o termo de superfície anula-se, obtemos a seguinte relação:

$$\int f(y)\delta^{(n)}(y-x)dy = (-1)^n f^{(n)}(x). \quad (4.50)$$

A relação presente na equação 4.50 pode ser generalizada para os casos que estamos interessados:

$$\int \frac{1}{[\gamma'' + \gamma + m^2]^2} \delta(\gamma'' - \alpha_3 + m^2) dy = \frac{1}{(\gamma + \alpha_3)^2}, \quad (4.51)$$

$$\frac{1}{6} \int \frac{1}{[\gamma'' + \gamma + m^2]^2} \delta''(\gamma'' - \alpha_3 + m^2) dy = \frac{1}{(\gamma + \alpha_3)^4}, \quad (4.52)$$

$$\frac{1}{24} \int \frac{1}{[\gamma'' + \gamma + m^2]^2} \delta'''(\gamma'' - \alpha_3 + m^2) dy = \frac{1}{(\gamma + \alpha_3)^5}. \quad (4.53)$$

Reescrevemos a equação 4.48 como

$$\int_0^\infty \frac{d\gamma' g_1(\gamma', z)}{[\gamma + \gamma' + m^2]^2} = \frac{3(\mu^2 - \Lambda^2)^2 g^2}{2\pi^2} \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^1 g_1(\gamma', z') v^2 (1-v)^2 dv \frac{\theta(k_D^+)}{1+z} \times$$

$$\int_0^1 \xi^2 (1-\xi) \int_0^\infty \frac{d\gamma''}{[\gamma'' + \gamma + m^2]^2} \left[ \frac{\alpha_4}{6} \delta''(\gamma'' - \alpha_3 + m^2) + \frac{\alpha_5}{24} \delta'''(\gamma'' - \alpha_3 + m^2) \right] d\xi + [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z'], \quad (4.54)$$

Realizando a seguinte troca de variável  $\gamma' \rightarrow \gamma''$  no lado esquerdo (LHS) da equação acima, tem-se:

$$\int_0^1 \frac{d\gamma' g_1(\gamma', z)}{[\gamma + \gamma' + m^2]^2} = \int_0^\infty \frac{d\gamma'' g_1(\gamma', z)}{[\gamma + \gamma'' + m^2]^2} \quad (4.55)$$

Assim, a equação 4.54 torna-se

$$\int_0^\infty \frac{d\gamma'' g_1(\gamma', z)}{[\gamma + \gamma'' + m^2]^2} = \frac{(\mu^2 - \Lambda^2)^2 3g^2}{2\pi^2} \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^1 g_1(\gamma', z') v^2 (1-v)^2 dv \frac{\theta(k_D^+)}{1+z} \times$$

$$\int_0^1 \xi^2 (1-\xi) \int_0^\infty \frac{d\gamma''}{[\gamma'' + \gamma + m^2]^2} \left[ \frac{\alpha_4}{6} \delta''(\gamma'' - \alpha_3 + m^2) + \frac{\alpha_5}{24} \delta'''(\gamma'' - \alpha_3 + m^2) \right] d\xi$$

$$+ [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z']. \quad (4.56)$$

### 4.2.1 Inversão utilizando o Teorema da Unicidade

Aplicando o Teorema da Unicidade na equação 4.56, obtemos a expressão

$$g_1(\gamma'', z) = \frac{3g^2(\mu^2 - \Lambda^2)^2}{2\pi^2} \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^1 g_1(\gamma', z') v^2 (1-v)^2 dv \frac{\theta(k_D^+)}{1+z} \times$$

$$\int_0^1 \xi^2 (1-\xi) \left[ \frac{\alpha_4}{6} \delta''(\gamma'' - \alpha_3 + m^2) + \frac{\alpha_5}{24} \delta'''(\gamma'' - \alpha_3 + m^2) \right] d\xi$$

$$+ [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z']. \quad (4.57)$$

Para resolver a integração na variável  $\xi$ , vamos utilizar algumas propriedades da delta de Dirac. Seja a delta de uma função  $F(\xi)$  escrita como

$$\delta(F(\xi)) = \sum_k \frac{\delta(\xi - \xi_k)}{\left| \frac{dF(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_k}}, \quad (4.58)$$

podemos obter as derivadas da delta de uma função  $F(\xi)$ . As três primeiras derivadas da função delta será

