

Dissertação apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Física Nuclear.

Natan Aparecido Coleta da Conceição

A ÁLGEBRA GEOMÉTRICA DO ESPAÇO-TEMPO

Dissertação aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:



Prof. Dr. Brett Vern Carlson

Orientador

Prof. Dr. Pedro Teixeira Lacava

Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP - Brasil
2018

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Divisão de Informação e Documentação

Conceição, Natan Aparecido Coleta da

A Álgebra Geométrica do Espaço-Tempo / Natan Aparecido Coleta da Conceição.
São José dos Campos, 2018.
155f.

Dissertação de Mestrado – Curso de Física. Área de Física Nuclear – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2018. Orientador: Prof. Dr. Brett Vern Carlson.

1. Álgebra de Clifford. 2. Espaço-tempo. 3. Física Matemática. 4. Álgebra. 5. Matemática.
6. Física. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Título.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

CONCEIÇÃO, Natan Aparecido Coleta da. **A Álgebra Geométrica do Espaço-Tempo**. 2018. 155f. Dissertação de Mestrado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Natan Aparecido Coleta da Conceição

TÍTULO DO TRABALHO: A Álgebra Geométrica do Espaço-Tempo.

TIPO DO TRABALHO/ANO: Dissertação / 2018

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta dissertação e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação pode ser reproduzida sem a autorização do autor.

Natan Aparecido Coleta da Conceição

Natan Aparecido Coleta da Conceição
Jardim Oswaldo Cruz, Rua República do Líbano, 206
12.216-590 – São José dos Campos, SP, Brasil

A ÁLGEBRA GEOMÉTRICA DO ESPAÇO-TEMPO

Natan Aparecido Coleta da Conceição

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Manuel Máximo Bastos Malheiro de Oliveira	Presidente	-	ITA
Prof. Dr. Brett Vern Carlson	Orientador	-	ITA
Prof. Dr. Wayne Leonardo Silva de Paula	Interno	-	ITA
Prof. Dr. Orlando Olavo Aragão Aleixo e Neves de Oliveira	Externo	-	UC

À minha família.

Agradecimentos

Agradeço primeiro a minha família (pais Ozilia e Gildásio, e irmãos Gilcilei, Gilcinei e Weverton), pelo inestimável apoio e confiança em todos os momentos. Sem eles este trabalho e muitas outras realizações não seriam possíveis.

Agradeço ao professor orientador Brett, não somente pelas lições, mas também por toda dedicação, disposição, todo incentivo e, principalmente, por toda paciência durante a orientação. Agradeço-o também pela oportunidade de trabalhar com o interessante, importante e emergente tema das álgebras Clifford e suas aplicações físicas.

Agradeço a todos os professores que tive até o presente momento, tanto os “bons” quanto os “ruins” (estes últimos servindo de maus exemplos). Destaco a professora de graduação Simone Fernandes que, além das lições e de ter apoiado muito durante toda a graduação, reconheceu meu potencial e, quando eu trepidei em relação ao curso de Física e pedia para uma mudança para o curso de Matemática, disse algo como: “Eu vejo em você um futuro físico matemático. . . Aconselho você a experimentar as disciplinas específicas de Física antes de pensar em uma mudança de curso. . . Você verá que há muita matemática ‘pesada’ e interessante nos problemas físicos para ser explorada. . .”. Também credito de forma explícita todos os professores que tive no curso de mestrado: além do professor Brett, com quem tive aulas de “Física Nuclear I”, os professores Malheiro (lecionou “Métodos Matemáticos da Física”), Marinho (lecionou “Mecânica Analítica”), Tobias (lecionou “Mecânica Quântica I”), Wayne (lecionou “Eletrodinâmica I”) e Pedro Moraes (lecionou “Introdução à Teoria da Relatividade Geral”).

Também agradeço aos amigos e colegas que incentivaram, cobraram e colaboraram de alguma forma. Destaco, além dos velhos amigos Pablo (desde a infância), Filipe (no momento, “a long range interaction”; mas corresponde a uma amizade por virtude, de acordo com a concepção de amizade de Aristóteles exposta em “Ética e Nicômaco”), Armstrong (que inclusive me indicou o ITA) e Angélica (que também me ajudou com a burocracia para a entrega da versão final deste trabalho), os amigos e colegas da sala 1610, (em ordem alfabética) Abigail (doce companhia musical), Buno (o indiano), Elisa (a intrusa), Emanuel (o sueco), Estevão (jovem mancebo), George (o “japa” paulista de ascendência nordestina), Gerline (a mochileira), Natalie (a carioca de espírito), Odilon (o Odilonzinho)

e Rômulo (o “pai” conselheiro); cito também Igor (o amazonense). Todos os supracitados, e porventura outros que eu não tenha mencionado, deram alguma contribuição, mesmo infinitésima que porventura tenha sido.

Por fim, expresso o devido agradecimento ao CNPq, pelo suporte financeiro durante boa parte do curso.

*“ . . . for geometry, you know, is the gate of science,
and the gate is so low and small that one can only enter it as a little child.”*

WILLIAM KINGDON CLIFFORD

Resumo

As álgebras geométricas foram concebidas por W. K. Clifford no século XIX como uma fusão das álgebras de Grassmann com os quatérnions de Hamilton. A poderosa estrutura das álgebras geométricas apresenta grande aplicabilidade tanto em Matemática como na Física, devido não somente ao seu significado geométrico, mas também à sua generalidade, que não é apresentada pela famosa álgebra vetorial de Gibbs-Heaviside, cuja aplicação se restringe ao espaço euclidiano tridimensional. As quase inexploradas álgebras de Clifford ressurgiram no século XX como parte intrínseca das teorias quânticas de Pauli e de Dirac, e passaram a ganhar algum reconhecimento através dos trabalhos de D. O. Hestenes, na segunda metade do século XX. Neste trabalho, a álgebra geométrica do espaço euclidiano tridimensional e a álgebra geométrica do espaço-tempo de Minkowski são apresentadas e aplicadas respectivamente na descrição da teoria de Pauli e na descrição do espaço-tempo de Minkowski e da estrutura subjacente à teoria de Dirac.

Abstract

Geometric algebras were conceived by W. K. Clifford in the 19th century as a fusion of Grassmann algebras with the quaternions of Hamilton. The powerful structure of geometric algebras presents great applicability both in mathematics and physics, due not only to its geometrical meaning, but also to its generality, that is not presented by the famous vector algebra of Gibbs-Heaviside, whose application is restricted to Euclidean three-dimensional space. The almost unexplored Clifford algebras reappeared in the 20th century as an intrinsic part of the quantum theories of Pauli and Dirac, and have gained some recognition through the works of D. O. Hestenes, in the second half of the 20th century. In this work the geometric algebra of three-dimensional Euclidean space and the geometric algebra of Minkowski spacetime are presented and respectively applied to description of Pauli theory and description of Minkowski spacetime and the subjacent structure to the Dirac theory.

Sumário

1	PREÂMBULO	12
1.1	Um Panorama Histórico	12
1.2	Os Quatérnions de Hamilton	14
1.3	As Álgebras de Grassmann e de Clifford	21
1.4	Objetivação e Organização	23
2	A ÁLGEBRA GEOMÉTRICA DO ESPAÇO EUCLIDIANO	24
2.1	A Álgebra Geométrica do Plano Euclidiano	24
2.1.1	Construção da Estrutura	24
2.1.2	Operacionalidade da Estrutura	31
2.2	A Álgebra Geométrica do Espaço Euclidiano	42
2.2.1	Construção da Estrutura	42
2.2.2	Operacionalidade da Estrutura	46
2.3	Spinores de Pauli	63
2.3.1	A Transformação Ativa do Spinor de Pauli	68
2.4	Aplicação: A Teoria de Pauli em Termos de \mathcal{Cl}_3	70
3	A ÁLGEBRA GEOMÉTRICA DO ESPAÇO-TEMPO	80
3.1	Espaços Pseudo-Euclidianos	80
3.2	A Álgebra Geométrica do Plano Pseudo-Euclidiano	85
3.3	O Espaço-Tempo de Minkowski	92
3.4	A Álgebra Geométrica do Espaço-Tempo de Minkowski	97
3.5	A Estrutura da Teoria de Dirac	104

4	CONCLUSÕES	109
	APÊNDICE A – ALGUMAS NOÇÕES DE ÁLGEBRA	112
	A.1 Aplicações	112
	A.2 Algumas Estruturas Algébricas de Interesse	116
	A.2.1 Grupos	117
	A.2.2 Corpos	119
	A.2.3 Espaços Vetoriais	121
	A.2.4 Álgebras	130
	APÊNDICE B – MAIS QUATÉRNIONS E A TEORIA DE DIRAC	132
	B.1 Eletrodinâmica Clássica e Teoria da Relatividade Especial	132
	B.2 Teoria de Dirac	143
	REFERÊNCIAS	153

1 Preâmbulo

As *álgebras geométricas*, casos especiais de *álgebras de Clifford* — a grosso modo, sistemas algébricos provindos de uma espécie de fusão da *álgebra dos quatérnions* de Hamilton com *álgebras de Grassmann* —, proveem a linguagem fundamental em termos da qual as teorias físicas alvejadas neste trabalho são apresentadas. A *teoria de Dirac* desempenha o papel central dentre essas teorias.

Neste primeiro capítulo se faz uma breve apresentação às estruturas matemáticas supracitadas, precedida por um retrospecto histórico que deve servir de motivação para o trabalho. Uma introdução de fato é dada apenas aos quatérnions. Quanto às álgebras de Grassmann e de Clifford, retém-se apenas às suas definições gerais. Casos especiais de grande interesse físico das álgebras de Clifford são apresentados ao longo do texto. Álgebras de Grassmann aparecem como estruturas inerentes às álgebras de Clifford que são consideradas. Ao fim do capítulo, fixa-se os objetivos do trabalho e apresenta-se a sua organização.

1.1 Um Panorama Histórico

Hoje é natural que se veja álgebra e geometria como campos quase indissociáveis. Mas nem sempre foi assim, como prefaciado por Jayme Vaz Jr. e Roldão da Rocha Jr. em sua obra “An Introduction to Clifford Algebras and Spinors” (VAZ JR.; DA ROCHA JR., 2016).

A ideia de unificação de operações geométricas e algébricas foi primeiramente defendida por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), em uma carta para Christiaan Huygens (1629-1695), de 1679 (publicada em 1833). Essa ideia foi primeiramente manifestada pelo norueguês Caspar Wessel (1745-1818) através de um trabalho apresentado à Academia Real Dinamarquesa de Ciências e Letras em 1797, e publicado em 1799. Apesar da publicação, esse trabalho era pouco conhecido até a sua tradução para o francês em 1897. A interpretação geométrica dos números complexos em termos do plano de Argand-Gauss(-Wessel) teve suas primeiras grandes impressões pelos trabalhos independentes de Jean-Robert Argand (1768-1822), de 1806, e Johann Carl Friederich Gauss (1777-1855), de 1831. O sucesso da abordagem geométrica dos números complexos levou William

Rowan Hamilton (1805-1865) a buscar um sistema numérico mais geral, correspondente ao espaço tridimensional. Após anos passados e tentativas falhas, Hamilton teve sucesso em 1843, com a concepção de objetos que ele denominou *quaternions* [em português, são chamados quatérnions, quaterniões ou quatérnios; a primeira aceção será aqui adotada]. A partir de então, Hamilton e seus seguidores dedicaram anos com o aperfeiçoamento da teoria e desenvolvimento de aplicações do sistema recém-concebido. A mesma época da concepção dos quatérnions, Hermann Günther Grassmann (1809-1877) publicou seu grande trabalho, *Die lineale Ausdehnungslehre*, em que introduz um sistema algébrico baseado num produto de significado geométrico. Entretanto, seu sistema era demasiado inovador, geral e abstrato para a época, o que o fazia de difícil compreensão. Mesmo uma nova versão mais inteligível, de 1862, do trabalho de Grassmann, não o fez menos obscuro. Curiosamente, em 1844, depois da publicação da carta de Leibniz para Huygens, o *Jablonowskischen Gesellschaft der Wissenschaft* ofereceu um prêmio para aquele que desenvolvesse a ideia de Leibniz. O prêmio foi dado para Grassmann em 1846 pelo seu sistema algébrico apresentado em *Die lineale Ausdehnungslehre*; ainda assim, isso não foi suficiente para que fosse dada maior atenção ao trabalho de Grassmann.

Ainda segundo Vaz Jr. e da Rocha Jr., em 1873, o inglês William Kingdon Clifford (1845-1879) publicou um artigo intitulado “Preliminary Sketch of Biquaternions”, e em 1876 escreveu os manuscritos “Further note on so-called biquaternions” e “On the classification of geometric algebra” (que foram publicados juntos, em 1882, postumamente, sob o título “On the Classification of Geometric Algebras”). Esses trabalhos culminaram no grande trabalho de Clifford de 1878, “Applications of Grassmann’s Extensive Algebra”, em que ele apresenta uma nova estrutura algébrica de significado geométrico, a qual é baseada numa espécie de “produto quaterniônico generalizado”, que opera entre os elementos dos espaços que servem de substrato para a estrutura de Grassmann. De tal modo, o sistema introduzido por Clifford é naturalmente adaptado à geometria ortogonal [a mais importante em física], tal como os quatérnions o são para espaços tridimensionais, e pode ser construído a partir de espaços vetoriais arbitrários, tais como os sistemas de Grassmann. Clifford denominou sua estrutura de *álgebra geométrica* (*geometric algebra*), mas hoje tais estruturas são também muito conhecidas como *álgebras de Clifford* (apesar disso, serão comumente designadas aqui de álgebras geométricas). Infelizmente, Clifford mal pode continuar com seu trabalho: morreu no ano seguinte a publicação do mesmo, com apenas 33 anos de idade. É importante salientar que, logo depois do trabalho de Clifford, em 1880, as álgebras geométricas foram reinventadas por Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903). Além disso, muitos outros estudiosos contribuíram para o desenvolvimento das álgebras geométricas. Um dos mais importantes foi Élie Joseph Cartan (1869-1951), que dentre várias contribuições, descreveu álgebras geométricas em termos de matrizes e introduziu o conceito de *spinor* (embora o termo spinor tenha sido cunhado por Paul Ehrenfest (1880-1933) na década de 1920). Foi Wolfgang Ernst Pauli (1900-1958) quem

introduziu as álgebras geométricas na Física, através do conceito de spinor, aplicando, por exemplo, à sua teoria do spin, a qual lhe rendeu o prêmio Nobel. Depois foi a vez de Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984), que apresentou, em 1928, a principal equação em mecânica quântica relativística, a qual é escrita em termos de álgebras geométricas, com o elétron sendo descrito por um campo de *spinors* [devido ao uso sistemático da palavra spinor no texto, a partir daqui, a mesma será grafada sem itálico, com o plural sendo escrito “spinores” (sem as aspas)]. A partir de então, várias outras contribuições foram pouco a pouco incrementando o arsenal do aparato teórico das álgebras geométricas de Clifford, com uma variedade de aplicações não somente em ciências matemáticas e físicas, como também em computação e engenharia.

Na seção que segue, os quatérnions são introduzidos com base no artigo “If Hamilton Had Prevailed: Quaternions in Physics”, de Joachim Lambek (LAMBEEK, 1995).

1.2 Os Quatérnions de Hamilton

A partir do advento dos números naturais, problemas matemáticos descritos por equações algébricas induziram sucessivamente à consideração de um sistema numérico mais geral. De fato, através da consideração de operações inversas às operações básicas (soma, multiplicação, potenciação), as quais são necessárias para resolução das equações, pode-se obter objetos matemáticos que não são caracterizados como números naturais, o que induz à necessidade de extensões do sistema numérico.

As sucessivas extensões com base no paradigma supracitado podem ser representadas pelas seguintes relações de inclusão,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C},$$

em que figuram, além dos números naturais, os inteiros, os racionais, os reais e os complexos, respectivamente. Essa sequência de relações de inclusão expressam a ordem lógica do desenvolvimento dos primeiros sistemas numéricos. Entretanto, a sequência em acordo com a conhecida história do desenvolvimento dos sistemas numéricos é dada por

$$\mathbb{N}^+ \subset \mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C},$$

em que \mathbb{N}^+ , \mathbb{Z}^+ e \mathbb{R}^+ representam, respectivamente, os naturais positivos, os inteiros positivos e os reais positivos.

Deixando de parte a história da construção desses sistemas numéricos, voltar-se-á para àquele cujo desenvolvimento sucedeu o dos números complexos, e que se apresenta como uma generalização deste, o dos *quatérnions*.

Depois da demonstração do *teorema fundamental da álgebra*, que garante que uma equação polinomial de grau n tem n soluções complexas não necessariamente distintas, parecia não haver mais a necessidade de introduzir novos tipos de números. Foi com uma motivação diferente que Hamilton concebeu os quatérnions — é interessante salientar que eles foram obtidos independentemente por Benjamin Olinde Rodrigues e eventualmente já eram conhecidos por Gauss. Hamilton buscava por números da forma $a + bi + cj$, sendo $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $i^2 = j^2 = -1$, os quais deveriam desempenhar para o espaço o mesmo papel que os números complexos desempenhavam para o plano.

Influenciado pela identidade complexa

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2,$$

Hamilton observou que

$$(a + bi + cj)(a - bi - cj) = a^2 + b^2 + c^2 - (ij + ji)bc.$$

Então, em 1843, ele teve a súbita ideia de abdicar da lei comutativa da multiplicação, e considerou ij como uma terceira raiz quadrada de -1 , $ij = k$, de tal forma que

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \tag{1.1}$$

de acordo com as quais $ij = -ji$ e

$$(a + bi + cj)(a - bi - cj) = a^2 + b^2 + c^2.$$

De um modo geral, como consequência das equações (1.1), segue que

$$\left\{ \begin{array}{l} ij = -ji = k \\ jk = -kj = i \\ ki = -ik = j \end{array} \right\}, \tag{1.2}$$

de acordo com as quais

$$(a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

sendo d real.

Números da forma $a + bi + cj + dk$, sendo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e i, j e k tais que valem as equações (1.1), são denominados *quatérnions*. O conjunto dos quatérnions é denotado por \mathbb{H} , em honra a Hamilton.

É conveniente denotar: $1 \equiv i_0$, $i \equiv i_1$, $j \equiv i_2$, $k \equiv i_3$. Dessa forma, um quatérnion pode ser escrito

$$q = q_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3 = \sum_{\mu=0}^3 q_\mu i_\mu,$$

em que $q_\mu \in \mathbb{R}$.

Quatérnions são combinados através das operações de soma e produto de acordo com as leis usuais da aritmética (comutatividade, associatividade, existência do elemento neutro, existência de elementos simétricos e distributividade do produto em relação à soma), tal como os números reais e complexos, *exceto pela lei de comutatividade do produto*. Além do mais, é possível multiplicar um quatérnion por um número real. Assim, define-se a soma entre quatérnions, a multiplicação de um quatérnion por um escalar real e o produto quaterniônico, respectivamente, como segue:

$$q + p = \left(\sum_{\mu=0}^3 q_\mu i_\mu \right) + \left(\sum_{\nu=0}^3 p_\nu i_\nu \right) := \sum_{\mu=0}^3 (q_\mu + p_\mu) i_\mu;$$

$$\lambda q = \lambda \left(\sum_{\mu=0}^3 q_\mu i_\mu \right) := \sum_{\mu=0}^3 (\lambda q_\mu) i_\mu;$$

$$qp = \left(\sum_{\mu=0}^3 q_\mu i_\mu \right) \left(\sum_{\nu=0}^3 p_\nu i_\nu \right) := \left\{ \begin{array}{l} (q_0 p_0 - q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3) i_0 + \\ + (q_0 p_1 + q_1 p_0 + q_2 p_3 - q_3 p_2) i_1 + \\ + (q_0 p_2 - q_1 p_3 + q_2 p_0 + q_3 p_1) i_2 + \\ + (q_0 p_3 + q_1 p_2 - q_2 p_1 + q_3 p_0) i_3 \end{array} \right\}; \quad (1.3)$$

em que $q, p \in \mathbb{H}$, sendo $q_\mu, p_\mu \in \mathbb{R}$, e também $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como pode-se observar, tais operações sempre geram outros quatérnions, o que caracteriza a propriedade de *fechamento* de \mathbb{H} com relação a essas operações.

O simétrico do quatérnion q em relação à operação de soma, o *oposto* de q , é dado pelo quatérnion denotado por $-q$ cujos coeficientes são os opostos dos coeficientes de q . A subtração de um quatérnion p pelo quatérnion q é então dada por

$$p - q := p + (-q).$$

Define-se o *conjugado* do quatérnion q como

$$\bar{q} := q_0 - q_1 i_1 - q_2 i_2 - q_3 i_3.$$

Define-se então a norma de q como o real não negativo $\|q\|$ tal que

$$\|q\|^2 := q\bar{q} = \bar{q}q = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2.$$

Assim, sendo $q \neq 0$,

$$q \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = 1,$$

o que permite identificar o simétrico de q com relação ao produto quaterniônico (o *inverso*):

$$q^{-1} := \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}.$$

Dessa forma, é possível, num certo sentido, “dividir” quatérnions efetuando-se o produto de um (o “dividendo”) pelo inverso do outro (o “divisor”).

O conjunto dos quatérnions, \mathbb{H} , dotado das operações de soma e produto entre quatérnions munidas de suas propriedades formam um *corpo não-comutativo* ou *anel de divisão*. Também verifica-se que \mathbb{H} dotado das operações de soma entre quatérnions e multiplicação de quatérnion por escalar real determina um *espaço vetorial* sobre o *corpo* dos escalares reais. Além do mais, o espaço vetorial dos quatérnions dotado do produto quaterniônico determina uma *álgebra* sobre tal espaço vetorial, ou, igualmente, uma álgebra sobre o corpo dos escalares reais. (Os termos grafados em itálico neste parágrafo são nomes de *estruturas algébricas*, cuja definição é dada no apêndice A do presente trabalho.)

A *parte real*, ou *parte escalar*, e a *parte imaginária pura*, ou *parte vetorial*, de um quatérnion q são definidas, respectivamente, por

$$\operatorname{Re}(q) := q_0 \quad \text{e} \quad \operatorname{Pu}(q) := q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3 = \sum_{\mu=1}^3 q_{\mu} i_{\mu}.$$

Assim, é razoável identificar um quatérnion puro com um vetor do espaço euclidiano (como sugere a expressão “parte vetorial”). Considere, então, a identificação dos vetores $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ e $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ com os quatérnions puros $\operatorname{Pu}(q) = q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3$ e

$\text{Pu}(p) = p_1i_1 + p_2i_2 + p_3i_3$, respectivamente. O produto entre esses quatérnions, de acordo com a expressão explícita para o produto quaterniônico, (1.3), fica

$$\text{Pu}(q)\text{Pu}(p) = (-q_1p_1 - q_2p_2 - q_3p_3)i_0 + (q_2p_3 - q_3p_2)i_1 + (-q_1p_3 + q_3p_1)i_2 + (q_1p_2 - q_2p_1)i_3,$$

ou,

$$\text{Pu}(q)\text{Pu}(p) = -(q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3) + (q_2p_3 - q_3p_2)i_1 + (q_3p_1 - q_1p_3)i_2 + (q_1p_2 - q_2p_1)i_3,$$

que pode ser escrito como

$$\text{Pu}(q)\text{Pu}(p) = -\text{Pu}(q) \cdot \text{Pu}(p) + \text{Pu}(q) \times \text{Pu}(p), \quad (1.4)$$

em que

$$\text{Pu}(q) \cdot \text{Pu}(p) := q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3,$$

e

$$\text{Pu}(q) \times \text{Pu}(p) := (q_2p_3 - q_3p_2)i_1 + (q_3p_1 - q_1p_3)i_2 + (q_1p_2 - q_2p_1)i_3,$$

os quais correspondem, respectivamente, ao que vieram a ser chamados *produto escalar* e *produto vetorial* dos vetores \mathbf{q} e \mathbf{p} , no âmbito da álgebra vetorial de Gibbs-Heaviside.

Pode-se também identificar quatérnions com matrizes complexas 2×2 . De fato, fazendo os mapeamentos

$$i_1 \mapsto \mathfrak{i} := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad i_2 \mapsto \mathfrak{j} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que i representa a raiz quadrada de -1 ordinária, e então forçando

$$i_3 = i_1i_2 \mapsto \mathfrak{k} := \mathfrak{i}\mathfrak{j} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

verifica-se que

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbb{1}$$

(em que $\mathbb{1}$ representa a matriz identidade), que são análogas às relações (1.1). Além do mais, verifica-se que

$$\mathbf{i} = -i\sigma_1, \quad \mathbf{j} = -i\sigma_2 \quad \text{e} \quad \mathbf{k} = -i\sigma_3,$$

em que

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

são as chamadas *matrizes de Pauli*, que juntamente com a matriz identidade geram o espaço vetorial das matrizes complexas 2×2 hermitianas.

Assim, obtém-se uma maneira de representar quatérnions por matrizes. Com efeito, um quatérnion genérico q pode ser representado matricialmente por

$$\mathfrak{q} = q_0\mathbb{1} + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} = q_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + q_1 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + q_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + q_3 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

ou seja, por

$$\mathfrak{q} = \begin{pmatrix} q_0 - q_3i & -q_2 - q_1i \\ q_2 - q_1i & q_0 + q_3i \end{pmatrix},$$

que é da forma

$$\begin{pmatrix} u & -v^* \\ v & u^* \end{pmatrix},$$

sendo $u = q_0 - q_3i$ e $v = q_2 - q_1i$ e u^* e v^* seus conjugados complexos.

Note que o conjugado quaterniônico de q , \bar{q} , é representado matricialmente por

$$\begin{pmatrix} u^* & v^* \\ -v & u \end{pmatrix} = \mathfrak{q}^\dagger,$$

em que \mathfrak{q}^\dagger indica a matriz conjugada hermitiana de \mathfrak{q} .

Pode-se obter outro tipo de representação matricial para quatérnions substituindo os números 0, 1 e i , respectivamente, pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

nas matrizes $\mathbb{1}$, i , j e k na expressão de q . Neste caso, obtém-se a representação do quatérnion genérico q por uma matriz real 4×4 :

$$\begin{pmatrix} q_0 & -q_3 & -q_2 & -q_1 \\ q_3 & q_0 & q_1 & -q_2 \\ q_2 & -q_1 & q_0 & q_3 \\ q_1 & q_2 & -q_3 & q_0 \end{pmatrix}.$$

Uma maneira natural de verificar tal representatividade matricial de um quatérnion baseia-se em álgebra linear. Com efeito, considere a função

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_a : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ q &\mapsto aq \end{aligned}$$

induzida pelo produto com o quatérnion a pela esquerda. As propriedades

$$a(\lambda q) = \lambda(aq) \quad \text{e} \quad a(q + p) = aq + ap$$

implicam que tal função é uma transformação linear. Dessa forma, representando o quatérnion genérico q pela matriz coluna

$$\{q_\mu\} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix},$$

a transformação linear supracitada pode ser representada por uma matriz 4×4 , que será representada por $L(a)$. Assim, tem-se que

$$\{q'_\mu\} = L(a)\{q_\mu\},$$

sendo $q' = aq$.

Da mesma forma, pode-se representar a transformação linear $\mathcal{R}_b : q \mapsto qb$, induzida pelo produto com o quatérnion b pela direita, pela matriz $R(b)$ tal que

$$\{q''_\mu\} = R(b)\{q_\mu\},$$

sendo $q'' = qb$.

Dessa forma, evocando a propriedade associativa do produto quaterniônico, tem-se

$$(aq)b = a(qb),$$

que implica

$$R(b)L(a) = L(a)R(b), \quad L(aq) = L(a)L(q) \quad \text{e} \quad R(qb) = R(b)R(q),$$

que mostram que $L : \mathbb{H} \rightarrow M_4(\mathbb{R})$ e $R : \mathbb{H} \rightarrow M_4(\mathbb{R})$ são *homomorfismos* (sobre a definição de homomorfismo vide apêndice A).

No apêndice B do presente trabalho, atenção é dada à algumas aplicações básicas dos quatérnions à Física, que, além de servirem de subsídios para o que será apresentado posteriormente no trabalho, constituem uma forma de ilustração da utilidade dos quatérnions à Física. Desempenham um papel central na exposição os chamados *biquatérnions*, que essencialmente são quatérnions com coeficientes complexos. O exposto em tal apêndice tem um caráter tal que o autor sugere que o mesmo seja entendido como uma continuação desta seção, embora sua leitura não seja imprescindível para a compreensão do restante do trabalho.

1.3 As Álgebras de Grassmann e de Clifford

Nesta seção seguem as definições de uma álgebra de Grassmann e de uma álgebra de Clifford, com base nas respectivas definições dadas por João Carlos Alves Barata, em suas notas do “Curso de Física-Matemática” (BARATA, 2018), em seu capítulo 2, intitulado “Estruturas Algébricas Básicas”.

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. Uma *álgebra de Grassmann* sobre o corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ consiste numa álgebra associativa e unital dada pelo par $(\wedge(V), \wedge)$, sendo o produto \wedge tal que:

- (a) V é subespaço vetorial do espaço vetorial $\wedge(V)$;
- (b) para quaisquer u, v e w de V tem-se $u \wedge v + w \wedge w = u \wedge v$.

A propriedade (b) significa que $w \wedge w$ desempenha o papel de elemento neutro da soma

de objetos resultantes de um produto da forma $u \wedge v$, para quaisquer elementos u, v e w de V . Em particular, dados os vetores u e v de V , o objeto

$$(u + v) \wedge (u + v) = u \wedge u + u \wedge v + v \wedge u + v \wedge v = u \wedge v + v \wedge u$$

também desempenha tal papel, o que implica $u \wedge v = -v \wedge u$. Por outro lado, um caso particular de $u \wedge v = -v \wedge u$ consiste em $u \wedge u = -u \wedge u$, que implica $u \wedge u$ como sendo nulo para qualquer vetor u de V . Assim, a propriedade (b) é equivalente a:

(b') para quaisquer u e v de V tem-se $u \wedge v = -v \wedge u$.

Uma álgebra de Clifford pode ser definida sobre qualquer espaço vetorial dotado de uma forma bilinear simétrica. A definição que segue, porém, é restrita a espaços vetoriais sobre corpos de característica diferente de 2 (não discute-se sobre isso nesse trabalho), que é o caso do corpo dos racionais, dos reais e dos complexos.

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ (dos racionais ou dos reais ou dos complexos) e $g : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ uma forma bilinear simétrica definida sobre V . A *álgebra de Clifford* sobre o espaço vetorial V dotado da forma bilinear simétrica g , denotada por $\mathcal{C}\ell(V, g)$ e cujo produto é denotado por justaposição, é uma álgebra associativa e unital, com unidade I , tal que:

- (a) V é subespaço vetorial do espaço mais geral que serve de substrato para $\mathcal{C}\ell(V, g)$;
- (b) para qualquer v de V tem-se $vv = g(v, v)I$.

Observe que, dados u e v de V , tem-se

$$(u + v)(u + v) = uu + uv + uv + vv = g(u, u)I + uv + vu + g(v, v)I$$

e

$$g(u + v, u + v)I = g(u, u)I + 2g(u, v)I + g(v, v)I,$$

de modo que a propriedade (b) implica $uv + vu = 2g(u, v)I$. Essa relação, por outro lado, implica $uu + uu = 2g(u, u)I$, ou seja, implica $uu = g(u, u)I$. Assim, a propriedade (b) equivale a:

(b') para quaisquer u e v de V tem-se $uv + vu = 2g(u, v)I$.

Para melhores informações sobre as álgebras de Grassmann, remete-se o leitor para o livro “Álgebra Exterior”, de Elon Lages Lima (LIMA, 2014). E para um tratamento genérico e completo sobre álgebras de Clifford indica-se o livro “An Introduction to Clifford Algebras and Spinors”, de Jayme Vaz Jr. e Roldão da Rocha Jr. (VAZ JR.; DA ROCHA JR., 2016), em que também trata-se das álgebras de Grassmann, no seu capítulo 2.

1.4 Objetivação e Organização

A pretensão desta dissertação é dar ao leitor uma noção da utilidade das álgebras de Clifford à Física mostrando que casos particulares dessas álgebras descrevem tanto o espaço físico tridimensional como o espaço-tempo, e aparecem como estruturas inerentes à teorias quânticas. Aproveita-se para mostrar a relação entre álgebras de Clifford e outras estruturas algébricas utilizadas na descrição de teorias físicas.

No apêndice A faz-se uma exposição das principais estruturas algébricas com que se lida no trabalho. No apêndice B apresenta-se aplicações dos (bi)quatérnions em descrições no âmbito da teoria especial da relatividade, da eletrodinâmica clássica e da teoria quântica de Dirac. No capítulo 2 são apresentadas as álgebras geométricas do plano euclidiano e do espaço euclidiano tridimensional, cuja linguagem é utilizada para se fazer uma descrição da teoria quântica de Pauli. No capítulo 3 são apresentadas as álgebras geométricas de espaços pseudo-euclidianos, em termos das quais se descreve o espaço-tempo de Minkowski e se faz uma breve apresentação à álgebra de Dirac e aos spinores (operatórios) de Dirac. Por fim, vem o capítulo de conclusão.

2 A Álgebra Geométrica do Espaço Euclidiano

Neste capítulo, a *álgebra geométrica do espaço euclidiano* é tratada com base nos artigos “A Álgebra Geométrica do Espaço Euclidiano e a Teoria de Pauli” (VAZ JR., 1997) e “A Álgebra Geométrica do Espaço-Tempo e a Teoria da Relatividade” (VAZ JR., 2000), ambos de Jayme Vaz Jr., e também com base no capítulo 2 (“Geometric Algebra in Two and Three Dimensions”) do livro “Geometric Algebra for Physicists”, de Christopher J. L. Doran e Anthony N. Lasenby (DORAN; LASENBY, 2003). Depois de discutida essa estrutura, introduz-se os *spinors de Pauli* e trata-se de alguns aspectos da *teoria de Pauli* em termos desses objetos e outros elementos da álgebra geométrica do espaço euclidiano; esse tratamento é baseado no exposto no primeiro artigo supracitado.

2.1 A Álgebra Geométrica do Plano Euclidiano

2.1.1 Construção da Estrutura

Considere o espaço vetorial usual associado a \mathbb{R}^2 , e deixe que seus elementos sejam denotados por letras latinas em negrito: \mathbf{u} , \mathbf{v} , etc. Sua base canônica será denotada por $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ (em que fica subentendida a ordenação da base), de tal forma que se escreve, genericamente, $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$, etc. A interpretação desse espaço será a interpretação geométrica usual: \mathbb{R}^2 corresponde ao plano, e seus pares ordenados representam vetores do plano.

Considere a forma bilinear $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}, \quad \text{em que } i, j \in \{1, 2\}. \quad (2.1)$$

Tomando-se $g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, sendo \mathbf{u} e \mathbf{v} vetores genéricos, e aplicando-se então a propriedade de bilinearidade, verifica-se que $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{u})$, e que $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$, sendo que $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ se, e somente se, $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ (\mathbf{u} é o vetor nulo), ou seja, a forma bilinear g acima definida é

simétrica e positiva-definida, logo corresponde a um produto interno. De fato, tem-se que

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= g(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2, v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) \\ &= u_1v_1g(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + u_1v_2g(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + u_2v_1g(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + u_2v_2g(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = u_1v_1 + u_2v_2 \\ &= v_1u_1g(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + v_1u_2g(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + v_2u_1g(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + v_2u_2g(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = g(\mathbf{v}, \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Em particular,

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = u_1^2 + u_2^2 \geq 0.$$

Observe que esse é o produto interno usual associado ao espaço vetorial \mathbb{R}^2 . Dotando \mathbb{R}^2 com tal produto interno, faz-se dele um espaço euclidiano, o *plano euclidiano*.

A *álgebra geométrica do plano euclidiano* é determinada por um espaço construído a partir do plano euclidiano munido de um outro produto, denominado *produto geométrico*, que será construído na sequência, conforme se impõe restrições a sua forma. Ele será denotado por justaposição, ou seja, $\mathbf{u}\mathbf{v}$ denotará o produto geométrico do vetor \mathbf{u} pelo vetor \mathbf{v} . O espaço supracitado construído a partir de \mathbb{R}^2 será introduzido oportunamente.

A primeira propriedade imposta ao produto geométrico é

$$\mathbf{u}\mathbf{u} = g(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2, \quad (2.2)$$

que pode ser escrito

$$\mathbf{u}^2 = |\mathbf{u}|^2, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2, \quad (2.3)$$

em que introduziu-se a notação $\mathbf{u}\mathbf{u} = \mathbf{u}^2$, e $|\cdot|$ corresponde à norma induzida pelo produto interno g , ou seja, o módulo usual. Escrevendo $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$, a equação acima pode ser escrita em termos de componentes como

$$(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2)(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2) = u_1^2 + u_2^2.$$

Como a bilinearidade é condição necessária para o produto de uma álgebra, impõe-se necessariamente essa restrição ao produto geométrico. Aplicando então tal propriedade na expressão acima, obtém-se

$$u_1^2\mathbf{e}_1^2 + u_1u_2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) + u_2^2\mathbf{e}_2^2 = u_1^2 + u_2^2.$$

Para que essa equação seja satisfeita, deve-se ter necessariamente

$$\mathbf{e}_1^2 = 1, \quad \mathbf{e}_2^2 = 1, \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1. \quad (2.4)$$

Essas relações determinam o produto geométrico da álgebra geométrica do plano euclidiano. Aplicando-as no cálculo do produto geométrico de dois vetores arbitrários $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\mathbf{v} &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2)(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) \\ &= u_1v_1\mathbf{e}_1^2 + u_1v_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + u_2v_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + u_2v_2\mathbf{e}_2^2 \\ &= (u_1v_1 + u_2v_2) + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

É observável que o primeiro termo do segundo membro da expressão obtida é um escalar, que inclusive, corresponde ao produto interno introduzido anteriormente, mais conhecido como produto escalar. Já o segundo termo, não se trata de um escalar nem de um vetor, se agora admite-se a associatividade do produto geométrico. De fato, para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$, tem-se $\alpha\mathbf{w} = \mathbf{w}\alpha$, mas, em particular,

$$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1 = -(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_2$$

e

$$\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2,$$

logo, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ não é um escalar. E, para qualquer vetor \mathbf{w} , tem-se $\mathbf{w}\mathbf{w} = \mathbf{w}^2 = |\mathbf{w}|^2 \geq 0$, mas

$$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = -(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_2[\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)] = -\mathbf{e}_2[(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2] = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = -1,$$

logo, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ não é um vetor de \mathbb{R}^2 . O coeficiente de $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ na expressão (2.5) sugere uma interpretação geométrica para tal objeto. $|u_1v_2 - u_2v_1|$ corresponde à área do paralelogramo determinado pelos vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} . Enquanto $\sqrt{|\mathbf{w}\mathbf{w}|}$ corresponde ao comprimento de um segmento de reta orientado que representa o vetor \mathbf{w} , a quantidade

$$\sqrt{|[(u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2][(u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]|}$$

corresponde à área do paralelogramo determinado pelos vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} . Esse fato sugere que $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ esteja associado a uma área do plano, mais especificamente, uma área de magnitude unitária; a multiplicação do objeto $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ por $(u_1v_2 - u_2v_1)$ torna-o associado a uma área de magnitude $|u_1v_2 - u_2v_1|$; conforme o sinal do coeficiente de $(u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, tal objeto tem uma espécie de “orientação”, análoga, em certo sentido, à orientação de um vetor (como segmento de reta orientado), carecendo, por ora, de um significado pertinente.

Baseando-se na autossugestão feita no parágrafo anterior, considere a associação do objeto $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ com o paralelogramo/quadrado determinado pelos vetores \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 . Pode-se pensar na orientação desse quadrado como sendo determinada pela direção do quadrado, a qual é única e corresponde à direção do plano, e pelo sentido de percurso da fronteira do quadrado, o qual está unicamente associado à ordem de consideração dos vetores \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 (e seus opostos) para a tomada dos deslocamentos necessários para o percurso da fronteira do quadrado (partindo-se da origem) no sentido em questão, horário ou anti-horário. Por exemplo, a ordem do produto geométrico $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ sugere que se associe a esse um quadrado com sentido de percurso da sua fronteira sendo o sentido anti-horário, pois, partindo-se da origem e tomando-se o deslocamento dado por \mathbf{e}_1 e depois o dado por \mathbf{e}_2 , e então tomando-se os deslocamentos $-\mathbf{e}_1$ e $-\mathbf{e}_2$ percorre-se a fronteira do quadrado no sentido anti-horário. Da mesma forma, $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$ está associado a um quadrado com sentido de percurso de sua fronteira sendo o sentido horário, o sentido contrário do percurso do “quadrado orientado” associado a $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, o que é compatível com o fato de que $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$. Essa interpretação induz à ideia de que o objeto $(u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ presente na expressão para o produto geométrico $\mathbf{u}\mathbf{v}$ corresponde ao paralelogramo orientado determinado por \mathbf{u} e \mathbf{v} .

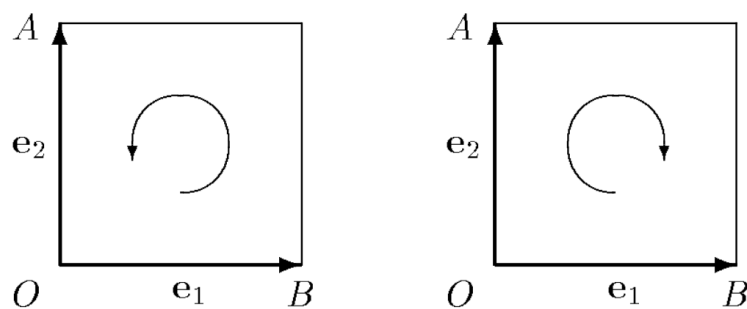


FIGURA 2.1 – Os dois quadrados orientados associados aos vetores de base \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 . Fonte: (VAZ JR., 1997).

O fato de se poder escrever o produto geométrico $\mathbf{u}\mathbf{v}$ como a soma de uma parte simétrica e uma parte anti-simétrica como

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{u}) + \frac{1}{2}(\mathbf{u}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{u}) \quad (2.6)$$

permite identificar a parte simétrica com o produto interno/escalar $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + u_2v_2$ e (re)definir o produto interno/escalar em termos do produto geométrico como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{u}). \quad (2.7)$$

A parte anti-simétrica do produto $\mathbf{u}\mathbf{v}$ é definida como o *produto externo* ou *produto exterior* ou ainda *produto cunha* dos vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} :

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{u}) = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}. \quad (2.8)$$

Com essas definições, pode-se escrever o produto geométrico como

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}. \quad (2.9)$$

Observando que

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$$

e que

$$(u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v},$$

verifica-se que, de modo geral, o produto externo $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ representa o paralelogramo orientado determinado pelos vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} , nesta ordem.

Sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$. Definindo a soma dos objetos resultantes de produto externo por

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{x} = (u_1v_2 + w_1x_2 - u_2v_1 - w_2x_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2,$$

verifica-se facilmente que

$$(i) \quad \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{x} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$$

e

$$(ii) \quad \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + (\mathbf{w} \wedge \mathbf{x} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{x}) + \mathbf{y} \wedge \mathbf{z}.$$

Além disso, tem-se que

$$(iii) \quad \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \frac{1}{2}(\mathbf{w}\mathbf{w} - \mathbf{w}\mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v},$$

ou seja, $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{w} = \dots$ desempenha a função de elemento neutro com relação

à operação de adição. Tal elemento é único, e por ora será denotado \mathbf{O} ; sua unicidade é verificada observando que, caso exista \mathbf{O}' que também satisfaz

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{O}' = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v},$$

segue que

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{O} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{O}',$$

que implica $\mathbf{O} = \mathbf{O}'$. Uma quarta propriedade básica de elementos da forma $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, relacionada à existência de \mathbf{O} , é que (iv) a todo $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ existe associado um “elemento oposto”, no sentido que $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ somado a seu oposto resulta em \mathbf{O} . De fato, a propriedade $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ identifica automaticamente o oposto de $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ com $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{O}.$$

Também pode-se definir naturalmente a multiplicação de um objeto da forma $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ por um escalar real α por

$$\alpha(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = [\alpha(u_1v_2 - u_2v_1)]\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2,$$

e verificar sem dificuldades que tal operação obedece às propriedades (em que β também é um escalar):

- (I) $\alpha[\beta(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})] = (\alpha\beta)(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$;
- (II) $\alpha(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) + \alpha(\mathbf{w} \wedge \mathbf{x})$;
- (III) $(\alpha + \beta)(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$;
- (IV) $1(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

Uma última propriedade importante a se observar é que a soma de objetos da forma $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e a multiplicação de um tal objeto por um escalar real sempre resulta num desses objetos. Essa propriedade juntamente com as propriedades i, ii, iii, iv, I, II, III e IV das operações de soma e multiplicação por escalar mostram que o conjunto de objetos da forma $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ munido das operações de soma e multiplicação por escalar real como definidas determina uma estrutura de espaço vetorial sobre o corpo dos reais. Os vetores desse espaço vetorial são designados *2-vetores* ou *bivetores*, por serem determinados pelo produto externo de dois vetores “usuais”. O espaço vetorial dos bivetores é denotado por $\bigwedge^2(\mathbb{R}^2)$.

Com vistas em construções futuras, denota-se alternativamente o espaço dos vetores

do plano euclidiano por $\bigwedge^1(\mathbb{R}^2)$, e denomina-se alternativamente os vetores do plano de *1-vetores*. Da mesma forma, o espaço vetorial dos escalares reais será alternativamente denotado $\bigwedge^0(\mathbb{R}^2)$; e seus vetores podem alternativamente ser designados de *0-vetores*. Genericamente, os vetores de $\bigwedge^k(\mathbb{R}^2)$ são denominados *k-vetores*.

Como o produto geométrico de dois vetores do plano resulta na “soma” de duas quantidades de natureza distinta, um escalar e um bivector, tal “soma” não deve se tratar de uma soma em sua acepção usual. De fato, a soma de dois objetos, cada qual pertencente à um espaço vetorial diferente, trata-se de uma soma direta, que corresponde a um vetor do espaço vetorial resultante da soma direta dos espaços aos quais pertencem os dois objetos distintos supracitados.

A fim de construir uma estrutura algébrica fechada com relação ao produto geométrico, define-se o espaço vetorial $\bigwedge(\mathbb{R}^2)$, definido como a soma direta dos espaços da forma $\bigwedge^k(\mathbb{R}^2)$:

$$\bigwedge(\mathbb{R}^2) = \bigoplus_{k=0}^2 \bigwedge^k(\mathbb{R}^2) = \bigwedge^0(\mathbb{R}^2) \oplus \bigwedge^1(\mathbb{R}^2) \oplus \bigwedge^2(\mathbb{R}^2). \quad (2.10)$$

Seus elementos são denominados *multivetores*. O vetor nulo desse espaço vetorial, $0+\mathbf{o}+\mathbf{O}$, pode ser simplesmente denotado por 0 , o que geralmente não causa problemas. Um multivector arbitrário de $\bigwedge(\mathbb{R}^2)$ tem então a forma

$$A = a + (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) + a_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \quad (2.11)$$

sendo que $a, a_1, a_2, a_{12} \in \mathbb{R}$.

Definindo então o produto externo de um escalar α por um vetor do plano \mathbf{u} por $\alpha \wedge \mathbf{u} = \alpha \mathbf{u}$, e completando a extensão do produto externo para multivetores considerando-o bilinear e associativo, estabelece-se $(\bigwedge(\mathbb{R}^2), \wedge)$ como uma álgebra associativa sobre o corpo dos reais. Tal álgebra é denominada *álgebra exterior* ou *álgebra de Grassmann* associada ao \mathbb{R}^2 , a qual pode ser denotada por \mathcal{G}_2 . Com efeito, pode-se verificar, de acordo com o exposto nos textos de Elon Lages Lima (LIMA, 2014) e de Vaz Jr. e da Rocha Jr. (VAZ JR.; DA ROCHA JR., 2016), que $(\bigwedge(\mathbb{R}^2), \wedge)$ é uma álgebra de Grassmann.

Definindo o produto geométrico de um escalar por um multivector qualquer como a multiplicação do multivector pelo escalar e estendendo o produto geométrico para multivetores arbitrários considerando as propriedades de bilinearidade e associatividade, segue que o espaço vetorial $\bigwedge(\mathbb{R}^2)$ dotado do produto geométrico generalizado dessa forma determina uma álgebra associativa sobre o corpo dos reais. Tal álgebra é a denominada *álgebra geométrica do plano euclidiano*, a qual é denotada por \mathcal{Cl}_2 , por se tratar de um tipo especial de *álgebra de Clifford*.

2.1.2 Operacionalidade da Estrutura

Seja A_k um k -vetor arbitrário e $A = \sum_{k=0}^2 A_k$ um multivetor arbitrário.

Define-se a *projeção* de A sobre sua parte k -vatorial como

$$\langle A \rangle_k = A_k. \quad (2.12)$$

Como exemplo, considere o multivetor $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_1)$. Para tal multivetor, tem-se

$$\langle \varphi \rangle_0 = \frac{1}{2}, \quad \langle \varphi \rangle_1 = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 \quad \text{e} \quad \langle \varphi \rangle_2 = 0.$$

Em termos da projeção define-se a *involução graduada*, ou *graduação* do multivetor arbitrário A como

$$\widehat{A} = \sum_{k=0}^2 (-1)^k \langle A \rangle_k. \quad (2.13)$$

Também em termos da projeção, define-se a *reversão* ou o *reverso* do multivetor A como

$$\widetilde{A} = \sum_{k=0}^2 (-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)} \langle A \rangle_k. \quad (2.14)$$

E a operação de *conjugação* de um multivetor A , denotada por uma barra, é definida como a composição das operações de graduação de reversão:

$$\bar{A} = \widetilde{\widehat{A}} = \widehat{\widetilde{A}}. \quad (2.15)$$

Dessa forma, para A dado pela equação (2.11), tem-se:

$$\widehat{A} = a - (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) + a_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \quad \widetilde{A} = a + (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) - a_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$$

$$\text{e} \quad \bar{A} = a - (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) - a_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2.$$

Deixa-se nota que a operação de reversão tem esse nome porque reverte a ordem de um produto externo:

$$\widetilde{(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})} = -\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}.$$

Uma grande vantagem operacional da estrutura da álgebra geométrica reside na possibilidade de se definir o inverso de um vetor com relação ao produto geométrico, e até mesmo de um multivetor, em certos casos. De fato, ao efetuar-se o produto geométrico de um vetor \mathbf{u} diferente do vetor nulo por $\mathbf{u}/|\mathbf{u}|^2$ obtém-se o número 1. Assim, para $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, denota-se \mathbf{u}^{-1} , e denomina-se o *inverso* de \mathbf{u} , o vetor

$$\mathbf{u}^{-1} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}. \quad (2.16)$$

Para o bivector $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, por exemplo, pode-se definir o inverso como $(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^{-1} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$. Com efeito,

$$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1[\mathbf{e}_2(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)] = \mathbf{e}_1[(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1] = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = 1. \quad (2.17)$$

Entretanto, não é possível definir o inverso para qualquer multivetor. Como exemplo, o multivetor $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_1)$ não possui inverso.

Como um parêntese destaca-se que, devido a associatividade do produto geométrico, $\mathbf{u}(\mathbf{vw})$ e $(\mathbf{uv})\mathbf{w}$ podem ambos ser simplesmente escritos como \mathbf{uvw} . Dessa forma, pode-se deixar a associatividade implícita nos cálculos e fazer, por exemplo, o cálculo acima (equação (2.17)) de forma mais direta:

$$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = 1.$$

Para o multivetor arbitrário A , define-se a *norma* de A o escalar real $\|A\|$ tal que

$$\|A\|^2 = \langle \tilde{A}A \rangle_0 = \langle A\tilde{A} \rangle_0. \quad (2.18)$$

Observe que, para A dado por (2.11), tem-se

$$\|A\|^2 = a^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_{12}^2 \geq 0. \quad (2.19)$$

A definição de norma é feita de tal forma porque, se

$$\langle \tilde{A}A \rangle_0 = \tilde{A}A > 0, \quad (2.20)$$

então

$$\|A\|^2 = \tilde{A}A,$$

que implica

$$\frac{1}{\|A\|^2} \tilde{A}A = \left(\frac{\tilde{A}}{\|A\|^2} \right) A = 1,$$

o que induz a identificação de $\tilde{A}/\|A\|^2$ como o inverso de A :

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\|A\|^2}. \quad (2.21)$$

Mas ressalta-se que o inverso de A só está definido como acima se a condição dada por (2.20) é satisfeita.

Note que, com a definição de norma de um multivetor, tem-se $|\mathbf{u}| = \|\mathbf{u}\|$, para qualquer vetor \mathbf{u} .

Dados dois vetores não nulos \mathbf{u} e \mathbf{v} , tem-se que

$$\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|^2 = \widetilde{(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{u})(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}). \quad (2.22)$$

Como $\mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, segue que $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, que perante a equação anterior implica

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{v}\mathbf{u} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u}\mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{v}\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{v}\|\mathbf{u}\|^2\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{u}\mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Assim, como $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|^2 \geq 0$, segue

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2, \quad (2.24)$$

resultado conhecido como *desigualdade de Cauchy-Schwarz*. Esse resultado implica

$$-1 \leq \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \leq 1. \quad (2.25)$$

Essa expressão leva à definição do ângulo entre os vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} como o número θ tal que $0 \leq \theta \leq \pi$ e

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}. \quad (2.26)$$

Da equação (2.23) segue que

$$\left(\frac{\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right)^2 = 1 - \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right)^2,$$

que, perante a relação acima para $\cos(\theta)$, implica

$$\left(\frac{\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right)^2 = 1 - \cos^2(\theta) = \sin^2(\theta).$$

Como $0 \leq \theta \leq \pi$, tem-se $\sin(\theta) \geq 0$, de forma que da equação acima conclui-se que

$$\sin(\theta) = \frac{\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}. \quad (2.27)$$

A desigualdade (2.24) pode ser utilizada para se obter a desigualdade triangular. De fato,

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \leq \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2,$$

ou seja,

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|. \quad (2.28)$$

Se os vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} não nulos são paralelos, ou seja, o ângulo θ entre eles é nulo, tem-se equivalentemente $\sin(\theta) = 0$, e, da relação (2.27), isso equivale a $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| = 0$, que equivale a $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 0$, ou seja, $\frac{1}{2}(\mathbf{u}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{u}) = 0$, logo $\mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{v}\mathbf{u}$ também é condição de paralelismo dos vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} :

$$\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \iff \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{v}\mathbf{u}. \quad (2.29)$$

O mesmo corre quando $\theta = \pi$, quando também diz-se que os vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} são anti-paralelos. Já quando $\theta = \pi/2$, isto é, \mathbf{u} e \mathbf{v} são ortogonais, tem-se equivalentemente $\cos(\theta) = 0$, que, de acordo com (2.26), necessariamente e suficientemente $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, ou

seja, $\frac{1}{2}(\mathbf{uv} + \mathbf{vu}) = 0$, logo $\mathbf{uv} = -\mathbf{vu}$ também é condição de ortogonalidade dos vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} :

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \iff \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{uv} = -\mathbf{vu}. \quad (2.30)$$

2.1.2.1 Reflexões e Rotações

Considere novamente dois vetores não nulos \mathbf{u} e \mathbf{v} do plano euclidiano.

Seja

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right) \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} \quad (2.31)$$

a componente de \mathbf{v} paralela a \mathbf{u} , que corresponde à projeção de \mathbf{v} sobre \mathbf{u} ; e seja

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel} \quad (2.32)$$

a componente de \mathbf{v} ortogonal a \mathbf{u} .

É imediato que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$, e, das relações de paralelismo (2.29) e ortogonalidade (2.30), que $\mathbf{uv}_{\parallel} = \mathbf{v}_{\parallel}\mathbf{u}$ e $\mathbf{uv}_{\perp} = -\mathbf{v}_{\perp}\mathbf{u}$.

Tomando o produto geométrico à esquerda de \mathbf{v}_{\parallel} por \mathbf{u} , tem-se

$$\mathbf{uv}_{\parallel} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}^2,$$

que implica

$$\mathbf{uv}_{\parallel} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{vu} + \mathbf{uv}).$$

Tomando então o produto geométrico à esquerda dessa expressão com \mathbf{u} , tem-se

$$\|\mathbf{u}\|^2\mathbf{v}_{\parallel} = \frac{1}{2}(\mathbf{uvu} + \|\mathbf{u}\|^2\mathbf{v}).$$

Multiplicação agora a expressão resultante por $1/\|\mathbf{u}\|^2$, obtém-se

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{uvu} + \mathbf{v} \right),$$

que, levando em conta a definição do inverso de um vetor, pode ser escrita como

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \frac{1}{2} (\mathbf{v} + \mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{u}^{-1}). \quad (2.33)$$

Dessa expressão, e da definição de \mathbf{v}_{\perp} , pode-se escrever

$$\mathbf{v}_{\perp} = \frac{1}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{u}^{-1}). \quad (2.34)$$

Considere agora a transformação linear dada por

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}' = \mathbf{v}_{\perp} - \mathbf{v}_{\parallel}, \quad (2.35)$$

ou, equivalentemente, por

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}' = \mathbf{v} - 2\mathbf{v}_{\parallel}. \quad (2.36)$$

Tal transformação consiste no que se denomina a *reflexão* do vetor \mathbf{v} através da reta com vetor ortogonal \mathbf{u} , que segue ilustrada abaixo.

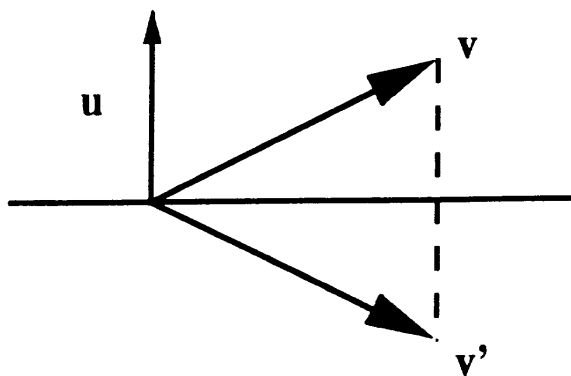


FIGURA 2.2 – Reflexão do vetor \mathbf{v} através da reta (ou hiperplano, no caso mais geral) com vetor ortogonal \mathbf{u} . Fonte: (VAZ JR., 2000).

Deixa-se nota que no caso tridimensional a reflexão de um vetor é feita através de um plano, e, de um modo geral, no caso n -dimensional, a reflexão é feita através de um hiperplano, um subespaço $(n - 1)$ -dimensional de \mathbb{R}^n .

Da expressão para \mathbf{v}_{\parallel} dada por (2.33) segue que

$$\mathbf{v}' = -\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{u}^{-1}. \quad (2.37)$$

Em particular, se o vetor \mathbf{u} é unitário, tem-se $\mathbf{u}\mathbf{u} = 1$, que implica $\mathbf{u}^{-1} = \mathbf{u}$, de forma

que, para esse caso particular,

$$\mathbf{v}' = -\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{u}. \quad (2.38)$$

Obtém-se assim, a expressão para o vetor obtido da reflexão do vetor \mathbf{v} através de uma reta de vetor ortogonal unitário \mathbf{u} .

Um resultado particular do *teorema de Cartan-Dieudonné*, o qual não será tratado aqui, permite expressar uma rotação em termos de reflexões; mais especificamente, “*a composição de duas reflexões resulta em uma rotação*”. Assim, uma rotação do vetor \mathbf{v} pode ser expressa por

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}' = -\mathbf{u}_1(-\mathbf{u}_2\mathbf{v}\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{v}\mathbf{u}_2\mathbf{u}_1, \quad (2.39)$$

sendo \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 vetores unitários.

De outra forma, pode-se escrever

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}' = R\mathbf{v}R^{-1}, \quad (2.40)$$

sendo $R = \mathbf{u}_1\mathbf{u}_2$. O objeto R é denominado um *rotor*, devido ao papel que desempenha na descrição de uma rotação.

Se θ é o ângulo entre os vetores unitários \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 , segue que

$$R = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 = \cos(\theta) + \sin(\theta)\mathbf{B}, \quad (2.41)$$

sendo \mathbf{B} um bivector unitário. Dessa igualdade segue que

$$R\tilde{R} = [\cos(\theta) + \sin(\theta)\mathbf{B}][\cos(\theta) - \sin(\theta)\mathbf{B}] = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\mathbf{B}^2 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1,$$

logo,

$$\tilde{R} = R^{-1}, \quad (2.42)$$

de modo que uma rotação pode ser escrita

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}' = R\mathbf{v}\tilde{R}. \quad (2.43)$$

Há duas possibilidades para o bivector unitário \mathbf{B} presente na expressão para R : $\mathbf{B} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ ou $\mathbf{B} = -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1$. Essas duas possibilidades podem ser simuladas considerando que θ é tal que $0 \leq \theta \leq 2\pi$, de modo que, tomando arbitrariamente $\mathbf{B} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$, tem-se, para $0 \leq \theta \leq \pi$, $\sin(\theta)\mathbf{B} = \alpha \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$, com $\alpha \geq 0$, e para $\pi \leq \theta \leq 2\pi$, $\sin(\theta)\mathbf{B} = -\alpha \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \alpha \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1$. Entretanto, verifica-se que a escolha adequada do bivector unitário para a descrição de uma rotação no sentido anti-horário é $\mathbf{B} = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1$. De fato, sendo $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{v}' = v'_1 \mathbf{e}_1 + v'_2 \mathbf{e}_2$ tais que $\mathbf{v}' = R\mathbf{v}\tilde{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= [\cos(\theta) + \sin(\theta)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1](v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2)[\cos(\theta) - \sin(\theta)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1] \\ &= [\cos(\theta) + \sin(\theta)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1] \left\{ [v_1 \cos(\theta) - v_2 \sin(\theta)]\mathbf{e}_1 + [v_2 \cos(\theta) + v_1 \sin(\theta)]\mathbf{e}_2 \right\} \\ &= \left\{ v_1 [\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)] - v_2 [2 \sin(\theta) \cos(\theta)] \right\} \mathbf{e}_1 + \left\{ v_2 [\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)] + v_1 [2 \sin(\theta) \cos(\theta)] \right\} \mathbf{e}_2 \\ &= [v_1 \cos(2\theta) - v_2 \sin(2\theta)]\mathbf{e}_1 + [v_2 \cos(2\theta) + v_1 \sin(2\theta)]\mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Esse resultado pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

que mostra que $\mathbf{v}' = R\mathbf{v}\tilde{R}$ expressa de fato uma rotação do vetor \mathbf{v} no sentido anti-horário, porém, uma rotação por um ângulo 2θ . Dessa forma, para descrever uma rotação por um ângulo θ deve-se tomar

$$R = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1. \quad (2.46)$$

O rotor R pode ser escrito de outra forma definindo-se a exponencial de um multivector genérico A por

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots, \quad (2.47)$$

em que $A^0 = 1$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$, etc. Dessa forma, utilizando as expressões como séries de potências das funções seno e cosseno na expressão para R acima, e levando em conta que $(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)^2 = -1$, tem-se:

$$\begin{aligned}
R = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\theta/2)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\theta/2)^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)^{2n}(\theta/2)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)^{2n}(\theta/2)^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)^{2n}(\theta/2)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)^{2n+1}(\theta/2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\theta/2)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\theta/2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\theta/2)^n}{n!}. \tag{2.48}
\end{aligned}$$

Assim, pode-se escrever

$$R = \exp\left(\frac{1}{2}\theta\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\right). \tag{2.49}$$

É interessante salientar que para a descrição de uma rotação no sentido horário utiliza-se a expressão $R = \exp(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\theta/2)$ para o rotor.

Uma observação interessante é que R e $-R$ descrevem a mesma rotação (ou melhor, o resultado da atuação dos dois rotores é igual):

$$(-R)\mathbf{v}(\widetilde{-R}) = R\mathbf{v}\widetilde{R}. \tag{2.50}$$

Esse fato pode ser entendido observando-se que a rotação de um vetor por um ângulo ϕ no sentido anti-horário tem o mesmo resultado que a rotação desse vetor pelo ângulo $2\pi - \phi$ no sentido horário. Com efeito, sendo $R = \exp(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\phi/2)$ e $R' = \exp[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2(2\pi - \phi)/2]$, tem-se

$$R' = \exp[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2(2\pi - \phi)/2] = \exp(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\pi)\exp(-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\phi/2) = (-1)\exp(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\phi/2) = -R.$$

2.1.2.2 A Sub-Álgebra Par \mathcal{Cl}_2^+ , Spinors e a Álgebra dos Números Complexos

Seja \mathcal{Cl}_2^+ o conjunto dos multivetores de \mathcal{Cl}_2 com *graduação par*, ou seja, o conjunto dos multivetores A tais que $\widehat{A} = A$. Um multivetor A de \mathcal{Cl}_2^+ consiste então na soma de um escalar com um bivector, ou seja, A é da forma

$$A = a + a_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2,$$

sendo $a, a_{12} \in \mathbb{R}$.

Dados $A = a + a_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ e $B = b + b_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ de \mathcal{Cl}_2^+ , tem-se que

$$AB = (a + a_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)(b + b_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = (ab - a_{12}b_{12}) + (ab_{12} + a_{12}b)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \quad (2.51)$$

de modo que $AB \in \mathcal{Cl}_2^+$. Assim, o espaço vetorial formado pelos multivetores de \mathcal{Cl}_2^+ munido do produto geométrico tem as propriedades de uma álgebra (fechamento com relação ao produto e bilinearidade do produto), logo corresponde a uma sub-álgebra de \mathcal{Cl}_2 , a *sub-álgebra par* \mathcal{Cl}_2^+ .

Observe que os rotores introduzidos anteriormente são elementos de \mathcal{Cl}_2^+ , embora nem todos os elementos dessa álgebra sejam rotores. Mas repare que os elementos de \mathcal{Cl}_2^+ podem ser escrito na forma genérica

$$\psi = \rho \cos(\phi) + \rho \sin(\phi)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \quad (2.52)$$

ou, em termos do operador exponencial,

$$\psi = \rho \exp(\phi\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2), \quad (2.53)$$

sendo ρ e ϕ escalares reais. Assim, um elemento da sub-álgebra par \mathcal{Cl}_2^+ consiste no produto de um escalar por um rotor de \mathcal{Cl}_2 . Um tal elemento, ao atuar sobre um vetor \mathbf{u} por meio de $\psi\mathbf{u}\tilde{\psi}$ produz não somente uma rotação do vetor \mathbf{u} , mas também uma “dilatação” (acrécimo de comprimento, ou decréscimo caso $\rho < 1$), como resultado do fator ρ . O objeto ψ é um tipo especial do que se conhece por *spinor*.

A expressão adequada para que o spinor introduzido acima represente uma rotação por um ângulo ϕ no sentido anti-horário e uma dilatação pelo fator ρ é

$$\psi = \sqrt{\rho} \exp\left(\frac{1}{2}\phi\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\right) = \sqrt{\rho}R, \quad (2.54)$$

sendo $R = \exp(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\phi/2)$. De fato, dado um vetor \mathbf{u} e ψ dado pela equação anterior, tem-se

$$\psi\mathbf{u}\tilde{\psi} = (\sqrt{\rho}R)\mathbf{u}(\widetilde{\sqrt{\rho}R}) = \rho R\mathbf{u}\tilde{R}.$$

As expressões (2.52) e (2.53) para os spinores de \mathcal{Cl}_2^+ e o fato de que $(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)^2 = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = -1$, além da interpretação geométrica dos spinores, sugerem alguma relação entre a subálgebra par \mathcal{Cl}_2^+ e a álgebra dos números complexos. E de fato há. Como os números complexos, os elementos de \mathcal{Cl}_2^+ podem ser escritos na forma genérica

$$X = x_1 + x_2\mathbf{I},$$

sendo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{I} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ satisfazendo $\mathbf{I}^2 = -1$. E como mostra (2.51), o produto geométrico de elementos de \mathcal{Cl}_2^+ tem a mesma forma do produto de números complexos: dados $X = x_1 + x_2\mathbf{I}$ e $Y = y_1 + y_2\mathbf{I}$, tem-se

$$XY = (x_1 + x_2\mathbf{I})(y_1 + y_2\mathbf{I}) = (x_1y_1 - x_2y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\mathbf{I}.$$

Verifica-se então que a sub-álgebra par \mathcal{Cl}_2^+ é isomorfa à álgebra dos números complexos, por meio da identificação de $\mathbf{I} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ com a unidade imaginária i .

Como comentário a parte, os bivectores no contexto da álgebra geométrica do plano euclidiano são por vezes chamados *pseudo-escalares*, por comutarem com escalares, por anti-comutarem com vetores e pelo seu espaço ser unidimensional, como o dos escalares. $\mathbf{I} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ é então denominado o *pseudo-escalar unitário*.

Observe que o pseudo-escalar unitário, assim como a unidade imaginária, gera rotações de vetores por 90° quando se toma o produto dele pelo vetor, por exemplo: $\mathbf{I}\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2$. Entretanto, embora se utilize números complexos para representar vetores do plano, não se utiliza elementos de \mathcal{Cl}_2^+ para o mesmo fim. Mas pode-se estabelecer um bijeção entre tais elementos e os vetores do plano. De fato, dado o vetor genérico do plano $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, tem-se $\mathbf{e}_1\mathbf{x} = x_1 + x_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, que é um elemento de \mathcal{Cl}_2^+ . Verifica-se então que a aplicação $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{e}_1\mathbf{x}$ é uma bijeção entre os conjuntos \mathbb{R}^2 e \mathcal{Cl}_2^+ .

Considere $X = x_1 + x_2\mathbf{I}$, $Y = y_1 + y_2\mathbf{I}$, $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2$, de modo que se tem $X = \mathbf{e}_1\mathbf{x}$ e $Y = \mathbf{e}_1\mathbf{y}$. Observe que a operação de reversão, e também a de conjugação, corresponde à conjugação complexa, $\tilde{X} = x_1 - x_2\mathbf{I}$, e que

$$\tilde{X}Y = \mathbf{x}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathbf{y},$$

que atesta uma correspondência entre a operação de produto de números complexos e a operação de produto geométrico de vetores do plano euclidiano.

2.2 A Álgebra Geométrica do Espaço Euclidiano

2.2.1 Construção da Estrutura

Considere agora o espaço vetorial usual associado a \mathbb{R}^3 , e, como no caso bidimensional, deixe que seus elementos sejam denotados por letras latinas em negrito: \mathbf{u} , \mathbf{v} , etc. Sua base canônica será denotada por $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ (em que fica subentendida a ordenação da base), de tal forma que se escreve, genericamente, $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$, etc. A interpretação desse espaço será a interpretação geométrica usual: \mathbb{R}^3 corresponde ao espaço físico tridimensional, e suas ternas ordenadas representam vetores de tal espaço (segmentos de reta orientados).

Define-se, de forma análoga ao caso bidimensional, a forma bilinear $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}, \quad \text{em que } i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.55)$$

um produto interno, o qual corresponde ao produto interno usual de vetores do espaço tridimensional, denominado também de produto escalar. \mathbb{R}^3 munido de tal produto interno tem o status de *espaço euclidiano tridimensional*, que geralmente é chamado apenas de *espaço euclidiano*.

Como no caso da álgebra geométrica do plano euclidiano, a *álgebra geométrica do espaço euclidiano* é determinada por um espaço construído a partir do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 munido do produto geométrico, o qual neste contexto também será denotado por justaposição, ou seja, $\mathbf{u}\mathbf{v}$ denotará o produto geométrico dos vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} de \mathbb{R}^3 . Como no caso anterior, a construção da estrutura será feita de forma gradativa.

A propriedade fundamental do produto geométrico é dada por

$$\mathbf{u}\mathbf{u} = g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, \quad (2.56)$$

que pode ser escrita

$$\mathbf{u}^2 = |\mathbf{u}|^2, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, \quad (2.57)$$

em que $\mathbf{u}^2 = \mathbf{u}\mathbf{u}$, e $|\cdot|$ é a norma induzida pelo produto interno g , ou seja, o módulo usual de um vetor do espaço euclidiano.

Escrevendo $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$, a equação acima pode ser escrita em termos de componentes como

$$(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3)(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2.$$

Agora, como no caso bidimensional, novamente considera-se a bilinearidade do produto geométrico, que é condição necessária para o produto de uma álgebra qualquer. Aplicando então tal propriedade na expressão acima, obtém-se

$$u_1^2 \mathbf{e}_1^2 + u_2^2 \mathbf{e}_2^2 + u_3^2 \mathbf{e}_3^2 + u_1 u_2 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) + u_1 u_3 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1) + u_2 u_3 (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2.$$

Para que essa equação seja satisfeita, deve-se ter, necessariamente:

$$\mathbf{e}_i^2 = 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i, \quad \text{sendo} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad \text{e} \quad i \neq j. \quad (2.58)$$

Essas relações determinam o produto geométrico da álgebra geométrica do espaço euclidiano. Aplicando-as no cálculo do produto geométrico de dois vetores arbitrários $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\mathbf{v} &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3)(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3) \\ &= u_1v_1\mathbf{e}_1^2 + u_1v_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + u_1v_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + u_2v_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + u_2v_2\mathbf{e}_2^2 + u_2v_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + u_3v_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + u_3v_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + u_3v_3\mathbf{e}_3^2 \\ &= (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Como no caso bidimensional, o primeiro termo do segundo membro da expressão obtida é um escalar, o qual corresponde ao produto escalar dos vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} , e os demais termos, não se tratam de escalares nem de vetores, se considera-se o produto geométrico associativo, como na primeira construção (os mesmos contra-exemplos podem ser tomados para se demonstrar esse fato). Tal soma de termos são combinações de objetos que no caso bidimensional foram interpretados como representando paralelogramos orientados. Neste caso, a mesma interpretação pode ser utilizada para cada termo dessa combinação. Por exemplo, o termo $(u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$ representa o paralelogramo orientado determinado pelos vetores $(u_1\mathbf{e}_1 + u_3\mathbf{e}_3)$ e $(v_1\mathbf{e}_1 + v_3\mathbf{e}_3)$, os quais pertencem ao plano determinado pelos vetores \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_3 . A soma dos termos da forma $(u_iv_j - u_jv_i)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ deve então representar uma combinação dos paralelogramos orientados que eles representam. Considerando então cada componente desta combinação em separado em termos do produto externo, escrevendo à parte o termo $(u_iv_j - u_jv_i)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ como $(u_iv_j - u_jv_i)\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$, e considerando uma extensão natural do produto externo para o caso tridimensional, observa-se que

$$(u_1\mathbf{e}_1+u_2\mathbf{e}_2+u_3\mathbf{e}_3)\wedge(v_1\mathbf{e}_1+v_2\mathbf{e}_2+v_3\mathbf{e}_3) = (u_1v_2-u_2v_1)\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2+(u_1v_3-u_3v_1)\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_3+(u_2v_3-u_3v_2)\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3.$$

Logo, a combinação de termos em questão é identificada como o produto externo $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, o qual deve representar o paralelogramo orientado determinado pelos vetores do espaço \mathbf{u} e \mathbf{v} . Da mesma forma que no caso bidimensional, pode-se verificar que o conjunto de objetos dessa forma munido da operação de soma desses objetos e multiplicação de um tal objeto por escalar real tem uma estrutura de espaço vetorial, o espaço vetorial dos bivectores do espaço euclidiano. Tal espaço vetorial é denotado $\bigwedge^2(\mathbb{R}^3)$.

Como no caso bidimensional, o fato de se poder escrever o produto geométrico $\mathbf{u}\mathbf{v}$ como a soma de uma parte simétrica e uma parte anti-simétrica como

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{u}) + \frac{1}{2}(\mathbf{u}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{u}) \quad (2.60)$$

permite identificar a parte simétrica com o produto escalar $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, redefinindo-o em termos do produto geométrico como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{u}). \quad (2.61)$$

E novamente a parte anti-simétrica do produto $\mathbf{u}\mathbf{v}$,

$$(u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3,$$

definida como o produto externo dos vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} , denotado por $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, é reescrita em termos do produto geométrico como

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{u}) = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}. \quad (2.62)$$

Com essas definições, pode-se escrever:

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}. \quad (2.63)$$

No caso bidimensional, ao efetuar o produto geométrico de um vetor do plano euclidiano com um bivector obtinha-se um outro vetor do plano euclidiano, mas no caso tridimensional isso nem sempre acontece. Por exemplo, ao efetuar o produto geométrico do vetor \mathbf{e}_1 com o bivector $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, obtém-se $\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)$, que, pela associatividade do produto geométrico deve equivaler a $(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_3$, ou simplesmente $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$. Objeto tal

que, por ora, carece de interpretação geométrica. Entretanto, de maneira análoga ao caso dos paralelogramos orientados do plano, que correspondiam a um fragmento do plano, pode-se identificar o objeto $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ com um elemento de volume orientado do espaço tridimensional. A orientação seria indicada pela ordem do produto geométrico. Como exemplo, segue ilustrado o volume orientado dado por $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.

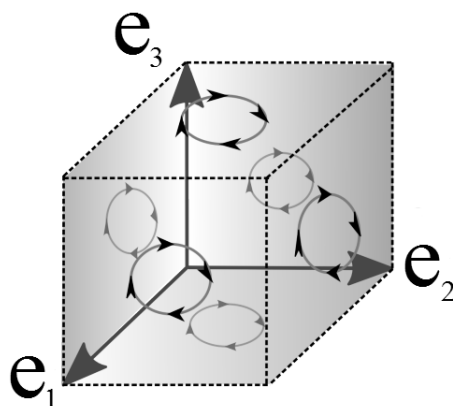


FIGURA 2.3 – Elemento de volume orientado do espaço tridimensional. Fonte: (LOPES; LOPES, 2016) (figura alterada).

Como não há mais nenhuma combinação diferente de produtos geométricos envolvendo os vetores unitários \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 , exceto pela ordem do produto, que determina a orientação do elemento de volume, qualquer outro volume deve ser representado por $\alpha\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, sendo α um escalar real. A combinação de objetos da forma $\alpha\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ por meio de soma e multiplicação por número real resulta sempre em objetos dessa forma, e é fácil verificar que o conjunto desses objetos munido das operações supracitadas satisfazem as propriedades de um espaço vetorial. Tal espaço vetorial é denotado $\bigwedge^3(\mathbb{R}^3)$ e seus vetores são denominados *3-vetores*, ou *trivetores*, ou ainda *pseudo-escalares*, nesse contexto, já que o espaço que formam é unidimensional e eles comutam com escalares, vetores e bivectores. Ao pseudo-escalar unitário $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ reserva-se uma notação especial: $\mathbf{I} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. De um modo geral, verifica-se que, dados três vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} não nulos e não necessariamente ortogonais, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ é um trivetor, o qual representa um paralelepípedo orientado determinado pelos vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} , como o ilustrado na figura abaixo.

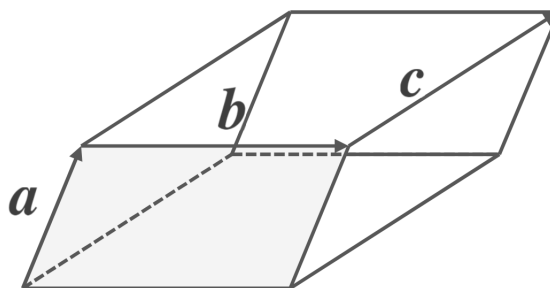


FIGURA 2.4 – Paralelepípedo orientado. Fonte: <http://geometry.mrao.cam.ac.uk/>

Seguindo a lógica da notação empregada no caso bidimensional, o espaço vetorial dos escalares, ou 0-vetores, é denotado $\bigwedge^0(\mathbb{R}^3)$, e o espaço vetorial dos bivectores, é denotado por $\bigwedge^2(\mathbb{R}^3)$. Note que, agora, $\dim[\bigwedge^2(\mathbb{R}^3)] = 3$.

Como no caso bidimensional, para construir uma estrutura algébrica fechada com relação ao produto geométrico, define-se o espaço vetorial $\bigwedge(\mathbb{R}^3)$, definido como a soma direta dos espaços da forma $\bigwedge^k(\mathbb{R}^3)$:

$$\bigwedge(\mathbb{R}^3) = \bigoplus_{k=0}^3 \bigwedge^k(\mathbb{R}^3) = \bigwedge^0(\mathbb{R}^3) \oplus \bigwedge^1(\mathbb{R}^3) \oplus \bigwedge^2(\mathbb{R}^3) \oplus \bigwedge^3(\mathbb{R}^3). \quad (2.64)$$

Seus elementos são denominados *multivetores*. O vetor nulo desse espaço vetorial é simplesmente denotado por 0, o que geralmente não causa confusão. Um multivetor arbitrário de $\bigwedge(\mathbb{R}^3)$ tem então a forma

$$A = a + (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) + (a_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + a_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) + a_{123}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \quad (2.65)$$

sendo que $a, a_i, a_{ij}, a_{ijk} \in \mathbb{R}$, com $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$.

Definindo o produto externo de um escalar α por um vetor do espaço \mathbf{u} por $\alpha \wedge \mathbf{u} = \alpha \mathbf{u}$, e completando a extensão do produto externo para multivetores arbitrários considerando-o, além de bilinear, associativo, estabelece-se $(\bigwedge(\mathbb{R}^3), \wedge)$ como uma álgebra associativa sobre o corpo dos reais, a *álgebra exterior* ou *álgebra de Grassmann* associada ao \mathbb{R}^3 , a qual é denotada por \mathcal{G}_3 .

Definindo então o produto geométrico de um escalar por um multivetor qualquer como a multiplicação do multivetor pelo escalar e estendendo o produto geométrico para multivetores arbitrários considerando as propriedades de bilinearidade e associatividade, segue que o espaço vetorial $\bigwedge(\mathbb{R}^3)$ dotado do produto geométrico generalizado dessa forma determina uma álgebra associativa sobre o corpo dos reais, a *álgebra geométrica do espaço euclidiano*, a qual é denotada por \mathcal{Cl}_3 .

2.2.2 Operacionalidade da Estrutura

Dado um k -vetor arbitrário A_k , de forma que $A = \sum_{k=0}^3 A_k$ é um multivetor arbitrário, define-se as operações de projeção, graduação, reversão e conjugação para multivetores de \mathcal{Cl}_3 da mesma forma que no caso bidimensional, pelas equações (2.12), (2.13), (2.14) e (2.15), respectivamente. Dessa forma, tem-se:

$$\widehat{A} = A_0 - A_1 + A_2 - A_3, \quad \widetilde{A} = A_0 + A_1 - A_2 - A_3 \quad \text{e} \quad \bar{A} = A_0 - A_1 - A_2 + A_3.$$

A norma de um multivetor, no contexto da álgebra geométrica do espaço euclidiano, é definida da mesma forma que no caso do plano euclidiano (vide (2.18)). Também da mesma forma é definido o inverso de um multivetor, pela equação (2.21), valendo a mesma condição de existência, (2.20).

A desigualdade de Cauchy-Schwarz (2.24) é um resultado geral no que diz respeito à espaços euclidianos, que vale inclusive no caso do espaço euclidiano tridimensional. O mesmo é dito em relação à desigualdade triangular, (2.28).

O ângulo entre dois vetores de \mathbb{R}^3 é definido da mesma forma que o ângulo entre dois vetores de \mathbb{R}^2 , por (2.26). As condições de paralelismo e ortogonalidade também são as mesmas no caso tridimensional (cf. (2.29) e (2.30)).

Pode-se generalizar a relação (2.63), para que se escreva de forma decomposta o produto geométrico de um vetor \mathbf{u} por um multivetor A , ambos arbitrários, como

$$\mathbf{u}A = \mathbf{u} \cdot A + \mathbf{u} \wedge A, \quad (2.66)$$

tal que

$$\mathbf{u} \cdot A = \frac{1}{2} (\mathbf{u}A - \widehat{A}\mathbf{u}) \quad \text{e} \quad \mathbf{u} \wedge A = \frac{1}{2} (\mathbf{u}A + \widehat{A}\mathbf{u}), \quad (2.67)$$

em que, agora, $\mathbf{u} \cdot A$ tem a designação de *contração à esquerda* do multivetor A pelo vetor \mathbf{u} , porque, se $A = A_k$ é um k -vetor, então $\mathbf{u} \cdot A = \mathbf{u} \cdot A_k$ é um $(k-1)$ -vetor. O outro produto ainda é denominado de produto externo/exterior/cunha. Pode-se escrever ainda

$$A\mathbf{u} = A \cdot \mathbf{u} + A \wedge \mathbf{u}, \quad (2.68)$$

sendo que

$$A \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2} (A\mathbf{u} - \mathbf{u}\widehat{A}) \quad \text{e} \quad A \wedge \mathbf{u} = \frac{1}{2} (A\mathbf{u} + \mathbf{u}\widehat{A}), \quad (2.69)$$

em que, neste caso, $A \cdot \mathbf{u}$ tem a designação de *contração à direita* do multivetor A pelo vetor \mathbf{u} . Observe que nem a operação de contração nem o produto externo generalizado

comutam ou anti-comutam (em geral). O que se tem, em geral, é que

$$\mathbf{u} \cdot A = -\widehat{A} \cdot \mathbf{u} \quad \text{e} \quad \mathbf{u} \wedge A = \widehat{A} \wedge \mathbf{u}, \quad (2.70)$$

o que pode ser obtido observando que $\widehat{A} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\widehat{A}\mathbf{u} - \mathbf{u}A)$ e $\widehat{A} \wedge \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\widehat{A}\mathbf{u} + \mathbf{u}A)$, e então, de acordo com (2.67), ter em conta que $\mathbf{u} \cdot A + \widehat{A} \cdot \mathbf{u} = 0$ e $\mathbf{u} \wedge A - \widehat{A} \wedge \mathbf{u} = 0$.

2.2.2.1 Dualidade Hodge

Existe um isomorfismo entre as subestruturas de uma álgebra de Clifford, conhecido como *isomorfismo Hodge* ou *dualidade Hodge*, decorrente da estrutura multivetorial que serve de substrato para a álgebra de Clifford, como uma herança da álgebra de Grassmann subjacente. Tal isomorfismo segue descrito.

Seja $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. O *isomorfismo Hodge* entre $\bigwedge^k(\mathbb{R}^3)$ e $\bigwedge^{(3-k)}(\mathbb{R}^3)$ é dado pelo *operador estrela de Hodge*, que faz corresponder um k -vetor A_k com um $(3-k)$ -vetor $\star A_k$ dado por

$$\star A_k = \widetilde{A}_k \mathbf{I}, \quad (2.71)$$

sendo \mathbf{I} o pseudo-escalar unitário de \mathcal{Cl}_3 . O $(3-k)$ -vetor $\star A_k$ é denominado o *dual Hodge* do k -vetor A_k .

