

Dissertação apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Dinâmica Não-Linear e Sistemas Complexos.

**Gabriella Aureliano Braz**

**ANÁLISE DE TRANSPORTE NO SISTEMA  
TERRA-MARTE**

**Dissertação aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:**



Prof.ª Dr.ª . Maisa de Oliveira Terra  
Orientador

Prof. Dr. Pedro Teixeira Lacava  
Pró-Reitor de Pós-Graduação

Campo Montenegro  
São José dos Campos, SP – Brasil  
2018

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)**

**Divisão de Informação e Documentação**

Braz, Gabriella Aureliano

ANÁLISE DE TRANSPORTE NO SISTEMA TERRA-MARTE / Gabriella Aureliano Braz.

São José dos Campos, 2018.

75f.

Dissertação de Mestrado – Curso de Física. Área de Dinâmica Não-Linear e Sistemas Complexos – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2018. Orientador: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maisa de Oliveira Terra.

1. Problema Restrito de Três Corpos. 2. Sistema Caótico. 3. Dinâmica no Sistema Solar. 4. Transferência Terra-Marte. 5. Física. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Título

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

BRAZ, Gabriella Aureliano. **ANÁLISE DE TRANSPORTE NO SISTEMA TERRA-MARTE**. 2018. 75f. Dissertação de Mestrado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.


## CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Gabriella Aureliano Braz

TÍTULO DO TRABALHO: ANÁLISE DE TRANSPORTE NO SISTEMA TERRA-MARTE

TIPO DO TRABALHO/ANO: Dissertação / 2018

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta dissertação e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação ou tese pode ser reproduzida sem a sua autorização da autora.



Gabriella Aureliano Braz

Praça Marechal Eduardo Gomes, 50.

CEP: 12.228-900, São José dos Campos - SP

# ANÁLISE DE TRANSPORTE NO SISTEMA TERRA-MARTE

**Gabriella Aureliano Braz**

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr.	Erico Luiz Rempel	Presidente	-	ITA
Prof <sup>a</sup> . Dr <sup>a</sup> .	Maisa de Oliveira Terra	Orientadora	-	ITA
Prof. Dr.	Manuel M. B. Malheiro de Oliveira	Membro interno	-	ITA
Prof. Dr.	Antonio F. Bertachini de A. Prado	Membro externo	-	INPE

Dedico esse trabalho à minha família,  
pelo amor incondicional, por todo apoio  
e compreensão, que tornou mais serena  
essa jornada.



# Agradecimentos

Agradeço a Deus, por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

Agradeço ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), seu corpo docente, direção e administração, que possibilitou meu ingresso e me auxiliou ao longo do curso. E a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte.

Agradeço a minha orientadora, Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maisa de Oliveira Terra, por todos os ensinamentos proporcionados ao longo dessa pesquisa, pela confiança depositada na realização deste trabalho, por todo apoio e compreensão.

Agradeço a minha mãe, Maria J. I. A. Braz, que exerceu grande influência no início de meus estudos, sempre me incentivando e encorajando com apoio total. Seu amparo tem me sido de fundamental importância. Agradeço ao meu pai, Luiz J. Braz, pelos momentos de descontração, que toranaram os dias mais difíceis, amenos, além de todo auxílio prestado que me fora essencial. Agradeço especialmente a minha irmã, Elizangela M. A. Braz, pela compreensão, por todo carisma, estímulo e indispensável colaboração. Sua contribuição tornou possível essa etapa. Agradeço a toda minha família maravilhosa.

Agradeço a professora Sonia Guimarães e aos professores Manuel M. B. de Oliveira e Erico L. Rempel que me auxiliaram durante a adaptação ao curso.

Agradeço aos meus colegas de pesquisa, Francis F. Franco e Dalton N. Oliveira por inúmeras ajudas ao longo do curso e desse trabalho. Aos colegas de pós-graduação, Emanuel V. Chimanski, Rafael Bonfim, Tiago F. P. Gomes e Suzana de Souza por toda colaboração e companheirismo. Agradeço aos amigos que me acompanharam no decorrer do tempo, pela confiança, prestatividade e pelos bons momentos de distração. Em especial, Fernanda Bertuluci, Gabriela Marques, Helen Destefano, Andrew G. P. Sarmento, Luciana Vasconcellos, Bruna Carvalho, Paulo Oliveira e Leonardo Leite.

Agradeço ao meu querido amigo, mentor e ilustre professor, José C. R. V. Júnior, pela influência exercida e todo incentivo. E a minha querida amiga e professora, Clarice E. C. Conforti, por todo apoio e prestimosidade.

Agradeço a todos que direta ou indiretamente contribuíram para minha formação.

*"If you can't explain it simply,  
you don't understand it well enough."*

— ALBERT EINSTEIN

# Resumo

Este trabalho investiga o transporte natural entre Terra e Marte, utilizando o Problema Restrito de Três Corpos para o Sistema Sol-Júpiter como modelo matemático. De fato, objetivamos estudar possibilidades de transporte natural de massa no Sistema Solar entre dois corpos celestes (que podem ser planetas e/ou satélites naturais), para os quais as variedades hiperbólicas associadas às variedades centrais dos pontos lagrangeanos do Problema Restrito de Três Corpos não se interceptam e, portanto, não propiciam canais de transporte entre estes corpos. Para o caso Terra-Marte, mostramos a existência de soluções de conexão de baixo tempo e potencial baixo custo que podem ser usadas em futuros projetos de trajetórias entre estes dois planetas. A mesma análise pode ser aplicada a outros sistemas, como para o caso Terra-Vênus, para o qual apresentamos resultados preliminares.