$$\delta'(y) = \frac{d\delta(y)}{dy} = \frac{1}{F'(\xi)} \frac{d}{d\xi} \frac{\delta(\xi - \xi_k)}{|F'(\xi_k)|} = \frac{1}{F'(\xi)} \frac{\delta'(\xi - \xi_k)}{|F'(\xi_k)|}, \quad (4.59)$$

$$\delta''(y) = \left[ -\frac{F''(\xi)}{[F'(\xi)]^3} \frac{\delta'(\xi - \xi_k)}{|F'(\xi_k)|} + \frac{1}{[F'(\xi)]^2} \frac{\delta''(\xi - \xi_k)}{|F'(\xi_k)|} \right], \quad (4.60)$$

$$\delta'''(y) = \frac{1}{|F'(\xi_k)|} \left[ -\frac{F'''(\xi)}{[F'(\xi)]^4} \delta'(\xi - \xi_k) - \frac{F''(\xi)}{[F'(\xi)]^4} \delta''(\xi - \xi_k) + \frac{3[F''(\xi)]^2}{[F'(\xi)]^5} \delta'(\xi - \xi_k) \right. \\ \left. + \frac{1}{[F'(\xi)]^3} \delta'''(\xi - \xi_k) - \frac{F''(\xi)}{[F'(\xi)]^4} \delta''(\xi - \xi_k) \right], \quad (4.61)$$

com  $\left| \frac{dF(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_k} = |F'(\xi_k)|$  e  $F(\xi) = y \rightarrow y' = F'(\xi)$ .

Possuindo as expressões das derivadas da delta de Dirac podemos reescrever a expressão presente na equação 4.57. Sendo

$$F(\xi) = \gamma'' + m^2 - \alpha_3 = (\gamma'' + m^2) - \left[ \frac{\alpha_0}{\alpha_1} + \frac{\xi}{\alpha_1} (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2) \right], \quad (4.62)$$

$$F'(\xi) = -\frac{1}{\alpha_1} (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2), \quad (4.63)$$

$$\xi_k = \frac{(\gamma'' + m^2)\alpha_1 - \alpha_0}{(1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)}, \quad (4.64)$$

as derivadas segunda e terceira de  $F(\xi)$  são nulas. Além disso,  $F'(\xi)$  não possui dependência em  $\xi$ , fazendo com que  $F'(\xi) = F'(\xi_k)$ . Assim, as expressões das derivadas da delta de Dirac para esta função serão:

$$\delta''(\gamma'' + m^2 - \alpha_3) = \frac{1}{|F'(\xi_k)|} \left[ \frac{\delta''(\xi - \xi_k)}{[F'(\xi)]^2} \right], \quad (4.65)$$

$$\delta'''(\gamma'' + m^2 - \alpha_3) = \frac{1}{|F'(\xi_k)|} \left[ \frac{1}{[F'(\xi)]^3} \delta'''(\xi - \xi_k) \right]. \quad (4.66)$$

Com esses resultados podemos realizar a integração em  $\xi$ . Após a substituição das expressões acima na equação 4.57, encontramos

$$\begin{aligned} g_1(\gamma'', z) = & \frac{3g^2(\mu^2 - \Lambda^2)^2}{2\pi^2} \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^1 g_1(\gamma', z') v^2 (1-v)^2 dv \frac{\theta(k_D^+)}{1+z} \times \\ & \frac{1}{|F'(\xi_k)|} \int_0^1 \xi^2 (1-\xi) \left[ \frac{\alpha_4}{6} \left[ \frac{\delta''(\xi - \xi_k)}{[F'(\xi)]^2} \right] + \frac{\alpha_5}{24} \left[ \frac{1}{[F'(\xi)]^3} \delta'''(\xi - \xi_k) \right] \right] d\xi \\ & + [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z']. \quad (4.67) \end{aligned}$$

Note que  $\alpha_4 = \frac{3}{\alpha_1^4}$  não possui dependência com  $\xi$ , e que  $\alpha_5 = \alpha_2 - \frac{3\alpha_3}{\alpha_1^4}$  possui, uma vez que  $\alpha_3$  é escrito em termos de  $\xi$ . Assim, o integrando da equação acima pode ser resolvido separadamente. Para tal, denominamos as variáveis  $A$  e  $B$ :

$$A = \frac{\alpha_4}{6} \frac{1}{[F'(\xi)]^2} \int_0^1 \delta''(\xi - \xi_k) \xi^2 (1-\xi) d\xi, \quad (4.68)$$

$$B = \frac{1}{[F'(\xi)]^3} \int_0^1 \frac{\alpha_5}{24} \delta'''(\xi - \xi_k) \xi^2 (1-\xi) d\xi. \quad (4.69)$$