Assim, no contexto da álgebra geométrica do espaço euclidiano, o dual Hodge de um escalar é um pseudo-escalar, e vice-versa, e o dual Hodge de um vetor é um bivector (que por tal, é também denominado um *pseudo-vetor*), e vice-versa. Em particular, tem-se as relações da tabela que segue.

$\star 1 = \mathbf{I} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$
$\star \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$
$\star \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1$
$\star \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$
$\star(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3$
$\star(\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$
$\star(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1$
$\star \mathbf{I} = \star(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) = 1$

No caso da álgebra geométrica do plano euclidiano, o dual Hodge de um k -vetor também é dado pela equação (2.71), porém com $\mathbf{I} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$. Neste caso, tem-se: $\star 1 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$, $\star \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$, $\star \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1$ e $\star(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) = 1$.

2.2.2.2 Álgebra Vetorial de Gibbs-Heaviside *versus* Álgebra de Clifford

A *álgebra vetorial de Gibbs-Heaviside* é uma ferramenta extremamente utilizada e difundida no âmbito da Física, que surgiu como uma tentativa de Josiah Willard Gibbs (e, independentemente, como fruto de trabalho de Oliver Heaviside) de unificar a estrutura das álgebras de Grassmann com a álgebra dos quatérnions de Hamilton. A álgebra de Gibbs-Heaviside é fundamentada no tão conhecido *produto vetorial*, o qual é um produto de vetores não comutativo e não associativo definido restritamente para o espaço euclidiano tridimensional. O produto vetorial pode ser definido como segue. Dados os vetores $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$, o produto vetorial de \mathbf{u} por \mathbf{v} é o vetor dado por

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{e}_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_3. \quad (2.72)$$

É comum se utilizar da notação $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$ e $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$, proveniente dos quatérnions, e definir o produto vetorial como sendo tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j} \end{array} \right\}, \quad (2.73)$$

em que se verifica uma completa analogia com as relações (1.2), provenientes das relações (1.1) que determinam o produto quaterniônico. Tomando o produto vetorial dos vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} , considerando o produto bilinear e então aplicando as relações acima, obtém-se (2.72).

Essa definição se mostra incoerente quando se observa que qualquer vetor se transforma no seu oposto sob um inversão espacial, mas não o produto vetorial de dois vetores. De fato, sendo $\mathbf{e}_i \mapsto -\mathbf{e}_i$ a transformação linear denominada inversão espacial, em que $i \in \{1, 2, 3\}$, um vetor arbitrário \mathbf{u} transforma-se da forma $\mathbf{u} \mapsto -\mathbf{u}$ sob a transformação de inversão espacial, entretanto, observa-se que o produto vetorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ transforma-se da forma $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \mapsto (-\mathbf{u}) \times (-\mathbf{v}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ sob a inversão espacial. Assim, o produto vetorial de dois vetores não goza de uma propriedade satisfeita por qualquer outro vetor, não podendo ser tratado como tal. Historicamente, esse fato fez com que se denominasse $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ de um pseudo-vetor. Portanto, (\mathbb{R}^3, \times) não satisfaz a propriedade básica de uma álgebra de fechamento com relação ao produto. Além disso, o resultado do produto misto $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$, o qual é um escalar, sofre uma mudança de sinal sob uma inversão espacial, o que fez com que fosse denominado um pseudo-escalar. Tem-se então uma inconsistência na definição usual de produto vetorial: o produto vetorial não resulta num vetor, embora a expressão do membro direito da equação (2.72) seja claramente um vetor. Não obstante, dados os vetores $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$, tem-se

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3,$$

de modo que, conforme a definição da operação de dualidade Hodge,

$$\star(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{e}_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_3,$$

em que a expressão do membro direito é a mesma expressão no membro direito de (2.72), além disso, tanto o membro esquerdo quanto o direito dessa equação correspondem a vetores (o dual Hodge de um bivector é um vetor); de forma que, é natural definir o produto vetorial de dois vetores por

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \star(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = -(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})\mathbf{I} = -\mathbf{I}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}). \quad (2.74)$$

Observe que $\star(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ de fato comporta-se como um vetor sob uma transformação de inversão espacial. Com efeito, $\mathbf{I} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ se transforma da forma $\mathbf{I} \mapsto -\mathbf{I}$ sob uma inversão espacial, e daí, $\star(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ se transforma da forma

$$\star(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = -(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})\mathbf{I} \quad \mapsto \quad -[(-\mathbf{u}) \wedge (-\mathbf{v})](-\mathbf{I}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})\mathbf{I} = -\star(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}).$$

Algumas quantidades físicas são usualmente descritas em termos do produto vetorial, tal como o momento angular, que não muda de sinal sob uma inversão espacial, o que permite chamar tal quantidade de um pseudo-vetor. Entretanto, é mais natural descrever o momento angular em termos do produto externo, como o bivector $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$, já que é uma quantidade que está naturalmente relacionada com áreas, e não com comprimentos. Esta definição está em acordo com a descrição do momento angular como um tensor anti-simétrico $L_{ij} = -L_{ji}$, já que pode-se escrever, de maneira genérica,

$$\mathbf{L} = L_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + L_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + L_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \sum_{i < j \text{ e } i,j \in \{1,2,3\}} L_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j. \quad (2.75)$$

Neste cenário, o vetor momento angular \mathbf{l} é descrito como o dual Hodge do bivector momento angular: $\mathbf{l} = \star\mathbf{L} = \star(\mathbf{r} \wedge \mathbf{p})$.

Não bastasse o fato de que a estrutura de Gibbs-Heaviside apresenta incoerências estruturais, que inclusive não permitem caracterizá-la como uma álgebra, tal estrutura tem seu campo de atuação restrito ao espaço \mathbb{R}^3 , enquanto álgebras geométricas podem ser definidas sobre um espaço euclidiano de qualquer dimensão, como nos casos do plano e do espaço tridimensional, e inclusive para *espaços pseudo-euclidianos*, como é apresentado

no capítulo posterior. As álgebras geométricas ainda são casos particulares de álgebras de Clifford, que podem ser construídas sobre espaços vetoriais arbitrários, mas que não são tratadas neste trabalho com tal nível de generalidade.

2.2.2.3 A Sub-Álgebra Par \mathcal{Cl}_3^+ e a Álgebra dos Quatérnions

Como um primeiro apontamento observa-se que a semelhança entre as relações (2.73) e (1.2) não garante equivalência entre o sistema de Gibbs-Heaviside e álgebra dos quatérnions, já que o produto quaterniônico também se define por $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ (de um modo geral ele é definido pelas relações (1.1)), enquanto que no âmbito da “álgebra” de Gibbs-Heaviside tem-se $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{o}$. Para contornar essa incompatibilidade, se utiliza, no âmbito do sistema de Gibbs-Heaviside, do produto escalar; considera-se as relações $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$ com o sinal oposto e identifica-se vetores do espaço com quatérnions puros, obtendo-se o análogo do produto quaterniônico dentro do sistema de Gibbs-Heaviside,

$$\mathbf{q}\mathbf{p} = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{q} \times \mathbf{p}, \quad (2.76)$$

para dois vetores \mathbf{q} e \mathbf{p} dados (compare com a equação (1.4)). Entretanto, essa identificação, que tem por base a correspondência entre $\{\mathbf{i} = \mathbf{e}_1, \mathbf{j} = \mathbf{e}_2, \mathbf{k} = \mathbf{e}_3\}$ e $\{i, j, k\}$, só se permite entre vetores do espaço tridimensional e quatérnions puros. Acontece que os quatérnions em geral tem uma natureza tal que a correspondência que se mostra correta é a entre i, j e k e os bivectores unitários, como se observará a seguir.

Seja \mathcal{Cl}_3^+ o conjunto dos multivetores da álgebra geométrica do espaço euclidiano com graduação par, ou seja,

$$\mathcal{Cl}_3^+ = \{A \mid A \in \mathcal{Cl}_3 \text{ e } \widehat{A} = A\}. \quad (2.77)$$

Assim, um elemento de \mathcal{Cl}_3^+ é da forma

$$A = a + a_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3. \quad (2.78)$$

Verifica-se que, dados A e B de \mathcal{Cl}_3^+ , $AB \in \mathcal{Cl}_3^+$ (como no caso de \mathcal{Cl}_2^+), de modo que, o espaço vetorial composto pelos multivetores de \mathcal{Cl}_3^+ munido do produto geométrico corresponde a uma álgebra, e portanto é uma sub-álgebra de \mathcal{Cl}_3 , que é denominada *sub-álgebra par* \mathcal{Cl}_3^+ .

Considere a seguinte notação: $\mathcal{I} = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2$, $\mathcal{J} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$ e $\mathcal{K} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$. Dessa forma, o

elemento genérico A de \mathcal{Cl}_3^+ pode ser escrito

$$A = a - a_{23}\mathcal{I} - a_{31}\mathcal{J} - a_{12}\mathcal{K}, \quad (2.79)$$

e sem dificuldade nota-se que é satisfeito:

$$\mathcal{I}^2 = \mathcal{J}^2 = \mathcal{K}^2 = \mathcal{I}\mathcal{J}\mathcal{K} = -1 \quad (2.80)$$

(compare com as relações (1.1)). Assim, nota-se que \mathcal{Cl}_3^+ é uma álgebra isomorfa à álgebra dos quatérnions por meio da identificação dos bivectores unitários \mathcal{I} , \mathcal{J} e \mathcal{K} com as unidades quaterniônicas i , j e k , respectivamente. Uma vez que

$$\mathcal{I} = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 = -\star\mathbf{e}_1, \quad \mathcal{J} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = -\star\mathbf{e}_2 \quad \text{e} \quad \mathcal{K} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = -\star\mathbf{e}_3, \quad (2.81)$$

segue que (i, j, k) identifica-se com $-\star(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, e não com $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ como sugere a “álgebra” de Gibbs-Heaviside.

Dessa forma, observa-se que a síntese da álgebra de Grassmann (sobre \mathbb{R}^3) com a álgebra dos quatérnions de Hamilton é realizada adequadamente pela álgebra geométrica do espaço euclidiano, de Clifford. O sistema de Gibbs-Heaviside, além de não realizar tal síntese, apresenta inconsistências estruturais internas e necessita de estruturas complementares para ampliar sua aplicabilidade, como é o caso quando se utiliza da álgebra matricial para se descrever rotações de vetores.

2.2.2.4 \mathcal{Cl}_3 e as Matrizes de Pauli. Relação de Multivetores com Matrizes

Considere as denominadas *matrizes de Pauli*,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.82)$$

que, juntamente com a matriz identidade de ordem 2, geram o espaço vetorial das matrizes complexas 2×2 hermitianas (sobre o corpo dos reais), como pode-se observar por meio de

$$\begin{pmatrix} a & c - di \\ c + di & b \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(a+b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(a-b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

sendo a , b , c e d números reais arbitrários.

Como o produto matricial é bilinear, segue que o espaço vetorial gerado por $\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ (em que I denota a matriz identidade) dotado do produto matricial constitui uma álgebra, a álgebra das matrizes complexas 2×2 , que por vezes denomina-se *álgebra das matrizes de Pauli*. Essa álgebra será denotada da mesma forma que seu conjunto subjacente, $M_2(\mathbb{C})$.

Sem dificuldades, nota-se que as matrizes de Pauli satisfazem

$$\sigma_i^2 = I \quad \text{e} \quad \sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i, \quad \text{sendo} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad \text{e} \quad i \neq j. \quad (2.83)$$

A comparação dessas relações com as relações (2.58) permite verificar a existência de um isomorfismo entre a álgebra das matrizes de Pauli e a álgebra geométrica do espaço euclidiano tridimensional, $M_2(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{C}\ell_3$, por meio do mapeamento inversível dado por

$$1 \mapsto I \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_k \mapsto \sigma_k, \quad \text{sendo} \quad k \in \{1, 2, 3\}. \quad (2.84)$$

Observe que as matrizes de Pauli satisfazem

$$\sigma_1 \sigma_2 = i\sigma_3, \quad \sigma_2 \sigma_3 = i\sigma_1, \quad \sigma_3 \sigma_1 = i\sigma_2, \quad (2.85)$$

que podem ser escritas como

$$(-i\sigma_1)(-i\sigma_2) = -i\sigma_3, \quad (-i\sigma_2)(-i\sigma_3) = -i\sigma_1, \quad (-i\sigma_3)(-i\sigma_1) = -i\sigma_2. \quad (2.86)$$

Essas relações, mais o fato de que $(-i\sigma_k)^2 = -I$, permitem identificar $-i\sigma_1$, $-i\sigma_2$ e $-i\sigma_3$ com as unidades quaterniônicas i , j e k (vide (1.1) e (1.2)) e com os bivectores unitários \mathcal{I} , \mathcal{J} e \mathcal{K} a pouco introduzidos. Além disso, note a correspondência

$$\mathbf{I} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \quad \mapsto \quad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = iI, \quad (2.87)$$

que reforça a ideia de que o pseudo escalar-unitário desempenha uma espécie de papel de “unidade imaginária” no contexto da álgebra geométrica do espaço euclidiano, além do fato de que $\mathbf{I}^2 = -1$ e $\mathbf{I} \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_k \mathbf{I}$.

Como consequência do isomorfismo $M_2(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{C}\ell_3$, pode-se representar multivetores de $\mathcal{C}\ell_3$ por matrizes complexas 2×2 . Entretanto, ao trabalhar com matrizes em lugar de multivetores, deixa-se de se ter acesso à estrutura multivetorial de $\mathcal{C}\ell_3$, que é de grande utilidade.

Seja A o multivetor genérico dado por (2.65). Ao substituir em tal expressão \mathbf{e}_k por

σ_k (sendo $k \in \{1, 2, 3\}$), obtém-se a seguinte representação matricial para o multivetor A :

$$A \mapsto \begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ z_2 & z_4 \end{pmatrix}, \quad (2.88)$$

sendo

$$\begin{aligned} z_1 &= (a + a_3) + (a_{12} + a_{123})i, \\ z_2 &= (a_1 + a_{13}) + (a_2 + a_{23})i, \\ z_3 &= (a_1 - a_{13}) - (a_2 - a_{23})i, \\ z_4 &= (a - a_3) - (a_{12} - a_{123})i. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Observe que, se $A \in \mathcal{Cl}_3^+$, então tem-se

$$A \mapsto \begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix}, \quad (2.90)$$

sendo $w_1 = a + a_{12}i$ e $w_2 = a_{13} + a_{23}i$.

Com um pouco de trabalho, mas sem grande dificuldade, pode-se mostrar que as operações de reversão, graduação e conjugação se expressam em termos de matrizes por:

$$\tilde{A} \mapsto \begin{pmatrix} z_1^* & z_2^* \\ z_3^* & z_4^* \end{pmatrix}, \quad (2.91)$$

$$\hat{A} \mapsto \begin{pmatrix} z_4^* & -z_2^* \\ -z_3^* & z_1^* \end{pmatrix}, \quad (2.92)$$

$$\bar{A} \mapsto \begin{pmatrix} z_4 & -z_3 \\ -z_2 & z_1 \end{pmatrix}. \quad (2.93)$$

Repare que a operação de reversão corresponde em termos de matrizes à operação de conjugação hermitiana. Esse fato permite obter de imediato a seguinte propriedade. Dados dois multivetores A e B , tem-se

$$\widetilde{(AB)} = \tilde{B}\tilde{A}. \quad (2.94)$$

Através dessa propriedade, e da definição de inverso de um multivetor (vide equação

(2.21)), quando ele existe, obtém-se outra importante propriedade:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \quad (2.95)$$

2.2.2.5 Diferenciação de Campos Multivetoriais

Faz-se aqui uma exposição sintética e simplificada sobre diferenciação de campos multivetoriais, que é restrita ao caso euclidiano tridimensional (ou bidimensional), com o qual se está lidando.

Seja $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ um vetor genérico de \mathbb{R}^3 . Uma aplicação que associa a cada ponto \mathbf{x} de \mathbb{R}^3 um multivector $A = A(\mathbf{x})$ recebe a designação de um *campo multivetorial*. Neste caso, $A = A(\mathbf{x})$ tem a forma

$$A = a(\mathbf{x}) + [a_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + a_2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2 + a_3(\mathbf{x})\mathbf{e}_3] + [a_{12}(\mathbf{x})\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a_{13}(\mathbf{x})\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + a_{23}(\mathbf{x})\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3] + a_{123}(\mathbf{x})\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \quad (2.96)$$

em que os termos da forma $a(\mathbf{x})$, $a_i(\mathbf{x})$, $a_{ij}(\mathbf{x})$ e $a_{ijk}(\mathbf{x})$ correspondem a campos escalares.

Define-se o *operador nabla*, denotado por ∇ , em termos de coordenadas retangulares, por

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (2.97)$$

Observe que o operador nabla tem um certo caráter vetorial, o qual permite escrever

$$\nabla A = \nabla \cdot A + \nabla \wedge A, \quad (2.98)$$

para um dado campo multivetorial A , e, neste caso,

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{2} \left(\nabla A - \dot{\hat{A}} \dot{\nabla} \right), \quad (2.99)$$

em que a notação envolvendo pontos indica que, apesar de a ordem do produto geométrico ser a apresentada, a parte de derivada parcial que compõe o operador nabla atua no outro objeto com um ponto encimado, por exemplo,

$$\dot{B} \dot{\nabla} = \frac{\partial B}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial B}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial B}{\partial x_3} \mathbf{e}_3, \quad (2.100)$$

sendo B um multivetor; e tem-se

$$\nabla \wedge A = \frac{1}{2} \left(\nabla A + \hat{A} \dot{\nabla} \right). \quad (2.101)$$

Outro exemplo de utilização da notação com pontos é o seguinte:

$$\dot{\nabla}(A\dot{B}) = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k A \left(\frac{\partial B}{\partial x_k} \right).$$

Para um campo escalar dado por $\phi = \phi(\mathbf{x})$, tem-se

$$\nabla \phi = \mathbf{e}_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = \nabla \phi = \mathbf{e}_1 \wedge \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \wedge \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \wedge \frac{\partial \phi}{\partial x_3},$$

que mostra que

$$\nabla \phi = \nabla \wedge \phi = \text{grad}(\phi), \quad (2.102)$$

em que grad denota o operador gradiente.

Para um campo vetorial dado por $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{x}) = V_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + V_2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2 + V_3(\mathbf{x})\mathbf{e}_3$, tem-se

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{V} &= \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (V_1 \mathbf{e}_1 + V_2 \mathbf{e}_2 + V_3 \mathbf{e}_3) + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} (V_1 \mathbf{e}_1 + V_2 \mathbf{e}_2 + V_3 \mathbf{e}_3) + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} (V_1 \mathbf{e}_1 + V_2 \mathbf{e}_2 + V_3 \mathbf{e}_3) \\ &= \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right) + \left[\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \right], \end{aligned}$$

em que se faz a identificação

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = \text{div}(\mathbf{V}), \quad (2.103)$$

em que div denota o operador divergência; enquanto o termo entre colchetes é identificado com

$$\nabla \wedge \mathbf{V} = \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) \underbrace{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2}_{\star \mathbf{e}_3} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right) \underbrace{\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1}_{\star \mathbf{e}_2} + \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right) \underbrace{\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3}_{\star \mathbf{e}_1} = \star \text{rot}(\mathbf{V}), \quad (2.104)$$

em que rot denota o operador rotacional. Assim, pode-se escrever:

$$\nabla \mathbf{V} = \text{div}(\mathbf{V}) + \star \text{rot}(\mathbf{V}). \quad (2.105)$$

É interessante salientar que, apesar do emprego de coordenadas retangulares, os resultados aqui apresentados são válidos qualquer que seja o sistema de coordenadas escolhido, o que não será demonstrado aqui.

Pode-se verificar também que, para um dado campo multivetorial $A = A(\mathbf{x})$, tem-se

$$\nabla(\nabla A) = \nabla^2 A = \Delta A, \quad (2.106)$$

em que $\nabla^2 = \Delta$ denota o operador laplaciano.

2.2.2.6 Rotações

Considera-se aqui o problema das rotações, mas sem fazer referência à reflexões e ao teorema de Cartan-Dieudonné. Reflexões no caso tridimensional se dão através de planos e podem ser consideradas de forma similar ao caso bidimensional, o que não é feito aqui.

Considere uma rotação arbitrária de um vetor \mathbf{v} de \mathbb{R}^3 por um ângulo θ , resultando no vetor \mathbf{v}' . Tem-se então que

$$\mathbf{v}'\mathbf{v} = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}' \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{I}(\mathbf{v}' \times \mathbf{v}).$$

Considerando as expressões

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}'\| \|\mathbf{v}\| \cos(\theta) \quad \text{e} \quad \|\mathbf{v}' \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}'\| \|\mathbf{v}\| \sin(\theta),$$

e definindo $\mathbf{u} = \mathbf{v}' \times \mathbf{v}$ e $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$, de modo que

$$\mathbf{v}' \times \mathbf{v} = \|\mathbf{v}' \times \mathbf{v}\| \hat{\mathbf{u}} = \|\mathbf{v}'\| \|\mathbf{v}\| \sin(\theta) \hat{\mathbf{u}},$$

pode-se escrever

$$\mathbf{v}'\mathbf{v} = \|\mathbf{v}'\| \|\mathbf{v}\| \cos(\theta) + \mathbf{I} \|\mathbf{v}'\| \|\mathbf{v}\| \sin(\theta) \hat{\mathbf{u}} = \|\mathbf{v}\|^2 [\cos(\theta) + \mathbf{I} \hat{\mathbf{u}} \sin(\theta)],$$

em que levou-se em conta que $\|\mathbf{v}'\| = \|\mathbf{v}\|$. Tomando o produto geométrico à direita da

equação anterior com \mathbf{v} , obtém-se

$$\mathbf{v}' = [\cos(\theta) + \mathbf{I}\hat{\mathbf{u}}\sin(\theta)]\mathbf{v}. \quad (2.107)$$

Utilizando então as expressões como séries de potências das funções seno e cosseno na expressão acima e levando em conta que $(\mathbf{I}\hat{\mathbf{u}})^2 = -1$, pode-se escrever (da mesma forma como obteve-se (2.48))

$$\mathbf{v}' = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{I}\hat{\mathbf{u}}\theta)^n}{n!} \right] \mathbf{v},$$

que pode ser escrito em termos de notação exponencial (como definida na seção anterior) como

$$\mathbf{v}' = \exp(\mathbf{I}\hat{\mathbf{u}}\theta) \mathbf{v}. \quad (2.108)$$

De outro modo, como $\mathbf{v} \perp (\mathbf{v}' \times \mathbf{v})$ implica $(\mathbf{v}' \times \mathbf{v})\mathbf{v} = -\mathbf{v}(\mathbf{v}' \times \mathbf{v})$, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \exp(\mathbf{I}\hat{\mathbf{u}}\theta/2) \exp(\mathbf{I}\hat{\mathbf{u}}\theta/2) \mathbf{v} \\ &= \exp(\mathbf{I}\hat{\mathbf{u}}\theta/2) [\cos(\theta/2) + \mathbf{I}\hat{\mathbf{u}}\sin(\theta/2)] \mathbf{v} \\ &= \exp(\mathbf{I}\hat{\mathbf{u}}\theta/2) [\cos(\theta/2) + \mathbf{I}(\mathbf{v}' \times \mathbf{v})\|\mathbf{v}' \times \mathbf{v}\|^{-1}\sin(\theta/2)] \mathbf{v} \\ &= \exp(\mathbf{I}\hat{\mathbf{u}}\theta/2) [\mathbf{v}\cos(\theta/2) - \mathbf{v}\mathbf{I}(\mathbf{v}' \times \mathbf{v})\|\mathbf{v}' \times \mathbf{v}\|^{-1}\sin(\theta/2)] \\ &= \exp(\mathbf{I}\hat{\mathbf{u}}\theta/2) \mathbf{v} [\cos(\theta/2) - \mathbf{I}\hat{\mathbf{u}}\sin(\theta/2)] \\ &= \exp(\mathbf{I}\hat{\mathbf{u}}\theta/2) \mathbf{v} \exp(-\mathbf{I}\hat{\mathbf{u}}\theta/2) \end{aligned} \quad (2.109)$$

Tanto essa expressão quanto (2.108) descrevem a rotação por um ângulo θ de um vetor arbitrário \mathbf{v} através de um plano determinado por $\mathbf{v}' \wedge \mathbf{v}$. Entretanto, a expressão (2.109) é mais pertinente para a expressão da rotação de um multivetor qualquer, já que é compatível com a invariância, sob a rotação, de um escalar e do bivector que descreve o plano de rotação:

$$\exp(\mathbf{I}\hat{\mathbf{u}}\theta/2)\alpha \exp(-\mathbf{I}\hat{\mathbf{u}}\theta/2) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\exp(\mathbf{I}\hat{\mathbf{u}}\theta/2)(\mathbf{v}' \wedge \mathbf{v}) \exp(-\mathbf{I}\hat{\mathbf{u}}\theta/2) = \mathbf{v}' \wedge \mathbf{v}.$$

Define-se, então, a rotação de um multivetor arbitrário A por

$$A \mapsto A' = RA\tilde{R} = RAR^{-1}, \quad \text{em que } R = \exp(\mathbf{B}) \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2}\theta\mathbf{I}\hat{\mathbf{u}}. \quad (2.110)$$

Note que o conjunto $\left\{ R \mid R \in \mathcal{C}\ell_3^+ \text{ e } \tilde{R} = R^{-1} \right\}$ dotado do produto geométrico tem a estrutura de um grupo, o qual é denotado $\text{Spin}(3)$. De fato, dados os elementos R_1 e R_2 do conjunto supracitado, tem-se $\widetilde{(R_1R_2)} = \widetilde{R_2}\widetilde{R_1} = R_2^{-1}R_1^{-1} = (R_1R_2)^{-1}$, ou seja, R_1R_2 pertence à tal conjunto, logo o (i) conjunto é fechado com relação ao produto geométrico; além disso, (ii) o produto é associativo, (iii) existe o elemento neutro com relação ao produto (o número 1) e, (iv) para cada elemento R há o elemento inverso R^{-1} : $RR^{-1} = R^{-1}R = 1$. Os elementos desse grupo são denominados *rotores* (devido ao papel que desempenham na descrição de rotações), como no caso bidimensional (apesar de naquele caso não se ter feito menção a uma estrutura de grupo).

Como um rotor R é um elemento da sub-álgebra par $\mathcal{C}\ell_3^+$, é representado na forma matricial como em (2.90), e daí, levando em conta a correspondência entre as operações de reversão e conjugação hermitiana, a relação $R\tilde{R} = 1$ se expressa em termos de matrizes por

$$\begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Essa relação implica

$$|w_1|^2 + |w_2|^2 = \det \begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix} = 1,$$

que mostra que a matriz que representa um rotor, além de ser unitária, tem determinante igual a 1. Verifica-se, dessa forma, um isomorfismo entre o grupo $\text{Spin}(3)$ e o grupo $\text{SU}(2)$, das matrizes complexas 2×2 unitárias de determinante igual a 1.

Deixa-se nota de como fica a parametrização de rotações em termos de ângulos de Euler:

$$\begin{aligned}
R &= \exp\left(\frac{1}{2}\phi\mathbf{Ie}_3\right) \exp\left(\frac{1}{2}\theta\mathbf{Ie}_1\right) \exp\left(\frac{1}{2}\phi\mathbf{Ie}_3\right) \\
&= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi+\varphi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi+\varphi}{2}\right) \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \\
&\quad + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi-\varphi}{2}\right) \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi-\varphi}{2}\right) \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3. \quad (2.111)
\end{aligned}$$

É interessante salientar que, como no caso bidimensional, tanto R como $-R$ descrevem essencialmente a mesma rotação. Na verdade, o resultado final da atuação dos dois rotores que é igual. De fato, uma rotação por um ângulo ϕ no sentido anti-horário, através de um plano com vetor normal unitário $\hat{\mathbf{u}}$, tem o mesmo efeito que uma rotação por um ângulo $2\pi - \phi$ no sentido horário, através do mesmo plano, porém, tomando-se $-\hat{\mathbf{u}}$ como vetor normal unitário; assim, dados $R = \exp(\mathbf{I}\hat{\mathbf{u}}\phi/2)$ e $R' = \exp[\mathbf{I}(-\hat{\mathbf{u}})(2\pi - \phi)/2]$, tem-se

$$R' = \exp\left[\frac{1}{2}(2\pi - \phi)\mathbf{I}(-\hat{\mathbf{u}})\right] = \exp\left[\left(\frac{1}{2}\phi - \pi\right)\mathbf{I}\hat{\mathbf{u}}\right] = \exp\left(\frac{1}{2}\phi\mathbf{I}\hat{\mathbf{u}}\right) \exp(-\pi\mathbf{I}\hat{\mathbf{u}}) = R(-1) = -R.$$

O fato de que R e $-R$ “descrevem” a mesma rotação implica que há uma relação “de dois para um” entre o grupo Spin(3) (e também SU(2)) e o grupo SO(3), das matrizes reais 3×3 ortogonais de determinante igual a 1, as quais também descrevem rotações no espaço euclidiano tridimensional, embora de forma única. Assim, costuma-se dizer que Spin(3) é o *recobrimento duplo* de SO(3).

Considere agora o caso em que as rotações dependem de um parâmetro real t , e deixe que a análise se restrinja aos vetores de base, já que combinações lineares destes resultam em vetores arbitrários. Assim, considere o rotor $R = R(t)$ dependente do parâmetro t , e considere a base rotacionada $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ dada por $\mathbf{e}_i' = \mathbf{e}_i'(t) = R(t)\mathbf{e}_i\tilde{R}(t) = R\mathbf{e}_iR^{-1}$, sendo $i \in \{1, 2, 3\}$. Antes de qualquer coisa, observe que

$$0 = \frac{d}{dt}(1) = \frac{d}{dt}(RR^{-1}) = \dot{R}R^{-1} + R\frac{d}{dt}(R^{-1}),$$

de modo que

$$\frac{d}{dt}(R^{-1}) = -R^{-1}\dot{R}R^{-1}, \quad (2.112)$$

em que $\dot{R} = dR/dt$. Obtém-se então uma expressão para a derivada com relação a t de $R^{-1} = \tilde{R}$. Agora, considere a derivada com relação a t de \mathbf{e}_i' :

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{e}}_i' &= \frac{d\mathbf{e}_i'}{dt} = \frac{d}{dt} (R\mathbf{e}_i R^{-1}) \\
&= \frac{dR}{dt} \mathbf{e}_i R^{-1} + R\mathbf{e}_i \frac{d}{dt} (R^{-1}) \\
&= \dot{R}\mathbf{e}_i R^{-1} - R\mathbf{e}_i R^{-1} \dot{R}R^{-1} \\
&= \dot{R}\tilde{R}R\mathbf{e}_i\tilde{R} - R\mathbf{e}_i\tilde{R}\dot{R}\tilde{R} \\
&= \dot{R}\tilde{R}\mathbf{e}_i' - \mathbf{e}_i'\dot{R}\tilde{R}.
\end{aligned} \tag{2.113}$$

Observe que $\dot{R}\tilde{R}$ é um elemento da sub-álgebra par \mathcal{Cl}_3^+ , de modo que $\widehat{(\dot{R}\tilde{R})} = \dot{R}\tilde{R}$, e, além disso, utilizando o resultado (2.112), tem-se que

$$\widehat{(\dot{R}\tilde{R})} = \tilde{R}\tilde{R} = R\dot{R} = R\frac{d}{dt}(R^{-1}) = -RR^{-1}\dot{R}R^{-1} = -(\dot{R}\tilde{R}),$$

logo, $\dot{R}\tilde{R}$ é um bivector. Assim, pode-se escrever a equação (2.113) em termos de uma contração:

$$\dot{\mathbf{e}}_i' = \frac{d\mathbf{e}_i'}{dt} = \frac{1}{2} \left[(2\dot{R}\tilde{R})\mathbf{e}_i' - \mathbf{e}_i'(\widehat{2\dot{R}\tilde{R}}) \right] = (2\dot{R}\tilde{R}) \cdot \mathbf{e}_i'. \tag{2.114}$$

Denota-se $2\dot{R}\tilde{R} = \boldsymbol{\Omega}_t$, e o bivector $\boldsymbol{\Omega}_t$ é denominado *bivector de Darboux*, o qual aparece no contexto da geometria de curvas. Dessa forma, a equação anterior pode ser escrita como

$$\dot{\mathbf{e}}_i' = \boldsymbol{\Omega}_t \cdot \mathbf{e}_i'. \tag{2.115}$$

O *vetor de Darboux* $\boldsymbol{\omega}$, também conhecido em mecânica clássica como *vetor velocidade angular*, é definido por

$$\boldsymbol{\omega} = -\star \boldsymbol{\Omega}_t = \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}_t. \tag{2.116}$$

Pode-se escrever a equação (2.115) em termos do vetor velocidade angular como

$$\dot{\mathbf{e}}_i' = (-\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{e}_i' = -\frac{1}{2} (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}\mathbf{e}_i' - \mathbf{e}_i'\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) = -\mathbf{I}\frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}\mathbf{e}_i' - \mathbf{e}_i'\boldsymbol{\omega}) = -\mathbf{I}(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_i'),$$

ou seja, como

$$\dot{\mathbf{e}}_i' = \star(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_i') = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i'. \tag{2.117}$$

Pode-se considerar ainda rotações locais, no sentido que dependem da posição \mathbf{x} no espaço: $\mathbf{e}_i' = \mathbf{e}_i'(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x})\mathbf{e}_i\tilde{R}(\mathbf{x}) = R\mathbf{e}_iR^{-1}$. Nesse caso, de forma análoga ao caso anterior, obtém-se

$$\partial_j(\mathbf{e}_i') = \frac{\partial \mathbf{e}_i'}{\partial x_j} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}_j\mathbf{e}_i' - \mathbf{e}_i'\boldsymbol{\Omega}_j) = \boldsymbol{\Omega}_j \cdot \mathbf{e}_i', \quad (2.118)$$

em que $\boldsymbol{\Omega}_j = 2(\partial_j R)\tilde{R}$, que também são denominados bivectores de Darboux.

Uma vez que $\boldsymbol{\Omega}_j = 2(\partial_j R)\tilde{R}$, tem-se

$$\partial_j R = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_j R, \quad (2.119)$$

da qual segue

$$\partial_i(\partial_j R) = \frac{1}{2}\partial_i(\boldsymbol{\Omega}_j R) = \frac{1}{2}\left[(\partial_i\boldsymbol{\Omega}_j)R + \boldsymbol{\Omega}_j(\partial_i R)\right] = \frac{1}{2}\left[(\partial_i\boldsymbol{\Omega}_j)R + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_j\boldsymbol{\Omega}_i R\right],$$

que implica

$$\partial_i(\partial_j R) - \partial_j(\partial_i R) = \frac{1}{2}\left[\partial_i\boldsymbol{\Omega}_j - \partial_j\boldsymbol{\Omega}_i + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_j\boldsymbol{\Omega}_i - \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_i\boldsymbol{\Omega}_j\right]R.$$

Impondo que $\partial_i(\partial_j R) - \partial_j(\partial_i R) = 0$, tem-se que os $\boldsymbol{\Omega}_j$ devem satisfazer

$$\partial_i\boldsymbol{\Omega}_j - \partial_j\boldsymbol{\Omega}_i + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_j\boldsymbol{\Omega}_i - \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_i\boldsymbol{\Omega}_j = 0,$$

ou,

$$\partial_i\boldsymbol{\Omega}_j - \partial_j\boldsymbol{\Omega}_i = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}_i\boldsymbol{\Omega}_j - \boldsymbol{\Omega}_j\boldsymbol{\Omega}_i), \quad (2.120)$$

que pode ser escrito em termos da notação de comutador como

$$\partial_i\boldsymbol{\Omega}_j - \partial_j\boldsymbol{\Omega}_i = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\Omega}_i, \boldsymbol{\Omega}_j]. \quad (2.121)$$

Deixa-se nota que o espaço dos bivectores $\boldsymbol{\Omega}_j$ dotado do produto definido pela expressão acima constitui uma álgebra, uma sub-álgebra de $\mathcal{C}\ell_3$, que corresponde à álgebra de Lie associada ao grupo Spin(3).

2.3 Spinors de Pauli

As matrizes de $M_2(\mathbb{C})$ representam endomorfismos sobre o espaço vetorial \mathbb{C}^2 , ou seja, transformações lineares de \mathbb{C}^2 em \mathbb{C}^2 . O espaço vetorial \mathbb{C}^2 é denominado *espaço de spinores* (associado a \mathbb{R}^3). Dessa forma, um tal spinor pode ser representado pela matriz coluna

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (2.122)$$

sendo ξ e η números complexos. Esses spinores são denominados *spinors de Pauli*, e a definição acima corresponde a sua *definição clássica*.

Considere o multivetor

$$f = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_3), \quad (2.123)$$

o qual goza da propriedade de idempotência, ou seja, $f^2 = f$, e, além disso, satisfaz $\mathbf{e}_3 f = f$. Considere então o ideal à esquerda $\mathcal{C}\ell_3 f$ de $\mathcal{C}\ell_3$, cujos elementos são da forma Af (para informações sobre ideais veja a última seção do apêndice A), sendo A um multivetor genérico dado por (2.65),

$$A = a + (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) + (a_{12} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + a_{13} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + a_{23} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) + a_{123} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3.$$

Observe então que, considerando a propriedade $\mathbf{e}_3 f = f$, pode-se escrever

$$Af = af + a_1 \mathbf{e}_1 f + (a_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_1 f + a_3 f + a_{12} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 f + a_{13} \mathbf{e}_1 f + a_{23} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_1 f + (a_{123} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) f,$$

que permite escrever

$$Af = [(a + a_3) + \mathbf{I}(a_{12} + a_{123})]f + [(a_1 + a_{13}) + \mathbf{I}(a_2 + a_{23})] \mathbf{e}_1 f. \quad (2.124)$$

De forma análoga, pode-se escrever

$$A(\mathbf{e}_1 f) = [(a_1 - a_{13}) - \mathbf{I}(a_2 - a_{23})]f + [(a - a_3) - \mathbf{I}(a_{12} - a_{123})] \mathbf{e}_1 f. \quad (2.125)$$

Convenientemente, denotar-se-á $f = |1\rangle$ e $\mathbf{e}_1 f = |2\rangle$. Dessa forma, pode-se representar as equações (2.124) e (2.125) por

$$A|n\rangle = \sum_{m=1}^2 A_{mn}|m\rangle, \quad (2.126)$$

em que $m, n \in \{1, 2\}$ e A_{mn} correspondem aos multivetores entre colchetes em (2.124) e (2.125). Definindo então $\langle n| = \widetilde{|n\rangle}$, observe que

$$\langle m|n\rangle = \langle m||n\rangle = \delta_{mn}f \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^2 |n\rangle\langle n| = 1, \quad (2.127)$$

o que é de fácil verificação (utilizando-se principalmente a propriedade de idempotência de f). Considerando agora a representação matricial de multivetores, dada por (2.88) e (2.89), tem-se as correspondências

$$\mathbf{I} \mapsto i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = f \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |2\rangle = \mathbf{e}_1 f \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.128)$$

as quais conduzem à identificação das expressões entre colchetes em (2.124) e (2.125) com números complexos. E repare que

$$\begin{pmatrix} u & w \\ v & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & w \\ v & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

e, da mesma forma,

$$\begin{pmatrix} u & w \\ v & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & w \\ v & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ x \end{pmatrix},$$

o que leva à constatação de que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

podem ser identificadas na álgebra matricial, e da mesma forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se então identificar $|1\rangle$ com $(1 \ 0)^T$, $|2\rangle$ com $(0 \ 1)^T$ e escrever um spinor de Pauli na forma

$$|\psi\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle, \quad \text{com} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}. \quad (2.129)$$

Neste caso, pode-se pensar em um spinor de Pauli como um elemento do ideal à esquerda $\mathcal{Cl}_3 f$, sem necessariamente fazer alusão às matrizes (apesar delas terem sido muito úteis nesta construção). Essa é a essência da *definição algébrica* de um spinor de Pauli.

Observe que a equação (2.124) pode ser reescrita, considerando $\mathbf{e}_3 f = f$, sob a forma

$$Af = (a + a_3)f + [\mathbf{Ie}_3(a_{12} + a_{123}) + (a_1 + a_{13})\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{Ie}_1(a_2 + a_{23})]f,$$

ou ainda como

$$Af = (a + a_3)f + [(a_{12} + a_{123})\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + (a_1 + a_{13})\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + (a_2 + a_{23})\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]f,$$

o que mostra que o produto geométrico de um multivetor arbitrário e f corresponde ao produto geométrico entre um multivetor da sub-álgebra par \mathcal{Cl}_3^+ e o multivetor f ; fica evidenciado assim o isomorfismo $\mathcal{Cl}_3 f \simeq \mathcal{Cl}_3^+ f$. Mas, de acordo com (2.90), um multivetor da sub-álgebra par \mathcal{Cl}_3^+ é representado por uma matriz da forma

$$\begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix},$$

que ao ser multiplicada pela matriz de f ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

resulta na matriz

$$\begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ w_2 & 0 \end{pmatrix},$$

a qual corresponde, no âmbito da álgebra matricial, à matriz

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

que por sua vez consiste num spinor de Pauli em sua forma clássica. Observa-se então a

existência do isomorfismo $\mathcal{Cl}_3^+ f \simeq \mathcal{Cl}_3^+$. Como $\mathcal{Cl}_3 f \simeq \mathcal{Cl}_3^+ f$, segue que $\mathcal{Cl}_3 f \simeq \mathcal{Cl}_3^+$, logo, um spinor de Pauli pode ser representado por um multivetor da sub-álgebra par \mathcal{Cl}_3^+ :

$$\psi = a + a_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + a_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3. \quad (2.130)$$

Esta corresponde à *definição operatória* de um spinor de Pauli.

Lembre-se que \mathcal{Cl}_3^+ é isomorfa à \mathbb{H} , a álgebra dos quatérnions. Isso significa que spinores de Pauli podem ser representados por quatérnions. Uma vez que a álgebra dos quatérnions tem grande aplicabilidade em áreas clássicas da Física, tais como mecânica e eletrodinâmica, observa-se que o conceito de spinor pode também ser aplicado nessas áreas (o que não é feito aqui), embora o nome “spinor” não sugira isso.

Seja ψ um spinor operatório de Pauli não nulo, dado por (2.130). Da definição de norma de um multivetor segue que

$$\|\psi\|^2 = \langle \psi \tilde{\psi} \rangle_0 = \psi \tilde{\psi} = a^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 > 0. \quad (2.131)$$

Considere então o número real positivo ρ tal que

$$a^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 = \rho. \quad (2.132)$$

Pode-se utilizar $\left(\frac{a}{\sqrt{\rho}}, \frac{a_{12}}{\sqrt{\rho}}, \frac{a_{13}}{\sqrt{\rho}}, \frac{a_{23}}{\sqrt{\rho}}\right)$ como coordenadas locais de \mathbb{R}^4 , de tal modo que a equação acima descreva a hipersfera $S^3 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \text{ e } \|\mathbf{x}\|^2 = \rho\}$. Pode-se então parametrizar S^3 em termos de ângulos de Euler e escrever

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\rho} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi + \varphi}{2}\right), \\ a_{12} &= \sqrt{\rho} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi + \varphi}{2}\right), \\ a_{13} &= \sqrt{\rho} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi - \varphi}{2}\right), \\ a_{23} &= \sqrt{\rho} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi - \varphi}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.133)$$

Assim, considerando essas expressões na expressão genérica para um spinor de Pauli operatório, equação (2.130), e então levando em conta a parametrização de um rotor

genérico em termos de ângulos de Euler, equação (2.111), pode-se escrever:

$$\psi = \sqrt{\rho}R, \quad \text{em que } \rho \in \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x > 0\} \quad \text{e } R \in \text{Spin}(3). \quad (2.134)$$

Dessa forma, o resultado da ação do spinor ψ sobre um vetor \mathbf{x} de \mathbb{R}^3 por meio de $\psi\mathbf{x}\tilde{\psi}$ é

$$\psi\mathbf{x}\tilde{\psi} = \rho R\mathbf{x}\tilde{R}, \quad (2.135)$$

de modo que uma tal ação de um spinor sobre um vetor faz este rotacionar, devido à ação do rotor, e dilatar (ou mesmo contrair, caso $\rho < 1$), devido ao fator ρ . Assim, dados dois vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} de \mathbb{R}^3 , existe um spinor de Pauli ψ tal que

$$\mathbf{u} = \psi\mathbf{v}\tilde{\psi}$$

(em função disso a denominação “operatório” para o spinor de Pauli ψ). Em particular, qualquer vetor $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ pode ser escrito em termos da ação de um spinor ψ sobre um vetor de referência, que pode ser tomado, por conveniência, como \mathbf{e}_3 :

$$\mathbf{x} = \psi\mathbf{e}_3\tilde{\psi}. \quad (2.136)$$

Aplicando na equação acima a expressão genérica para ψ , dada por (2.130), além da expressão para o vetor \mathbf{x} , tem-se:

$$\begin{aligned} x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 &= (a + a_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + a_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3(a - a_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - a_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 - a_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) \\ &= (a\mathbf{e}_3 + a_{12}\mathbf{I} + a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2)(a - a_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - a_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 - a_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) \\ &= a^2\mathbf{e}_3 - aa_{12}\mathbf{I} + aa_{13}\mathbf{e}_1 + aa_{23}\mathbf{e}_2 + aa_{12}\mathbf{I} + a_{12}^2\mathbf{e}_3 - a_{12}a_{13}\mathbf{e}_2 + a_{12}a_{23}\mathbf{e}_1 + \\ &\quad + aa_{13}\mathbf{e}_1 - a_{12}a_{13}\mathbf{e}_2 - a_{13}^2\mathbf{e}_3 - a_{13}a_{23}\mathbf{I} + aa_{23}\mathbf{e}_2 + a_{12}a_{23}\mathbf{e}_1 + a_{13}a_{23}\mathbf{I} - a_{23}^2\mathbf{e}_3 \\ &= 2(aa_{13} + a_{12}a_{23})\mathbf{e}_1 + 2(aa_{23} - a_{12}a_{13})\mathbf{e}_2 + (a^2 + a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2)\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

↓

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 2(aa_{13} + a_{12}a_{23}) \\ x_2 &= 2(aa_{23} - a_{12}a_{13}) \\ x_3 &= a^2 + a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2 \end{aligned} \right\}. \quad (2.137)$$

Aplicando então nas equações acima as expressões para a , a_{12} , a_{13} e a_{23} dadas por (2.133), e aplicando identidades trigonométricas básicas (o que não é feito aqui, por ser um cálculo demasiado extenso, embora não muito complexo), obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \rho \sin(\theta) \cos(\phi) \\ x_2 = \rho \sin(\theta) \sin(\phi) \\ x_3 = \rho \cos(\theta) \end{array} \right\}, \quad (2.138)$$

em que se reconhece ρ , θ e ϕ como as coordenadas esféricas do ponto dado pelo vetor \mathbf{x} .

2.3.1 A Transformação Ativa do Spinor de Pauli

Considere \mathbf{e}_i' , com $i \in \{1, 2, 3\}$, tais que

$$\mathbf{e}_i' = R\mathbf{e}_i\tilde{R}, \quad (2.139)$$

sendo que $R \in \text{Spin}(3)$ e $\beta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^3 . Define-se então a base rotacionada $\beta' = \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$, sendo os vetores dessa base dados pela equação acima. Considere então os spinores

$$\psi_\beta = a + a_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + a_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \quad (2.140)$$

e

$$\psi_{\beta'} = a' + a_{12}'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2' + a_{13}'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_3' + a_{23}'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3' \quad (2.141)$$

tais que

$$\psi_\beta\mathbf{e}_3\tilde{\psi}_\beta = \psi_{\beta'}\mathbf{e}_3'\tilde{\psi}_{\beta'} = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (2.142)$$

A liberdade de escolha de uma base para a descrição de um vetor \mathbf{x} em termos da ação de um spinor sobre um vetor de referência da base sugere que ψ_β e $\psi_{\beta'}$ sejam equivalentes no senso de representabilidade. Dessa forma, pode-se definir um spinor de Pauli operador como uma classe de equivalência de elementos $\psi_\beta, \psi_{\beta'}, \dots$ da sub-álgebra par \mathcal{Cl}_3^+ tais que $\psi_\beta\mathbf{e}_3\tilde{\psi}_\beta = \psi_{\beta'}\mathbf{e}_3'\tilde{\psi}_{\beta'} = \dots$, em que as bases β, β', \dots estão rotacionadas umas em relação as outras, de tal forma que representam sistemas de referência equivalentes, e, de um modo geral, ψ_α indica o representante da classe de equivalência escrito em termos da base α . Denota-se genericamente tal classe de equivalência por Ψ .

Considere agora

$$\mathbf{x} = \psi_\beta \mathbf{e}_3 \tilde{\psi}_\beta \quad \text{e} \quad \mathbf{x}' = R\mathbf{x}\tilde{R}, \quad (2.143)$$

em que $R \in \text{Spin}(3)$. Do ponto de vista de uma *transformação ativa*, o vetor \mathbf{x}' é outro que não \mathbf{x} (a não ser que $R = 1$), da mesma forma que $\mathbf{e}_i' = R\mathbf{e}_i\tilde{R}$ é, em geral, diferente de \mathbf{e}_i , de modo que pode-se escrever

$$\mathbf{x}' = \psi'_{\beta'} \mathbf{e}_3 \tilde{\psi}'_{\beta'} = \psi'_\beta \mathbf{e}_3 \tilde{\psi}'_\beta, \quad (2.144)$$

em que ψ'_β e $\psi'_{\beta'}$ são representantes do spinor Ψ' . Mas,

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x}\tilde{R} = R\psi_\beta \mathbf{e}_3 \tilde{\psi}_\beta \tilde{R} = R\psi_\beta \tilde{R} R \mathbf{e}_3 \tilde{R} R \tilde{\psi}_\beta \tilde{R} = R\psi_\beta \tilde{R} \mathbf{e}_3' R \tilde{\psi}_\beta \tilde{R}, \quad (2.145)$$

que comparadas com (2.144) implicam

$$\psi'_{\beta'} = R\psi_\beta \tilde{R} \quad (2.146)$$

e

$$\psi'_\beta = R\psi_\beta. \quad (2.147)$$

Por outro lado,

$$\psi_\beta \mathbf{e}_3 \tilde{\psi}_\beta = \psi_{\beta'} \mathbf{e}_3' \tilde{\psi}_{\beta'} = \psi_{\beta'} R \mathbf{e}_3 \tilde{R} \tilde{\psi}_{\beta'}, \quad (2.148)$$

que implica

$$\psi_\beta = \psi_{\beta'} R, \quad (2.149)$$

a qual aplicada em (2.146) resulta

$$\psi'_{\beta'} = R\psi_{\beta'}. \quad (2.150)$$

A arbitrariedade do rotor R , e portanto da base rotacionada β' , permite que as equações (2.147) e (2.150) possam ser representadas genericamente por

$$\Psi' = R\Psi. \quad (2.151)$$

Esta é a relação que descreve a transformação ativa do spinor Ψ .

2.4 Aplicação: A Teoria de Pauli em Termos de \mathcal{Cl}_3

O postulado básico da teoria de Pauli consiste na asserção de que o elétron é descrito por um campo de spinores (clássicos)

$$\psi = \psi(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \xi(\mathbf{x}, t) \\ \eta(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} \quad (2.152)$$

tal que, de acordo com a interpretação usual da mecânica quântica, $\psi^\dagger \psi$ corresponde à densidade de probabilidade $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ de se detectar o elétron na posição \mathbf{x} no instante t . Esse postulado pode ser escrito em termos de um campo de spinores operatórios de Pauli $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$, com a densidade de probabilidade $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ sendo dada por

$$\rho = \psi \tilde{\psi} = \tilde{\psi} \psi. \quad (2.153)$$

Lembre-se que $\psi \tilde{\psi}$ corresponde ao quadrado da norma de ψ , logo ρ assim definida é não negativa, e que ψ pode ser escrito sob a forma $\psi = \sqrt{\rho} R$, o que leva à identificação de $\sqrt{\rho}$ como a amplitude do campo de spinores ψ .

É interessante salientar que, tomado um vetor de referência \mathbf{v} , qualquer vetor de \mathbb{R}^3 pode ser escrito sob a forma $\chi \mathbf{v} \tilde{\chi}$, para algum spinor operatório de Pauli χ , o que não significa que se esteja trabalhando necessariamente com algo relacionado ao conceito de *spin*. Neste contexto, o conceito de *spin* aparece quando se supõe que o elétron possui um *momento de dipolo magnético intrínseco* $\boldsymbol{\mu} = (e/mc)\mathbf{s}$, em que a quantidade vetorial \mathbf{s} é identificada como o *momento angular intrínseco* do elétron, que denomina-se *spin* (que doravante é escrito sem itálico), e representa a carga elétrica elementar, m é massa do elétron e c a velocidade da luz no vácuo.

Uma vez verificado que a magnitude do spin do elétron é $\hbar/2$, pode-se escrever $\mathbf{s} = (\hbar/2)\hat{\mathbf{s}}$, sendo $\hat{\mathbf{s}}$ o versor de \mathbf{s} , e a *densidade de spin* $\rho \mathbf{s}$ pode ser escrita em termos da ação de um spinor postulado ψ sobre um vetor de referência, que pode ser tomado como \mathbf{e}_3 , como

$$\rho \mathbf{s} = \frac{\hbar}{2} \psi \mathbf{e}_3 \tilde{\psi}, \quad (2.154)$$

de modo que a *densidade de momento de dipolo magnético* do elétron pode ser escrita

como

$$\rho\boldsymbol{\mu} = \frac{e\hbar}{2mc}\psi\mathbf{e}_3\tilde{\psi}. \quad (2.155)$$

A escolha do vetor de referência é arbitrária, e determina o que se chama de *direção de quantização*.

Se o campo de vetores \mathbf{s} é constante, não dependendo da posição \mathbf{x} do elétron nem do instante de tempo t , diz-se que o elétron está em um *auto-estado de spin*. Nesse caso, pode-se arbitrar convenientemente pela direção de quantização como coincidindo com a direção de \mathbf{s} . Da equação (2.154) segue que

$$\mathbf{s}\psi\tilde{\psi} = \frac{\hbar}{2}\psi\mathbf{e}_3\tilde{\psi},$$

que implica

$$\mathbf{s}\psi = \frac{\hbar}{2}\psi\mathbf{e}_3,$$

da qual segue

$$\mathbf{e}_3\mathbf{s}\psi = \frac{\hbar}{2}\mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3.$$

Pode-se então definir o operador multivetorial \hat{S} tal que

$$\hat{S}(\psi) = \mathbf{e}_3\mathbf{s}\psi = \frac{\hbar}{2}\mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3, \quad (2.156)$$

de tal modo que a condição para que o elétron esteja em um auto-estado de spin, quando $\mathbf{s} = \pm\hbar/2\mathbf{e}_3$, é dada por

$$\hat{S}(\psi) = \pm\frac{\hbar}{2}\psi. \quad (2.157)$$

Dessa forma, quando o elétron está em um auto-estado de spin, vale

$$\psi = \pm\mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3,$$

da qual segue

$$\psi = \frac{1}{2}(\psi \pm \mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3). \quad (2.158)$$

Pode-se então definir os operadores $\hat{\Sigma}_+$ e $\hat{\Sigma}_-$ por

$$\hat{\Sigma}_\pm(\psi) = \frac{1}{2}(\psi \pm \mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3), \quad (2.159)$$

os quais satisfazem:

$$\begin{aligned} (\hat{\Sigma}_\pm \circ \hat{\Sigma}_\pm)(\psi) &= \hat{\Sigma}_\pm [\hat{\Sigma}_\pm(\psi)] = \hat{\Sigma}_\pm \left[\frac{1}{2}(\psi \pm \mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(\psi \pm \mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3) \pm \mathbf{e}_3 \frac{1}{2}(\psi \pm \mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(\psi \pm \mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3) + \frac{1}{2}(\psi \pm \mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3) \right] \\ &= \frac{1}{2}(\psi \pm \mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3) \\ &= \hat{\Sigma}_\pm(\psi); \end{aligned} \quad (2.160)$$

$$\begin{aligned} (\hat{\Sigma}_\pm \circ \hat{\Sigma}_\mp)(\psi) &= \hat{\Sigma}_\pm [\hat{\Sigma}_\mp(\psi)] = \hat{\Sigma}_\pm \left[\frac{1}{2}(\psi \mp \mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(\psi \mp \mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3) \pm \mathbf{e}_3 \frac{1}{2}(\psi \mp \mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(\psi \mp \mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3) \pm \frac{1}{2}(\mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3 \mp \psi) \right] \\ &= 0 = \hat{0}(\psi); \end{aligned} \quad (2.161)$$

$$\begin{aligned} (\hat{\Sigma}_\mp \circ \hat{\Sigma}_\pm)(\psi) &= \hat{\Sigma}_\mp [\hat{\Sigma}_\pm(\psi)] = \hat{\Sigma}_\mp \left[\frac{1}{2}(\psi \pm \mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(\psi \pm \mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3) \mp \mathbf{e}_3 \frac{1}{2}(\psi \pm \mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(\psi \pm \mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3) \mp \frac{1}{2}(\mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3 \pm \psi) \right] \\ &= 0 = \hat{0}(\psi); \end{aligned} \quad (2.162)$$

$$(\hat{\Sigma}_+ + \hat{\Sigma}_-)(\psi) = \hat{\Sigma}_+(\psi) + \hat{\Sigma}_-(\psi) = \frac{1}{2}(\psi + \mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3) + \frac{1}{2}(\psi - \mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3) = \psi = \hat{1}(\psi). \quad (2.163)$$

De forma sumarizada,

$$\hat{\Sigma}_{\pm} \circ \hat{\Sigma}_{\pm} = \hat{\Sigma}_{\pm}, \quad \hat{\Sigma}_{\pm} \circ \hat{\Sigma}_{\mp} = \hat{\Sigma}_{\mp} \circ \hat{\Sigma}_{\pm} = \hat{0}, \quad \hat{\Sigma}_{+} + \hat{\Sigma}_{-} = \hat{1}, \quad (2.164)$$

em que $\hat{0}$ é o *operador nulo* e $\hat{1}$ o *operador identidade*. Dessa forma, observa-se que $\hat{\Sigma}_{+}$ e $\hat{\Sigma}_{-}$ são *operadores de projeção*, os *operadores de projeção de spin*. Observe que

$$\left(\hat{S} \circ \hat{\Sigma}_{\pm} \right) (\psi) = \hat{S} \left[\hat{\Sigma}_{\pm}(\psi) \right] = \pm \frac{\hbar}{2} \hat{\Sigma}_{\pm}(\psi), \quad (2.165)$$

o que se observa por aplicação direta da definição de $\hat{\Sigma}_{\pm}$ (equações (2.159)) na definição de \hat{S} (segunda igualdade em (2.156)).

Considere agora o *operador de momento* $\hat{\mathbf{p}}$, o qual é definido por

$$\hat{\mathbf{p}}(\psi) = -\hbar \nabla \psi \mathbf{e}_3 = \hbar \nabla \psi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1. \quad (2.166)$$

Neste contexto a *densidade de momento* $\rho \mathbf{p}$ é definida por

$$\rho \mathbf{p} = \left\langle \hat{\mathbf{p}}(\psi) \tilde{\psi} \right\rangle_1. \quad (2.167)$$

Define-se também o *operador de energia* \hat{E} , através de

$$\hat{E}(\psi) = \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \mathbf{e}_3, \quad (2.168)$$

e a respectiva *densidade de energia* ρE , por

$$\rho E = \left\langle \hat{E}(\psi) \tilde{\psi} \right\rangle_0. \quad (2.169)$$

Dessa forma, para um elétron livre, a dita *equação de Pauli* se escreve

$$\hat{E}(\psi) = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} \circ \hat{\mathbf{p}}) (\psi) = \frac{1}{2m} \hat{\mathbf{p}}^2(\psi), \quad (2.170)$$

que, de forma mais explícita, fica

$$\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \mathbf{e}_3 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi. \quad (2.171)$$

No caso em que o elétron está em um auto-estado de spin, vale a condição (2.157), que,

pela definição do operador \hat{S} , implica

$$\psi = \pm \mathbf{e}_3 \psi \mathbf{e}_3. \quad (2.172)$$

Como de um modo geral ψ é da forma $\psi = r \exp(\mathbf{I}\hat{\mathbf{u}}\chi)$, sendo r e χ reais, a condição acima implica que $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{e}_3$. Logo, quando o elétron está em um auto-estado de spin, o spinor que o descreve tem a forma $\psi = r \exp(\mathbf{I}\mathbf{e}_3\chi)$, de forma que $\mathbf{I}\mathbf{e}_3$ comuta com ψ , e conseqüentemente também comuta com $\partial\psi/\partial t$ na equação de Pauli; e como $(\mathbf{I}\mathbf{e}_3)^2 = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = -1$, o elétron estando em um auto-estado de spin a equação de Pauli pode ser escrita

$$i\hbar \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi, \quad (2.173)$$

com $\varphi = r \exp(i\chi)$, sendo i a unidade imaginária. A equação obtida é justamente a equação de Schrödinger para um elétron livre, logo, sob a visão da teoria de Pauli, a equação de Schrödinger descreve um elétron em um auto-estado de spin. Considerar-se-á agora o caso em que o elétron está sujeito a um campo eletromagnético externo.

Qualquer rotação dada por $\mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{e}_i' = U\mathbf{e}_i\tilde{U}$, com $U \in \text{Spin}(3)$, tal que $\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3$ preserva a direção de quantização. Tal rotação é dada por um rotor da forma

$$U = \exp(-\mathbf{I}\mathbf{e}_3\alpha) = \exp(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\alpha). \quad (2.174)$$

Como a descrição das quantidades observáveis ρ , \mathbf{s} , \mathbf{p} e E depende da direção de quantização escolhida, neste caso determinada pelo vetor \mathbf{e}_3 , tais quantidades devem ser invariantes sob rotações dos vetores \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 no plano que eles descrevem, como as rotações dadas pelo rotor U acima descrito. Sob esse tipo de rotação, ψ_β se transforma em $\psi_{\beta'}$ da forma prescrita pela equação (2.149), ou seja, da forma

$$\psi_\beta \mapsto \psi_{\beta'} = \psi_\beta \tilde{U} = \psi_\beta \exp(\mathbf{I}\mathbf{e}_3\alpha), \quad (2.175)$$

sendo $\beta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e $\beta' = \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ a base rotacionada. Tal transformação corresponde no caso matricial a

$$\psi \mapsto \psi \exp(i\alpha), \quad (2.176)$$

ou seja, corresponde ao que se conhece como uma *mudança de fase*. Observa-se que as quantidades observáveis são invariantes sob uma transformação de fase tal que α é constante, que é denominada uma *transformação de fase global*. No caso de uma *trans-*

formação de fase local, em que $\alpha = \alpha(\mathbf{x}, t)$, ou seja, em que α é função da posição e do tempo, verifica-se que as quantidades \mathbf{p} e E não são invariantes. Mas pode-se redefinir tais quantidades, introduzindo “campos auxiliares”, conhecidos como *campos de gauge*, de tal modo que as novas quantidades sejam invariantes quando o campo de spinores ψ sofre uma transformação de fase local. Nesse caso, verifica-se as seguintes transformações sob uma transformação de fase local do campo de spinores:

$$\rho\mathbf{p} \mapsto \rho\mathbf{p} + \rho\hbar\nabla\alpha; \quad (2.177)$$

$$\rho E \mapsto \rho E - \rho\hbar\frac{\partial\alpha}{\partial t}. \quad (2.178)$$

De fato, sob a transformação $\psi \mapsto \psi \exp(\mathbf{Ie}_3\alpha) = \psi\tilde{U}$ a quantidade $\rho\mathbf{p}$ (de acordo com a sua definição dada por (2.167)) se transforma em

$$\begin{aligned} \rho\mathbf{p}' &= \left\langle \hat{\mathbf{p}}(\psi\tilde{U}) \left(\widetilde{\psi\tilde{U}} \right) \right\rangle_1 \\ &= \left\langle \left[-\hbar\nabla(\psi\tilde{U}) \mathbf{Ie}_3 \right] (U\tilde{\psi}) \right\rangle_1 \\ &= \left\langle -\hbar \left[\dot{\nabla}\psi\tilde{U} + \dot{\nabla}\psi\dot{\tilde{U}} \right] \mathbf{Ie}_3 U\tilde{\psi} \right\rangle_1 \\ &= \left\langle -\hbar\dot{\nabla}\psi\tilde{U}\mathbf{Ie}_3 U\tilde{\psi} \right\rangle_1 + \left\langle -\hbar\dot{\nabla}\psi\dot{\tilde{U}}\mathbf{Ie}_3 U\tilde{\psi} \right\rangle_1 \\ &= \left\langle -\hbar\nabla\psi\tilde{U}U\mathbf{Ie}_3\tilde{\psi} \right\rangle_1 + \left\langle -\hbar \left[\sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i\psi \frac{\partial}{\partial x_i} \exp(\mathbf{Ie}_3\alpha) \right] \mathbf{Ie}_3 \exp(-\mathbf{Ie}_3\alpha)\tilde{\psi} \right\rangle_1 \\ &= \left\langle -\hbar\nabla\psi\mathbf{Ie}_3\tilde{\psi} \right\rangle_1 + \left\langle -\hbar \left[\sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i\psi \frac{\partial\alpha}{\partial x_i} \mathbf{Ie}_3 \exp(\mathbf{Ie}_3\alpha) \right] \mathbf{Ie}_3 \exp(-\mathbf{Ie}_3\alpha)\tilde{\psi} \right\rangle_1 \\ &= \left\langle \hat{\mathbf{p}}(\psi)\tilde{\psi} \right\rangle_1 + \left\langle -\hbar\nabla\alpha\psi(\mathbf{Ie}_3)^2\tilde{U}U\tilde{\psi} \right\rangle_1 \\ &= \rho\mathbf{p} + \left\langle -\hbar\nabla\alpha\psi(-1)(+1)\tilde{\psi} \right\rangle_1 \\ &= \rho\mathbf{p} + \langle \hbar\nabla\alpha\rho \rangle_1 \\ &= \rho\mathbf{p} + \rho\hbar\nabla\alpha, \end{aligned}$$

e a quantidade ρE (de acordo com a sua definição dada por (2.169)) se transforma em

$$\begin{aligned}
\rho E' &= \left\langle \hat{\mathbf{E}}(\psi\tilde{U}) \left(\widetilde{\psi\tilde{U}} \right) \right\rangle_0 \\
&= \left\langle \hbar \frac{\partial}{\partial t} [\psi \exp(\mathbf{Ie}_3\alpha)] \mathbf{Ie}_3 \exp(-\mathbf{Ie}_3\alpha) \tilde{\psi} \right\rangle_0 \\
&= \left\langle \left[\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \exp(\mathbf{Ie}_3\alpha) + \hbar \psi \frac{\partial}{\partial t} \exp(\mathbf{Ie}_3\alpha) \right] \mathbf{Ie}_3 \exp(-\mathbf{Ie}_3\alpha) \tilde{\psi} \right\rangle_0 \\
&= \left\langle \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \mathbf{Ie}_3 \tilde{\psi} \right\rangle_0 + \left\langle \hbar \psi \frac{\partial \alpha}{\partial t} \exp(\mathbf{Ie}_3\alpha) \mathbf{Ie}_3 \mathbf{Ie}_3 \exp(-\mathbf{Ie}_3\alpha) \tilde{\psi} \right\rangle_0 \\
&= \left\langle \hat{\mathbf{E}}(\psi) \tilde{\psi} \right\rangle_0 + \left\langle \hbar \psi \frac{\partial \alpha}{\partial t} (-1) \tilde{\psi} \right\rangle_0 \\
&= \rho E - \rho \hbar \frac{\partial \alpha}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Define-se então o operador *momento cinético* $\hat{\mathbf{P}}$, o qual fornecerá a nova densidade de momento (cinético)

$$\rho \mathbf{p} = \left\langle \hat{\mathbf{P}}(\psi) \tilde{\psi} \right\rangle_1, \quad (2.179)$$

por

$$\hat{\mathbf{P}}(\psi) = \hat{\mathbf{p}}(\psi) + \frac{e}{c} \mathbf{A} \psi = -\hbar \nabla \psi \mathbf{Ie}_3 + \frac{e}{c} \mathbf{A} \psi, \quad (2.180)$$

em que \mathbf{A} é o potencial vetorial eletromagnético associado ao campo eletromagnético externo, que se impõe transformar-se sob a mudança de fase como

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} - \frac{\hbar c}{e} \nabla \alpha, \quad (2.181)$$

já que tal transformação não afeta a descrição do campo magnético, o qual é dado por $\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A}) = \star(\nabla \wedge \mathbf{A})$. Da mesma forma, introduz-se um campo escalar Φ , que identifica-se como o potencial escalar eletromagnético, o qual se impõe transformar-se como

$$\Phi \mapsto \Phi + \frac{\hbar}{e} \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad (2.182)$$

já que tal transformação, quando efetuada em conjunto com a transformação do campo \mathbf{A} acima, não afeta a descrição do campo elétrico, o qual é dado por $\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$.

De forma que define-se o novo operador de energia, o *operador hamiltoniano* \hat{H} , por

$$\hat{H}(\psi) = \frac{1}{2m} \left(\hat{P} \circ \hat{P} \right) (\psi) - e\Phi\psi = \frac{1}{2m} \hat{P}^2(\psi) - e\Phi\psi. \quad (2.183)$$

Dessa forma, escreve-se a equação de Pauli para o elétron sujeito ao campo eletromagnético externo descrito pelos potenciais Φ e \mathbf{A} como

$$\hat{H}(\psi) = \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \mathbf{Ie}_3. \quad (2.184)$$

Com relação a esta formulação, é interessante salientar que não há necessidade de se postular a forma de interação do elétron com o campo eletromagnético externo. Com efeito, o cálculo da expressão $\hat{P}^2(\psi)$ dá

$$\begin{aligned} \hat{P}^2(\psi) &= \left(\hat{P} \circ \hat{P} \right) (\psi) = \hat{P} \left[\hat{P}(\psi) \right] \\ &= \hat{P} \left[\hat{p}(\psi) + \frac{e}{c} \mathbf{A}\psi \right] \\ &= \hat{p} \left[\hat{p}(\psi) + \frac{e}{c} \mathbf{A}\psi \right] + \frac{e}{c} \mathbf{A} \left[\hat{p}(\psi) + \frac{e}{c} \mathbf{A}\psi \right] \\ &= -\hbar \nabla \left[-\hbar \nabla \psi \mathbf{Ie}_3 + \frac{e}{c} \mathbf{A}\psi \right] \mathbf{Ie}_3 + \frac{e}{c} \mathbf{A} \left[-\hbar \nabla \psi \mathbf{Ie}_3 + \frac{e}{c} \mathbf{A}\psi \right] \\ &= -\hbar^2 \nabla^2 \psi - \frac{e\hbar}{c} \nabla(\mathbf{A}\psi) \mathbf{Ie}_3 - \frac{e\hbar}{c} \mathbf{A} \nabla \psi \mathbf{Ie}_3 + \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2 \psi \\ &\stackrel{*}{=} -\hbar^2 \nabla^2 \psi - \frac{e\hbar}{c} (\nabla \mathbf{A}) \psi \mathbf{Ie}_3 - 2 \frac{e\hbar}{c} (\mathbf{A} \cdot \nabla) \psi \mathbf{Ie}_3 + \frac{e\hbar}{c} \mathbf{A} \nabla \psi \mathbf{Ie}_3 - \frac{e\hbar}{c} \mathbf{A} \nabla \psi \mathbf{Ie}_3 + \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2 \psi \\ &= -\hbar^2 \nabla^2 \psi - \frac{e\hbar}{c} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \psi \mathbf{Ie}_3 - \frac{e\hbar}{c} (\nabla \wedge \mathbf{A}) \psi \mathbf{Ie}_3 - 2 \frac{e\hbar}{c} (\mathbf{A} \cdot \nabla) \psi \mathbf{Ie}_3 + \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2 \psi \\ &= -\hbar^2 \nabla^2 \psi - \frac{e\hbar}{c} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \psi \mathbf{Ie}_3 + \frac{e\hbar}{c} \text{rot}(\mathbf{A}) \psi \mathbf{e}_3 - 2 \frac{e\hbar}{c} (\mathbf{A} \cdot \nabla) \psi \mathbf{Ie}_3 + \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2 \psi. \\ &= -\hbar^2 \nabla^2 \psi - \frac{e\hbar}{c} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \psi \mathbf{Ie}_3 + \frac{e\hbar}{c} \mathbf{B} \psi \mathbf{e}_3 - 2 \frac{e\hbar}{c} (\mathbf{A} \cdot \nabla) \psi \mathbf{Ie}_3 + \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2 \psi. \end{aligned} \quad (2.185)$$

* Nesse passo utilizou-se do seguinte resultado (em que, para simplificação, se utiliza da convenção de soma de Einstein):

$$\begin{aligned}
\nabla(\mathbf{A}\psi) &= \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x^i} (\mathbf{A}\psi) = \mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^i} \psi + \mathbf{e}_i \mathbf{A} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \\
&= (\nabla \mathbf{A})\psi + (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{A}) \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \\
&= (\nabla \mathbf{A})\psi + (2\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{e}_i) \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \\
&= (\nabla \mathbf{A})\psi + 2(\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i) \frac{\partial \psi}{\partial x^i} - \mathbf{A}\mathbf{e}_i \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \\
&= (\nabla \mathbf{A})\psi + 2 \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \psi - \mathbf{A}\nabla\psi \\
&= (\nabla \mathbf{A})\psi + 2(\mathbf{A} \cdot \nabla)\psi - \mathbf{A}\nabla\psi.
\end{aligned} \tag{2.186}$$

Por outro lado, pensando no operador de momento em termos de “operadores componentes” como

$$\hat{\mathbf{p}}(\psi) = \mathbf{e}_i \hat{\mathbf{p}}_i(\psi) = -\hbar \mathbf{e}_i \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \mathbf{I}\mathbf{e}_3 \tag{2.187}$$

(em que doravante se utiliza da convenção de soma de Einstein), e da mesma forma, escrevendo

$$\hat{\mathbf{P}}(\psi) = \mathbf{e}_i \hat{\mathbf{P}}_i(\psi) = \mathbf{e}_i \hat{\mathbf{p}}_i(\psi) + \frac{e}{c} \mathbf{e}_i A_i \psi, \tag{2.188}$$

pode-se escrever

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{P}}^2 &= \hat{\mathbf{P}} \circ \hat{\mathbf{P}} = (\mathbf{e}_i \hat{\mathbf{P}}_i) \circ (\mathbf{e}_j \hat{\mathbf{P}}_j) \\
&= (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) (\hat{\mathbf{P}}_i \circ \hat{\mathbf{P}}_j) \\
&= (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j) (\hat{\mathbf{P}}_i \circ \hat{\mathbf{P}}_j) \\
&= (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) (\hat{\mathbf{P}}_i \circ \hat{\mathbf{P}}_j) + (\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j) (\hat{\mathbf{P}}_i \circ \hat{\mathbf{P}}_j) \\
&= \delta_{ij} (\hat{\mathbf{P}}_i \circ \hat{\mathbf{P}}_j) + (\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j) (\hat{\mathbf{P}}_i \circ \hat{\mathbf{P}}_j) \\
&= (\hat{\mathbf{P}}_i \circ \hat{\mathbf{P}}_i) + (\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j) (\hat{\mathbf{P}}_i \circ \hat{\mathbf{P}}_j),
\end{aligned} \tag{2.189}$$

Dessa forma, identifica-se $(\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j) (\hat{\mathbf{P}}_i \circ \hat{\mathbf{P}}_j) (\psi)$ com $\frac{e\hbar}{c} \mathbf{B}\psi \mathbf{e}_3$ na equação (2.185), que é o único termo envolvendo um produto externo naquela equação; os termos restantes são

então identificados com $(\hat{\mathbf{P}}_i \circ \hat{\mathbf{P}}_i)(\psi)$. Assim, tem-se

$$(\hat{\mathbf{P}}_i \circ \hat{\mathbf{P}}_i)(\psi) = -\hbar^2 \nabla^2 \psi - \frac{e\hbar}{c} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \psi \mathbf{Ie}_3 - 2 \frac{e\hbar}{c} (\mathbf{A} \cdot \nabla) \psi \mathbf{Ie}_3 + \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2 \psi \quad (2.190)$$

e

$$(\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j) (\hat{\mathbf{P}}_i \circ \hat{\mathbf{P}}_j)(\psi) = \frac{e\hbar}{c} \mathbf{B} \psi \mathbf{e}_3. \quad (2.191)$$

De modo que a equação de Pauli, (2.184), pode ser escrita na forma

$$\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \mathbf{Ie}_3 = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{P}}_i \circ \hat{\mathbf{P}}_i)(\psi) - e\Phi \psi + \frac{e\hbar}{2mc} \mathbf{B} \psi \mathbf{e}_3. \quad (2.192)$$

Poderia-se trabalhar com esta equação no sentido de apresentar algumas aplicações básicas, tal como fez J. Vaz Jr. no trabalho em que essa apresentação se baseia (VAZ JR., 1997), o que foi até feito em manuscritos, mas o fator tempo impôs a restrição de não apresentação de tais aplicações. O leitor interessado é remetido ao trabalho original. Também indica-se o trabalho “Local Observables in Quantum Theory”, de D. Hestenes e R. Gürtler (HESTENES; GÜRTLER, 1971), o qual é, inclusive, um dos trabalhos em que J. Vaz Jr. se baseia.

3 A Álgebra Geométrica do Espaço-Tempo

Considera-se, neste capítulo, álgebras geométricas de espaços pseudo-euclidianos, com ênfase na *álgebra geométrica do espaço-tempo de Minkowski*, com base no exposto em “A Álgebra Geométrica do Espaço-Tempo e a Teoria da Relatividade”, de Jayme Vaz Jr. (VAZ JR., 2000), e também com base em algumas informações colhidas do capítulo 5 (“Relativity and Spacetime”) do livro “Geometric Algebra for Physicists”, de Christopher J. L. Doran e Anthony N. Lasenby (DORAN; LASENBY, 2003). Também é feita uma concisa apresentação sobre a *álgebra de Dirac* e aos *spinors de Dirac* com base numa exposição no artigo “Maxwell and Dirac Theories as an Already Unified Theory”, de Jayme Vaz Jr. e Waldyr A. Rodrigues Jr. (VAZ JR.; RODRIGUES JR., 1995).

3.1 Espaços Pseudo-Euclidianos

Introduz-se aqui a ideia de um espaço pseudo-euclidiano através do caso bidimensional e faz-se uma comparação com o plano euclidiano.

Considere o espaço vetorial usual associado a \mathbb{R}^2 , e, como no capítulo anterior, deixe que seus elementos sejam denotados por letras latinas em negrito: \mathbf{u} , \mathbf{v} , etc. Sua base canônica será denotada por $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ (em que fica subentendida a ordenação da base), de tal forma que se escreve, genericamente, $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$, etc. A interpretação desse espaço será a interpretação geométrica usual: \mathbb{R}^2 corresponde ao plano, e seus pares ordenados representam vetores do plano.

Considere a forma bilinear $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$h(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = -h(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 1 \quad \text{e} \quad h(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = h(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = 0. \quad (3.1)$$

Tomando-se $h(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, sendo \mathbf{u} e \mathbf{v} vetores genéricos, e aplicando-se então a propriedade de bilinearidade, verifica-se que $h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = h(\mathbf{v}, \mathbf{u})$, ou seja, a forma bilinear h é simétrica. De fato, tem-se que

$$\begin{aligned}
h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= h(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2, v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) \\
&= u_1v_1h(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + u_1v_2h(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + u_2v_1h(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + u_2v_2h(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = u_1v_1 - u_2v_2 \\
&= v_1u_1h(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + v_1u_2h(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + v_2u_1h(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + v_2u_2h(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = h(\mathbf{v}, \mathbf{u}).
\end{aligned}$$

Em particular,

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = u_1^2 - u_2^2. \quad (3.2)$$

Embora h seja simétrica, a equação acima permite observar que ela não é positiva-definida, podendo $h(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ assumir qualquer valor real, inclusive zero, sem que \mathbf{u} seja necessariamente o vetor nulo. Não obstante, é útil trabalhar com \mathbb{R}^2 dotado da forma bilinear h acima definida, o que determina um caso particular do que se chama um *espaço pseudo-euclidiano*, nesse caso, o *plano pseudo-euclidiano*.

Considerar-se-á a “norma” induzida pela forma bilinear h , que será denominada *pseudonorma* (por não se tratar de fato de uma norma):

$$\|\mathbf{u}\|_h^2 = h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = u_1^2 - u_2^2. \quad (3.3)$$

A fim de apresentar alguns aspectos do plano pseudo-euclidiano, considerar-se-á primeiro os seus análogos em um plano euclidiano. Isso será feito sob forma de recordação.

Seja g a forma bilinear dada por (2.1) e $\|\cdot\|_g$ a norma induzida por ela. Dado um número real não nulo r , a equação

$$\|\mathbf{x}\|_g^2 = g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = r^2, \quad (3.4)$$

que pode ser escrita em termos das componentes do vetor $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ como

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{x_1}{r}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{r}\right)^2 = 1, \quad (3.5)$$

descreve uma circunferência de raio $|r|$ centrada na origem. Tal circunferência pode ser parametrizada pelo ângulo θ que o vetor de posição genérico \mathbf{x} sobre a circunferência faz com o eixo das abscissas, o que é dado por $x_1 = r \cos(\theta)$ e $x_2 = r \sin(\theta)$, de modo a obter-se da equação da circunferência a conhecida identidade fundamental

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1. \quad (3.6)$$

A parametrização supracitada permite escrever o vetor \mathbf{x} como

$$\mathbf{x} = r[\cos(\theta)\mathbf{e}_1 + \sin(\theta)\mathbf{e}_2]. \quad (3.7)$$

Com respeito às funções seno e cosseno, é oportuno citar a célebre fórmula de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta), \quad (3.8)$$

a qual permite escrever as funções seno e cosseno em termos de exponenciais complexas:

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin(\theta) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}). \quad (3.9)$$

Ainda com respeito à circunferência, vale lembrar que um outro vetor $\mathbf{x}' = x_1'\mathbf{e}_1 + x_2'\mathbf{e}_2$ sobre a circunferência, obtido do vetor \mathbf{x} por uma rotação de $\Delta\theta$, é tal que

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Delta\theta) & -\sin(\Delta\theta) \\ \sin(\Delta\theta) & \cos(\Delta\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Considerar-se-á agora os aspectos análogos dos considerados acima no caso do plano pseudo-euclidiano.

Considere a forma bilinear h , dada pelas relações (3.1). A equação

$$\|\mathbf{x}\|_h^2 = h(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \text{const.} \quad (3.11)$$

pode descrever formas geométricas diferentes conforme a constante que nela aparece é (I) positiva, (II) negativa ou (III) nula. Considere primeiro o caso I, em que a equação pode ser escrita sob a forma

$$\|\mathbf{x}\|_h^2 = h(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = r^2, \quad (3.12)$$

para algum real r não nulo, ou mais explicitamente, em termos das componentes do vetor $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$:

$$x_1^2 - x_2^2 = r^2 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{x_1}{r}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{r}\right)^2 = 1. \quad (3.13)$$

Essa é a equação da hipérbole equilátera com vértices em $(-r, 0)$ e $(r, 0)$. No caso II, a

equação toma forma

$$\|\mathbf{x}\|_h^2 = h(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -r^2, \quad (3.14)$$

que em termos das componentes do vetor \mathbf{x} , pode ser escrita como

$$x_1^2 - x_2^2 = -r^2 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{x_2}{r}\right)^2 - \left(\frac{x_1}{r}\right)^2 = 1. \quad (3.15)$$

Essa é a equação da hipérbole equilátera com vértices em $(0, -r)$ e $(0, r)$. Quanto ao caso III, tem-se a equação

$$\|\mathbf{x}\|_h^2 = h(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0, \quad (3.16)$$

que em termos das componentes do vetor \mathbf{x} é escrita como

$$x_1^2 - x_2^2 = 0 \quad \text{ou} \quad x_1 = \pm x_2, \quad (3.17)$$

o que descreve as assíntotas das hipérboles consideradas acima. Na figura abaixo seguem os gráficos das figuras geométricas consideradas em cada caso.

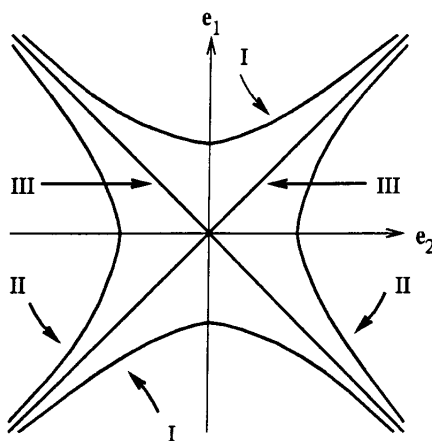


FIGURA 3.1 – Curvas consideradas nos casos I, II e III no texto (considera-se o eixo das abscissas vertical e o eixo das ordenadas horizontal, de tal modo que é apresentada “a outra face” do plano, perspectiva que não é usual em geometria, mas é usual na teoria especial da relatividade, em que o eixo vertical corresponde ao tempo e o horizontal à distância). Fonte: (VAZ JR., 2000).

Da mesma forma que a circunferência pode ser parametrizada por um ângulo, um ramo de hipérbole pode ser parametrizado por uma quantidade que se denomina *ângulo hiperbólico*, a qual não consiste num ângulo no sentido usual, embora para esse conceito haja uma definição formal (a qual não é feita aqui). No entanto, pode-se pensar no ângulo hiperbólico genérico α como o argumento das funções cosseno e seno hiperbólicos, as quais

podem ser definidas respectivamente por

$$\cosh(\alpha) = \frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha}) \quad \text{e} \quad \sinh(\alpha) = \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha}). \quad (3.18)$$

Note que tais funções satisfazem

$$e^\alpha = \cosh(\alpha) + \sinh(\alpha) \quad (3.19)$$

e

$$\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 1, \quad (3.20)$$

que tem como seus análogos no caso da “geometria circular” as equações (3.9), (3.8) e (3.6). A parametrização do ramo superior da hipérbole I se dá por meio das relações

$$\cosh(\alpha) = \frac{v_1}{r} \quad \text{e} \quad \sinh(\alpha) = \frac{v_2}{r}, \quad (3.21)$$

que permitem escrever um vetor de posição genérico do ramo de hipérbole $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$ como

$$\mathbf{v} = r[\cosh(\alpha)\mathbf{e}_1 + \sinh(\alpha)\mathbf{e}_2]. \quad (3.22)$$

Qualquer outro vetor de posição $\mathbf{v}' = v_1'\mathbf{e}_1 + v_2'\mathbf{e}_2$ sobre o ramo de hipérbole considerado pode ser obtido de \mathbf{v} por meio de uma *rotação hiperbólica* por certo ângulo hiperbólico $\Delta\alpha$, de acordo com

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\Delta\alpha) & \sinh(\Delta\alpha) \\ \sinh(\Delta\alpha) & \cosh(\Delta\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Uma tal rotação hiperbólica, para um ângulo hiperbólico $\Delta\alpha$ negativo, segue ilustrada na figura 3.2.