Aplicando a relação presente na equação 4.49, a variável  $A$  será escrita como

$$A = \frac{\alpha_4}{6} \frac{1}{[F'(\xi)]^2} \left[ h(\xi) \delta'(\xi - \xi_k) \Big|_0^1 - \int_0^1 h'(\xi) \delta'(\xi - \xi_k) d\xi \right], \quad (4.70)$$

com  $h(\xi) = \xi^2(1-\xi)$ , aplicando novamente a integração por partes:

$$A = \frac{\alpha_4}{6} \frac{1}{[F'(\xi)]^2} \left[ h(\xi) \delta'(\xi - \xi_k) \Big|_0^1 - h'(\xi) \delta(\xi - \xi_k) \Big|_0^1 + \int_0^1 h''(\xi) \delta(\xi - \xi_k) d\xi \right], \quad (4.71)$$

$$A = \frac{\alpha_4}{6} \frac{1}{[F'(\xi)]^2} \left[ h(\xi) \delta'(\xi - \xi_k) \Big|_0^1 - h'(\xi) \delta(\xi - \xi_k) \Big|_0^1 + h''(\xi) \Big|_{\xi=\xi_k} \right]. \quad (4.72)$$

Analisando as derivadas da função  $h(\xi)$  nos limites de  $\xi = 0$ ,  $\xi = 1$  e  $\xi = 1$ :

$$h(\xi) = \xi^2(1 - \xi) \rightarrow h(\xi)|_0^1 = 0,$$

$$h'(\xi) = \xi(2 - 3\xi^2) \rightarrow h'(\xi)|_0^1 = -1,$$

$$h''(\xi) = (2 - 6\xi) \rightarrow h'(\xi)|_{\xi=\xi_k} = 2(1 - 3\xi_k),$$

a expressão para a variável  $A$  torna-se

$$A = \frac{\alpha_4}{6} \frac{1}{[F'(\xi)]^2} [\delta(\xi - \xi_k)|_0^1 + 2(1 - 3\xi_k)]. \quad (4.73)$$

Sendo  $\alpha_4 = \frac{3}{\alpha_1^4}$  e  $F'(\xi) = -\frac{1}{\alpha_1}(1 - v)(\mu^2 - \Lambda^2)$ , temos:

$$A = \frac{1}{2\alpha_1^2} \frac{1}{[(1 - v)(\mu^2 - \Lambda^2)]^2} [\delta(\xi - \xi_k)|_0^1 + 2(1 - 3\xi_k)]. \quad (4.74)$$

O próximo passo é realizar os cálculos para obter a expressão da variável  $B$ . Substituindo a expressão para  $\alpha_5$  (4.45), temos:

$$B = \frac{1}{24[F'(\xi)]^3} \int_0^1 (\alpha_2 - \frac{3\alpha_3}{\alpha_1^4}) \delta'''(\xi - \xi_k) \xi^2(1 - \xi) d\xi, \quad (4.75)$$

lembrando que  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  estão expressas nas equações 4.42 e 4.43, respectivamente. Após manipulações algébricas, obtemos:

$$B = \frac{1}{24\alpha_1^2[(1 - v)(\mu^2 - \Lambda^2)]^2} \int_0^1 \xi^2(1 - 3\xi)(1 - \xi) \delta'''(\xi - \xi_k) d\xi, \quad (4.76)$$

reescrevendo  $g(\xi) = \xi^2(1 - 3\xi)(1 - \xi)$  e aplicando integração por partes, consecutivamente, a expressão para  $B$  é:

$$B = \frac{1}{24\alpha_1^2[(1 - v)(\mu^2 - \Lambda^2)]^2} [g(\xi) \delta''(\xi - \xi_k)|_0^1 - g'(\xi) \delta'(\xi - \xi_k)|_0^1 + g''(\xi) \delta(\xi - \xi_k)|_0^1 - g'''(\xi)|_{\xi=\xi_k}]. \quad (4.77)$$

A análise da função  $g(\xi)$  e suas derivadas nos limites  $\xi = 0$ ,  $\xi = 1$  e  $\xi = 1$  resulta em

$$g(\xi) = \xi^2(1 - 3\xi)(1 - \xi) \rightarrow g(\xi)|_0^1 = 0,$$

$$g'(\xi) = 12\xi^3 - 12\xi^2 + 2\xi \rightarrow g'(\xi)|_0^1 = 2,$$

$$g''(\xi) = 36\xi^2 - 24\xi + 2 \rightarrow g''(\xi)|_0^1 = 14,$$

$$g'''(\xi) = 72\xi - 24 \rightarrow g'''(\xi)|_{\xi=\xi_k} = -24(1 - 3\xi_k),$$

assim, a expressão final para  $B$  torna-se

$$B = \frac{1}{12\alpha_1^2[(1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)]^2} [-2\delta'(\xi - \xi_k)|_0^1 + 14\delta(\xi - \xi_k)|_0^1 + 24(1 - 3\xi_k)]. \quad (4.78)$$

Por fim, a soma entre  $A$  e  $B$  é dada por

$$A + B = \frac{1}{\alpha_1^2} \frac{1}{[(1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)]^2} \left[ \frac{1}{2} [\delta(\xi - \xi_k)|_0^1 + 2(1 - 3\xi_k)] - \frac{1}{24} [-2\delta'(\xi - \xi_k)|_0^1 + 14\delta(\xi - \xi_k)|_0^1 + 24(1 - 3\xi_k)] \right], \quad (4.79)$$

$$A + B = \frac{1}{\alpha_1^2} \frac{1}{[(1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)]^2} \left[ -\frac{1}{12}\delta(\xi - \xi_k)|_0^1 + \frac{1}{12}\delta'(\xi - \xi_k)|_0^1 \right], \quad (4.80)$$

Voltando a equação 4.67, ao substituir  $A + B$ , encontramos a expressão:

$$g_1(\gamma'', z) = \frac{g^2}{8\pi^2} \int_0^\infty d\gamma' g_1(\gamma', z') \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^1 v^2 dv \frac{\theta(k_D^+)}{1+z} \frac{1}{|F'(\xi_k)|\alpha_1^2} \left[ -\delta(\xi - \xi_k)|_0^1 + \delta'(\xi - \xi_k)|_0^1 \right] + [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z'], \quad (4.81)$$

com

$$k_D^+ = \frac{1}{2}v(1-v)(z' - z), \quad (4.82)$$

$$\xi_k = \frac{(\gamma'' + m^2)\alpha_1 - \alpha_0}{(1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)}, \quad (4.83)$$

$$F'(\xi) = -\frac{1}{\alpha_1}(1-v)(\mu^2 - \Lambda^2). \quad (4.84)$$

Ao inverter a equação completa da amplitude de Bethe-Salpeter no limite de máxima energia, obtemos uma expressão para a função peso de Nakanishi que possibilita o cálculo numérico da energia de ligação entre outros observáveis físicos. Um ponto a ser destacado é que a equação 4.81 é mais simples que a equação 4.56, pois temos somente a derivada de primeira ordem da função delta. Note que a presença das funções delta no kernel da equação 4.81 não impossibilita obter a solução numérica dessa equação, pois, se utilizarmos o método de expansão em base, podemos integrar a delta na própria base na qual foi expandida a função peso.

## 4.2.2 Inversão utilizando Transformação de Stieltjes

Uma alternativa ao método da Unicidade é a Transformação de Stieltjes. Elas possibilitam escrever o kernel da equação completa 4.24 em termos de uma integral no plano

complexo. Escreveremos a expressão para a função peso de Nakanishi utilizando esta transformação para que ao realizar o cálculo numérico da constante de acoplamento  $g^2$  possa ser comparado ambos os métodos. Pela transformação de Stieltjes, a equação completa 4.24 é escrita como

$$g(\gamma, z) = \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' N(\gamma, z; \gamma', z', v) g_1(\gamma', z), \quad (4.85)$$

com

$$N(\gamma, z; \gamma', z', v) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi e^{i\phi} V(\gamma e^{i\phi} - m^2, z; \gamma', z'). \quad (4.86)$$