Ainda sobre o plano pseudo-euclidiano, tendo-se em mente que a forma bilinear h não é positiva-definida, existe não apenas um, mas uma infinidade de vetores \mathbf{u} tais que $h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$, todos eles sendo *vetores nulos*, mas não no sentido de que $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$, mas sim perante a forma métrica h . Com respeito ao valor de $h(\mathbf{u}, \mathbf{u})$, também é possível classificar um vetor \mathbf{u} de outras duas formas: (1) \mathbf{u} tal que $h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$ e (2) \mathbf{u} tal que $h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) < 0$. Pela própria definição da forma bilinear h , o vetor \mathbf{e}_1 é do tipo 1, e o vetor \mathbf{e}_2 é do tipo 2. Essa característica faz com que as duas componentes de um vetor tenham

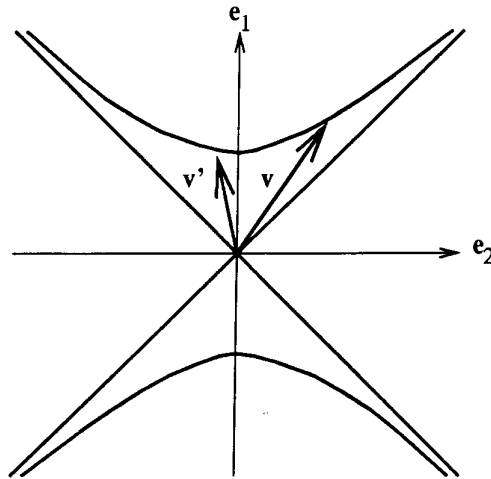


FIGURA 3.2 – Uma rotação hiperbólica de um vetor \mathbf{v} , por um ângulo hiperbólico negativo, resultando num vetor \mathbf{v}' . Fonte: (VAZ JR., 2000).

uma natureza distinta para um espaço pseudo-euclidiano, de tal modo que para um tal espaço cada um dos dois subespaços provindos de uma decomposição ortogonal tenham uma natureza distinta perante a forma métrica h . Esse fato faz com que se represente o plano pseudo-euclidiano por $\mathbb{R}^{1,1}$. Deixa-se nota que um espaço pseudo-euclidiano genérico é construído de forma similar ao plano pseudo-euclidiano, sendo escrito $\mathbb{R}^{m,n}$, para m e n naturais, de modo que tem uma base canônica com m vetores do tipo 1 e n vetores do tipo 2. Tendo como motivação sua interpretação no âmbito da teoria da relatividade especial, doravante vetores do tipo 1 serão denominados vetores *do tipo tempo* e vetores do tipo 2 serão denominados vetores *do tipo espaço*; vetores nulos serão denominados vetores *do tipo luz*.

3.2 A Álgebra Geométrica do Plano Pseudo-Euclidiano

Como no caso das construções feitas no capítulo anterior, a *álgebra geométrica do plano pseudo-euclidiano* é determinada por um espaço construído a partir de $\mathbb{R}^{1,1}$ munido do produto geométrico, o qual neste contexto também é denotado por justaposição.

Neste caso, a propriedade fundamental do produto geométrico é dada por

$$\mathbf{u}\mathbf{u} = h(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{1,1}, \quad (3.24)$$

ou em termos de notação exponencial e da pseudo-norma por

$$\mathbf{u}^2 = \|\mathbf{u}\|_h^2, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{1,1}. \quad (3.25)$$

A propriedade acima pode ainda ser escrita em termos de componentes como

$$(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2)(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2) = u_1^2 - u_2^2.$$

Aplicando nessa equação a propriedade de bilinearidade, propriedade fundamental do produto de uma álgebra, tem-se

$$u_1^2\mathbf{e}_1^2 + u_1u_2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) + u_2^2\mathbf{e}_2^2 = u_1^2 - u_2^2,$$

que implica

$$\mathbf{e}_1^2 = 1, \quad \mathbf{e}_2^2 = -1 \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1. \quad (3.26)$$

Essas são as relações fundamentais para a avaliação do produto geométrico da álgebra geométrica do plano pseudo-euclidiano. Aplicando-as no cálculo do produto geométrico de dois vetores arbitrários $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\mathbf{v} &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2)(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) \\ &= u_1v_1\mathbf{e}_1^2 + u_1v_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + u_2v_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + u_2v_2\mathbf{e}_2^2 \\ &= (u_1v_1 - u_2v_2) + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (3.27)$$

que corresponde à soma de uma parte simétrica, $(u_1v_1 - u_2v_2)$, e uma parte anti-simétrica, $(u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, com relação à troca de \mathbf{u} por \mathbf{v} . Como o produto geométrico pode ser escrito univocamente sob a forma

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{u}) + \frac{1}{2}(\mathbf{u}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{u}), \quad (3.28)$$

sendo o primeiro termo a parte simétrica e o segundo a parte anti-simétrica do produto, escreve-se

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \quad (3.29)$$

em que define-se

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{u}) = u_1v_1 - u_2v_2 = h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (3.30)$$

e

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{u}) = (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \quad (3.31)$$

os quais são denominados *produto interno/escalar* e *produto externo/cunha* dos vetores $\mathbf{u}\mathbf{v}$, respectivamente.

Como no caso do plano euclidiano, os objetos da forma $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, tais como $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, são definidos como bivectores e interpretados como fragmentos de plano orientados. Essa interpretação independe das propriedades métricas do espaço. Entretanto, observa-se que no caso pseudo-euclidiano tem-se $(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = 1$ (diferentemente do caso euclidiano em que se tem $(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = -1$), o que conduz a relações métricas diferentes para o caso pseudo-euclidiano, mas não influi na estrutura multivetorial subjacente à álgebra em consideração. Com a notação $\mathbb{R}^{1,1}$ para o plano pseudo-euclidiano, introduzida na seção anterior, o espaço vetorial dos escalares reais é alternativamente denotado $\Lambda^0(\mathbb{R}^{1,1})$, o espaço dos vetores do plano pseudo-euclidiano é também denotado por $\Lambda^1(\mathbb{R}^{1,1})$, e o espaço dos bivectores é denotado por $\Lambda^2(\mathbb{R}^{1,1})$. Assim, define-se o espaço vetorial

$$\Lambda(\mathbb{R}^{1,1}) = \bigoplus_{k=0}^2 \Lambda^k(\mathbb{R}^{1,1}) = \Lambda^0(\mathbb{R}^{1,1}) \oplus \Lambda^1(\mathbb{R}^{1,1}) \oplus \Lambda^2(\mathbb{R}^{1,1}), \quad (3.32)$$

cujos elementos, assim como no caso euclidiano, são da forma dada por (2.11) e são denominados multivetores. Tal espaço multivetorial dotado do produto geométrico determinado pelas relações (3.26) e estendido para multivetores genéricos por bilinearidade e associatividade determina a *álgebra geométrica do plano pseudo-euclidiano*, a qual é denotada por $\mathcal{Cl}_{1,1}$.

Os operadores de projeção, involução graduada, reversão e conjugação são definidos da mesma forma que no caso do plano euclidiano — respectivamente pelas equações (2.12), (2.13), (2.14) e (2.15). A pseudo-norma $\|A\|_h$ de um multivetor A de $\mathcal{Cl}_{1,1}$ é definida da mesma forma que a norma de um multivetor no caso euclidiano, por (2.18) (com a devida consideração do produto geométrico como sendo o de $\mathcal{Cl}_{1,1}$), e se a condição (2.20) é satisfeita, o inverso também é definido por (2.21).

Para um bivector $\mathbf{B} = a_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ do plano pseudo-euclidiano, tem-se

$$\|\mathbf{B}\|_h^2 = \langle \mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}} \rangle_0 = \langle (a_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)(a_{12}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) \rangle_0 = \langle a_{12}^2 \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \rangle_0 = -a_{12}^2 \leq 0. \quad (3.33)$$

No entanto, da mesma forma que se obteve a equação (2.23) no caso do plano pseudo-

euclidiano, obtém-se

$$\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|_h^2 = \|\mathbf{u}\|_h^2 \|\mathbf{v}\|_h^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2, \quad (3.34)$$

para dois vetores arbitrários \mathbf{u} e \mathbf{v} , de modo que $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|_h^2 \leq 0$ implica

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \geq \|\mathbf{u}\|_h^2 \|\mathbf{v}\|_h^2, \quad (3.35)$$

que é o análogo da desigualdade de Cauchy-Schwarz, (2.24), no caso pseudo-euclidiano. Dessa forma, se \mathbf{u} e \mathbf{v} são vetores do tipo tempo com coordenada temporal de mesmo sinal (o que se expressa na teoria especial da relatividade dizendo que ambos os vetores estão dirigidos para o futuro ou para o passado), tem-se

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \geq \|\mathbf{u}\|_h \|\mathbf{v}\|_h,$$

de modo que

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|_h^2 = \|\mathbf{u}\|_h^2 + \|\mathbf{v}\|_h^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \geq \|\mathbf{u}\|_h^2 + \|\mathbf{v}\|_h^2 + 2\|\mathbf{u}\|_h \|\mathbf{v}\|_h = (\|\mathbf{u}\|_h + \|\mathbf{v}\|_h)^2,$$

que implica

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|_h \geq \|\mathbf{u}\|_h + \|\mathbf{v}\|_h, \quad (3.36)$$

que é o análogo da desigualdade triangular, (2.28), no caso pseudo-euclidiano, para dois vetores do tipo tempo com coordenada temporal de mesmo sinal. O ângulo hiperbólico α entre tais dois vetores é tal que

$$\cosh(\alpha) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|_h \|\mathbf{v}\|_h} \quad (3.37)$$

e

$$\sinh(\alpha) = \frac{\sqrt{-\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|_h^2}}{\|\mathbf{u}\|_h \|\mathbf{v}\|_h}, \quad (3.38)$$

em que os produtos interno e externo acima são os dados por (3.30) e (3.31).

Como no caso euclidiano, a reflexão de um vetor \mathbf{v} através de uma reta de vetor

ortogonal \mathbf{u} é dada por

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}' = -\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{u}^{-1}. \quad (3.39)$$

No entanto, há dois casos a considerar: $\mathbf{u}^2 = 1$, que implica $\mathbf{v}' = -\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{u}$, e $\mathbf{u}^2 = -1$, que implica $\mathbf{v}' = \mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{u}$. No primeiro caso o vetor \mathbf{u} é do tipo tempo e a reflexão se dá através de uma reta do tipo espaço (isto é, uma reta com vetor paralelo do tipo espaço). Nesse caso, como $\mathbf{u}^2 = \|\mathbf{u}\|_h^2 = 1$, pode-se escrever

$$\mathbf{u} = \cosh(\beta)\mathbf{e}_1 + \sinh(\beta)\mathbf{e}_2, \quad (3.40)$$

e, sendo $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{v}' = -\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{u}$ então fica

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' = -\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{u} &= -[\cosh(\beta)\mathbf{e}_1 + \sinh(\beta)\mathbf{e}_2](v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2)[\cosh(\beta)\mathbf{e}_1 + \sinh(\beta)\mathbf{e}_2] \\ &= -\left\{ [\cosh^2(\beta)v_1 + \sinh^2(\beta)v_1 - 2\sinh(\beta)\cosh(\beta)v_2]\mathbf{e}_1 + \right. \\ &\quad \left. + [2\sinh(\beta)\cosh(\beta)v_1 - \cosh^2(\beta)v_2 - \sinh^2(\beta)v_2]\mathbf{e}_2 \right\} \\ &= [\sinh(2\beta)v_2 - \cosh(2\beta)v_1]\mathbf{e}_1 + [\cosh(2\beta)v_2 - \sinh(2\beta)v_1]\mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (3.41)$$

em que considerou-se as relações

$$\cosh(2\beta) = \cosh^2(\beta) + \sinh^2(\beta) \quad \text{e} \quad \sinh(2\beta) = 2\sinh(\beta)\cosh(\beta),$$

que são facilmente verificadas em termos das definições de seno e cosseno hiperbólicos em termos de exponenciais. Note que, se $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1$, então $\beta = 0$ e daí

$$\mathbf{v}' = -v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2,$$

o que corresponde a uma inversão na parte temporal de \mathbf{v} . No caso em que \mathbf{u} é do tipo espaço, a reflexão de \mathbf{v} se dá através de uma reta do tipo tempo. Nesse caso, tem-se $\mathbf{u}^2 = \|\mathbf{u}\|_h^2 = -1$ e pode-se escrever

$$\mathbf{u} = \sinh(\beta)\mathbf{e}_1 + \cosh(\beta)\mathbf{e}_2. \quad (3.42)$$

Dessa forma, tem-se

$$\mathbf{v}' = \mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{u} = [\cosh(2\beta)v_1 - \sinh(2\beta)v_2]\mathbf{e}_1 + [\sinh(2\beta)v_1 - \cosh(2\beta)v_2]\mathbf{e}_2. \quad (3.43)$$

Em particular, se $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2$, então $\beta = 0$ e daí

$$\mathbf{v}' = v_1\mathbf{e}_1 - v_2\mathbf{e}_2,$$

o que corresponde a uma inversão na parte espacial de \mathbf{v} .

Como no caso do plano euclidiano, uma rotação hiperbólica de um vetor do plano pseudo-euclidiano pode ser descrita como a composição de duas reflexões, de modo que uma rotação hiperbólica genérica é dada por

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}' = L\mathbf{v}L^{-1} = L\mathbf{v}\tilde{L}, \quad (3.44)$$

em que $L = \mathbf{u}_1\mathbf{u}_2$, sendo \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 vetores tais que $\mathbf{u}_1^2 = \mathbf{u}_2^2 = 1$. O objeto L , o qual é denominado um rotor, pode ser escrito como

$$L = \mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2, \quad (3.45)$$

de modo que, se α é o ângulo hiperbólico formado por \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 , (3.37) e (3.38) permitem escrever

$$L = \cosh(\alpha) + \sinh(\alpha)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1. \quad (3.46)$$

Como no caso do plano euclidiano, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ poderia ter sido utilizado no lugar de $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$, mas as duas possibilidades são consideradas considerando-se que α pode assumir qualquer valor real, e utilizando-se a definição de seno hiperbólico em termos de exponenciais; além disso, a escolha do bivector $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$ é a adequada para que o rotor L acima descreva uma rotação hiperbólica no sentido de α crescente. Com efeito, a avaliação de $\mathbf{v}' = L\mathbf{v}\tilde{L}$ para L dado pela equação acima resulta

$$\mathbf{v}' = [\cosh(2\alpha)v_1 + \sinh(2\alpha)v_2]\mathbf{e}_1 + [\sinh(2\alpha)v_1 + \cosh(2\alpha)v_2]\mathbf{e}_2, \quad (3.47)$$

que pode ser expresso matricialmente por

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(2\alpha) & \sinh(2\alpha) \\ \sinh(2\alpha) & \cosh(2\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

e que se reconhece como o vetor obtido de uma rotação hiperbólica por 2α , no sentido de ângulo crescente, do vetor \mathbf{v} . Desse modo, observa-se que uma rotação por um ângulo hiperbólico α no sentido de ângulo crescente é descrita pelo rotor

$$L = \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1. \quad (3.48)$$

Utilizando as expressões como séries de potências das funções seno e cosseno hiperbólicos na expressão para L acima, e levando em conta que $(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1)^{2n} = 1$ e $(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1)^{2n+1} = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1$ para qualquer número natural n , tem-se

$$\begin{aligned} L = \cosh(\alpha/2) + \sinh(\alpha/2) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha/2)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha/2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1)^{2n} (\alpha/2)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1)^{2n+1} (\alpha/2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \alpha/2)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \alpha/2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \alpha/2)^n}{n!}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

de forma que, pela definição da exponencial de um multivetor, pode-se escrever

$$L = \exp\left(\frac{1}{2} \alpha \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1\right). \quad (3.50)$$

Por fim, para que fique melhor ilustrada uma rotação hiperbólica, dada a base $\beta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, considere a base rotacionada $\beta' = \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$ dada por $\mathbf{e}_i' = L \mathbf{e}_i \tilde{L}$, com o rotor L dado pela expressão acima. Sem muitas dificuldades obtém-se

$$\mathbf{e}_1' = L \mathbf{e}_1 \tilde{L} = \cosh(\alpha) \mathbf{e}_1 + \sinh(\alpha) \mathbf{e}_2 \quad (3.51)$$

e

$$\mathbf{e}_2' = L \mathbf{e}_2 \tilde{L} = \sinh(\alpha) \mathbf{e}_1 + \cosh(\alpha) \mathbf{e}_2. \quad (3.52)$$

Para um dado α , uma análise da orientação dos vetores de base rotacionados acima, que

consiste na análise do comportamento funcional de suas componentes, o que, por sua vez, recai na análise do comportamento das funções seno e cosseno hiperbólicos, permite verificar que uma rotação hiperbólica por α dos vetores de base se dá conforme ilustrado na figura 3.3, caso $\alpha > 0$, e se dá conforme ilustrado na figura 3.4, caso $\alpha < 0$. De fato: $\alpha > 0$ implica em $\cosh(\alpha) > 1$ e $\sinh(\alpha) > 0$; $\alpha < 0$ implica em $\cosh(\alpha) > 1$ e $\sinh(\alpha) < 0$; além disso, sempre tem-se $\cosh(\alpha) > \sinh(\alpha)$, e $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} |\cosh(\alpha) - \sinh(\alpha)| = 0$.

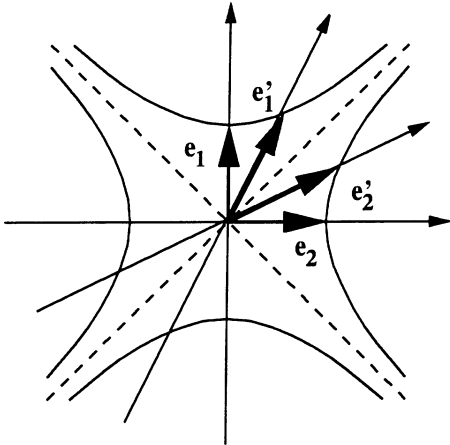


FIGURA 3.3 – Rotação hiperbólica de e_1 e e_2 por um ângulo hiperbólico positivo. Fonte: (VAZ JR., 2000).

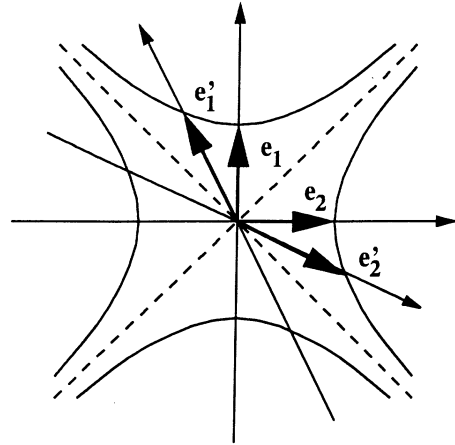


FIGURA 3.4 – Rotação hiperbólica de e_1 e e_2 por um ângulo hiperbólico negativo. Fonte: (VAZ JR., 2000).

3.3 O Espaço-Tempo de Minkowski

Nesta seção, pretende-se esclarecer o que se entende por *espaço-tempo*. Mas antes, é necessário introduzir a ideia de um *espaço afim*, e considerar primeiro o caso de um *espaço afim euclidiano*, antes que se lide com o caso pseudo-euclidiano. O motivo é que o *espaço físico* é adequadamente descrito por um espaço afim.

Um conjunto \mathbb{E} , cujos elementos são denominados *pontos*, é dito ser um *espaço afim* se existe uma aplicação $\varphi : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow V$, para algum espaço vetorial V sobre o corpo dos reais e de dimensão finita, tal que: (i) para qualquer ponto P de \mathbb{E} e vetor v de V existe apenas um ponto Q de \mathbb{E} tal que $\varphi(P, Q) = v$; (ii) para quaisquer pontos P, Q e R de \mathbb{E} tem-se $\varphi(P, Q) + \varphi(Q, R) = \varphi(P, R)$. É usual se utilizar da notação $\overrightarrow{PQ} = \varphi(P, Q)$. Observe que da propriedade ii segue que $\overrightarrow{PP} = o$ (sendo o vetor nulo de V) e que $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$, para quaisquer pontos P e Q de \mathbb{E} . A *dimensão* do espaço afim \mathbb{E} é definida como a dimensão do espaço vetorial V : $\dim(\mathbb{E}) = \dim(V)$. Um espaço afim de dimensão 1 é dito ser uma reta, um espaço afim de dimensão 2 é dito ser um plano, e assim por diante. Dado um ponto P de \mathbb{E} , definindo o conjunto de vetores $T_P = \{ \overrightarrow{PQ} \mid Q \in \mathbb{E} \}$, tem-se que o espaço vetorial real definido por T_P é isomorfo ao espaço vetorial V ; intuitivamente isso significa

que não há nenhum ponto preferencial em um espaço afim, de modo que qualquer ponto pode ser tomado como a origem de um sistema de referência.

Seja V um espaço vetorial de dimensão n . Esse espaço pode ser analisado em termos dos vetores de \mathbb{R}^n , uma vez que $V \simeq \mathbb{R}^n$. Seja \mathbb{E} então um espaço afim de dimensão n . Denomina-se um *referencial afim* de \mathbb{E} um par (O, β) , sendo O um ponto de \mathbb{E} e $\beta = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ uma base de \mathbb{R}^n . Se $\beta = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, ou seja, β é a base canônica de \mathbb{R}^n , (O, β) é denominado um *referencial canônico* de \mathbb{E} . Se um ponto P de \mathbb{E} é tal que o vetor \overrightarrow{OP} é dado em termos da base $\beta = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ de \mathbb{R}^n por

$$\overrightarrow{OP} = x_1 \mathbf{u}_1 + \dots + x_n \mathbf{u}_n,$$

então x_1, \dots, x_n são denominadas as *coordenadas afins* de P com relação ao referencial (O, β) , que correspondem às coordenadas do vetor \overrightarrow{OP} com relação à base β .

Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^4 e deixe que sua base canônica seja denotada por $\beta = \{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, de forma que um vetor genérico seja denotado

$$\mathbf{x} = \sum_{\mu=0}^3 x_\mu \mathbf{e}_\mu = x_0 \mathbf{e}_0 + x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3. \quad (3.53)$$

Considere então a forma bilinear $h : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$h(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu) = \eta_{\mu\nu}, \quad (3.54)$$

em que a quantidade indexada $\eta_{\mu\nu}$ é tal que $\eta_{00} = 1$ e $\eta_{ii} = -1$, para $i \in \{1, 2, 3\}$. O espaço vetorial \mathbb{R}^4 dotado da forma bilinear h consiste em um espaço pseudo-euclidiano, conforme discutido na primeira seção deste capítulo, o qual é denotado por $\mathbb{R}^{1,3}$, por sua base conter um vetor do tipo 1/tempo e três vetores do tipo 2/espaco. Esse espaço é denominado *espaço vetorial de Minkowski*. A pseudo-norma induzida pela forma bilinear h é dada por

$$\|\mathbf{x}\|_h^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \quad (3.55)$$

ou por

$$\|\mathbf{x}\|_h^2 = \sum_{\mu=0}^3 \eta_{\mu\mu} x_\mu^2 = x_0^2 - \sum_{i=1}^3 x_i^2. \quad (3.56)$$

Como no caso do plano pseudo-euclidiano, um vetor qualquer \mathbf{x} de $\mathbb{R}^{1,3}$ pode ser classifi-

cado de acordo com sua pseudo-norma: é do tipo tempo se $\|\mathbf{x}\|_h^2 > 0$, é do tipo espaço se $\|\mathbf{x}\|_h^2 < 0$, e é do tipo luz se $\|\mathbf{x}\|_h^2 = 0$.

A equação

$$\|\mathbf{x}\|_h^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \quad (3.57)$$

determina o objeto geométrico que se denomina *cone de luz*, para o qual não há representação gráfica, já que se trata de um objeto quadridimensional, mas se desconsidera-se uma coordenada espacial, o que consiste em tomar a interseção do cone de luz com um hiper-plano dado por $x_i = 0$ ($i \in \{1, 2, 3\}$), o cone de luz pode de fato ser representado por um cone; se desconsidera-se duas coordenadas espaciais, tem-se o caso particular do plano pseudo-euclidiano, e o cone de luz se reduz às assíntotas das hipérbolas da figura 3.1. As equações $\|\mathbf{x}\|_h^2 = \pm r^2$, sendo r uma constante real, determinam “hiper-hiperboloides”. O cone de luz pode ser decomposto em duas partes, uma dada pela equação $x_0 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, que se designa *cone de luz do futuro*, e outra dada pela equação $x_0 = -\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, que se chama *cone de luz do passado*. As regiões do espaço de Minkowski dadas pelas inequações $x_0 > \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ e $x_0 < -\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ são denominadas, respectivamente, de *futuro* e *passado*; e as regiões dadas por $x_0^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ são denominadas de *presente*.

O espaço afim associado a $\mathbb{R}^{1,3}$ é denominado *espaço-tempo de Minkowski* e é denotado por $\mathbb{E}^{1,3}$; seus pontos são denominados *eventos*. Por vezes se utilizará simplesmente do termo “espaço-tempo”, ficando implícito que trata-se do espaço-tempo de Minkowski. Tomado um referencial canônico (O, β) , o evento de referência O é por vezes denominado *evento original*, e as coordenadas afins de um evento genérico P com relação a (O, β) são representadas por $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, x, y, z)$, de modo que

$$\overrightarrow{OP} = x_0\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = ct\mathbf{e}_0 + x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3, \quad (3.58)$$

em que: $x_0 = ct$ é a *coordenada temporal* do evento, sendo c a velocidade da luz no vácuo, uma constante universal, e t o instante de ocorrência do evento com relação ao evento original; $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$ são as coordenadas retangulares do evento, as quais o localizam no espaço físico tridimensional. O *intervalo* entre dois eventos A e B , dados respectivamente por (ct_A, x_A, y_A, z_A) e (ct_B, x_B, y_B, z_B) , é determinado por

$$\left\| \overrightarrow{AB} \right\|_h^2 = h \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \right) = c^2(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2, \quad (3.59)$$

e é interpretado como uma generalização do conceito de distância (ou melhor, do quadrado

da distância) do espaço euclidiano tridimensional.

Considere, de agora em diante, a seguinte convenção: quando não especificado, índices livres dados por letras gregas representam um inteiro genérico de 0 a 3, e índices livres dados por letras latinas representam um inteiro genérico de 1 a 3.

Adotado um referencial canônico, considere uma curva λ do espaço-tempo, a qual é parametrizada por uma variável real α , o que se representa por

$$\lambda : \{x_\mu\} = \{x_\mu(\alpha)\} \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \quad (3.60)$$

sendo que $\{x_\mu\}$ denota (x_0, x_1, x_2, x_3) . Um vetor tangente à curva λ num ponto genérico é dado por

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \{x_\mu\} = \left\{ \frac{dx_\mu}{d\alpha} \right\}, \quad (3.61)$$

e pode-se classificar a curva λ conforme a classificação do vetor \mathbf{v} , como sendo do tipo tempo ou do tipo espaço ou do tipo luz. A trajetória de uma partícula no espaço-tempo é denominada *linha de universo* ou *história* da partícula. Uma partícula de massa não nula possui uma linha de universo do tipo tempo, e a luz possui uma linha de universo do tipo luz (por isso os vetores nulos do espaço-tempo de Minkowski são denominados de vetores do tipo luz).

Considere uma curva suave e do tipo tempo do espaço-tempo dada por

$$\lambda : \{x_\mu\} = \{x_\mu(\alpha)\}, \quad \text{com } \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1], \quad (3.62)$$

sendo $[\alpha_0, \alpha_1]$ um intervalo real. O *comprimento* ℓ de λ pode ser escrito como

$$\ell = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \sqrt{|h(\mathbf{v}, \mathbf{v})|} d\alpha. \quad (3.63)$$

Pode-se então parametrizar λ pelo comprimento l , tal que $0 \leq l \leq \ell$, escrevendo l como função de α como

$$l = l(\alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \sqrt{|h(\mathbf{v}(\alpha'), \mathbf{v}(\alpha'))|} d\alpha',$$

e então invertendo essa equação de modo a escrever α como função de l . Considerando o

teorema fundamental do cálculo diferencial e integral, a derivada de $l(\alpha)$ dá

$$\frac{dl}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \sqrt{|h(\mathbf{v}(\alpha'), \mathbf{v}(\alpha'))|} d\alpha' = \sqrt{|h(\mathbf{v}(\alpha), \mathbf{v}(\alpha))|}. \quad (3.64)$$

Utilizando esse resultado, tem-se como um outro vetor tangente à curva λ

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(l) = \left\{ \frac{dx_\mu}{dl} \right\} = \left\{ \frac{dx_\mu}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dl} \right\} = \left\{ \frac{dx_\mu}{d\alpha} \right\} \frac{d\alpha}{dl} = \mathbf{v} \frac{1}{\sqrt{|h(\mathbf{v}, \mathbf{v})|}}, \quad (3.65)$$

que é um vetor unitário com relação à forma métrica h , ou seja, $\|\mathbf{V}\|_h^2$ tem valor unitário. Dessa forma, uma curva suave do tipo tempo parametrizada pelo seu comprimento tem vetor tangente (o calculado da forma natural por diferenciação com relação ao parâmetro l) unitário. Na prática se escreve $l = c\tau$, sendo o parâmetro τ , que tem dimensão de tempo, denominado *tempo próprio*.

Define-se um *observador* por uma curva do tipo tempo parametrizada pelo tempo próprio e orientada para o futuro, no sentido que seu vetor tangente unitário tem coordenada temporal positiva. Dessa forma, um observador corresponde à linha de universo de uma partícula. Se um observador é dado por uma reta, diz-se que ele é um *observador inercial*; no caso correspondente de uma partícula, diz-se que ela está em movimento uniforme. Desde que uma reta é determinada por um ponto e um vetor diretor, pode-se definir um observador inercial por um vetor do tipo tempo unitário orientado para o futuro, tendo implícito como ponto de referência a origem.

Um observador naturalmente “separa” o espaço-tempo em duas “partes”, “tempo” e “espaço”. Se o observador é dado por uma curva de vetor tangente unitário \mathbf{V} , esse fato é descrito formalmente por

$$\mathbb{R}^{1,3} = T \oplus E, \quad (3.66)$$

em que $T = \llbracket \mathbf{V} \rrbracket$, ou seja, T é o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{1,3}$ gerado pelo vetor tangente unitário à curva que descreve o observador em questão, e E é o complemento ortogonal de T , que é o subespaço vetorial gerado pelos vetores ortogonais a \mathbf{V} . Outro observador também “separa” o espaço-tempo em “tempo” e “espaço”, embora de forma distinta, conforme seu vetor tangente unitário seja diferente ao do primeiro observador considerado.

3.4 A Álgebra Geométrica do Espaço-Tempo de Minkowski

Como no caso do plano pseudo-euclidiano, pode-se definir a álgebra geométrica do espaço vetorial de Minkowski, que será denominada a *álgebra geométrica do espaço-tempo de Minkowski*, já que, adotado um referencial afim, o espaço-tempo de Minkowski é determinado pelo espaço vetorial de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$.

O produto geométrico dessa álgebra geométrica é tal que

$$\mathbf{u}^2 = h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|_h^2, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{1,3}, \quad (3.67)$$

ou, em termos de componentes,

$$(u_0\mathbf{e}_0 + u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3)(u_0\mathbf{e}_0 + u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2.$$

Considerando a bilinearidade do produto geométrico, pode-se verificar que a equação acima é satisfeita somente se

$$\mathbf{e}_0^2 = 1, \quad \mathbf{e}_i^2 = -1 \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_\mu\mathbf{e}_\nu = -\mathbf{e}_\nu\mathbf{e}_\mu, \quad (3.68)$$

sendo que $i \in \{1, 2, 3\}$, $\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $\mu \neq \nu$. Essas são as relações fundamentais que determinam o produto geométrico da álgebra geométrica do espaço-tempo de Minkowski. O produto geométrico envolvendo dois ou mais vetores é computado aplicando-se, além da bilinearidade, a lei associativa, e então as relações fundamentais acima. Como resultado desses produtos tem-se escalares (0-vetores), vetores (1-vetores), bivectores (2-vetores), trivetores (3-vetores) e também, neste caso, *quadrivetores* (ou *4-vetores*). Esses objetos, além de retas e planos, descrevem hiperplanos tridimensionais e hipercubos quadridimensionais, todos dotados de orientação.

Analogamente aos casos anteriores, o espaço dos k -vetores é genericamente denotado por $\Lambda^k(\mathbb{R}^{1,3})$. Assim, o espaço dos escalares é alternativamente denotado $\Lambda^0(\mathbb{R}^{1,3})$, o espaço dos vetores é alternativamente denotado por $\Lambda^1(\mathbb{R}^{1,3})$, etc. O espaço dos bivectores, $\Lambda^2(\mathbb{R}^{1,3})$, tem dimensão 6 e é gerado por $\{\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_0\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\}$. O espaço dos trivetores, $\Lambda^3(\mathbb{R}^{1,3})$, tem dimensão 4 e é gerado por $\{\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_0\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\}$. O espaço dos quadrivetores, $\Lambda^4(\mathbb{R}^{1,3})$, tem dimensão 1 e é gerado por $\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.

Note que $\dim[\Lambda^4(\mathbb{R}^{1,3})] = \dim[\Lambda^0(\mathbb{R}^{1,3})]$, de forma que $\Lambda^4(\mathbb{R}^{1,3}) \simeq \Lambda^0(\mathbb{R}^{1,3})$; por isso, neste contexto, os quadrivetores também são chamados de *pseudo-escalares*. Note

também que $\dim [\wedge^3(\mathbb{R}^{1,3})] = \dim [\wedge^1(\mathbb{R}^{1,3})]$, de modo que $\wedge^4(\mathbb{R}^{1,3}) \simeq \wedge^0(\mathbb{R}^{1,3})$, pelo qual os trivetores são também chamados de *pseudo-vetores*. De um modo geral, um n -vetor construído a partir de um espaço vetorial de dimensão n é também denominado pseudo-escalar, e um $(n - 1)$ -vetor é também denominado um pseudo-vetor. O motivo é a existência do isomorfismo (o isomorfismo Hodge) existente entre o espaço vetorial dos k -vetores e o espaço vetorial dos $(n - k)$ -vetores.

O espaço vetorial

$$\wedge(\mathbb{R}^{1,3}) = \bigoplus_{k=0}^4 \wedge^k(\mathbb{R}^{1,3}) \quad (3.69)$$

dotado do produto geométrico entre seus elementos, que é computado utilizando-se bilinearidade, associatividade e as relações fundamentais dadas por (3.68), determina uma estrutura de álgebra, que é a denominada *álgebra geométrica do espaço-tempo de Minkowski*, que pode ser simplesmente denominada *álgebra geométrica do espaço-tempo*. A exemplo dos casos anteriores, ela pode ser denotada $\mathcal{C}\ell_{1,3}$, e seus elementos denominados multivetores.

O pseudo-escalar $\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ é recorrente e para ele se reserva uma notação especial: $\mathbf{e}_5 = \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. A respeito de tal pseudo-escalar é interessante apontar a seguintes propriedades:

$$\mathbf{e}_5^2 = -1; \quad (3.70)$$

e

$$\mathbf{e}_5\mathbf{u} + \mathbf{u}\mathbf{e}_5 = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{1,3} \quad (3.71)$$

(em que 0 denota o vetor nulo de $\wedge(\mathbb{R}^{1,3})$, como nos casos anteriores). Como consequência da segunda propriedade acima, tem-se que \mathbf{e}_5 também anti-comuta com trivetores e comuta com bivectores e outros quadrvectores.

Os operadores de projeção, involução graduada, reversão e conjugação são definidos da mesma forma que nos casos anteriores — respectivamente pelas equações (2.12), (2.13), (2.14) e (2.15). A pseudo-norma $\|A\|_h$ de um multivetor A de $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ é definida da mesma forma que a norma de um multivetor no caso euclidiano, por (2.18) (com a devida consideração do produto geométrico como sendo o de $\mathcal{C}\ell_{1,3}$), e se a condição (2.20) é satisfeita, o inverso também é definido por (2.21).

Como no caso das outras álgebras geométricas, o produto geométrico de dois vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} de $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ pode ser escrito como a soma de uma parte simétrica e uma parte anti-

simétrica, as quais são definidas como os produtos interno e externo. Neste caso, tem-se:

$$\mathbf{uv} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \quad (3.72)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{uv} + \mathbf{vu}) = h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_0v_0 - u_1v_1 - u_2v_2 - u_3v_3, \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{uv} - \mathbf{vu}) = & (u_0v_1 - u_1v_0)\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1 + (u_0v_2 - u_2v_0)\mathbf{e}_0\mathbf{e}_2 + (u_0v_3 - u_3v_0)\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3 + \\ & + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Dado um multivetor A , a decomposição do produto geométrico dada pelas relações acima pode ser generalizada para o produto de um vetor \mathbf{u} com o multivetor A , e vice-versa, como no caso do espaço euclidiano. Abaixo segue uma tabela com a sumarização das relações envolvendo essas decomposições (o resultado é idêntico ao do caso euclidiano; confira as equações de (2.66) até (2.69)).

$\mathbf{u}A = \mathbf{u} \cdot A + \mathbf{u} \wedge A$	$A\mathbf{u} = A \cdot \mathbf{u} + A \wedge \mathbf{u}$
$\mathbf{u} \cdot A = \frac{1}{2}(\mathbf{u}A - \widehat{A}\mathbf{u})$	$A \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2}(A\mathbf{u} - \mathbf{u}\widehat{A})$
$\mathbf{u} \wedge A = \frac{1}{2}(\mathbf{u}A + \widehat{A}\mathbf{u})$	$A \wedge \mathbf{u} = \frac{1}{2}(A\mathbf{u} + \mathbf{u}\widehat{A})$

Reflexões e rotações no caso da álgebra geométrica do espaço-tempo são descritas de forma similar ao caso das álgebras geométricas do plano/espaço euclidiano e do plano pseudo-euclidiano. Uma rotação, em particular, é ainda dada por

$$\mathbf{v} \mapsto U\mathbf{v}\widetilde{U} = U\mathbf{v}U^{-1}, \quad (3.75)$$

sendo $U = \exp(\mathbf{B}/2)$, em que \mathbf{B} é um bivector. Entretanto, a rotação pode ser circular (uma rotação ordinária) ou hiperbólica conforme o caráter do bivector \mathbf{B} . Para ilustrar a situação, considere o bivector \mathbf{B} da forma $\mathbf{B} = \chi\mathbf{e}_\mu\mathbf{e}_\nu$, sendo χ real. Neste caso, se o bivector \mathbf{B} é tal que $\mathbf{B}^2 < 0$, deve-se ter $(\mathbf{e}_\mu\mathbf{e}_\nu)^2 = -1$, ou seja, o bivector $\mathbf{e}_\mu\mathbf{e}_\nu$ corresponde a $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ e daí pode-se escrever, utilizando a definição da exponencial de um multivetor e considerando as expressões como séries de potências das funções seno e cosseno,

$$U = \exp\left(\frac{1}{2}\mathbf{B}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\chi\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\right) = \cos\left(\frac{\chi}{2}\right) + \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \sin\left(\frac{\chi}{2}\right),$$

de forma que a rotação descrita pelo rotor U é circular, e se dá no plano determinado

pelo bivector $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$. Como exemplo, considere a rotação dada pelo rotor $U = \exp(\theta\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3/2)$ aplicada sobre os vetores da base canônica. Para a rotação de \mathbf{e}_0 , tem-se

$$\begin{aligned} U\mathbf{e}_0\tilde{U} &= \exp\left(\frac{1}{2}\theta\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\right)\mathbf{e}_0\exp\left(-\frac{1}{2}\theta\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\right) \\ &= \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\mathbf{e}_0\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ &= \mathbf{e}_0\left\{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \left[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2\right\} \\ &= \mathbf{e}_0\left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ &= \mathbf{e}_0. \end{aligned}$$

De forma similar se faz o cálculo para os outros vetores de base e obtém-se:

$$U\mathbf{e}_1\tilde{U} = \cos(\theta)\mathbf{e}_1 + \sin(\theta)\mathbf{e}_3,$$

$$U\mathbf{e}_2\tilde{U} = \mathbf{e}_2,$$

$$U\mathbf{e}_3\tilde{U} = -\sin(\theta)\mathbf{e}_1 + \cos(\theta)\mathbf{e}_3.$$

Essas relações mostram que de fato o rotor $U = \exp(\theta\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3/2)$ descreve uma rotação que ocorre na direção do plano determinado pelos vetores \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_3 que, portanto, não afeta \mathbf{e}_0 e \mathbf{e}_2 .

Considere agora outro caso de rotação, em que se tem $U = \exp(\mathbf{B}/2)$, com \mathbf{B} da forma $\mathbf{B} = \chi\mathbf{e}_\mu\mathbf{e}_\nu$ e tal que $\mathbf{B}^2 > 0$. Neste caso, necessariamente se tem $(\mathbf{e}_\mu\mathbf{e}_\nu)^2 = 1$, com o bivector $\mathbf{e}_\mu\mathbf{e}_\nu$ sendo necessariamente da forma $\pm\mathbf{e}_0\mathbf{e}_i$. Pode-se então escrever, utilizando a definição da exponencial de um multivetor e considerando as expressões como séries de potências das funções seno e cosseno hiperbólicos,

$$U = \exp\left(\frac{1}{2}\mathbf{B}\right) = \exp\left(\pm\frac{1}{2}\chi\mathbf{e}_0\mathbf{e}_i\right) = \cosh\left(\frac{\chi}{2}\right) \pm \mathbf{e}_0\mathbf{e}_i\sinh\left(\frac{\chi}{2}\right),$$

de forma que a rotação descrita pelo rotor U é hiperbólica, e se dá no plano determinado pelo bivector $\pm\mathbf{e}_0\mathbf{e}_i$. Como exemplo, considere a rotação dada pelo rotor $U = \exp(\alpha\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3/2)$ aplicada sobre os vetores da base canônica. Sem muitas dificuldades, obtém-se:

$$U\mathbf{e}_0\tilde{U} = \cosh(\alpha)\mathbf{e}_0 - \sinh(\alpha)\mathbf{e}_3,$$

$$U\mathbf{e}_1\tilde{U} = \mathbf{e}_1,$$

$$U\mathbf{e}_2\tilde{U} = \mathbf{e}_2,$$

$$U\mathbf{e}_3\tilde{U} = -\sinh(\alpha)\mathbf{e}_0 + \cosh(\alpha)\mathbf{e}_3.$$

Essas relações mostram que de fato o rotor $U = \exp(\alpha\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3/2)$ descreve uma rotação hiperbólica na direção do plano determinado pelos vetores \mathbf{e}_0 e \mathbf{e}_3 , a qual não afeta os vetores \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 .

Abre-se um importante parêntese para comentar sobre o isomorfismo Hodge no caso da álgebra geométrica do espaço-tempo e da relação dos biquatérnions (que são considerados no apêndice B) com a álgebra geométrica do espaço-tempo.