O kernel  $V(\gamma e^{i\phi} - m^2, z; \gamma', z')$  é escrito como

$$V(\gamma e^{i\phi} - m^2, z; \gamma', z') = \frac{(\mu^2 - \Lambda^2)^2 g^2}{8\pi^2} \int_0^1 \frac{v^2(1-v)^2 dv \Theta(k_D^+)}{1+z} \times$$

$$\frac{[3D_2(\gamma e^{i\phi} - m^2, z, \gamma', z', v) + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)]}{[D_2(\gamma e^{i\phi} - m^2, z, \gamma', z', v) + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)]^3 [D_2(\gamma e^{i\phi} - m^2, z, \gamma', z', v)]^2} + [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z']. \quad (4.87)$$

O cálculo da função peso  $g(\gamma, z)$  pode ser realizado tanto utilizando a expressão 4.87 quanto 4.59.

## 5 Conclusão

O problema de estado ligado de partículas é um desafio atual na física. Pois, apesar de haver amplos resultados experimentais, tem um longo caminho a ser percorrido na sua descrição teórica. Os principais resultados obtidos pela QCD na rede e pelas Equações de Dyson-Schwinger são no espaço euclidiano. Uma vez que os fenômenos físicos ocorrem no espaço de Minkowski, desenvolver métodos para obter soluções diretamente no espaço físico é de interesse da Física de Partículas. Em particular, nesse trabalho discutimos um método de solução da equação de Bethe-Salpeter no espaço de Minkowski. Para isso utilizamos a Representação Integral de Nakanishi e a projeção na Frente de Luz para obter a Amplitude de Bethe-Salpeter e a Amplitude Amputada, que permitem calcular os observáveis hadrônicos no espaço físico.

A utilização da representação integral de Nakanishi para representar a amplitude  $\Phi(k, p)$  tem sido objeto de estudo de diversos trabalhos como, por exemplo, (NAKANISHI, 1964), (FREDERICO *et al.*, 2012), (CARBONELL *et al.*, 2017). Escrever a Equação de Bethe-Salpeter em termos da amplitude amputada  $\Gamma(k, p)$  é uma outra alternativa estudar o estado ligado. A amplitude amputada apresenta a vantagem de possuir menos polos em seu kernel de interação do que a amplitude  $\Phi(k, p)$ , o que potencialmente nos fornecerá resultados numéricos mais estáveis.

Assim, optar por desenvolver a equação de Bethe-Salpeter para a amplitude amputada  $\Gamma(k, p)$  foi o objeto principal deste estudo. Obtivemos a equação completa para amplitude amputada para o estado ligado bosônico na aproximação tipo escada. Por meio da representação de Nakanishi, obtivemos uma relação entre ambas as amplitudes, que poderá ser útil para comparar com os resultados de trabalhos anteriores. Estudamos o modelo de Wick-Cutkosky utilizando o Teorema da Unicidade e obtivemos a equação de BS para amplitude  $\Gamma(k, p)$ .

Como continuação desse estudo, espera-se obter a inversão da equação da amplitude  $\Gamma(k, p)$  completa para o caso bosônico utilizando o Teorema da Unicidade e a transformação de Stieltjes, comparando seus resultados. Obteremos a equação de Bethe-Salpeter para a amplitude amputada no caso fermiônico. Outro aspecto a ser trabalhado é a solução numérica das equações aqui obtidas. Com essas soluções poderemos calcular observáveis

---

físicos de interesse como Constante de Decaimento, Fatores de Forma Eletromagnético, Funções de Distribuição de Momento Partônicas (PDFs) e as Funções de Distribuição de Momento Transversas (TMDs).