O dual Hodge de um multivetor A de $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ é dado por $\star A = \tilde{A}\mathbf{e}_5$, de maneira análoga ao caso da álgebra geométrica do espaço euclidiano. Por meio dessa expressão, constrói-se a tabela seguinte.

$\star 1 = \mathbf{e}_5 = \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$
$\star\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ $\star\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_0\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ $\star\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$ $\star\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$
$\star(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ $\star(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$ $\star(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ $\star(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_0\mathbf{e}_3$ $\star(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_0\mathbf{e}_2$ $\star(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1$
$\star(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_0$ $\star(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3$ $\star(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_2$ $\star(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1$
$\star\mathbf{e}_5 = \star(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = -1$

Considere agora o conjunto dos multivetores de $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ com graduação par, que se escreve

$$\mathcal{C}\ell_{1,3}^+ = \{A \mid A \in \mathcal{C}\ell_3 \text{ e } \widehat{A} = A\}. \quad (3.76)$$

Um elemento de tal conjunto tem a forma genérica

$$A = a + \mathbf{B} + a_5 \mathbf{e}_5, \quad (3.77)$$

sendo a e a_5 escalares e \mathbf{B} um bivector. Tal elemento pode ser escrito de forma mais explícita como

$$A = a + a_{01} \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + a_{02} \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2 + a_{03} \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_3 + a_{12} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + a_{31} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + a_{23} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + a_5 \mathbf{e}_5. \quad (3.78)$$

Verifica-se que, dados A e B de $\mathcal{C}\ell_{1,3}^+$, $AB \in \mathcal{C}\ell_{1,3}^+$ (como no caso de $\mathcal{C}\ell_2^+$ e de $\mathcal{C}\ell_3^+$), de modo que, o espaço vetorial composto pelos multivetores de $\mathcal{C}\ell_{1,3}^+$ munido do produto geométrico corresponde a uma álgebra, e portanto é uma sub-álgebra de $\mathcal{C}\ell_{1,3}$, que é denominada *sub-álgebra par* $\mathcal{C}\ell_{1,3}^+$. Considere a seguinte notação: $\mathbf{I} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$, $\mathbf{J} = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1$ e $\mathbf{K} = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$. Dessa forma, considerando o isomorfismo Hodge a pouco discutido, o elemento genérico A de $\mathcal{C}\ell_{1,3}^+$ pode ser escrito

$$\begin{aligned} A &= a - a_{01} \star \mathbf{K} - a_{02} \star \mathbf{J} - a_{03} \star \mathbf{I} + a_{12} \mathbf{I} + a_{31} \mathbf{J} + a_{23} \mathbf{K} + a_5 \mathbf{e}_5 \\ &= a + a_{03} \mathbf{e}_5 \mathbf{I} + a_{02} \mathbf{e}_5 \mathbf{J} + a_{01} \mathbf{e}_5 \mathbf{K} + a_{12} \mathbf{I} + a_{31} \mathbf{J} + a_{23} \mathbf{K} + a_5 \mathbf{e}_5 \\ &= (a + a_5 \mathbf{e}_5) + (a_{12} + a_{03} \mathbf{e}_5) \mathbf{I} + (a_{31} + a_{02} \mathbf{e}_5) \mathbf{J} + (a_{23} + a_{01} \mathbf{e}_5) \mathbf{K}, \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$= (a + a_{12} \mathbf{I} + a_{31} \mathbf{J} + a_{23} \mathbf{K}) + \mathbf{e}_5 (a_5 + a_{03} \mathbf{I} + a_{02} \mathbf{J} + a_{01} \mathbf{K}) \quad (3.80)$$

em que considerou-se também o fato de que o pseudo-escalar \mathbf{e}_5 comuta com bivectores. Lembre-se que, de um modo geral, o pseudo-escalar \mathbf{e}_5 comuta com qualquer multivector de graduação par (escalares, bivectores e outros pseudo-escalares). Esse fato, mais o fato de que $\mathbf{e}_5^2 = -1$, faz com que \mathbf{e}_5 desempenhe um papel de “unidade imaginária” no âmbito da sub-álgebra par $\mathcal{C}\ell_{1,3}^+$, de forma que um multivector da forma $\alpha + \mathbf{e}_5 \beta$, sendo α e β reais, desempenhe um papel de “número complexo” no âmbito dessa álgebra. Além do mais, observe que os bivectores \mathbf{I} , \mathbf{J} e \mathbf{K} acima definidos são tais que

$$\mathbf{I}^2 = \mathbf{J}^2 = \mathbf{K}^2 = \mathbf{IJK} = -1, \quad (3.81)$$

o que permite identificá-los com as unidades quaterniônicas i , j e k (vide as relações (1.1)). Desse modo, identifica-se o multivetor genérico de $\mathcal{C}\ell_{1,3}^+$ (dado por (3.79) ou por (3.80)) com um biquatérnion (um quatérnion com componentes complexas ou, equivalentemente, a soma de um quatérnion com $\sqrt{-1}$ vezes outro quatérnion) e estabelece-se o isomorfismo entre a sub-álgebra par $\mathcal{C}\ell_{1,3}^+$ e a álgebra dos biquatérnions $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}$.

A maneira adequada de definir um rotor da álgebra geométrica do espaço-tempo é caracterizando-o como um multivetor U da sub-álgebra par $\mathcal{C}\ell_{1,3}^+$ tal que $U\tilde{U} = 1$. O conjunto formado por tais multivetores dotado do produto geométrico tem uma estrutura de grupo, o qual é designado $\text{Spin}_+(1, 3)$. De posse do isomorfismo $\mathcal{C}\ell_{1,3}^+ \simeq \mathbb{C} \otimes \mathbb{H}$ acima descrito, pode-se descrever uma rotação no espaço-tempo em termos de um rotor dado por um multivetor U da sub-álgebra par $\mathcal{C}\ell_{1,3}^+$ tal que $U\tilde{U} = 1$, assim como uma rotação genérica no espaço-tempo é descrita em termos de um biquatérnion a tal que $a\bar{a} = 1$ por $x \mapsto ax\bar{a}^*$, que é denominada uma transformação de Lorentz no apêndice B, sendo x um biquatérnion hermitiano. Evoca-se daquele apêndice o seguinte resultado: uma rotação genérica no espaço-tempo é dada pela composição de uma rotação circular/espacial e uma rotação hiperbólica (um *boost*), nesta ordem (vide página 137). Em símbolos, este resultado fica

$$U = LR, \quad (3.82)$$

sendo R e L rotores que descrevem, respectivamente, uma rotação circular e uma rotação hiperbólica, os quais podem ser escritos genericamente como

$$R = \exp\left(\frac{1}{2}\theta\hat{\mathbf{B}}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \hat{\mathbf{B}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3.83)$$

e

$$L = \exp\left(\frac{1}{2}\alpha\mathbf{e}_5\hat{\mathbf{B}}\right) = \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \mathbf{e}_5\hat{\mathbf{B}}\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad (3.84)$$

sendo $\hat{\mathbf{B}}$ um bivector da forma

$$\hat{\mathbf{B}} = b_{12}\mathbf{I} + b_{31}\mathbf{J} + b_{23}\mathbf{K} = b_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + b_{31}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + b_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \quad \text{tal que} \quad \hat{\mathbf{B}}^2 = -1. \quad (3.85)$$

3.5 A Estrutura da Teoria de Dirac

Álgebras de Clifford são isomorfas à álgebras de matrizes, como é o caso do isomorfismo $\mathcal{C}\ell_3 \simeq M_2(\mathbb{C})$, discutido no capítulo 2. No caso da álgebra geométrica do espaço-tempo, tem-se o isomorfismo $\mathcal{C}\ell_{1,3} \simeq M_2(\mathbb{H})$. Através desse isomorfismo pode-se representar multivetores de $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ por matrizes quaterniônicas 2×2 . Uma representação é dada por:

$$\mathbf{e}_0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.86)$$

Considere o multivetor idempotente

$$f = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_0). \quad (3.87)$$

Observa-se, similarmente ao caso do espaço euclidiano, que $\mathcal{C}\ell_{1,3}f$ é um ideal à esquerda de $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ e que

$$\mathcal{C}\ell_{1,3}f = \mathcal{C}\ell_{1,3}^+f, \quad (3.88)$$

sendo $\mathcal{C}\ell_{1,3}^+$ a sub-álgebra par de $\mathcal{C}\ell_{1,3}$, que tem como um elemento genérico a soma de um escalar com um bivector mais um pseudo-escalar.

Considere então o espaço pseudo-euclidiano $\mathbb{R}^{4,1}$ e uma base sua $\{E_0, E_1, E_2, E_3, E_4\}$ tal que o produto geométrico de vetores desse espaço seja tal que

$$E_1^2 = E_2^2 = E_3^2 = E_4^2 = -E_0^2 = 1 \quad \text{e} \quad E_a E_b + E_b E_a = 0 \quad (3.89)$$

(com $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $a \neq b$), o qual determina a álgebra geométrica $\mathcal{C}\ell_{4,1}$. Considere $i = E_0 E_1 E_2 E_3 E_4$ e note que $i^2 = -1$ e $E_\mu i = i E_\mu$. Considere o mapeamento dado por

$$\mathbf{e}_\mu \mapsto E_\mu E_4 \quad (\mu \in \{0, 1, 2, 3\}), \quad (3.90)$$

de modo que o fato de i desempenhar papel de unidade imaginária faz com que $\mathcal{C}\ell_{4,1}$ seja isomorfa à álgebra geométrica do espaço-tempo complexificada $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3}$:

$$\mathcal{C}\ell_{4,1} \simeq \mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3}. \quad (3.91)$$

Observe que a sub-álgebra par de $\mathcal{Cl}_{4,1}$ é isomorfa a $\mathcal{Cl}_{1,3}$,

$$\mathcal{Cl}_{4,1}^+ \simeq \mathcal{Cl}_{1,3}, \quad (3.92)$$

da mesma forma que a sub-álgebra par $\mathcal{Cl}_{1,3}^+$ é isomorfa a \mathcal{Cl}_3 ,

$$\mathcal{Cl}_{1,3}^+ \simeq \mathcal{Cl}_3, \quad (3.93)$$

o que não é difícil de se verificar.

A álgebra $\mathcal{Cl}_{4,1}$, ou, equivalentemente, a álgebra do espaço-tempo complexificada $\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}$, é denominada de *álgebra de Dirac*. Pode-se verificar que essa álgebra é isomorfa a álgebra das matrizes complexas 4×4 e uma representação matricial é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \mathbf{e}_1 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{e}_2 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{e}_3 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Considere o multivetor idempotente

$$F = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_0)\frac{1}{2}(1 + i\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = f\frac{1}{2}(1 + i\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2). \quad (3.95)$$

Verifica-se que $\mathcal{Cl}_{4,1}F$ é um ideal à esquerda de $\mathcal{Cl}_{4,1}$ e pode-se mostrar que

$$\mathcal{Cl}_{4,1}F \simeq \mathcal{Cl}_{4,1}^+F. \quad (3.96)$$

Um *spinor de Dirac* tem como definição clássica um elemento de \mathbb{C}^4 , que usualmente é representado por uma matriz coluna de quatro termos complexos. Veja que há um isomorfismo entre \mathbb{C}^4 e ideais à esquerda de $M_4(\mathbb{C})$ dado naturalmente por

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \leftrightarrow \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.97)$$

Uma vez que $M_4(\mathbb{C})$ é uma representação da álgebra de Dirac $\mathcal{Cl}_{4,1} \simeq \mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}$, pode-se trabalhar com o ideal correspondente da álgebra de Dirac na álgebra matricial. E tem-se que

$$\begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_4 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_F \quad (3.98)$$

em que F é a representação matricial do idempotente $F = f \frac{1}{2}(1 + i\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)$. Dessa forma, pode-se trabalhar com o ideal $\mathcal{Cl}_{4,1}F$ em lugar de \mathbb{C}^4 . Mas os isomorfismos apresentados anteriormente mostram que

$$\mathcal{Cl}_{4,1}F \simeq (\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3})F \simeq \mathcal{Cl}_{4,1}^+F \simeq \mathcal{Cl}_{1,3}F = (\mathcal{Cl}_{1,3}f) \frac{1}{2}(1 + i\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2). \quad (3.99)$$

Essas expressões mostram que as informações obtidas de um elemento do ideal $\mathcal{Cl}_{4,1}F$ podem ser obtidas de um elemento do ideal $\mathcal{Cl}_{1,3}f$. E ainda tem-se

$$iF = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1F. \quad (3.100)$$

Esses resultados mostram que pode-se trabalhar com o ideal $\mathcal{Cl}_{1,3}f$ em lugar de $\mathcal{Cl}_{4,1}F$, já que o bivector $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$ desempenha papel de unidade imaginária no âmbito da álgebra geométrica do espaço-tempo, por, além de obedecer $(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)^2 = -1$, comutar com qualquer multivector.

Lembre-se agora que

$$\mathcal{Cl}_{1,3}f = \mathcal{Cl}_{1,3}^+f,$$

o que mostra que o multivector idempotente f elimina graus de liberdade redundantes. Como $\dim(\mathcal{Cl}_{1,3}^+) = 8$, pode-se trabalhar com $\mathcal{Cl}_{1,3}^+$ em lugar de $\mathcal{Cl}_{1,3}f$. Tem-se então o seguinte isomorfismo:

$$\mathbb{C}^4 \simeq \mathcal{Cl}_{1,3}^+. \quad (3.101)$$

O representante do spinor de Dirac $|\Psi\rangle$ em $\mathcal{Cl}_{4,1}f$ é Ψ tal que é relacionado com um

elemento ψ de $\mathcal{Cl}_{1,3}^+$ por

$$\Psi = \psi \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_0) \frac{1}{2}(1 + i\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2). \quad (3.102)$$

ψ corresponde à representação operatória de um spinor de Dirac e tem a representação matricial padrão

$$\begin{pmatrix} \psi_1 & -\psi_2^* & \psi_3 & \psi_4^* \\ \psi_2 & \psi_1^* & \psi_4 & -\psi_3^* \\ \psi_3 & \psi_4^* & \psi_1 & -\psi_2^* \\ \psi_4 & -\psi_3^* & \psi_2 & \psi_1^* \end{pmatrix}. \quad (3.103)$$

Considere um spinor operatório de Dirac ψ tal que $\psi\tilde{\psi} \neq 0$. Pode-se escrever

$$\psi\tilde{\psi} = \sigma + \mathbf{e}_5\omega, \quad (3.104)$$

em que σ e ω são escalares reais. Definindo $\rho = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$ e β tal que $\tan(\beta) = \omega/\sigma$, ψ pode ser escrito como

$$\psi = \sqrt{\rho} \exp\left(\frac{1}{2}\beta\mathbf{e}_5\right) L, \quad (3.105)$$

sendo L um rotor que descreve uma rotação hiperbólica, $\rho > 0$ e $0 \leq \beta < 2\pi$.

Por fim, apresenta-se a equação de Dirac para um campo spinorial ψ , o qual, no contexto da teoria de Dirac, é postulado para a descrição do movimento do elétron no espaço-tempo. Para isso, define-se o operador de energia-momento como $\hbar\nabla(\)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$, em que o espaço em branco entre parênteses indica o argumento, e

$$\nabla = \sum_{\mu=0}^3 \mathbf{e}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (3.106)$$

em que \mathbf{e}^μ é um vetor da base dual de $\mathbb{R}^{1,3}$, ou seja, \mathbf{e}^μ é uma forma linear tal que $\mathbf{e}^\mu(\mathbf{e}_\nu) = \delta_{\mu\nu}$, o que costuma-se escrever como $\mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \delta_{\mu\nu}$. A equação de Dirac para o elétron livre é então postulada como

$$\hbar\nabla\psi\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = mc\psi\mathbf{e}_0. \quad (3.107)$$

A equação é apresentada por meio de argumentos formais na referência, o que não se fez aqui. Além disso, outros autores apresentam a equação com uma abordagem diferente,

embora utilizando a mesma linguagem das álgebras geométricas, tal como D. Hestenes no artigo “Spacetime Physics with Geometric Algebra” (HESTENES, 2003), e C. Doran *et al.* em “Spacetime Algebra and Electron Physics” (DORAN *et al.*, 1996).

4 Conclusões

As álgebras de Grassmann e a álgebra dos quatérnions de Hamilton por si só já se mostram ferramentas poderosas. Uma noção da utilidade para a Física foi dada no caso dos quatérnions, no apêndice B, em que delineou-se a teoria de Dirac. Tanto a estrutura multivetorial das álgebras de Grassmann quanto a álgebra dos quatérnions, que foram introduzidos no capítulo inicial do trabalho, apareceram naturalmente como estruturas inerentes à álgebra geométrica do espaço euclidiano, no capítulo 2, além da álgebra dos números complexos, que verificou-se ser isomorfa à subálgebra par \mathcal{Cl}_2^+ . Além disso, verificou-se que a álgebra geométrica do espaço euclidiano tridimensional apresenta um significado geométrico que não é tão evidente quando se lida com a álgebra de matrizes, que é usualmente utilizada para se trabalhar com rotações. Esse é o caso da álgebra das matrizes complexas 2×2 , utilizada na abordagem usual da teoria quântica de Pauli; mostrou-se que tal teoria pode ser inteiramente descrita em termos da álgebra geométrica do espaço euclidiano, com os spinores de Pauli sendo representados por multivetores da forma $\psi = \sqrt{\rho}R$ (sendo ρ um escalar real e R um elemento do grupo $\text{Spin}(3)$, o qual é denominado um rotor), os quais atuam sobre vetores do espaço euclidiano através de rotações e dilatações.

No capítulo 3, mostrou-se que é possível definir a álgebra geométrica de um espaço pseudo-euclidiano, em especial, do espaço vetorial de Minkowski, o que permitiu descrever o espaço-tempo de Minkowski. As rotações no espaço-tempo foram descritas em termos de rotores, como no caso euclidiano (embora, neste caso, sejam descritos como elementos de um outro grupo), mas, nesse caso, os rotores podiam ser escritos univocamente como o produto de dois tipos diferentes de rotores, um que descreve uma rotação ordinária do espaço tridimensional, e outro descrevendo uma rotação hiperbólica, mostrando que uma rotação genérica no espaço-tempo é a composição de uma rotação circular e uma rotação hiperbólica. Por fim, apresentou-se a álgebra de Dirac, à qual corresponde à álgebra geométrica do espaço-tempo complexificada. É em termos da álgebra de Dirac que a teoria de Dirac é tradicionalmente descrita (mais especificamente, em termos de sua representação matricial), mas mostrou-se que o fato dessa álgebra corresponder à álgebra geométrica do espaço-tempo complexificada faz com que a teoria de Dirac possa ser descrita em termos da álgebra geométrica do espaço-tempo usual, isso porque os

spinors de Dirac podem ser descritos como objetos da sub-álgebra par $\mathcal{Cl}_{1,3}^+$, o que é devido ao isomorfismo dado por (3.101).

Ressalta-se a perspectiva de um estudo mais pormenorizado da teoria de Dirac em termos da álgebra geométrica do espaço-tempo. Também tem-se como perspectiva de estudos futuros o estudo da interpretação *zitterbewegung* da mecânica quântica através da teoria de Dirac em termos de $\mathcal{Cl}_{1,3}$, com base em trabalhos de Hestenes, tais como “The Zitterbewegung Interpretation of Quantum Mechanics” (HESTENES, 1990) e “Spacetime Physics with Geometric Algebra” (HESTENES, 2003).

Também gostaria-se de apontar algumas bibliografias que deixam claro que várias aplicações das álgebras de Clifford já são realidade tanto em Matemática^m e Física^f como em Engenharia^e e Computação^c (além das já citadas ao longo do trabalho): (HESTENES, 1986)^{mf}, (DORAN, 1994)^{mf}, (HESTENES, 2012)^f, (BAYLIS, 2004)^f, (LASENBY *et al.*, 2000)^{fe}, (FRANCIS; KOSOWSKY, 2005)^{mf}, (SNYGG, 2011)^m, (LI *et al.*, 2015)^m, (DORST, 2016)^m, (BAYRO-CORROCHANO; SOBCZYK, 2011)^{mfec}, (BAYLIS, 2012)^{mfe}, (LUNDHOLM; SVENSSON, 2009)^{mf}, (KANATANI, 2015)^c, (HILDENBRAND *et al.*, 2004)^c, (DORST *et al.*, 2009)^c, (VINCE, 2008)^c, (BAYRO-CORROCHANO, 2010)^{ec}, (BAYRO-CORROCHANO; SCHEUERMANN, 2010)^{ec}, (GOLDMAN, 2010)^c, (PERWASS *et al.*, 2009)^e.

Por fim, o autor gostaria de expressar a sua opinião de que, uma estrutura algébrica que tem como casos particulares (ou sub-álgebras de casos particulares) a álgebra dos números reais, a álgebra dos números complexos, a álgebra dos quatérnions, a álgebra das matrizes de Pauli, a álgebra das matrizes de Dirac e algumas álgebras de Lie (tal como a exposta na seção 2.2.2.6), que tem estreita relação com outras estruturas, tais como álgebras de Grassmann e grupos de rotações (como $\text{Spin}(3)$, $\text{Spin}_+(1,3)$, $\text{SU}(2)$ e $\text{SO}(3)$, apenas como exemplo, de acordo com o exposto nos dois capítulos anteriores), e cuja exploração já encontra inúmeras aplicações (cf. referências citadas no parágrafo anterior), merece um mínimo de atenção dos físicos. Também gostaria-se de evidenciar as álgebras de Clifford não (somente) como provendo uma nova linguagem para tratar problemas antigos, e sim como uma estrutura preexistente a esses problemas e subjacente às teorias para sua resolução, e cuja exploração pode trazer novas ideias de como tratá-los. A questão da interpretação geométrica é uma característica dos casos particulares tratados neste trabalho, o caso das álgebras geométricas, mas que é transferida de uma maneira natural a casos mais gerais, assim como, tomando como exemplo, a geometria de curvas e superfícies tridimensionais teve sua estrutura e interpretação adaptada e generalizada para espaços mais gerais, e a teoria dos espaços vetoriais deu origem ao estudo de espaços lineares gerais. Nesse ponto, tem-se como ponto fundamental a abstração e generalização providos por desenvolvimentos algébricos, que fazem da álgebra uma “ferramenta” com extrema importância. Assim, geometria e álgebra se mostram, além de indispensáveis para a exploração do mundo físico, áreas com uma certa relação de mutualismo em seu

desenvolvimento: “*Geometry without algebra is dumb! Algebra without geometry is blind!*”
(David Hestenes).

Apêndice A - Algumas Noções de Álgebra

A ideia é que este apêndice sirva como um pequeno guia o qual fornece orientações básicas sobre os conceitos de algumas *estruturas algébricas* consideradas no texto. Como ponto de partida considera-se o conceito de *aplicação*, na primeira seção, onde também se introduz a noção de estrutura algébrica. Toma-se como conhecimento de base noções elementares da teoria dos conjuntos.

A exposição é baseada nos capítulos 2 (Estruturas Algébricas Básicas) e 22 (Grupos. Alguns Exemplos) das notas do “Curso de Física-Matemática” de João Carlos Alves Barata (BARATA, 2018), disponíveis no endereço eletrônico <http://denebola.if.usp.br/>, e no apêndice A (Noções de Álgebra) do livro “Introdução aos Princípios de Mecânica Clássica” de José Umberto Cinelli Lobo de Oliveira (OLIVEIRA, 2013). Na parte sobre espaços vetoriais também se baseia no livro “Álgebra Linear e Aplicações”, de Carlos Alberto Garcia Callioli, Hygino Hugueros Domingues e Roberto Celso Fabrício Costa (CALLIOLI *et al.*, 1990), e em uma parte de notas consideradas esclarecedoras sobre somas diretas de espaços vetoriais, de Jia-Ming Liou (LIOU, 2018), disponíveis no endereço eletrônico <http://www.math.ncku.edu.tw/~fjmliou/advcal/sumvspace.pdf>.

A.1 Aplicações

O principal objetivo desta seção é recordar a noção de *aplicação* para que então se possa considerar *operações*, *estruturas algébricas* e *morfismos*. Mas antes de se introduzir a noção de aplicação, faz-se necessário a introdução do conceito de *relação*.

A respeito da terminologia empregada, deixa-se claro que “aplicação” é sinônimo de “função” e outros termos tais como “mapa”, “mapeamento” e “transformação”. Outros termos ainda são utilizados. A escolha da expressão é em geral determinada pelo contexto e a natureza da aplicação, mas algumas vezes alterna-se entre os termos simplesmente para se evitar o uso repetitivo de um único nome.

Dados dois conjuntos não vazios A e B , um subconjunto R do produto cartesiano $A \times B$ recebe a denominação *relação de A em B* . Se $a \in A$ e $b \in B$, de forma que $(a, b) \in R$, diz-se que a está relacionado com b por meio da relação R . Se, em particular, R corresponde ao conjunto vazio, ou seja, $R = \emptyset$, diz-se que R é uma *relação vazia*. Caso $A = B$, então diz-se que R é uma *relação binária em A* , ou simplesmente que R é uma *relação em A* .

Dada uma relação R de A em B , o conjunto $D = \{a \mid a \in A \text{ e } (a, b) \in R\}$ é denominado *domínio* da relação R , e o conjunto $E = \{b \mid b \in B \text{ e } (a, b) \in R\}$ é denominado *amplitude* da relação R . O domínio de R , portanto, consiste no subconjunto de A formado por todos os elementos associados a algum elemento de B por meio da relação R . A amplitude de R , por outro lado, consiste no subconjunto de B formado pelos elementos associados a algum elemento de A por meio da relação R .

Para qualquer relação R de A em B sempre existe a *relação inversa*, denotada por R^{-1} e dada por $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$.

Uma relação R em A é denominada uma *relação de equivalência* quando goza das seguintes propriedades:

- (i) *reflexividade*: $(a, a) \in R, \forall a \in A;$
- (ii) *simetria*: $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R;$
- (iii) *transitividade*: $(a, b) \in R \text{ e } (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R.$

Essa consiste na definição tradicional de relação de equivalência, embora o apontamento da propriedade reflexiva seja redundante na definição, uma vez que simetria e transitividade implicam em reflexividade; de fato, se $(a, b) \in R$, a simetria implica $(b, a) \in R$, e da transitividade segue $(a, a) \in R$, que corresponde à propriedade de reflexividade. A relação de equivalência entre um elemento a de A e um elemento b de B por meio da relação de equivalência R é denotada por $a \sim_R b$, ou simplesmente $a \sim b$, quando a relação de equivalência em questão está implícita.

Uma utilidade física simples e interessante do conceito de relação de equivalência consiste na descrição da *lei zero da termodinâmica* em termos de tal conceito: seja $S = \{S_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ um conjunto de sistemas termodinâmicos, cada qual em algum estado de equilíbrio termodinâmico; denotar-se-á por E a relação de equilíbrio termodinâmico em S , ou seja, $(S_i, S_j) \in E$ ($i, j \in \mathbb{N}$) significa que os sistemas S_i e S_j estão em equilíbrio termodinâmico quando em contato térmico; pode-se então enunciar a lei zero da termodinâmica como: *a relação de equilíbrio termodinâmico E é uma relação de equivalência*. Com efeito, denotando $(S_i, S_j) \in E$ por $S_i \sim S_j$, a lei zero equivale a: (i) $S_i \sim S_i, \forall S_i \in S$; (ii) $S_i \sim S_j$ implica $S_j \sim S_i$; (iii) $S_i \sim S_j$ e $S_j \sim S_k$ implica $S_i \sim S_k$.

Dado um conjunto X não vazio, seja R uma relação de equivalência em X . Dado um elemento a de X , define-se a *classe de equivalência* associada ao elemento a por meio da relação de equivalência R o conjunto

$$\text{Cl}_a^R = \{b \mid a \in X \text{ e } a \sim_R b\},$$

que também pode ser escrito

$$\text{Cl}_a = \{b \mid a \in X \text{ e } a \sim b\}$$

quando a relação de equivalência está implícita. A família formada pelas classes de equivalência dos elementos de um conjunto Y , $Y \subset X$, por meio da relação R , ou seja, o conjunto

$$Y/R = \{\text{Cl}_a^R \mid a \in Y\},$$

é denominado *conjunto quociente* de Y relativamente à relação R .

Dados dois conjuntos não vazios A e B , uma *aplicação* f com *domínio* A e *contra-domínio* B é uma relação de A em B tal que, para cada elemento de A há um único elemento correspondente de B por meio de f , ou seja, para qualquer a pertencente a A existe b pertencente a B tal que $(a, b) \in f$, e se $(a, c) \in f$, então $b = c$. Usa-se $f : A \rightarrow B$ para denotar a aplicação f com domínio A e contra-domínio B . Quando A e B estão implícitos diz-se apenas “aplicação f ”. Também usa-se $a \mapsto b = f(a)$ para indicar que $f : A \rightarrow B$ faz corresponder o elemento a de A ao elemento $b = f(a)$ de B . O elemento $b = f(a)$ é dito ser a *imagem de a* por meio da aplicação f , e, dado um subconjunto X de A , o *conjunto imagem de X* por meio da aplicação f é definido como $f(X) = \{b \mid b = f(a) \text{ e } a \in X\}$; $f(A)$ é então denominada a *imagem da aplicação f* . Convencionou-se que, quando não especificado, o domínio em questão é o “maior” conjunto para o qual a relação em questão é uma aplicação. Tal convenção é denominada *regra do domínio máximo*. Como exemplo, é comum indicar apenas $f(x) = 1/x$ como aplicação, tendo os reais como conjunto implícito no qual está contido o domínio da aplicação, que neste caso é $\mathbb{R} - \{0\}$.

Uma aplicação $f : A \rightarrow B$ é dita uma *sobrejeção* ou *aplicação sobrejetiva* se $f(A) = B$, ou seja, se dado qualquer elemento b de B existe pelo menos um elemento a de A tal que $b = f(a)$, ou ainda, se todo elemento do contra-domínio de f é imagem de ao menos um elemento do domínio de f . A aplicação $f : A \rightarrow B$ é dita ser uma *injeção* ou *aplicação injetiva* se $f(a) = f(b)$ implica $a = b$ para qualquer elemento a de A ; de outro modo, f é injetiva se, para qualquer (a, b) de f , $a \neq b$ implica $f(a) \neq f(b)$; em outros termos, cada

elemento do contra-domínio de uma injeção é imagem de um único elemento do domínio da injeção. Uma aplicação $f : A \rightarrow B$ é dita ser uma *bijeção* ou *aplicação bijetiva* se for injetiva e sobrejetiva.

Dada uma relação, a sua relação inversa está sempre definida; mas quando a relação se trata de uma aplicação, a relação inversa pode não ser uma aplicação, apesar de ainda ser uma relação. A condição para que uma aplicação admita uma *aplicação inversa* é que tal aplicação seja bijetiva. Assim, dada a bijeção $f : A \rightarrow B$, sua aplicação inversa é a aplicação $f^{-1} : B \rightarrow A$ tal que, para todo b de B , $f^{-1}(b) = a$, quando $f(a) = b$.

Dadas duas aplicações $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$, está definida a *aplicação composta* $g \circ f : A \rightarrow C$ tal que $(g \circ f)(a) = g(f(a))$, qualquer que seja o elemento a de A . Note que a composição de funções é associativa, ou seja, dadas $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ e $h : C \rightarrow D$, tem-se $(h \circ (g \circ f))(a) = ((h \circ g) \circ f)(a)$, para qualquer elemento a de A .

Uma aplicação $f : A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \rightarrow B$ é um tipo especial do que se conhece por *operação finitária*, sendo $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Uma aplicação $f : A^n \rightarrow A$, em especial, em que $A^n = A \times A \times \cdots \times A$ (n vezes), é denominada uma *operação n -ária em A* . Se restringirá aqui a considerar explicitamente operações 2-árias, ou seja, operações da forma $f : A \times A \rightarrow A$, que são comumente chamadas *operações binárias*.

Um conjunto dotado de operações definidas sobre ele determina o que se entende por uma *estrutura algébrica*. Assim, por exemplo, o par (A, f) , sendo A um conjunto e f uma operação em A , determina uma estrutura algébrica. Dada a estrutura algébrica (A, f_1, \dots, f_n) , sendo f_i uma operação sobre A , tal estrutura algébrica é dita ser *fechada* com relação à operação f_i se $f(A \times A) \subset A$, ou seja, se a operação f_i sempre gera elementos de A . Algumas estruturas matemáticas se enquadram perfeitamente à ideia de estrutura algébrica supracitada, como *grupos*, *anéis* e *corpos*, por exemplo. Entretanto, algumas estruturas são mais complexas, sendo determinadas por um par de estruturas algébricas e pela *ação* de uma das estruturas sobre a outra, como é o caso de um *espaço vetorial* sobre um corpo, e uma *álgebra* sobre um espaço vetorial, por exemplo. A ação de uma estrutura sobre outra não será definida aqui.

Informalmente, um *morfismo* entre duas estruturas algébricas de mesmo tipo é uma aplicação entre os objetos das mesmas que é compatível com as operações definidas nessas estruturas. Dadas as estruturas algébricas (A, f) e (B, g) , em que

$$\begin{aligned} f : A \times A &\rightarrow A \\ (a_1, a_2) &\mapsto f(a_1, a_2) = a_1 * a_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g: B \times B &\rightarrow B \\ (b_1, b_2) &\mapsto g(b_1, b_2) = b_1 \bullet b_2, \end{aligned}$$

denomina-se um *morfismo* ou *homomorfismo* entre as duas estruturas uma aplicação $h: A \rightarrow B$ tal que

$$h(f(a_1, a_2)) = g(h(a_1), h(a_2)), \quad \forall a_1, a_2 \in A,$$

ou, em termos de “notação operacional”,

$$h(a_1 * a_2) = h(a_1) \bullet h(a_2), \quad \forall a_1, a_2 \in A.$$

Um homomorfismo injetivo é denominado um *monomorfismo*, um homomorfismo sobrejetivo é denominado um *epimorfismo*, e um homomorfismo bijetivo é denominado um *isomorfismo*. Um homomorfismo que relaciona o mesmo conjunto, ou seja, da forma $h: A \rightarrow A$, é denominado um *endomorfismo*. Caso um endomorfismo seja bijetivo, caso em que corresponde também a um isomorfismo, recebe também o nome de *automorfismo*. O conceito de isomorfismo é de especial importância para a Física e é amplamente empregado sempre que se necessita lidar com objetos de uma estrutura em termos dos objetos de outra estrutura. Acontece que, diante de um isomorfismo ϕ entre $(A, *)$ e (B, \bullet) , tanto faz operar com objetos de $(A, *)$ em termos da operação $*$ ou com seus correspondentes em (B, \bullet) em termos da operação \bullet , o resultado sempre pode ser obtido na outra estrutura por meio do isomorfismo ϕ ou por sua aplicação inversa ϕ^{-1} (que sempre existe, já que um isomorfismo é uma bijeção), uma vez que a aplicação inversa de um isomorfismo também é um isomorfismo. Nota: se há um isomorfismo ϕ entre $(A, *)$ e (B, \bullet) , diz-se que tais estruturas algébricas são *isomorfas* por meio de ϕ e denota-se $(A, *) \simeq_{\phi} (B, \bullet)$, ou simplesmente $(A, *) \simeq (B, \bullet)$, quando o isomorfismo está subentendido, ou ainda $A \simeq B$, quando também as operações das estruturas algébricas estão subentendidas (essas simplificações são muito comuns).

A.2 Algumas Estruturas Algébricas de Interesse

Nesta seção apresentam-se as definições de algumas estruturas algébricas básicas que são mencionadas no corpo do trabalho. A pretensão não é a de desenvolver os assuntos, tal como num texto sobre teoria de grupos ou álgebra linear, por exemplo, pretende-se apenas apresentar as definições das estruturas para a referência no corpo do texto.

A.2.1 Grupos

Dado um conjunto A , subconjunto de um conjunto X , e uma operação da forma

$$\begin{aligned} f : A \times A &\rightarrow X \\ (a, b) &\mapsto f(a, b) = a * b \end{aligned}$$

sobre esse conjunto, a estrutura algébrica $(A, *)$ é denominada um *grupo* se forem satisfeitas as seguintes propriedades:

1. *fechamento de $(A, *)$ com relação à operação $*$* : $a * b \in A, \forall a, b \in A$;
2. *associatividade de $*$* : $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in A$;
3. *existência do elemento neutro*: existe um (único) elemento e de A , denominado *elemento neutro*, tal que $e * a = a * e = a$, qualquer que seja o elemento a de A ;
4. *existência do elemento simétrico*: para cada elemento a de A existe a ele associado um único elemento a' tal que $a * a' = a' * a = e$, denominado o *simétrico* de a .

Dado o grupo $(A, *)$ e um subconjunto B de A , $(B, *)$ é dito um *subgrupo* de $(A, *)$ se for também um grupo, com a operação $*$ de $(B, *)$ sendo entendida como a restrição de $*$ ao domínio $B \times B$. Todo grupo $(A, *)$ possui ao menos dois subgrupos: o próprio grupo $(A, *)$ e o subgrupo $(\{e\}, *)$ que tem como elemento único o elemento neutro e . Esses dois subgrupos são denominados *subgrupos triviais* de $(A, *)$.

Se o conjunto A do grupo $(A, *)$ tem um número finito de elementos o grupo é dito ser um *grupo finito*, e o número de elementos de A é dita a *ordem* do grupo $(A, *)$. Caso contrário o grupo $(A, *)$ é dito ser um *grupo infinito* ou *grupo de ordem infinita*. (A, f) tal que $A = \{e\}$ e $f : \{e\} \times \{e\} \rightarrow \{e\}$ é a única possibilidade de um grupo de ordem 1. Exemplos de grupos de ordem 1 são: (i) $(\{1\}, \cdot)$, sendo 1 o número um e \cdot indica a operação de multiplicação de números naturais/inteiros/rationais/reais; (ii) $(\{0\}, +)$, sendo 0 o número zero e $+$ indicando a operação de soma de números inteiros/rationais/reais. A única possibilidade genérica de grupo de ordem 2 é da forma $(\{e, a\}, *)$, em que a operação $*$ se define pela seguinte tabela

$*$	e	a
e	e	a
a	a	e

em que identifica-se e como o elemento neutro e a como o elemento “não neutro”, o qual corresponde ao seu simétrico, $a' = a$. Um exemplo numérico de grupo de ordem 2 é

$(\{1, -1\}, \cdot)$. Pode-se verificar facilmente outros modelos de grupos finitos de ordem 3, 4, etc., com suas respectivas tabelas de operação, mas não há motivos para se fazer isso aqui. Abaixo seguem alguns exemplos de grupos infinitos. O fato de serem grupos é, em geral, de fácil constatação, de modo que se permitiu omitir demonstrações que são dispendiosas e não pertinentes aqui.

- $(\mathbb{Z}, +)$ é um *grupo comutativo/abeliano*. De fato, (i) a soma de dois números inteiros é um número inteiro, (ii) a soma de números inteiros é associativa, (iii) o número 0 (zero) corresponde ao elemento neutro com relação à adição, (iv) cada inteiro a tem um simétrico aditivo a' dado por $a' = -a$, além do mais a soma de dois números inteiros é comutativa (o que caracteriza o grupo $(\mathbb{Z}, +)$ como comutativo/abeliano). Da mesma forma, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{C}, +)$ também são grupos abelianos.
- Sendo $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ o conjunto dos números racionais com exceção do zero, e \cdot a operação de multiplicação, (\mathbb{Q}^*, \cdot) é um grupo abeliano. De fato, sabe-se que, (i) a multiplicação de dois números racionais é um número racional, que (ii) a multiplicação de números racionais é associativa, que (iii) o número 1 desempenha o papel de elemento neutro com relação à operação de multiplicação, e que (iv) cada racional a não nulo possui um simétrico multiplicativo $a' = a^{-1}$, denominado o inverso de a , e, além disso, a multiplicação de dois números racionais é comutativa, o que caracteriza o grupo (\mathbb{Q}^*, \cdot) como abeliano. De maneira similar, são grupos abelianos (\mathbb{R}^*, \cdot) e (\mathbb{C}^*, \cdot) , sendo $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ e $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$. Ainda ocorre que (\mathbb{Q}^*, \cdot) é subgrupo de (\mathbb{R}^*, \cdot) , e estes dois últimos são subgrupos de (\mathbb{C}^*, \cdot) .
- É de fácil observação que o conjunto $M_n(\mathbb{C})$ das matrizes complexas $n \times n$ dotado da operação de soma entre matrizes tem uma estrutura de grupo abeliano. Entretanto, $M_n(\mathbb{C})$ dotado da operação de produto entre matrizes não corresponde a um grupo, isso porque nem toda matriz complexa $n \times n$ possui simétrica com relação ao produto de matrizes (a matriz inversa nem sempre existe). O grupo formado pelo conjunto das matrizes complexas $n \times n$ inversíveis (e portanto com determinante não nulo) munido do produto matricial usual é denotado $GL_n(\mathbb{C})$ ou $GL(\mathbb{C}, n)$ ou $GL(n, \mathbb{C})$ (do inglês, *general linear group*). Em especial, o grupo das matrizes complexas $n \times n$ de determinante unitário é denotado $SL_n(\mathbb{C})$ ou $SL(\mathbb{C}, n)$ ou $SL(n, \mathbb{C})$ (do inglês *special linear group*).
- Dado um conjunto não vazio X e sendo $S(X) = \{\sigma \mid \sigma : X \rightarrow X\}$ o conjunto de todas as bijeções sobre X , que são denominadas *permutações*, $S(X)$ dotado da operação de composição de aplicações é um grupo (o que se verifica sem muita dificuldade) denominado *grupo das permutações de X* ou *grupo simétrico de X* .
- Uma matriz quadrada A é dita *ortogonal* se a sua inversa coincide com sua transposta: $A^{-1} = A^T$. O conjunto das matrizes reais $n \times n$ ortogonais dotado do produto

matricial usual forma um grupo denominado *grupo ortogonal*, o qual é denotado por $O(n)$. Se A é uma matriz de $O(n)$ e I é a matriz identidade de ordem n , tem-se $1 = \det(AA^T) = \det(A)\det(A^T) = (\det(A))^2$, logo $\det(A) = \pm 1$. Um subgrupo importante de $O(n)$ é o denominado *grupo especial ortogonal*, cujas matrizes ortogonais têm determinante 1; esse grupo é denotado $SO(n)$. As matrizes de $SO(3)$ ao atuarem por meio de produto numa matriz coluna que representa um vetor do espaço euclidiano resulta num vetor rotacionado, dessa forma, as matrizes de $SO(3)$ representam rotações no espaço euclidiano tridimensional, e as matrizes de $SO(n)$ representam rotações generalizadas num espaço n -dimensional.

- O *conjugado hermitiano* de uma matriz $n \times n$ complexa $X = \{x_{ij}\}$ é dado pela matriz $X^\dagger = (X^*)^T = (X^T)^* = \{x_{ji}^*\}$. Uma matriz complexa $n \times n$ cuja inversa corresponde à conjugada hermitiana é denominada uma *matriz unitária*, ou seja, U é unitária se $U^{-1} = U^\dagger$. O conjunto das matrizes unitárias $n \times n$ dotado do produto matricial corresponde a um grupo que se denomina *grupo unitário*, o qual é denotado por $U(n)$. Com uma técnica similar à que foi utilizada no exemplo anterior demonstra-se que uma matriz unitária tem o módulo de seu determinante igual a 1. Constata-se que o conjunto das matrizes unitárias de determinante unitário munido do produto matricial compõe um subgrupo de $U(n)$, o qual é denominado *grupo unitário especial* e denotado por $SU(n)$.