# Referências

- BEISER, A. **Concepts of Modern Physics**. 5th. ed. New York: McGraw-Hill, 1995.
- CARBONELL, J.; FREDERICO, T.; KARMANOV, V. Bound state equation for the nakanishi weight function. **Physics Letters B**, v. 769, p. 418 – 423, 2017. ISSN 0370-2693. Disponível em:  
<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269317302903>>.
- CASTRO, A.; YDREFORS, E.; PAULA, W. de; FREDERICO, T.; NOGUEIRA, J. H. D. A.; MARIS, P. The Bethe-Salpeter approach to bound states: from Euclidean to Minkowski space. 2019.
- COTTINGHAM, W. N.; GREENWOOD, D. A. **An Introduction to the Standard Model of Particle physics**. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. Disponível em:  
<<https://cds.cern.ch/record/396082>>.
- CUTKOSKY, R. E. Solutions of a bethe-salpeter equation. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 96, p. 1135–1141, Nov 1954. Disponível em:  
<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.96.1135>>.
- FREDERICO, T.; SALME, G.; VIVIANI, M. Two-body Scattering States in Minkowski Space and the Nakanishi Integral Representation onto the Null Plane. **Phys. Rev.**, D85, p. 036009, 2012.
- GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 30, p. 1343–1346, Jun 1973. Disponível em:  
<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1343>>.
- GÓMEZ, C. L. G. **Minkowski Space Bethe-Salpeter Equation Within Nakanishi Representation**. Trabalho de Conclusão de Doutorado — Instituto de Física Teórica, Universidade EStadual Paulista, São Paulo, 2016.
- HELO, J. C.; HIRSCH, M.; OTA, T. Proton decay and light sterile neutrinos. **Journal of High Energy Physics**, v. 2018, n. 6, p. 47, Jun 2018. Disponível em:  
<[https://doi.org/10.1007/JHEP06\(2018\)047](https://doi.org/10.1007/JHEP06(2018)047)>.
- KALLEN, G. On the definition of the Renormalization Constants in Quantum Electrodynamics. **Helv. Phys. Acta**, v. 25, n. 4, p. 417, 1952. [,509(1952)].
- KUSAKA, K.; WILLIAMS, A. G. Solving the Bethe-Salpeter Equation for Scalar Theories in Minkowski Space. **Phys. Rev.**, D51, p. 7026–7039, 1995.

- Lehmann, H. Über Eigenschaften von Ausbreitungsfunktionen und Renormierungskonstanten quantisierter Felder. **Il Nuovo Cimento**, v. 11, p. 342–357, abr. 1954.
- NAKANISHI, N. Perturbation-theoretical integral representation and the high-energy behavior of the scattering amplitude. ii. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 133, p. B1224–B1231, Mar 1964. Disponível em:  
<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.133.B1224>>.
- NAKANISHI, N. **Graph Theory and Feynman Integrals**. New York: Gordon and Breach, 1971. 56 p.
- NAKANISHI, N. Integral representation for the forward scattering amplitude. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 4, p. 2571–2573, Oct 1971. Disponível em:  
<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.4.2571>>.
- PAULA, W. de; FREDERICO, T.; SALMÈ, G.; VIVIANI, M.; PIMENTEL, R. Fermionic bound states in Minkowski-space: Light-cone singularities and structure. **Eur. Phys. J.**, C77, n. 11, p. 764, 2017.
- PESKIN, M. E. **An introduction to quantum field theory**. [S.l.]: CRC Press, 2018.
- POLITZER, H. D. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? **Phys. Rev. Lett.**, v. 30, p. 1346–1349, 1973. [,274(1973)].
- SALPETER, E. E.; BETHE, H. A. A relativistic equation for bound-state problems. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 84, p. 1232–1242, Dec 1951. Disponível em:  
<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.84.1232>>.
- SCAFI, E. **Modelo de Wick-Cutkosky Para um Sistema Fermiônico**. 75 f.32. Dissertação (Mestre em Ciências-Física Nuclear) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2017.
- SENJANOVI, G. Proton decay and grand unification. **AIP Conference Proceedings**, v. 1200, n. 1, p. 131–141, 2010. Disponível em:  
<<https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.3327552>>.
- WICK, G. C. Properties of bethe-salpeter wave functions. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 96, p. 1124–1134, Nov 1954. Disponível em:  
<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.96.1124>>.

# Apêndice A - Teorema da Unicidade

O Teorema da Unicidade foi proposto por Nakanishi (NAKANISHI, 1971a), como uma forma de obter uma outra equação integral para a função peso de Nakanishi. Este método consiste em um tipo de inversão analítica da equação de Bethe-Salpeter utilizando a representação de Nakanishi. O teorema da Unicidade afirma que a função peso de Nakanishi é única. Assim se tivermos uma expressão dada por

$$\int \frac{d\gamma' g(\gamma', z)}{[\gamma + \gamma' + \beta]^2} = \int \frac{d\gamma'}{[\gamma + \gamma' + \beta]^2} \int dz' V(\gamma', z'; \gamma, z) g(\gamma', z'), \quad (\text{A.1})$$

onde  $\beta = \beta(z)$ . Podemos escrever

$$g(\gamma', z) = \int dz' V(\gamma', z'; \gamma, z) g(\gamma', z'). \quad (\text{A.2})$$

Como consequência de usar este teorema tem-se uma equação de autovalor simples, o que simplifica a utilização de métodos numéricos para resolvê-la.