A.2.2 Corpos

Dada um conjunto não vazio \mathbb{K} e duas operações sobre esse conjunto dadas por

$$\begin{aligned} f: \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto f(\alpha, \beta) = \alpha \boxplus \beta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g: \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto g(\alpha, \beta) = \alpha \boxminus \beta \end{aligned}$$

a estrutura algébrica $(\mathbb{K}, \boxplus, \boxminus)$ é denominada um *corpo* (provavelmente do francês *corp* ou do alemão *Körper*; a palavra empregada em inglês é *field*) se são satisfeitas as seguintes propriedades:

1. Com relação à operação \boxplus :

- (a) *comutatividade*: para quaisquer α e β de \mathbb{K} , vale $\alpha \boxplus \beta = \beta \boxplus \alpha$.
- (b) *associatividade*: para quaisquer α , β e γ de \mathbb{K} , vale $(\alpha \boxplus \beta) \boxplus \gamma = \alpha \boxplus (\beta \boxplus \gamma)$.
- (c) *existência do elemento neutro*: existe um (único) elemento o de \mathbb{K} , denominado *elemento nulo*, tal que $o \boxplus \alpha = \alpha \boxplus o = \alpha$, qualquer que seja o elemento α de \mathbb{K} .
- (d) *existência do elemento simétrico*: a cada elemento α de \mathbb{K} existe a ele associado um único elemento $\boxminus \alpha$ tal que $\alpha \boxplus (\boxminus \alpha) = (\boxminus \alpha) \boxplus \alpha = o$, denominado o *oposto* de α .

2. Com relação à operação \boxdot :

- (a) *comutatividade*: para quaisquer α e β de \mathbb{K} , vale $\alpha \boxdot \beta = \beta \boxdot \alpha$.
- (b) *associatividade*: para quaisquer α , β e γ de \mathbb{K} , vale $(\alpha \boxdot \beta) \boxdot \gamma = \alpha \boxdot (\beta \boxdot \gamma)$.
- (c) *existência do elemento neutro*: existe um (único) elemento ι de \mathbb{K} , denominado a *unidade*, tal que $\iota \boxdot \alpha = \alpha \boxdot \iota = \alpha$, qualquer que seja o elemento α de \mathbb{K} .
- (d) *existência do elemento simétrico*: a cada elemento α de \mathbb{K} , diferente do elemento nulo, existe associado um único elemento α' tal que $\alpha \boxdot \alpha' = \alpha' \boxdot \alpha = \iota$, denominado o *inverso* de α .

3. Com relação às operações \boxplus e \boxdot :

- (a) *distributividade de \boxdot em relação a \boxplus* : para quaisquer α , β e γ de \mathbb{K} , vale $\alpha \boxdot (\beta \boxplus \gamma) = (\alpha \boxdot \beta) \boxplus (\alpha \boxdot \gamma)$.

Note que (\mathbb{K}, \boxplus) e $(\mathbb{K} - \{o\}, \boxdot)$ são grupos abelianos. Esse fato é algumas vezes utilizado para se definir um corpo. Por vezes considera-se *corpos não comutativos*, que são estruturas iguais à corpos, com a exceção de que a operação \boxdot não é comutativa. Um exemplo clássico de corpo não comutativo é o formado pelo conjunto dos quatérnions \mathbb{H} dotado das operações de soma entre quatérnions e do produto quaterniônico.

Exemplos clássicos de corpos são $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, que são em geral denotados da mesma forma que seus conjuntos subjacentes. Esses são, inclusive, os casos que inspiraram a definição da estrutura, tanto que as operações \boxplus e \boxdot acima são geralmente denominadas *adição/soma* e *multiplicação*, respectivamente, e são comumente denotadas por $+$ e \cdot , e os elementos de \mathbb{K} são geralmente denominados *escalares*. Também é comum denotar a multiplicação entre dois escalares genéricos por justaposição: $\alpha \cdot \beta = \alpha\beta$. Os corpos em consideração aqui serão sempre o dos reais ou, eventualmente, o dos complexos, de modo que sempre $o = 0$ (o elemento neutro é igual a zero) e $\iota = 1$ (a unidade é igual ao número um).

A.2.3 Espaços Vetoriais

Seja V um conjunto não vazio, $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo e

$$\begin{aligned} f : V \times V &\rightarrow V \\ (u, v) &\mapsto f(u, v) = u + v \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g : \mathbb{K} \times V &\rightarrow V \\ (\alpha, u) &\mapsto g(\alpha, u) = \alpha \cdot u \end{aligned}$$

duas operações. O conjunto V munido das operações f e g é dito ser um *espaço linear* sobre o corpo \mathbb{K} , ou, mais comumente, um *espaço vetorial* sobre o corpo \mathbb{K} , se são satisfeitas as seguintes propriedades:

1. Com relação à operação f :

- (a) *comutatividade*: para quaisquer u e v de V , vale $u + v = v + u$.
- (b) *associatividade*: para quaisquer u, v e w de V , vale $(u + v) + w = u + (v + w)$.
- (c) *existência do elemento neutro*: existe um (único) elemento o de V , denominado *vetor nulo*, tal que $o + u = u + o = u$, qualquer que seja o elemento u de V .
- (d) *existência do elemento simétrico*: a cada elemento u de V existe associado um único elemento $-u$ tal que $u + (-u) = (-u) + u = o$, denominado o *oposto* de u .

2. Com relação à operação g :

- (a) *associatividade*: para quaisquer α e β de \mathbb{K} e u de V , vale $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$.
- (b) para qualquer u de V , tem-se $1 \cdot u = u$, em que 1 é a unidade de \mathbb{K} .
- (c) *distributividade*: para quaisquer α de \mathbb{K} e u e v de V , tem-se $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$.
- (d) *distributividade*: para quaisquer α e β de \mathbb{K} e u de V , tem-se $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$.

O espaço vetorial em questão é comumente também denotado por V , assim como o conjunto que lhe serve de substrato. Os elementos do conjunto V são denominados *vetores*. A operação $+$ é denominada *soma de vetores*, e a operação \cdot é denominada *multiplicação de vetor por escalar*. Apesar de a notação para soma de vetores ser igual a notação para soma de escalares, isso geralmente não causa confusão. Da mesma forma, também se

utiliza \cdot tanto para indicar a multiplicação entre escalares quanto a multiplicação de um vetor por um escalar, o que em geral também não causa confusão. E também é comum denotar a multiplicação de vetor por escalar por justaposição: $\alpha \cdot u = \alpha u$.

Abaixo seguem alguns exemplos básicos de espaços vetoriais.

- O conjunto dos vetores da geometria definidos por classes de equivalência de segmentos de retas orientados munido da operação de soma de vetores e multiplicação de vetor por escalar real tem naturalmente uma estrutura de espaço vetorial.
- Dado o corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, as próprias operações de soma entre escalares de \mathbb{K} e multiplicação de um escalar de \mathbb{K} por outro escalar de \mathbb{K} da estrutura de corpo também gozam das propriedades de um espaço vetorial sobre $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, logo, o próprio corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ tem uma estrutura de espaço vetorial sobre $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. Em particular, o corpo dos reais $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ determina uma estrutura de espaço vetorial sobre ele mesmo. Da mesma forma, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ tem uma estrutura de espaço vetorial sobre $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, e, além disso, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ tem uma estrutura de espaço vetorial sobre $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Em todos esses casos particulares o vetor nulo corresponde ao número zero.
- Dado o corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, o produto cartesiano $\mathbb{K}^n = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in \mathbb{K} \text{ e } i \in \{1, \dots, n\}\}$ munido da operação de soma definida por $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ e da operação de multiplicação por escalar definida por $\lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\lambda\alpha_1, \dots, \lambda\alpha_n)$ é um espaço vetorial sobre o corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. Em especial, \mathbb{R}^n munido das operações de soma e multiplicação por escalar real definidas como acima é um espaço vetorial sobre o corpo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Também \mathbb{C}^n munido das operações de soma e multiplicação por escalar complexo/real definidas como acima é um espaço vetorial sobre o corpo dos complexos/reais (respectivamente). Em todos os casos particulares supracitados o vetor nulo corresponde à n -upla $(0, \dots, 0)$.
- Dado o corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, o conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ das matrizes $m \times n$ cujos termos são elementos de \mathbb{K} dotado das operações usuais de soma de matrizes e de multiplicação de matriz por escalar (de \mathbb{K}), é um espaço vetorial sobre $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. Destaca-se os casos particulares de $M_n(\mathbb{R})$ e $M_n(\mathbb{C})$, que dotados das operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de matriz por escalar são espaços vetoriais sobre o corpo dos reais e dos complexos/reais, respectivamente. Nesses casos o vetor nulo corresponde à matriz nula.
- Seja I um intervalo de \mathbb{R} e $C(I)$ conjunto das aplicações contínuas definidas no intervalo I e tomando valores reais. Dadas as funções f e g de $C(I)$ e α um escalar real, define-se a função $f + g$ por $f + g : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, e a função αf por $\alpha f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Sabe-se que, sendo f e g contínuas em I , $f + g$ e αf também o são, e portanto pertencem a $C(I)$. Pode-se

verificar então que $C(I)$ dotado das operações de soma de funções e multiplicação de função por escalar real é um espaço vetorial sobre o corpo dos reais.

Seja V um espaço vetorial sobre $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. Um subconjunto W de V munido das operações de soma de vetores e multiplicação de vetor por escalar é dito ser um *subespaço vetorial* de V se: (a) $o \in W$; (b) $u + v \in W, \forall u, v \in W$; (c) $\alpha u \in W, \forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ e } \forall u \in W$. É imediato que um subespaço vetorial de um espaço vetorial sobre um corpo é também um espaço vetorial sobre o mesmo corpo.

Seja V um espaço vetorial sobre $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ e $S = \{u_1, \dots, u_n\} \subset V$. Define-se o *subespaço vetorial gerado por S* por

$$[[S]] = \{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ e } u_1, \dots, u_n \in S\}.$$

Cada um dos elementos de $[[S]]$ é denominado uma *combinação linear* dos elementos de S . Nesse contexto, diz-se também que u_1, \dots, u_n *geram* $[[S]]$, ou então que S é um *conjunto de geradores* de $[[S]]$. Se S gera V , ou seja, $V = [[S]]$, e S é finito, diz-se que o espaço vetorial V é *finitamente gerado*. Um subconjunto $L = \{u_1, \dots, u_n\}$ de V é dito ser *linearmente independente* se a igualdade $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = o$, sendo os α_i escalares, somente for válida se $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$; caso contrário o conjunto L é dito ser *linearmente dependente*. Se V corresponde a um espaço vetorial finitamente gerado, um subconjunto finito β de V que seja linearmente independente e que gera o espaço V é dito ser uma *base* de V . Um resultado importante, denominado *teorema da invariância*, é que duas bases quaisquer de um espaço vetorial finitamente gerado sempre têm o mesmo número de vetores; esse número é denominado a *dimensão* de V e denotado por $\dim(V)$. Mostra-se importante lidar com bases considerando-se uma ordem de seus vetores, assim, é interessante considerar uma *base ordenada*; no caso do espaço vetorial em questão, considera-se uma n -upla (u_1, \dots, u_n) uma base ordenada, sendo $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de V . Na prática, se escreve $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ deixando-se implícita a ordem de consideração dos vetores de base, e chama-se β de “base ordenada”, ou apenas de “base”, deixando-se implícita a informação de ordenação da base. Por decorrência da consideração de ordenação da base β , dado um vetor $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ de V , os escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ficam univocamente determinados e uma ordem natural lhes é atribuída. Tais escalares são denominados as *coordenadas* do vetor u com relação à base ordenada β . Esse conjunto ordenado de coordenadas é convenientemente representado pela n -upla $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de \mathbb{K}^n . Como, tomada uma base ordenada de V , as coordenadas de qualquer um de seus vetores o determinam univocamente, fica estabelecido uma relação biunívoca (um isomorfismo) entre os vetores de V e os vetores de \mathbb{K}^n . Observa-se então que qualquer espaço vetorial finitamente gerado sobre um corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é isomorfo ao espaço vetorial usual associado a \mathbb{K}^n . Ressalta-se também a utilidade de se representar o conjunto ordenado de coordenadas (com relação

a uma base) de um vetor por uma matriz coluna:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Essa representação é particularmente útil quando se quer mudar de uma base ordenada $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ de V para uma base ordenada $\gamma = \{v_1, \dots, v_n\}$. Existe uma única família de escalares λ_{ij} tais que

$$\begin{aligned} v_1 &= \lambda_{11}u_1 + \lambda_{21}u_2 + \cdots + \lambda_{n1}u_n, \\ v_2 &= \lambda_{12}u_1 + \lambda_{22}u_2 + \cdots + \lambda_{n2}u_n, \\ &\quad \vdots \\ v_n &= \lambda_{1n}u_1 + \lambda_{2n}u_2 + \cdots + \lambda_{nn}u_n, \end{aligned}$$

ou simplesmente,

$$v_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij}u_i, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

A matriz quadrada de ordem n

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

é a chamada *matriz de mudança de base* de β para γ ; isto porque o produto matricial $\{\lambda_{ij}\}\{\alpha_i\}$ resulta na matriz das coordenadas do vetor $u = \alpha_1u_1 + \cdots + \alpha_nu_n$ com relação à base ordenada γ (sendo que os α_i são as coordenadas do vetor genérico u com relação à base β). A partir de aqui se escreve apenas “base” para se referir a uma base ordenada.

Sejam U e V espaços vetoriais sobre \mathbb{K} . Uma aplicação $T : U \rightarrow V$ é denominada uma *transformação linear* de U em V se:

- (a) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2), \forall u_1, u_2 \in U;$
- (b) $T(\alpha u) = \alpha T(u), \forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ e } \forall u \in U.$

Se $U = V$, uma transformação linear $T : U \rightarrow U$ também é denominada um *operador linear*. Denota-se $\text{Ker}(T)$ e denomina-se *núcleo* de T o subconjunto de U dado por

$\text{Ker}(T) = \{u \in U \mid T(u) = o_U\}$, sendo o_U o vetor nulo de U . Não é difícil verificar que $\text{Ker}(T)$ munido das operações de soma de vetores de U e multiplicação de vetor por escalar é um espaço vetorial, sendo, portanto, subespaço vetorial de U . Outro resultado importante é que a transformação linear T é injetiva se, e somente se, $\text{Ker}(T) = \{o_U\}$. Define-se também a imagem da transformação linear T como $\text{Im}(T) = \{T(u) \mid u \in U\}$. Se U e V finitamente gerados, e n e m suas dimensões, respectivamente, dadas as bases $\beta_U = \{u_1, \dots, u_n\}$ de U e $\beta_V = \{v_1, \dots, v_m\}$ de V , então cada um dos vetores $T(u_1), \dots, T(u_n)$ pertence a V e por conseguinte é combinação linear dos elementos da base β_V , ou seja,

$$\begin{aligned} T(u_1) &= \alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \cdots + \alpha_{m1}v_m, \\ T(u_2) &= \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \cdots + \alpha_{m2}v_m, \\ &\quad \vdots \\ T(u_n) &= \alpha_{1n}v_1 + \alpha_{2n}v_2 + \cdots + \alpha_{mn}v_m, \end{aligned}$$

ou simplesmente

$$T(u_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}v_i, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Define-se, então, a matriz $m \times n$ sobre \mathbb{K}

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

como a *matriz de T em relação às bases β_U e β_V* .

Verifica-se que o conjunto de todas as transformações lineares $T : U \rightarrow V$ dotado da operação de soma definida por $(T_1 + T_2)(u) = T_1(u) + T_2(u)$ e da operação de multiplicação por escalar de \mathbb{K} dada por $(\alpha T)(u) = \alpha T(u)$ tem uma estrutura de espaço vetorial. Para o caso em que $V = \mathbb{K}$ as transformações lineares são chamadas de *formas lineares* ou *funcionais lineares*, e o espaço que formam é denominado o *espaço dual de U* , que é denotado por U^* . Dada então uma base $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ de U , cada elemento u de U pode ser escrito como combinação linear desta base: $u = \sum_{i=1}^n \alpha^i e_i$, $\alpha^i \in \mathbb{K}$. Para $j \in \{1, \dots, n\}$, definem-se as formas lineares $e^j : U \rightarrow \mathbb{K}$ dadas por $e^j(u) = \alpha^j$. Decorre da definição que $e^j(e_i) = \delta_{ij}$, sendo δ_{ij} o símbolo delta de Kronecker. Observa-se então que o conjunto $\{e^1, \dots, e^n\}$ é uma base de U^* , de modo que $\dim(U^*) = \dim(U) = n$. De fato, dada a forma linear f de U^* , tem-se

$$f(u) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha^i f(e_i) = \sum_{i=1}^n e^i(u) f(e_i) = \sum_{i=1}^n f(e_i) e^i(u),$$

qualquer que seja u de U , de modo que

$$f = \sum_{i=1}^n f(e_i) e^i,$$

ou seja, qualquer f de U^* pode ser escrito como combinação linear dos vetores de $\{e^1, \dots, e^n\}$. Além disso, o conjunto $\{e^1, \dots, e^n\}$ é linearmente independente, pois se $\sum_{i=1}^n \alpha_i e^i = o^*$ (sendo o^* o vetor nulo de U^*), isso implica que para todo e_j de U ($j \in \{1, \dots, n\}$) tem-se

$$0 = o^*(e^j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^i(e_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{ji} = \alpha_j.$$

A base $\{e^1, \dots, e^n\}$ de U^* construída é denominada *base dual* da base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de U . Destaca-se que tal base é única; de fato, se $\{e^1, \dots, e^n\}$ e $\{f^1, \dots, f^n\}$ satisfazem $e^j(e_i) = \delta_{ij}$ e $f^j(e_i) = \delta_{ij}$ então $(f^j - e^j)(e_i) = 0$ para quaisquer valores de i e j , o que implica que, para cada valor de j e para cada vetor u de U tem-se $(f^j - e^j)(u) = 0$, logo $f^j - e^j$ é identicamente nula para qualquer j , e, portanto, $f^j = e^j$ para qualquer j .

Sejam U e V espaços vetoriais sobre $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. Uma aplicação $f : U^r \rightarrow V$, sendo $U^r = U \times \dots \times U$ (r vezes), é dita ser *r-linear* (genericamente denominada de *multilinear*) se for linear separadamente com relação a cada vetor de entrada de uma r -upla de U^r , ou seja, se

$$f(u_1, \dots, u_i + w_i, \dots, u_r) = f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_r) + f(u_1, \dots, w_i, \dots, u_r)$$

e

$$f(u_1, \dots, \alpha u_i, \dots, u_r) = \alpha f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_r),$$

sendo $u_i, w_i \in U$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Uma aplicação 1-linear é simplesmente uma transformação linear. Uma aplicação 2-linear é denominada uma *aplicação bilinear*. Uma aplicação r -linear da forma $f : U^r \rightarrow \mathbb{K}$ é denominada uma *forma r-linear*. Em particular, uma forma 2-linear é denominada uma *forma bilinear*. Diz-se que uma forma bilinear $f : U \times U \rightarrow \mathbb{K}$ é *degenerada à direita* (ou *degenerada à esquerda*) se houver um vetor não nulo v_0 de U (resp. u_0 de U) tal que $f(u, v_0) = 0$ para qualquer u de U (resp. $f(u_0, v) = 0$ para qualquer v de U). Uma forma bilinear que não é degenerada à direita nem à esquerda é dita ser *não-degenerada*. Uma aplicação r -linear genérica $f : U^r \rightarrow V$ é dita ser *simétrica* se

$$f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_r) = f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_r),$$

para quaisquer i e j de $\{1, \dots, r\}$ tais que $i < j$; e é dita ser *anti-simétrica* se

$$f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_r) = -f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_r),$$

para quaisquer i e j de $\{1, \dots, r\}$ tais que $i < j$.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, dos reais. Uma forma bilinear $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto f(u, v) = \langle u, v \rangle$, é denominada um *produto interno* sobre V se for (a) simétrica e (b) *positiva-definida*, ou seja, se:

- (a) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$, para quaisquer u e v de V ;
- (b) $\langle u, u \rangle \geq 0$ para qualquer u não nulo de V , sendo que $\langle u, u \rangle = 0$ se, e somente se, $u = o$ (se u for o vetor nulo).

Um espaço vetorial sobre o corpo dos reais dotado de um produto interno é denominado um *espaço euclidiano*. Um exemplo natural de espaço euclidiano trata-se do espaço vetorial formado pelos vetores da geometria com suas operações usuais de soma de vetores e multiplicação por escalar dotado do produto escalar, que corresponde a um produto interno. Se V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, dos complexos, um produto interno é definido como uma *forma sesquilinear* simétrica e positiva-definida, ou seja, uma aplicação $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, $(u, v) \mapsto \varphi(u, v) = \langle u, v \rangle$, tal que:

- (a) $\langle u, v_1 + v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle$, $\forall u, v_1, v_2 \in V$;
- (b) $\langle u, \alpha v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$, $\forall u, v \in V$;
- (c) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle^*$ (z^* indica o conjugado complexo de z), $\forall u, v \in V$;
- (d) $\langle u, u \rangle \geq 0$ para todo u de V , e $\langle u, u \rangle = 0$ se, e somente se, $u = o$.

O produto acima definido é denominado *produto escalar hermitiano*, e um espaço vetorial sobre o corpo dos complexos dotado de um produto escalar hermitiano é denominado um *espaço hermitiano*.

Seja V um espaço vetorial com o produto interno $F(u, v) = \langle u, v \rangle$. Dado um vetor u de V , denota-se $\|u\|_F$ e chama-se *norma de u* com relação ao produto interno F o número real não negativo dado por

$$\|u\|_F = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

No caso em que o produto interno com que se lida é único, estando subentendido, indica-se a norma do vetor u simplesmente por $\|u\|$. Dados então dois vetores u e v de V , a aplicação $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d(u, v) = \|u - v\|_F = \|v - u\|_F$$

é denominada *métrica* induzida pela norma $\|\cdot\|_F$, e o número $d(u, v)$ é a *distância* entre u e v . Da *desigualdade de Cauchy-Schwarz*, $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\|v\|$ (que não será demonstrada aqui, mas o é feito no corpo do texto em termos do *produto geométrico*), segue que

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|} \leq 1.$$

Dessa forma, existe um único real θ tal que $0 \leq \theta \leq \pi$ e

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|}.$$

Esse número θ é designado o *ângulo entre u e v* . Diz-se que os dois vetores u e v são *ortogonais* com relação ao produto interno f supracitado se $\langle u, v \rangle = 0$, o que corresponde a dizer que o ângulo entre u e v é zero. Um subconjunto de vetores $S = \{u_1, \dots, u_r\}$ do espaço euclidiano V é dito *ortonormal* se $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j \in \{1, \dots, r\}$. Da definição de conjunto linearmente independente segue que todo subconjunto ortonormal de V é linearmente independente. E se um conjunto β é uma base de V e é também ortonormal, diz-se que β é uma *base ortonormal* de V .

De um modo geral, dois espaços vetoriais finitamente gerados de mesma dimensão são isomorfos. De fato, se U e V são espaços vetoriais finitamente gerados, β e γ respectivas bases desses espaços, e $\dim(U) = \dim(V)$, pode-se definir uma bijeção $\phi : \beta \rightarrow \gamma$, e com base nessa bijeção construir um isomorfismo entre U e V (o que não será feito aqui). Em particular, o fato de que $\dim(U) = \dim(U^*)$ implica que $U \simeq U^*$. Não existe, porém, nenhum isomorfismo natural entre esses dois espaços, ou seja, o isomorfismo entre U e seu espaço dual depende da base adotada para U . Mas pode-se considerar um isomorfismo induzido por um produto interno adotado para U . Qualquer produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induz uma aplicação $\phi : U \rightarrow U^*$ dada por $u \mapsto \phi(u) = \langle u, \cdot \rangle$, $u \in U$, sendo $\phi(u)$ uma forma linear de U^* que atua sobre um vetor v de U da seguinte forma: $[\phi(u)](v) = \langle u, v \rangle$. A forma linear $\phi(u)$ é denominada o *dual* do vetor u com relação ao produto interno em questão. Na abordagem usual da mecânica quântica, em que se lida com espaços hermitianos (que obedecem a outras propriedades que os tornam *espaços de Hilbert*), utiliza-se a notação de Dirac, em que os vetores de um espaço de Hilbert são denotados genericamente por $|u\rangle, |v\rangle, \dots$, seus duais com relação ao produto escalar hermitiano são

denotados por $\langle u|, \langle v|, \dots$, e o produto escalar hermitiano de $|u\rangle$ por $|v\rangle$ é denotado por $\langle u|v\rangle$.

Dados os espaços vetoriais U e V sobre o corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, considere o produto cartesiano $U \times V = \{(u, v) \mid u \in U \text{ e } v \in V\}$ e as operações de soma de pares da forma (u, v) , sendo $u \in U$ e $v \in V$, e multiplicação de um tal par por um escalar de \mathbb{K} , dadas por

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2) \quad \text{e} \quad \alpha(u, v) = (\alpha u, \alpha v).$$

Sem dificuldade verifica-se que $U \times V$ dotado das operações acima definidas determina um espaço vetorial. Tal espaço vetorial é denominado *soma direta externa* de U e V e é denotado por $U \oplus_e V$; um elemento (u, v) de tal espaço é denotado $u + v$. Como

$$u + v = (u + o_V) + (o_U + v),$$

sendo o_U e o_V os respectivos vetores nulos de U e de V , conclui-se que

$$\dim(U \oplus_e V) = \dim(U) + \dim(V),$$

se U e V forem ambos finitamente gerados, obviamente.

Seja W um espaço vetorial sobre o corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ e U e V dois subespaços de W . Se (a) para cada vetor w de W existem vetores u de U e v de V tais que $w = u + v$, e se (b) $U \cap V = \{o\}$, se escreve $W = U \oplus_i V$ e diz-se que W é uma *soma direta interna* dos subespaços vetoriais U e V . Pode-se mostrar que (o que não será feito aqui) que existe um isomorfismo entre W e $U \oplus_e V$, ou seja, $(U \oplus_i V) \simeq (U \oplus_e V)$. Assim, a soma direta interna equivale à soma direta externa, a que foi definida inicialmente. Dessa forma, na prática, não se distingue soma direta interna e soma direta externa, e utiliza-se simplesmente o símbolo \oplus para denotar ambos os tipos de soma direta.

Dados os espaços vetoriais U_1, U_2, \dots, U_p , de maneira similar a feita anteriormente, define-se a soma direta $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_p$, a qual pode ser denotada

$$U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_p = \bigoplus_{i=1}^p U_i.$$

Cabe um último comentário pertinente, sobre bases: chama-se *base canônica* de um espaço vetorial a base ordenada ortonormal mais primitiva e intuitiva para o espaço vetorial. No caso do espaço vetorial usual associado a \mathbb{K}^n , a base canônica é $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tal que $e_i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \dots, \delta_{ni})$. Assim, por exemplo, a base canônica de \mathbb{R}^3 é $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. A base canônica do espaço vetorial das matrizes $m \times n$

sobre o corpo dos reais pode ser facilmente identificada tomando-se o exemplo da base canônica de $M_2(\mathbb{R})$, qual seja,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

A base canônica do espaço vetorial $P_n(\mathbb{K})$ dos polinômios de grau menor ou igual a n sobre o corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$.

A.2.4 Álgebras

Uma *álgebra* sobre um corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ consiste num espaço vetorial V sobre o corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ dotado de uma operação binária $P : V \times V \rightarrow V$, denominada *produto*, que seja bilinear, ou seja, o espaço vetorial V sobre $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ munido de uma operação binária P é uma álgebra sobre o corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ se as seguintes propriedades são satisfeitas:

- (a) $P(u, v) \in V, \forall u, v \in V$;
- (b) $P(u, v + w) = P(u, v) + P(u, w), \forall u, v, w \in V$;
- (c) $P(u + v, w) = P(u, w) + P(v, w), \forall u, v, w \in V$;
- (d) $P(\lambda u, v) = P(u, \lambda v) = \lambda P(u, v), \forall u, v \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Uma álgebra é denominada uma *álgebra comutativa* se seu produto for comutativo, ou seja, $P(u, v) = P(v, u)$, para quaisquer vetores u e v do espaço vetorial que serve de substrato. Uma álgebra é denominada uma *álgebra associativa* se seu produto for associativo, ou seja, $P(u, P(v, w)) = P(P(u, v), w)$ para quaisquer vetores u e v do espaço vetorial que serve de substrato. É interessante salientar que uma álgebra comutativa não necessariamente é associativa e uma álgebra associativa não necessariamente é comutativa.

É útil se utilizar da “notação operacional” para denotar o produto. Por exemplo, com a notação $P(u, v) = u * v$, a comutatividade do produto se expressa por $u * v = v * u$, e a associatividade do produto se expressa por $u * (v * w) = (u * v) * w$. Quando o produto é associativo, pode-se escrever $u * (v * w)$ e $(u * v) * w$ simplesmente como $u * v * w$.

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ e $(V, *)$ uma álgebra. Se W é um subespaço vetorial de V e $(W, *)$ também é uma álgebra, então diz-se que $(W, *)$ é uma *sub-álgebra* de $(V, *)$. Tal álgebra é dita ser *unital* se o elemento neutro do produto à esquerda é igual ao elemento neutro do produto à direita, ou seja, se, qualquer que seja v de V , existem elementos 1_E e 1_D tais que $1_E * v = v * 1_D = v$ e $1_E = 1_D$.

Um último conceito pertinente aqui é o de *ideal* de uma álgebra associativa. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, e seja $(V, *)$ uma álgebra associativa sobre $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. Uma sub-álgebra $(W, *)$ de $(V, *)$ é denominada um *ideal à esquerda* de $(V, *)$ se $v * w \in W$ para quaisquer v de V e w de W . Uma sub-álgebra $(U, *)$ de $(V, *)$ é denominada um *ideal à direita* de $(V, *)$ se $u * v \in U$ para quaisquer v de V e u de U . Uma sub-álgebra de $(V, *)$ que seja tanto um ideal à esquerda quanto um ideal à direita é denominado um *ideal bilateral*, ou simplesmente um *ideal* de $(V, *)$. Além disso, quando a álgebra em questão é comutativa, os três tipos de ideal coincidem, e fala-se somente em ideal.

Abaixo seguem alguns exemplos de álgebras.

- O espaço vetorial determinado por \mathbb{R} e suas operações de soma de números reais e multiplicação de número real por número real automaticamente determina uma álgebra, cujo produto é em si a multiplicação de números reais. Note que essa álgebra é comutativa e associativa.
- O espaço vetorial determinado por \mathbb{C} e suas operações de soma de números complexos e multiplicação de número complexo por número real, dotado do produto de números complexos (neste caso, espaço vetorial sobre o corpo dos reais), determina uma álgebra. Trata-se de uma álgebra comutativa e associativa.
- O espaço vetorial determinado por \mathbb{H} e suas operações de soma de quatérnions e multiplicação de quatérnion por número real, dotado do produto quaterniônico, determina uma álgebra associativa e não-comutativa.
- O espaço vetorial determinado por $M_n(\mathbb{C})$ e suas operações de soma de matrizes e multiplicação de matriz por número complexo, dotado do produto matricial, é uma álgebra associativa e não-comutativa.
- O espaço vetorial determinado por $P_n(\mathbb{C})$ (o conjunto dos polinômios complexos de grau menor ou igual a n) e suas operações de soma de polinômios e multiplicação de polinômio por número complexo, dotado do produto usual de polinômios, determina uma álgebra comutativa e associativa.
- Há uma grande variedade de álgebras importantes tanto para a Matemática quanto para a Física, além das *álgebras de Clifford* e das *álgebras de Grassmann* com as quais se lida neste trabalho, tais como as *álgebras de Lie*, as *álgebras de Poisson*, as *álgebras de Jordan*, as C^* -álgebras, e outras mais.

Apêndice B - Mais Quatérnions e a Teoria de Dirac

Aqui será dada atenção à algumas aplicações básicas dos quatérnions à Física teórica, com destaque para a apresentação de elementos da teoria de Dirac. Além de servirem de subsídios para o que é apresentado no trabalho, servem também como base para a comparação entre a formulação da teoria de Dirac em termos de quatérnions e em termos da álgebra geométrica do espaço-tempo de Minkowski; e além do mais, constituem uma forma de ilustração da utilidade dos quatérnions à Física. Mas antes que se lide com a teoria de Dirac, o que é feito na segunda seção, delinea-se, também em termos de quatérnions, a eletrodinâmica clássica e a teoria da relatividade especial, na primeira seção. A exposição se baseia no mesmo trabalho de J. Lambek o qual foi utilizado para a introdução aos quatérnions na primeira seção do capítulo 1, com algumas informações colhidas do capítulo “Special Theory of Relativity” do clássico livro de Eletrodinâmica de John David Jackson (JACKSON, 1975) e do capítulo “Equações Relativísticas” do livro de mecânica quântica de Antonio Fernando Ribeiro de Toledo Piza (PIZA, 2003), embora estes autores não tenham utilizado quatérnions.

B.1 Eletrodinâmica Clássica e Teoria da Relatividade Especial

Considere a representação quaterniônica de vetores do espaço euclidiano, sendo o vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ representado pelo quatérnion puro $x = x_1i_1 + x_2i_2 + x_3i_3$.

No âmbito dessa representação, o *operador nabla*, em termos de coordenadas retangulares, tem a forma

$$\nabla = i_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + i_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Sua atuação sobre um quatérnion puro χ é dada por

$$\nabla\chi = -\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\chi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\chi_3}{\partial x_3}\right) + \left[\left(\frac{\partial\chi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial\chi_2}{\partial x_3}\right)i_1 + \left(\frac{\partial\chi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\chi_3}{\partial x_1}\right)i_2 + \left(\frac{\partial\chi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\chi_2}{\partial x_1}\right)i_3\right],$$

que pode ser escrito como

$$\nabla\chi = -\nabla \cdot \chi + \nabla \times \chi.$$

De forma que, no âmbito dessa representação, as *equações de Maxwell*, em termos de *unidades gaussianas*, ficam:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot E &= 4\pi\rho, & \nabla \times E + \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot B &= 0, & \nabla \times B - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Nessas equações, tem-se

$$E = E_1 i_1 + E_2 i_2 + E_3 i_3 \quad \text{e} \quad B = B_1 i_1 + B_2 i_2 + B_3 i_3$$

como os quatérnions representantes dos campos elétrico e magnético (\mathbf{E} e \mathbf{B}), ρ como a densidade de carga elétrica de um sistema e \mathbf{j} como o quatérnion representante da densidade de corrente elétrica \mathbf{j} para esse sistema (observação: \mathbf{j} não deve ser confundido com a segunda unidade quaterniônica, que normalmente é representada por j e está sendo representada por i_2); c representa a velocidade da luz no vácuo e t corresponde à variável temporal.

Utilizando-se da linguagem dos quatérnions, admitindo quatérnions com coeficientes complexos, que são denominados *biquatérnions*, as equações de Maxwell podem ser escritas na forma de uma única equação, qual seja,

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - i\nabla\right)(B + iE) + \frac{4\pi}{c}(c\rho + i\mathbf{j}) = 0, \quad (\text{B.1})$$

em que i corresponde à raiz quadrada de -1 ordinária.

De acordo com o autor do artigo em que se baseia essa exposição (LAMBEK, 1995), essa formulação das equações de Maxwell foi primeiramente apresentada, de forma independente, por Arthur William Conway em 1911, e por Ludwik Silberstein em 1912, embora pudesse ter sido feita pelo próprio Maxwell, quando disse, em 1869:

The invention of the calculus of quaternions is a step towards the knowledge of quantities related to space which can only be compared, for its importance, with the invention of triple coordinates by Descartes.

Das equações de Maxwell segue a chamada *equação de continuidade*,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (\text{B.2})$$

a qual asserta que

$$\text{Re} \left[\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + i\nabla \right) (c\rho + i\mathbf{j}) \right] = 0$$

(obs.: $\text{Re}(\chi)$, sendo χ um biquatérnion, é uma generalização do conceito de parte real/escalar de um quatérnion; dessa forma, de um modo geral, $\text{Re}(\chi)$ é um escalar complexo).

Uma outra consequência das equações de Maxwell é a existência de um *potencial escalar* φ e um *potencial vetorial* $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ (este dado pelo quatérnion $A = A_1 i_1 + A_2 i_2 + A_3 i_3$), os quais descrevem o comportamento dos campos elétrico e magnético, respectivamente. Esses potenciais são tais que

$$E = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} \quad \text{e} \quad B = \nabla \times A.$$

Pode-se descrever os potenciais escalar e vetorial por um *quadripotencial*, dado pelo biquatérnion $\varphi + iA$, que é tal que

$$\text{Pu} \left[\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + i\nabla \right) (\varphi + iA) \right] = -(B + iE). \quad (\text{B.3})$$

Note que a imposição de que

$$\text{Re} \left[\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + i\nabla \right) (\varphi + iA) \right] = 0 \quad (\text{B.4})$$

determina a *condição de gauge/calibre de Lorenz*, que tem aspecto mais familiar na forma

$$\nabla \cdot A + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Sejam

$$q = \sum_{\mu=0}^3 q_{\mu} i_{\mu} \quad \text{e} \quad p = \sum_{\mu=0}^3 p_{\mu} i_{\mu}$$

quatérnions arbitrários e

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} u & -v^* \\ v & u^* \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{P} = \begin{pmatrix} u' & -v'^* \\ v' & u'^* \end{pmatrix}$$

suas respectivas representações em termos de matrizes complexas.

Um *biquatérnion* arbitrário pode ser escrito como

$$\chi = \chi_0 + \chi_1 i_1 + \chi_2 i_2 + \chi_3 i_3 = \sum_{\mu=0}^3 \chi_{\mu} i_{\mu},$$

sendo $\chi_{\mu} \in \mathbb{C}$.

Tomando $\chi_{\mu} = q_{\mu} + ip_{\mu}$, pode-se escrever

$$\chi = \sum_{\mu=0}^3 (q_{\mu} + ip_{\mu}) i_{\mu} = \left(\sum_{\mu=0}^3 q_{\mu} i_{\mu} \right) + i \left(\sum_{\mu=0}^3 p_{\mu} i_{\mu} \right) = q + ip.$$

Dessa forma, é razoável supor que a representação matricial do biquatérnion χ seja dada por

$$\mathbb{X} = \mathbb{Q} + i\mathbb{P} = \begin{pmatrix} u + iu' & -v^* - iv'^* \\ v + iv' & u^* + iu'^* \end{pmatrix}.$$

É fácil observar que qualquer matriz complexa 2×2 pode ser escrita dessa forma. Isso pode ser verificado resolvendo-se as quatro equações que resultam da equação matricial

$$\begin{pmatrix} u + iu' & -v^* - iv'^* \\ v + iv' & u^* + iu'^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & y \\ x & z \end{pmatrix}$$

para u, v, u' e v' . Por exemplo, escrevendo $u = u_0 + iu_1$, $v = v_0 + iv_1$, etc., e então adicionando a primeira e a última equações,

$$u + iu' = w \quad \text{e} \quad u^* + iu'^* = z,$$

obtém-se

$$2u_0 + 2iu'_0 = w + z = (w_0 + z_0) + i(w_1 + z_1),$$

ou seja,

$$u_0 = \frac{1}{2}(w_0 + z_0) \quad \text{e} \quad u'_0 = \frac{1}{2}(w_1 + z_1);$$

as outras incógnitas são avaliadas com artifícios similares. Assim, a álgebra dos biquatérnions é *isomórfica* a das matrizes complexas 2×2 , $M_2(\mathbb{C})$.

O *conjugado complexo* do biquatérnion χ é dado por

$$\chi^* = \chi_0^* + \chi_1^*i_1 + \chi_2^*i_2 + \chi_3^*i_3 = q - ip.$$

Sua representação matricial consiste na matriz de χ com os termos conjugados, que se representa por \mathbb{X}^* . Por outro lado, o *conjugado quaterniônico* de χ , que é dado por

$$\bar{\chi} = \chi_0 - \chi_1i_1 - \chi_2i_2 - \chi_3i_3 = \bar{q} + i\bar{p},$$

tem como representação matricial a transposta da matriz de χ , \mathbb{X}^T . A composição da conjugação complexa com a conjugação quaterniônica corresponde então, em termos de matrizes, à conjugação hermitiana: $(\mathbb{X}^*)^T = (\mathbb{X}^T)^* = \mathbb{X}^\dagger$.

Pode-se estender as representações L e R , em termos de matrizes reais 4×4 , dos quatérnions ordinários, para os biquatérnions, em termos de matrizes complexas 4×4 , de forma análoga ao que foi feito no primeiro caso. Utilizando a mesma notação para as representações (e.g.: $L(a)$ representa a matriz 4×4 associada ao quatérnion a por meio de L), tem-se que

$$L(\chi^*) = L(\chi)^* \quad \text{e} \quad L(\bar{\chi}) = L(\chi)^T.$$

* * *

A *teoria especial da relatividade* requer a invariância da expressão $c^2t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ sob uma mudança de *sistema de referência inercial* (um sistema de referência em relação ao qual vale o *princípio de inércia*), sendo (ct, x_1, x_2, x_3) as coordenadas de um evento no espaço e no tempo. Dessa forma, é razoável representar uma posição no *espaço-tempo* por um biquatérnion da forma

$$x = x_0 + ix_1i_1 + ix_2i_2 + ix_3i_3 = ct + ir,$$

sendo, portanto, $x_0 = ct$ e $r = x_1i_1 + x_2i_2 + x_3i_3$, levando em conta, inclusive, que a norma de tal biquatérnion é da forma $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$.

Esses biquatérnions são caracterizados pela propriedade $x^* = \bar{x}$ e são denominados biquatérnions *hermitianos*. Com efeito, pode ser verificado que as matrizes $L(x)$ e $R(x)$ são hermitianas. O operador diferencial

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - i\nabla$$

tem também um caráter hermitiano. Por outro lado, o biquatérnion $F = B + iE$ satisfaz $\bar{F} = -F$ e portanto não é hermitiano — note que ele é representado por uma matriz anti-simétrica.

Buscando por transformações que conservam a norma de um biquatérnion hermitiano, verifica-se que tal propriedade é satisfeita pelas transformações

$$x \mapsto x^*, \quad x \mapsto -x \quad \text{e} \quad x \mapsto ax\bar{a}^*,$$

sendo a um biquatérnion de norma unitária. De um modo geral, a busca por transformações que conservam a norma da diferença entre biquatérnions hermitianos conduz às transformações acima mais a transformação

$$x \mapsto x + b,$$

sendo b um biquatérnion hermitiano. Todas as transformações consideradas geram o chamado *grupo de Poincaré*.

Transformações do tipo $x \mapsto ax\bar{a}^*$ são chamadas *transformações de Lorentz* (próprias); elas foram originalmente postuladas por Lorentz para explicar o resultado do *experimento de Michelson-Morley*. Essa explicação *ad hoc* foi depois justificada por Einstein, quem observou que elas também descrevem, além de rotações, transformações de coordenadas sob a mudança de referenciais, estas últimas sendo denominadas *boosts*.

Uma transformação de Lorentz é dada por um biquatérnion $a = q + ip$, com $q, p \in \mathbb{H}$, tal que $a\bar{a} = 1$, ou seja,

$$q\bar{q} - p\bar{p} = 1 \quad \text{e} \quad q\bar{p} + p\bar{q} = 0.$$

Tal transformação atua sobre um biquatérnion hermitiano, representante de uma posição do espaço-tempo, através de $x \mapsto ax\bar{a}^*$. Essa transformação de Lorentz descreve uma rotação no espaço euclidiano se a for um quatérnion real ($a \in \mathbb{H}$), ou seja, se $p = 0$, e descreve um *boost* se a for hermitiano, ou seja, se $\bar{a} = a^* = q - ip$, sendo, portanto, q um escalar e p um quatérnion real puro. Qualquer transformação de Lorentz é constituída de uma rotação seguida de um *boost*. De fato, considerando

$$\eta^2 = q\bar{q} = 1 + p\bar{p} \geq 1,$$

e então tomando

$$\varrho = q\eta^{-1} = \frac{q}{\|q\|} \quad \text{e} \quad b = \eta - iq\bar{p}\eta^{-1} = \|q\| - i\frac{q}{\|q\|}\bar{p},$$

verifica-se que $x \mapsto \varrho x\bar{\varrho}^*$ corresponde a uma rotação, $x \mapsto bx\bar{b}^*$ a um *boost*, e $a = b\varrho$.

O espaço vetorial dos biquatérnions hermitianos é chamado *espaço-tempo de Minkowski* e é gerado por $\{1, ii_1, ii_2, ii_3\}$. Tomando $\lambda_k = i$, para $k \in \{1, 2, 3\}$, e $\lambda_0 = 1$, os elementos de base do espaço de Minkowski podem ser escritos sob a forma $\lambda_\mu i_\mu$, com $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dessa forma, qualquer biquatérnion hermitiano pode ser escrito na forma

$$x = \sum_{\mu=0}^3 x'_\mu i_\mu = \sum_{\mu=0}^3 x_\mu \lambda_\mu i_\mu,$$

sendo $x_\mu = x'_\mu \lambda_\mu^*$ reais. Aplicando-se então a transformação de Lorentz sobre tal biquatérnion, obtém-se o biquatérnion também hermitiano $ax\bar{a}^*$, que pode ser escrito na forma

$$ax\bar{a}^* = \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\mu=0}^3 x_\mu \Lambda_{\mu\nu} \lambda_\nu i_\nu,$$

ou

$$ax\bar{a}^* = \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\mu=0}^3 x'_\mu \lambda_\mu^* \Lambda_{\mu\nu} \lambda_\nu i_\nu,$$

sendo $\Lambda_{\mu\nu}$ reais. Tomando

$$\lambda_\mu^* \Lambda_{\mu\nu} \lambda_\nu = \Delta_{\mu\nu}$$

observa-se que

$$L(a)R(\bar{a}^*) \{x'_\mu\} = \Delta^T \{x'_\mu\},$$

sendo $\{x'_\mu\} = (x_0 \ ix_1 \ ix_2 \ ix_3)^T$ e $\Delta = \{\Delta_{\mu\nu}\}$. A equação acima valendo para qualquer matriz coluna $\{x'_\mu\}$, segue que

$$L(a)R(\bar{a}^*) = \Delta^T.$$

Tomando a transposta de ambos os membros tem-se

$$R(a^*)L(\bar{a}) = \Delta.$$

Multiplicando à direita por $\{x'^*_\mu\}$, sendo x ainda um biquatérnion hermitiano arbitrário, obtém-se

$$R(a^*)L(\bar{a}) \{x'^*_\mu\} = \Delta \{x'^*_\mu\},$$

que pode ser escrito como

$$\bar{a}x^*a^* = \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\mu=0}^3 i_\mu \Delta_{\mu\nu} x'^*_\nu = \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\mu=0}^3 i_\mu \lambda_\mu^* \Lambda_{\mu\nu} \lambda_\nu x'^*_\nu = \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\mu=0}^3 i_\mu \lambda_\mu^* \Lambda_{\mu\nu} x'_\nu.$$

Assim, obtém-se o resultado seguinte.

LEMA I: Se uma transformação de Lorentz transforma $\lambda_\mu i_\mu$ em $a\lambda_\mu i_\mu \bar{a}^* = \sum_\nu \Lambda_{\mu\nu} \lambda_\nu i_\nu$, então $\bar{a}\lambda_\nu^* i_\nu a^* = \sum_\mu i_\mu \lambda_\mu^* \Lambda_{\mu\nu}$.

O *intervalo relativístico infinitesimal* ds do espaço-tempo de Minkowski é dado por

$$(ds)^2 = \|dx\|^2 = (cdt)^2 - \|dr\|^2 = (cdt)^2 - (dx_1)^2 - (dx_2)^2 - (dx_3)^2,$$

e corresponde a um invariante sob transformações de Lorentz, assim como a posição x no espaço-tempo.

Considere então uma partícula se movendo com velocidade instantânea dada pelo quatérnion real puro $v = v(t)$ com relação a um sistema de referência inercial. Com relação a este sistema de referência, a partir do instante considerado, em um intervalo de tempo dt a partícula se desloca de $dr = vdt$. O intervalo no espaço-tempo correspondente a essas variações de tempo e espaço é dado por

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - \|dr\|^2 = c^2(dt)^2 - \|v\|^2(dt)^2,$$

que pode ser escrito em termos do parâmetro $\beta = v/c$ como

$$(ds)^2 = c^2(dt)^2 - c^2\beta^2(dt)^2 = c^2(dt)^2(1 - \beta^2).$$

Com relação a um sistema de referência em relação ao qual a partícula está em repouso as variações de tempo e espaço correspondentes a dt e dr são, respectivamente, $dt' = d\tau$ e $dr' = 0$, em que τ é o chamado *tempo próprio da partícula*, o tempo marcado por um relógio que a acompanha. Dessa forma, com relação a este segundo sistema de referência, tem-se, para o intervalo relativístico,

$$(ds')^2 = (cdt')^2 - \|dr'\|^2 = c^2(d\tau)^2.$$

Como o intervalo relativístico é invariante sob transformações de Lorentz, deve-se ter $(ds)^2 = (ds')^2$, que implica

$$(dt)^2(1 - \beta^2) = (d\tau)^2,$$

ou,

$$dt = \gamma d\tau,$$

em que $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ é o chamado *fator de Lorentz*. A relação acima expressa o fenômeno conhecido por *dilatação temporal*: sendo $\gamma \geq 1$, tem-se $dt \geq d\tau$.

Sendo $(ds)^2 = c^2(d\tau)^2$, o tempo próprio de uma partícula é também, assim como o intervalo relativístico, um invariante sob transformações de Lorentz. Dessa forma, é natural definir a velocidade da partícula no espaço-tempo como $u = dx/d\tau$, sendo $x = \sum_{\mu=0}^3 x_\mu \lambda_\mu i_\mu$ o biquatérnion hermitiano que dá sua posição no espaço-tempo. Assim, sendo $v = v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3$ o quatérnion real que dá a velocidade da partícula no espaço tridimensional euclidiano, a velocidade da partícula no espaço-tempo é dada por

$$u = \frac{dt}{d\tau}c + i\frac{dt}{d\tau}v = \gamma c + i\gamma v,$$

Pode-se verificar que u se transforma como x sob transformações de Lorentz. Com efeito,

$$\|u\|^2 = u\bar{u} = uu^* = (\gamma c + i\gamma v)(\gamma c - i\gamma v) = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 \|v\|^2 = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 v_1^2 - \gamma^2 v_2^2 - \gamma^2 v_3^2,$$

que tem a mesma forma que $\|x\|^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$.

A quantidade *energia-momento* da partícula é então dada por $p = m_0 u$, sendo m_0 a *massa de repouso* da partícula (sua massa com relação a um sistema de referência de acordo com o qual está em repouso), que é invariante sob transformações de Lorentz. A energia-momento pode então ser escrita como

$$p = m_0 \frac{dt}{d\tau} c + i m_0 \frac{dt}{d\tau} v = \gamma m_0 c + i \gamma m_0 v.$$

A quantidade $m = \gamma m_0$ é definida como a *massa relativística* da partícula. Dessa forma, pode-se escrever $p = mc + imv$. Observe que p , assim como u , também se transforma como x sob transformações de Lorentz. A norma de p pode ser escrita como

$$p\bar{p} = (\gamma m_0 c + i \gamma m_0 v)(\gamma m_0 c - i \gamma m_0 v) = (\gamma m_0 c)^2 - (\gamma m_0 \|v\|)^2 = (\gamma m_0 c)^2 \left(1 - \frac{\|v\|^2}{c^2}\right) = (m_0 c)^2,$$

o que permite verificar que tal quantidade é um invariante sob transformações de Lorentz.

A *densidade de carga-corrente*, $J = c\rho + ij$, pode ser naturalmente tomada como $J = \rho_0 u$, sendo ρ_0 o invariante densidade de carga elétrica, de forma que $\rho = \gamma \rho_0$. Note que J também se transforma como x .

Com a notação agregada, as equações de Maxwell (B.1) podem novamente, desta vez de forma mais compacta, ser postas sob a forma de uma única equação:

$$\frac{d}{dx} F + \frac{4\pi}{c} J = 0. \quad (\text{B.5})$$

Foi Poincaré o primeiro a perceber que elas são invariantes sob transformações de Lorentz. Para verificar isso é preciso efetuar as transformações

$$F \mapsto a^* F \bar{a}^* \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx} \mapsto a \left(\frac{d}{dx} \right) \bar{a}^*.$$

A primeira é natural, já que preserva a natureza do biquatérnion $F = B + iE$, do tipo (quatérnion puro) + i (quatérnion puro), que implica $\bar{F} = -F$, que também é satisfeito pela quantidade transformada $a^* F \bar{a}^*$,

$$\overline{(a^* F \bar{a}^*)} = \bar{a}^* \bar{F} \bar{a}^* = -a^* F \bar{a}^*,$$

em que considerou-se a propriedade da conjugação quaterniônica $\overline{(ab)} = \bar{b}\bar{a}$. A outra transformação é justificada por um princípio geral: se a matriz coluna de x , $\{x'_\mu\} = \{\lambda_\mu x_\mu\}$, é transformada pela matriz Δ , então a matriz coluna de

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \lambda_\mu^* \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

é transformada pela inversa de Δ^T . Como Δ representa uma rotação, de certa forma, é uma matriz ortogonal, ou seja, $\Delta^T = \Delta^{-1}$, logo, o operador

$$\sum_{\mu=0}^3 \lambda_\mu^* \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - i\nabla = \frac{d}{dx}$$

se transforma como x .

Em suma, os biquatérnions hermitianos $x = ct + ir$, $u = \gamma c + i\gamma v$, $p = mc + imv$, $J = \rho c + ij$ e $\Phi = \varphi + iA$ são todos transformados por $a(\)\bar{a}^*$, inclusive o operador d/dx . Por outro lado, o biquatérnion $F = B + iE$, que representa o *campo eletromagnético*, é transformado por $a(\)\bar{a}$.

Operando na forma quaterniônica das equações de Maxwell com $\overline{(d/dx)}$ obtém-se

$$\overline{\left(\frac{d}{dx}\right)} \left(\frac{d}{dx}\right) F + \frac{4\pi}{c} \overline{\left(\frac{d}{dx}\right)} J = 0.$$

Observe que o primeiro termo é da forma (quatérnion puro) + i (quatérnion puro), assim como F , isso implica que a parte escalar do segundo termo é nula, o que corresponde à equação de continuidade. Note também que, como a parte vetorial de $\overline{(d/dx)}\Phi$ é $-F$ (vide equação (B.3)), então $\overline{(d/dx)}\Phi + F$ é um escalar, o que representa a determinação de Φ a menos de um biquatérnion hermitiano constante.

As equações de Maxwell descrevem o campo eletromagnético F gerado por uma distribuição contínua de carga elétrica em movimento, que é descrita pela densidade de carga-corrente J . Reciprocamente, um campo eletromagnético também age sobre uma distribuição móvel de cargas; em particular, uma carga elétrica puntiforme de valor q se movendo com velocidade dada por um quatérnion real v , sofre a ação de uma força dada por

$$q \left(E + \frac{1}{c} v \times B \right).$$

De acordo com o *princípio fundamental da dinâmica clássica*, essa força corresponde à taxa de variação temporal do momento da partícula. Entretanto, no caso relativístico, deve-se tomar o tempo próprio como parâmetro. Além do mais, deve-se considerar a energia-momento em lugar do momento, e em lugar da força de Lorentz, deve-se considerar uma força que ganha lugar no espaço-tempo. A expressão acima corresponde à parte espacial

da força; a parte temporal corresponde a taxa de variação da energia da partícula, dada por $(q/c)\gamma v \cdot E$. Assim, sendo $p = p_0 + i\mathbf{p}$ o biquatérnion energia-momento da partícula, tem-se, de princípio

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp_0}{dt} + i\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{q}{c}v \cdot E + iq \left(E + \frac{v}{c} \times B \right).$$

Utilizando a regra da cadeia para introduzir a derivada com relação ao tempo próprio e rearranjando os termos, tem-se

$$\frac{dp}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{q}{c}(v \cdot E + icE + iv \times B),$$

ou

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{q}{c}(\gamma v \cdot E + i\gamma cE + i\gamma v \times B).$$

Com algumas manipulações pode-se escrever a equação acima na forma

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{q}{c}uF + ig,$$

em que u é o biquatérnion que dá a velocidade da partícula no espaço-tempo e g é um biquatérnion hermitiano, mais exatamente, $g = (q/c)(v \cdot B + i(\gamma cB - v \times E))$. Obtém-se, então, a versão relativística da equação de movimento de uma partícula sob a ação de um campo eletromagnético.

B.2 Teoria de Dirac

No âmbito da teoria quântica quantidades físicas são descritas por operadores. Em mecânica quântica não-relativística, particularmente, o momento linear é descrito pelo operador diferencial $-i\hbar\nabla$, sendo $\hbar = h/2\pi$ a *constante de Planck reduzida*; esse operador corresponde à parte espacial do operador de energia-momento no âmbito relativístico, cuja parte temporal é $i(\hbar/c)(\partial/\partial t)$. Dessa forma, no caso relativístico, a energia-momento $p = m_0u$ pode ser descrita pelo operador diferencial quaterniônico $i\hbar(d/dx)$, sendo que $d/dx = (1/c)(\partial/\partial t) - i\nabla$, definido anteriormente. Dessa forma, espera-se que a equação $p\bar{p} = (m_0c)^2$ conduza a uma equação de onda relativística quando se substitui p por seu operador correspondente,

$$-\hbar^2 \left(\frac{d}{dx} \right) \overline{\left(\frac{d}{dx} \right)} \phi = (m_0c)^2 \phi,$$

ou,

$$\left(\frac{d}{dx}\right) \overline{\left(\frac{d}{dx}\right)} \phi + \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2 \phi = 0,$$

ou ainda,

$$\square \phi + \kappa^2 \phi = 0,$$

em que $\square = (d/dx)\overline{(d/dx)}$, $\kappa = m_0 c/\hbar$ e $\phi = \phi_0 + i\phi_1$ é uma função da posição no espaço-tempo. A equação obtida é a conhecida *equação de Klein-Gordon*, embora tivesse sido considerada por Schrödinger antes de introduzir a equação que leva seu nome.

Dirac obteve sua famosa equação de primeira ordem “extraíndo a raiz quadrada” do operador diferencial de segunda ordem presente na equação de Klein-Gordon, redescobrimo a ideia central por detrás das álgebras de Clifford. Não parece ser amplamente percebido que tal método *ad hoc* não é necessário e que a equação de primeira ordem de Dirac é de fato equivalente à equação de Klein-Gordon, desde que não se insista que ϕ permaneça um escalar. Com efeito, assumindo que ϕ é um biquatérnion e escrevendo

$$\frac{d\phi}{dx} = \kappa\chi,$$

sendo $\chi = \chi_0 + i\chi_1$ um outro biquatérnion, então

$$\kappa \overline{\left(\frac{d\chi}{dx}\right)} = \overline{\left(\frac{d}{dx}\right)} \left(\frac{d}{dx}\right) \phi = -\kappa^2 \phi.$$

Dessa forma, a equação de Klein-Gordon é equivalente as duas seguintes equações de primeira ordem:

$$\frac{d\phi}{dx} = \kappa\chi \quad \text{e} \quad \overline{\left(\frac{d\chi}{dx}\right)} = -\kappa\phi.$$

O próximo passo é escrever essas duas equações sob a forma de uma única equação de primeira ordem.

Assuma, de princípio, que exista uma entidade j tal que $j^2 = -1$, $ji = -ij$ e $ji_\mu = i_\mu j$, sendo $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$. Desse modo, tem-se

$$\left(\frac{d}{dx}\right) (\phi + j\chi) = \left(\frac{d}{dx}\right) \phi + \left(\frac{d}{dx}\right) j\chi = \kappa\chi + j \overline{\left(\frac{d}{dx}\right)} \chi = \kappa(\chi - j\phi) = -j\kappa(\phi + j\chi).$$

Sabe-se que não existe nenhuma matriz 4×4 que anti-comuta com a unidade imaginária i . Considere então a representação de quatérnions por matrizes reais 4×4 , anteriormente referida, e identifique i_μ com a matriz $L(i_\mu)$. Considere agora a entidade j_μ , a “representação contravariante” de i_μ , com a qual identifica-se a matriz $R(i_\mu)$. Dessa forma, observa-se que

$$j_1^2 = j_2^2 = j_3^2 = j_3 j_2 j_1 = -1 \quad \text{e} \quad j_\mu i_\nu = i_\nu j_\mu.$$

Agora, identificando i com j_1 e j com j_2 , e então definindo $\Psi = \phi + j_2 \chi$, das relações acima segue que

$$\Psi = \phi + j_2 \chi = (\phi_0 + j_1 \phi_1) + j_2 (\chi_0 + j_1 \chi_1) = \phi_0 + j_1 \phi_1 + j_2 \chi_0 + j_3 \chi_1,$$

que corresponde a uma espécie de “quatérnion de componentes quaterniônicas”.

Assim, a igualdade

$$\left(\frac{d}{dx} \right) (\phi + j \chi) = -j \kappa (\phi + j \chi),$$

anteriormente obtida, fica

$$\frac{d}{dx} \Psi + j_2 \kappa \Psi = 0,$$

em que agora, com a troca de i por j_1 ,

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - j_1 \nabla.$$

A equação obtida corresponde à *equação de Dirac* para o elétron livre. Observe que com a troca de i por j_1 , passa-se a escrever $x = ct + j_1 r$, $u = \gamma c + j_1 \gamma v$, e assim por diante; inclusive, o biquatérnion $a = q + ip$ que aparece nas transformações de Lorentz torna-se $a = q + j_1 p$.

Para certificar-se de que a equação obtida é invariante sob transformações de Lorentz, basta que Ψ se transforme em $a^* \Psi$, além, é claro, da transformação $d/dx \mapsto a(d/dx) \bar{a}^*$. Há outras possibilidades, a saber, $\Psi \mapsto a^* \Psi \bar{a}$ e $\Psi \mapsto a^* \Psi \bar{a}^*$, mas estas não serão consideradas. Observe que as transformações de Lorentz $a(\) \bar{a}^*$ são imutáveis sob a troca de a por $-a$, mas essa troca corresponde a fazer Ψ transformar-se em $-a^* \Psi$; as duas transformações possíveis de Ψ , cada qual correspondendo a um sinal de a^* na expressão de transformação, não constituem uma representação do *grupo de Lorentz*, mas sim uma *representação projetiva*, sobre a qual não se discute aqui; apenas observa-se que, segundo

Lambek (1995), essa é a razão matemática por se dizer que o elétron tem *spin* 1/2.

Pode ser mostrado que as 16 matrizes associadas a 1, i_μ , j_ν e $i_\mu i_\nu$ (sendo que $\mu, \nu \in \{1, 2, 3\}$) geram o espaço vetorial das matrizes reais 4×4 . Dessa forma, Ψ corresponde a uma matriz real 4×4 . Entretanto, a lei de transformação $\Psi \mapsto a^* \Psi$ permite associar Ψ a uma matriz 4×4 multiplicada pela matriz coluna $(1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$, de forma a representar Ψ , sem perda de generalidade, pela matriz coluna real $\{\psi_\mu\} = (\psi_0 \ \psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3)^T$, fazendo então com que Ψ corresponda ao quatérnion real $\psi = \psi_0 + \psi_1 i_1 + \psi_2 i_2 + \psi_3 i_3$. Apesar da possibilidade de se utilizar uma matriz coluna complexa, isso não se faz necessário no caso do elétron livre.

A equação de Dirac para o elétron livre pode ser escrita explicitamente na forma matricial como segue,

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - R(i_1) \sum_{\nu=1}^3 L(i_\nu) \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) \{\psi_\mu\} + \kappa R(i_2) \{\psi_\mu\} = 0,$$

em que $L(i_\nu) \{\psi_\mu\} = \{\psi'_\mu\}$, sendo $\psi' = i_\nu \psi$, e $R(i_\nu) \{\psi_\mu\} = \{\psi''_\mu\}$, sendo $\psi'' = \psi i_\nu$. Em termos de quatérnions reais, essa equação fica:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} - (\nabla \psi) i_1 + \kappa \psi i_2 = 0.$$

Quando se associou j_1 com $R(i_1)$ e j_2 com $R(i_2)$, poderia-se ter feito corresponder j_1 com $R(i_2)$ e j_2 com $R(i_3)$, ou, de forma mais geral, j_μ com $R(\varrho i_\mu \bar{\varrho})$, sendo ϱ um quatérnion real tal que $\varrho \bar{\varrho} = 1$ (ϱ tem norma unitária), ou seja, $\varrho(\)\bar{\varrho}$ representa uma rotação no espaço euclidiano tridimensional. Dessa, tomando-se um sistema de referência rotacionado em relação ao original por $\varrho(\)\bar{\varrho}$, a equação de Dirac para o elétron livre toma a forma

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} - (\nabla \psi) \varrho i_1 \bar{\varrho} + \kappa \psi \varrho i_2 \bar{\varrho} = 0.$$

O produto à direita com ϱ permite reescrever essa equação como

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\psi \varrho) - \nabla (\psi \varrho) i_1 + \kappa (\psi \varrho) i_2 = 0,$$

que tem a mesma forma da equação original, o que mostra que a equação de Dirac para o elétron livre é invariante sob uma rotação do sistema de referência.

Quando o elétron é submetido a um campo eletromagnético externo descrito por um quadripotencial $\Phi = \varphi + j_1 A$ o operador de energia-momento $i\hbar(d/dx)$ deve ser substituído por $i\hbar(d/dx) - e\Phi/c$, que corresponde a substituir o operador d/dx na equação de Dirac

para o elétron livre por $d/dx + ie\Phi/\hbar c$:

$$\left(\frac{d}{dx} + i \frac{e}{\hbar c} \Phi \right) \Psi + j_2 \kappa \Psi = 0. \quad (\text{B.6})$$

Essa é a equação de Dirac para um elétron sujeito a um campo eletromagnético dado por um quadripotencial Φ . Como a equação para o elétron livre, ela pode ser reescrita em termos de ψ e da expressão explícita para o operador d/dx , bem como do quadripotencial $\Phi = \varphi + j_1 A$, bastando para isso substituir i por j_1 , obtendo-se

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} - j_1 (\nabla \psi) + j_1 \frac{e}{\hbar c} (\varphi + j_1 A) \psi + j_2 \kappa \psi = 0, \quad (\text{B.7})$$

sendo que agora ψ é um biquatérnion.

No trabalho de base para esta exposição, o autor J. Lambek optou por não levar totalmente a cabo a introdução das unidades j_1 , j_2 e j_3 , quando abdicou da substituição de i por j_1 ao introduzir a equação de Dirac para o elétron submetido a um campo eletromagnético, tendo que sucumbir ao tratamento matricial. Acredita-se que o motivo para tal procedimento é que com a substituição de i por j_1 , a dita *transformação de fase* $\Psi \mapsto \Psi \exp(i\alpha)$, sendo α um escalar real, não equivale à *transformação de gauge/calibre*

$$\Phi \mapsto \Phi + \frac{\hbar c}{e} \frac{d\alpha}{dx},$$

como ocorre na abordagem usual, além do mais, um resultado importante apresentado por Lambek em seu trabalho não parece poder ser obtido com a abordagem supracitada. Entretanto, o problema não parece estar na mera substituição de i por j_1 , e sim na definição do operador de energia-momento. De fato, tomando-o como $\hbar(d/dx)()j_1$ (em que o espaço em branco entre parênteses representa o argumento), substituindo-o por $\hbar(d/dx)()j_1 - (e/c)\Phi()$ na equação de Dirac para o elétron livre, a fim de representar a interação com o campo, e então fazendo a conveniente substituição

$$\hbar \frac{d}{dx} () j_1 - \frac{e}{c} \Phi () \mapsto \frac{d}{dx} () + \frac{e}{\hbar c} \Phi () j_1,$$

a equação de Dirac para o elétron submetido a um campo eletromagnético dado pelo quadripotencial Φ fica

$$\frac{d\Psi}{dx} + \frac{e}{\hbar c} \Phi \Psi j_1 + j_2 \kappa \Psi = 0. \quad (\text{B.8})$$

Como observado anteriormente, o potencial Φ é determinado a menos de um termo constante. Essa propriedade não é alterada pela *transformação de gauge/calibre*

$$\Phi \mapsto \Phi + \frac{\hbar c}{e} \frac{d\alpha}{dx},$$

sendo $\alpha = \alpha(x)$ uma função escalar real da posição no espaço-tempo. Esse resultado pode ser obtido efetuando a *transformação de fase* $\Psi \mapsto \Psi \exp(j_1 \alpha) = \Psi (\cos(\alpha) + j_1 \sin(\alpha))$ na equação de Dirac. Com efeito, tomando tal transformação na equação obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\Psi \exp(j_1 \alpha)) + \frac{e}{\hbar c} \Phi \Psi \exp(j_1 \alpha) j_1 + j_2 \kappa \Psi \exp(j_1 \alpha) &= \\ = \frac{d\Psi}{dx} \exp(j_1 \alpha) + \frac{d\alpha}{dx} \Psi j_1 \exp(j_1 \alpha) + \frac{e}{\hbar c} \Phi \Psi j_1 \exp(j_1 \alpha) + j_2 \kappa \Psi \exp(j_1 \alpha) &= 0, \end{aligned}$$

que pode ser escrito como

$$\frac{d\Psi}{dx} + \frac{e}{\hbar c} \left(\Phi + \frac{\hbar c}{e} \frac{d\alpha}{dx} \right) \Psi j_1 + j_2 \kappa \Psi = 0.$$

Observe que se considerou o fato de que j_1 comuta com $\exp(j_1 \alpha)$.

Para a obtenção de um último resultado interessante apresentado no artigo de Lambek, se utilizará da equação de Dirac em termos de biquatérnions, a equação (B.7), que pode ser escrita de forma mais compacta como

$$\frac{d\psi}{dx} + j_1 \frac{e}{\hbar c} \Phi \psi + j_2 \kappa \psi = 0; \quad (\text{B.9})$$

lembrando que j_1 comuta com qualquer biquatérnion.

A equação de Dirac expressa a ação de um campo eletromagnético, descrito por um quadripotencial Φ , sobre o elétron. Por outro lado, há contribuição do elétron no campo eletromagnético, sendo este descrito pelas equações de Maxwell, as quais, por sua vez, são requeridas serem invariantes sob transformações de Lorentz. Para tal, deve ser satisfeita a condição de calibre de Lorenz (B.4) (pode-se utilizar outra *fixação de calibre*, mas a de Lorenz é particularmente conveniente no caso),

$$\text{Re} \left[\overline{\left(\frac{d}{dx} \right) \Phi} \right] = 0.$$

Como apresentado anteriormente (vide equação (B.3)),

$$\text{Pu} \left[\overline{\left(\frac{d}{dx} \right) \Phi} \right] = -F,$$

que perante a condição de Lorenz implica

$$\overline{\left(\frac{d}{dx} \right) \Phi} = -F.$$

Submetendo essa equação à aplicação do operador d/dx e posteriormente considerando a forma quaterniônica das equações de Maxwell, $(d/dx)F + 4\pi J/c = 0$, obtém-se estas últimas em termos do quadripotencial Φ (também no formato de uma única equação),

$$\left(\frac{d}{dx} \right) \overline{\left(\frac{d}{dx} \right) \Phi} = \frac{4\pi}{c} J,$$

ou

$$\square \Phi = \frac{4\pi}{c} J.$$

O próximo passo é obter a densidade de carga-corrente J a partir da equação de Dirac. Isso foi feito através de uma adaptação da abordagem de Lambek, mas sem fazer menção à matrizes.

Além da conjugação quaterniônica usual, com relação às unidades quaterniônicas i_k , $k \in \{1, 2, 3\}$, que troca seus sinais, e denotada por uma barra encimada (por exemplo: $\bar{q} = q_0 - q_1 i_1 - q_2 i_2 - q_3 i_3$), considere a conjugação com relação às unidades quaterniônicas j_k , $k \in \{1, 2, 3\}$, que também troca o sinal das unidades; esta será denotada por uma barra subjacente. Esses dois tipos de conjugação são independentes, ao passo que agem sobre tipos diferentes de unidades quaterniônicas. Por exemplo, para $\Psi = \phi_0 + \phi_1 j_1 + \chi_0 j_2 + \chi_1 j_3$, em que ϕ_μ e χ_μ são quatérnions ordinários, escritos em termos de i_μ , tem-se

$$\bar{\Psi} = \bar{\phi}_0 + \bar{\phi}_1 j_1 + \bar{\chi}_0 j_2 + \bar{\chi}_1 j_3 \quad \text{e} \quad \underline{\Psi} = \phi_0 - \phi_1 j_1 - \chi_0 j_2 - \chi_1 j_3.$$

Considere um terceiro tipo de conjugação, dada pela composição das duas anteriormente definidas:

$$\tilde{\Psi} = \underline{\bar{\Psi}} = \bar{\phi}_0 - \bar{\phi}_1 j_1 - \bar{\chi}_0 j_2 - \bar{\chi}_1 j_3.$$

Note que, para o biquatérnion $a = q + j_1 p$, que aparece nas transformações de Lorentz, tem-se

$$\underline{a} = q - j_1 p = a^* \quad \text{e} \quad \tilde{a} = \bar{a} = \bar{q} - j_1 \bar{p} = \bar{a}^*.$$

Outra observação importante é que o “conjugado composto” de um biquatérnion hermitiano (tal como $x = ct + j_1 r$) não o altera, assim é conveniente chamar essa conjugação de *conjugação hermitiana*. Da mesma forma, o caráter hermitiano do operador d/dx faz com que ele seja invariante sob uma conjugação hermitiana. Cabe ainda ressaltar a propriedade de que o conjugado de um produto é igual ao produto na ordem inversa do conjugado dos fatores, e todos os três tipos de conjugação gozam dessa propriedade.

Tomando o produto à esquerda da equação de Dirac (B.9) por $\tilde{\psi}$, obtém-se

$$\tilde{\psi} \frac{d\psi}{dx} + \tilde{\psi} j_1 \frac{e}{\hbar c} \Phi \psi + \tilde{\psi} j_2 \kappa \psi = 0.$$

Tomando-se então o conjugado hermitiano desta, obtém-se

$$\tilde{\psi} \left(\overleftarrow{\frac{d}{dx}} \right) \psi - \tilde{\psi} j_1 \frac{e}{\hbar c} \Phi \psi - \tilde{\psi} j_2 \kappa \psi = 0.$$

em que a seta indica que a diferenciação atua no objeto que multiplica à esquerda, embora a ordem do produto deve ser respeitada. Somando-se então as duas equações acima, obtém-se

$$\tilde{\psi} \left(\overleftrightarrow{\frac{d}{dx}} \right) \psi = 0, \tag{B.10}$$

em que considerou-se a notação

$$\tilde{\psi} \left(\overleftrightarrow{\frac{d}{dx}} \right) \psi = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\tilde{\psi} \lambda_\mu^* i_\mu \psi \right),$$

e, no caso do operador “que atua para a esquerda”,

$$\tilde{\psi} \left(\overleftarrow{\frac{d}{dx}} \right) \psi = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_\mu} \lambda_\mu^* i_\mu \psi,$$

em que agora $\lambda_k = j_1$ para $k \in \{1, 2, 3\}$, $\lambda_0 = 1$ e $i_0 = 1$.

A equação (B.10), levando em conta a definição do operador que nela aparece, se assemelha à equação de continuidade (B.2), a qual pode ser escrita como

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0,$$

sendo que os J_μ são tais que $J = c\rho + j_1j = \sum_{\mu=0}^3 J_\mu \lambda_\mu i_\mu$, ou seja, $J_0 = c\rho$ e $J_k = j_k$ para $k \in \{1, 2, 3\}$ (lembrando que j é o quatérnion real puro que representa a densidade de corrente elétrica). Tal semelhança sugere que se defina

$$J_\mu = ce\kappa^3 \tilde{\psi} i_\mu \lambda_\mu^* \psi,$$

em que o fator constante $ce\kappa^3$ aparece para dar dimensão de densidade de corrente à expressão. Observe que J assim definido se transforma em $aJ\bar{a}^*$ por uma transformação de Lorentz. De fato, fazendo $\psi \mapsto a^*\psi$ na expressão para a densidade de carga-corrente acima, observa-se que ela se transforma em

$$\sum_{\nu=0}^3 ce\kappa^3 \tilde{\psi} \bar{a} i_\nu \lambda_\nu^* a^* \psi \lambda_\nu i_\nu,$$

que, pelo Lema I apresentado na seção anterior, corresponde a

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 ce\kappa^3 \tilde{\psi} i_\mu \lambda_\mu^* \psi \Lambda_{\mu\nu} \lambda_\nu i_\nu = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 J_\mu \Lambda_{\mu\nu} \lambda_\nu i_\nu = aJ\bar{a}^*.$$

Por fim, observa-se que Ψ e ψ presentes nas equações (B.8) e (B.9), respectivamente, dependem das três informações seguintes, como observou Lambek.

- (a) Um ponto $x = ct + j_1r$ do espaço-tempo de Minkowski. A transformação de Lorentz $x \mapsto ax\bar{a}^*$ corresponde à transformação $\Psi \mapsto a^*\Psi$, na equação (B.8), e à transformação $\psi \mapsto a^*\psi$, na equação (B.9).
- (b) A escolha de um quadripotencial $\Phi = \varphi + j_1A$, compatível com o campo eletromagnético agindo sobre o elétron, o qual em si é função da posição x no espaço-tempo. A transformação de calibre $\Phi \mapsto \Phi + (e/\hbar c)d\alpha/dx$ é equivalente à transformação $\Psi \mapsto \Psi \exp(j_1\alpha)$, na equação (B.8), e à transformação $\psi \mapsto \psi \exp(j_1\alpha)$, na equação (B.9).
- (c) A escolha de j_1 e j_2 , os quais determinam $j_3 = j_2j_1$. Considerou-se que j_μ corresponde a $R(i_\mu)$, mas permitiu-se posteriormente que i_μ fosse substituído por $\varrho i_\mu \bar{\varrho}$, sendo ϱ um quatérnion tal que $\varrho \bar{\varrho} = 1$. Entretanto, ao fazer corresponder Ψ com uma matriz coluna complexa, permite-se que i_μ seja substituído por $\varrho i_\mu \bar{\varrho}^*$, sendo agora ϱ um biquatérnion. Isso induz a transformação $\Psi \mapsto R(\varrho)\Psi$, ou $\psi \mapsto \psi\varrho$.

O grupo de transformações agindo sobre Ψ de acordo com (a) é o grupo $SU(2)$, das transformações unitárias de determinante 1. O grupo agindo sobre Ψ de acordo com (b) é o grupo $U(1)$, dos números complexos com norma unitária. O grupo agindo sobre Ψ de acordo com (c) é o que se chama uma *representação projetiva* de $SU(3)$.

Referências

- BARATA, J. C. A. Curso de Física-Matemática, disponível em <http://denebola.if.usp.br/>. **Notas de aula/capítulos. html**, 2018.
- BAYLIS, W. E. **Electrodynamics: A Modern Geometric Approach**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2004.
- BAYLIS, W. E. **Clifford (Geometric) Algebras: with Applications to Physics, Mathematics, and Engineering**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- BAYRO-CORROCHANO, E. **Geometric Computing: For Wavelet Transforms, Robot Vision, Learning, Control and Action**. [S.l.]: Springer Publishing Company, Incorporated, 2010.
- BAYRO-CORROCHANO, E.; SCHEUERMANN, G. **Geometric Algebra Computing: In Engineering and Computer Science**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010.
- BAYRO-CORROCHANO, E.; SOBCZYK, G. **Geometric Algebra with Applications in Science and Engineering**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.
- CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. **Álgebra Linear e Aplicações**. São Paulo: Atual Editora, 1990.
- DORAN, C.; LASENBY, A. **Geometric Algebra for Physicists**. New York: Cambridge University Press, 2003.
- DORAN, C.; LASENBY, A.; GULL, S.; SOMAROO, S.; CHALLINOR, A. Spacetime Algebra and Electron Physics. **Advances in Imaging and Electron Physics**, San Diego: Academic Press, c1995-, v. 95, p. 272–386, 1996.
- DORAN, C. J. L. **Geometric Algebra and its Application to Mathematical Physics**. Tese (Doutorado) — University of Cambridge, 1994.
- DORST, L. 3D Oriented Projective Geometry Through Versors of $\mathbb{R}^{3,3}$. **Advances in Applied Clifford Algebras**, Springer, v. 26, n. 4, p. 1137–1172, 2016.
- DORST, L.; FONTIJNE, D.; MANN, S. **Geometric Algebra for Computer Science: An Object-Oriented Approach to Geometry**. [S.l.]: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2009.

- FRANCIS, M. R.; KOSOWSKY, A. The Construction of Spinors in Geometric Algebra. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 317, n. 2, p. 383–409, 2005.
- GOLDMAN, R. Rethinking Quaternions (Theory and Computation), Morgan & Claypool. **University of California, Berkeley**, 2010.
- HESTENES, D. A Unified Language for Mathematics and Physics. In: **Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics**. [S.l.]: Springer, 1986. p. 1–23.
- HESTENES, D. The Zitterbewegung Interpretation of Quantum Mechanics. **Foundations of Physics**, Springer, v. 20, n. 10, p. 1213–1232, 1990.
- HESTENES, D. Spacetime Physics with Geometric Algebra. **American Journal of Physics**, AAPT, v. 71, n. 7, p. 691–714, 2003.
- HESTENES, D. **New Foundations for Classical Mechanics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- HESTENES, D.; GÜRTLER, R. Local Observables in Quantum Theory. **American Journal of Physics**, AAPT, v. 39, n. 9, p. 1028–1038, 1971.
- HILDENBRAND, D.; FONTIJNE, D.; PERWASS, C.; DORST, L. Geometric algebra and its application to computer graphics. In: **Tutorial Notes of the EUROGRAPHICS Conference**. [S.l.: s.n.], 2004.
- JACKSON, J. D. Special Theory of Relativity. In: _____. **Classical Electrodynamics**. 2nd. ed. New York: John Wiley & Sons Inc., 1975. p. 503–570.
- VAZ JR., J. A Álgebra Geométrica do Espaço Euclideano e a Teoria de Pauli. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 19, n. 2, 1997.
- VAZ JR., J. A Álgebra Geométrica do Espaço-Tempo e a Teoria da Relatividade. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 22, n. 1, 2000.
- VAZ JR., J.; DA ROCHA JR., R. **An Introduction to Clifford Algebras and Spinors**. New York: Oxford University Press, 2016.
- VAZ JR., J.; RODRIGUES JR., W. A. Maxwell and Dirac Theories as an Already Unified Theory. **arXiv preprint hep-th/9511181**, 1995.
- KANATANI, K. **Understanding Geometric Algebra: Hamilton, Grassmann, and Clifford for Computer Vision and Graphics**. [S.l.]: AK Peters/CRC Press, 2015.
- LAMBEK, J. If Hamilton Had Prevailed: Quaternions in Physics. **The Mathematical Intelligencer**, Springer, v. 17, n. 4, p. 7–15, 1995.
- LASENBY, J.; LASENBY, A. N.; DORAN, C. J. L. A Unified Mathematical Language for Physics and Engineering in the 21st Century. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society, v. 358, n. 1765, p. 21–39, 2000.

LI, H.; HUANG, L.; SHAO, C.; DONG, L. Three-Dimensional Projective Geometry with Geometric Algebra. **arXiv preprint arXiv:1507.06634**, 2015.

LIMA, E. L. **Álgebra Exterior**. 2a. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

LIOU, J.-M. External Direct Sum and Internal Direct Sum of Vector Spaces, disponível em <http://www.math.ncku.edu.tw/~fjmliou/advcal/sumvspace.pdf>. **Notas**, 2018.

LOPES, W. B.; LOPES, C. G. Geometric-Algebra Adaptive Filters. **arXiv preprint arXiv:1608.03450**, 2016.

LUNDHOLM, D.; SVENSSON, L. Clifford Algebra, Geometric Algebra, and Applications. **arXiv preprint arXiv:0907.5356**, 2009.

OLIVEIRA, J. U. C. L. de. Noções de Álgebra. In: _____. **Introdução aos Princípios de Mecânica Clássica**. Rio de Janeiro: LTC, 2013. p. 321–352.

PERWASS, C.; EDELSBRUNNER, H.; KOBELT, L.; POLTHIER, K. **Geometric Algebra with Applications in Engineering**. [S.l.]: Springer, 2009.

DE TOLEDO PIZA, A. F. R. Equações Relativísticas. In: _____. **Mecânica Quântica**. São Paulo: Edusp, 2003. p. 579–627.

SNYGG, J. **A New Approach to Differential Geometry Using Clifford's Geometric Algebra**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.

VINCE, J. **Geometric Algebra for Computer Graphics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008.

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO DM	2. DATA 27 de agosto de 2018	3. DOCUMENTO Nº DCTA/ITA/DM-078/2018	4. Nº DE PÁGINAS 155
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: A Álgebra Geométrica do Espaço-Tempo			
6. AUTOR(ES): Natan Aparecido Coleta da Conceição			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica — ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: Álgebras de Clifford; Álgebra Geométrica do Espaço-Tempo; Física Matemática.			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Álgebra de Clifford; Espaço-tempo; Física Matemática; Álgebra; Matemática; Física.			
10. APRESENTAÇÃO: <input checked="" type="checkbox"/> Nacional <input type="checkbox"/> Internacional ITA, São José dos Campos. Curso de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Física Nuclear. Orientador: Prof. Dr. Brett Vern Carlson. Defesa em 26/07/2018. Publicada em 2018.			
11. RESUMO: As álgebras geométricas foram concebidas por W. K. Clifford no século XIX como uma fusão das álgebras de Grassmann com os quatérnions de Hamilton. A poderosa estrutura das álgebras geométricas apresenta grande aplicabilidade tanto em Matemática como na Física, devido não somente ao seu significado geométrico, mas também à sua generalidade, que não é apresentada pela famosa álgebra vetorial de Gibbs-Heaviside, cuja aplicação se restringe ao espaço euclidiano tridimensional. As quase inexploradas álgebras de Clifford ressurgiram no século XX como parte intrínseca das teorias quânticas de Pauli e de Dirac, e passaram a ganhar algum reconhecimento através dos trabalhos de D. O. Hestenes, na segunda metade do século XX. Neste trabalho, a álgebra geométrica do espaço euclidiano tridimensional e a álgebra geométrica do espaço-tempo de Minkowski são apresentadas e aplicadas respectivamente na descrição da teoria de Pauli e na descrição do espaço-tempo de Minkowski e da estrutura subjacente à teoria de Dirac.			
12. GRAU DE SIGILO: <input checked="" type="checkbox"/> OSTENSIVO <input type="checkbox"/> RESERVADO <input type="checkbox"/> SECRETO			