# Apêndice B - Transformação Inversa de Stieltjes

A transformada de Stieltjes é representada por

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{d\alpha(y)}{x+y} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{d\alpha(y)}{x+y}. \quad (\text{B.1})$$

Se  $\alpha(y)$  é uma integral de uma função  $\phi(y)$ , tem-se

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\phi(y)dy}{x+y}. \quad (\text{B.2})$$

De forma generalizada

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\phi(y)dy}{(x+y)^n}, \quad (\text{B.3})$$

onde,  $n > 0$ . A integral pode ser invertida analiticamente para qualquer  $n$  arbitrário (CARBONELL *et al.*, 2017). O operador que realiza a inversão da função  $f(x)$  é escrito como

$$\phi(y) = \frac{-1}{2i\pi} \int_\eta (z+y)^{n-1} f(z) dz, \quad (\text{B.4})$$

com  $z \in \mathbb{C}$ , sendo  $\eta$  o caminho no plano complexo com parametrização  $z = ye^{i\theta}$ . A transformada inversa para o caso  $n=2$  será

$$\phi(y) = \frac{y}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} d\theta f(ye^{i\theta}). \quad (\text{B.5})$$

Tomemos uma integral do tipo

$$f(\gamma) \int_0^\infty d\gamma' \frac{g(\gamma')}{[\gamma' + \gamma + \beta]^2}, \quad (\text{B.6})$$

ao realizar a parametrização  $\gamma'' = \gamma + \beta$ , obtêm-se uma transformação do tipo Stieltjes,

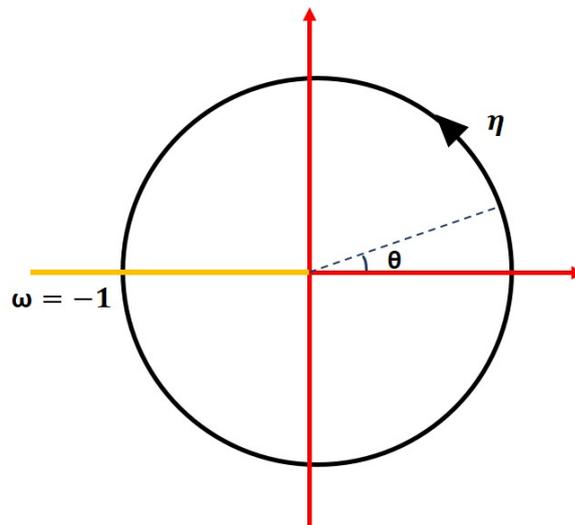


FIGURA B.1 – Contorno de integração de raio  $y = 1$  para obter a transformação de Stieltjes. Adaptado da referência (CARBONELL *et al.*, 2017).

escrita como a transformação presente na equação B.5:

$$g(\gamma) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} d\theta f(\gamma e^{i\theta} - \beta). \quad (\text{B.7})$$

onde o contorno de integração  $\eta$  começa e termina em  $\omega = -1$ , onde  $\omega = e^{i\theta}$ , e está centrado em  $C = (0, 1)$ .

Este resultado será utilizado ao comparar os resultados obtidos utilizando o teorema da Unicidade e a transformação inversa de Stieltjes na obtenção da Amplitude de Bethe-Salpeter para o estado ligado de férmions.

# Apêndice C - Quantização na Frente de Luz

Há diferentes tipos de dinâmicas relativísticas que podem ser usadas para descrever sistemas quânticos. Para obter a dinâmica de um sistema físico é necessário especificar os valores das variáveis dinâmicas em uma determinada hiper-superfície, lembrando que a dinâmica é restrita ao interior do cone de luz da partícula (GÓMEZ, 2016). A escolha desta hiper-superfície determina o tipo de variáveis que se pode usar para descrever a evolução física. O hiperplano tangente ao cone de luz  $x^0 + x^3 = 0$  é denominado como Frente de Luz. Dado um quadrivetor  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ , as coordenadas da frente de luz são escritas como

$$x^\mu = (x^+, x^-, x_\perp), \quad (\text{C.1})$$

onde

$$x^+ = x^0 + x^3, \quad x^- = x^0 - x^3, \quad x_\perp = (x^1 + x^2). \quad (\text{C.2})$$

O produto escalar é dado por

$$x_\mu y^\mu = \frac{1}{2}x^+y^- + \frac{1}{2}x^-y^+ - \mathbf{x}_\perp \mathbf{y}_\perp. \quad (\text{C.3})$$

Seja o quadrivetor  $p^\mu$  escrito como

$$p^\mu = (p^-, p^+, \mathbf{p}_\perp), \quad (\text{C.4})$$

com  $p^-$  e  $p^+$  interpretados como energia e momento longitudinal, respectivamente. Se  $p^\mu p_\mu \geq 0$  e  $p_0 \geq 0$ , então  $p_0 \geq |p_3|$ . O que faz com, que pela relação de dispersão da frente de luz

$$p^\mu p_\mu = p^+p^- - p_\perp^2 \geq 0, \quad (\text{C.5})$$

obtenha-se  $p^+ \geq 0$  e  $p^- \geq 0$ , onde a positividade de  $p^+$  garante a positividade de  $p^-$ .

## FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO DM	2. DATA 07 de Março de 2019	3. DOCUMENTO N° DCTA/ITA/DM-014/2019	4. N° DE PÁGINAS 65
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: Utilização de Representações Integrais para o cálculo do Estado Ligado no Espaço de Minkowski			
6. AUTORA(ES): <b>Abigail Rodrigues Castro</b>			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELA AUTORA: Amplitude; Amplitude Amputada; Equação de Bethe-Salpeter; Problema de Estado Ligado; Representação Integral; Física de Partículas; Física de Altas Energias.			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Equação de Bethe-Salpeter; Espaço de Minkowski; Modelos Bosônicos; Física de Altas Energias; Física.			
10. APRESENTAÇÃO: <span style="float: right;"><input checked="" type="checkbox"/> Nacional    <input type="checkbox"/> Internacional</span> ITA, São José dos Campos. Curso de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Física Nuclear. Orientador: Prof. Dr. Wayne de Paula. Defesa em 26/02/2019. Publicada em 2019.			
11. RESUMO: A equação de Bethe-Salpeter (BS) é uma descrição relativística do problema do estado ligado de duas partículas (SALPETER; BETHE, 1951). Com esta podemos determinar a energia do estado ligado e a amplitude de Bethe-Salpeter $\Phi(k, p)$ . Porém, há polos presentes em seu kernel relativístico e uma alternativa para lidar com essas singularidades é a representação integral perturbativa de Nakanishi (NAKANISHI, 1971b), que utiliza uma representação paramétrica caracterizada por uma função peso e um denominador que depende dos momentos dos propagadores externos. A Representação Integral de Nakanishi pode ser utilizada tanto para representar a amplitude $\Phi(k, p)$ quanto a amplitude amputada $\Gamma(k, p)$ . Ambas amplitudes são alternativas para descrever o estado ligado completamente. Porém, a diferença entre elas é que a amplitude $\Phi(k, p)$ possui mais polos em seu kernel de interação, o que torna mais difícil lidar com o problema de singularidades. Assim, ao optar por desenvolver a equação de Bethe-Salpeter para a amplitude amputada $\Gamma(k, p)$ espera-se que obtenhamos uma solução mais estável para a função peso de Nakanishi. Neste trabalho, obtemos a equação de Bethe-Salpeter no espaço de Minkowski para a amplitude amputada para o sistema bosônico na aproximação de interação tipo escada. Para introduzir a descrição da amplitude amputada $\Gamma(k, p)$ , inicialmente fazemos um estudo da amplitude $\Phi(k, p)$ de Bethe-Salpeter para o caso bosônico, além de demonstrar a relação entre ambas as amplitudes. No caso da amplitude $\Gamma(k, p)$ , obtivemos tanto a equação de Bethe-Salpeter completa quanto a equação no modelo de Wick-Cutkosky, utilizando o Teorema da Unicidade. Por fim, para um estado ligado fermiônico, utilizamos o Teorema da Unicidade e a Transformação de Stieltjes para inverter a equação de Bethe-Salpeter no limite de máxima energia $B = 2M$ . Com isso, obtemos uma equação que pode ser resolvida com método iterativo.			
12. GRAU DE SIGILO: <input checked="" type="checkbox"/> OSTENSIVO <input type="checkbox"/> RESERVADO <input type="checkbox"/> SECRETO			