# Abstract

This contribution investigates the natural transport between Earth and Mars, applying the Restricted Three-Body Problem for the Sun-Jupiter System, as a mathematical model. In fact, we aim to study possibilities of natural mass transport in the Solar System between two celestial bodies (which may be planets and/or natural satellites), for which the hyperbolic manifolds associated with the central manifold of the Lagrangian points of the Restricted Three-Body Problem do not intercept and, therefore, do not provide transport channels between these bodies. For the Earth-Mars case, we show the existence of short-time and low-cost connection solutions, that can be exploited as preliminary solutions for the design of trajectories between these two planets. The same analysis can be applied to other systems, such as the Terra-Venus case, for which we present preliminary results.

# Lista de Figuras

FIGURA 1.1 – Imagem do planeta Marte processada com filtros vermelho e violeta. Fonte: NASA/JPL-Caltech/USGS. . . . .	19
FIGURA 1.2 – Auto-retrato do veículo robótico Curiosity da NASA, em solo marciano. Fonte: NASA/JPL-Caltech/MSSS. . . . .	19
FIGURA 2.1 – Sistema de N corpos. . . . .	23
FIGURA 2.2 – Sistema de coordenadas para o PR3CCP. Os eixos $(x, y)$ estão relacionados ao sistema inercial (fixo) e os eixos $(\bar{x}, \bar{y})$ são referentes ao sistema não-inercial (girante), que gira com velocidade angular $n$ , de forma a acompanhar o movimento de $m_1$ e $m_2$ no tempo $t^*$ , ou seja, $m_1$ e $m_2$ ficam fixos nesse sistema de referência. O centro de massa de $m_1$ e $m_2$ é a origem do sistema. . . . .	26
FIGURA 2.3 – Rotação no sistema de coordenadas que transporta as equações do movimento do sistema inercial para o não-inercial. . . . .	28
FIGURA 3.1 – Representação esquemática da localização dos pontos Lagrangeanos de um PR3C. . . . .	36
FIGURA 3.2 – Representação esquemática das curvas de Velocidade Zero, conforme o valor de $C_J$ decresce. As regiões sombreadas representam as regiões proibidas, onde o movimento de $m_3$ não é permitido (PRADO, 2001). . . . .	39
FIGURA 3.3 – Representação esquemática da construção de uma seção de Poincaré $\Sigma$ , para um conjunto de pontos $V$ de órbitas periódicas (MICHELIN, 2013). . . . .	41
FIGURA 3.4 – Na região R1 não ocorre intersecção entre as órbitas da Terra e de Marte, na região R2, ocorre intersecções apenas com a órbita de Marte, na região R3, ocorre apenas intersecções com a órbita da Terra e a Região Proibida representa estados que não existem para esse nível de energia (REN <i>et al.</i> , 2012). . . . .	42

- FIGURA 4.1 – Efeito gravitacional dos planetas ao longo do Sistema Solar, onde o Sol está localizado na origem do sistema e as unidades de distância, na fórmula do potencial, foram convertidas para *Unidades Astronômicas (AU)*. Uma unidade astronômica é definida como sendo a distância média Terra-Sol, apresentada na Tabela 4.1 . . . . . 45
- FIGURA 4.2 – Influência do potencial gravitacional dos planetas do Sistema Solar, na região de interesse, situada entre Terra e Marte. . . . . 46
- FIGURA 4.3 – Influência do potencial gravitacional dos planetas do Sistema Solar que devemos considerar em uma trajetória de transferência Terra-Marte. . . . . 47
- FIGURA 4.4 – Coordenadas de posição do sistema Sol-Júpiter-Terra e Sol-Júpiter-Marte no PR3C. Onde Júpiter se encontra em  $(-1 + \mu, 0, 0)$  e o Sol, em  $(\mu, 0, 0)$ . . . . . 48
- FIGURA 4.5 – Coordenadas de velocidade do sistema Sol-Júpiter-Terra e Sol-Júpiter-Marte no PR3C, referencial no qual os corpos primários estão fixos, portanto a velocidade de ambos é nula. . . . . 49
- FIGURA 4.6 – Seção de Poincaré do sistema Sol-Júpiter para  $C_J = 3.50$  e  $C_J = 3.06$ . Em azul, observamos as regiões visitadas por nossas condições iniciais, onde  $v^2 > 0$  e em branco, regiões periódicas. . . . . 50
- FIGURA 4.7 – Seção de Poincaré do sistema Sol-Júpiter para  $C_J = 3.03$  e  $C_J = 3.01$ , onde as curvas em roxo, representam as curvas de velocidade zero. Em azul, observamos as regiões visitadas por nossas condições iniciais, onde  $v^2 > 0$  e em branco, regiões periódicas. . . . . 50
- FIGURA 4.8 – Seção de Poincaré do sistema Sol-Júpiter para  $C_J = 2.95$  e  $C_J = 2.50$ , onde as curvas em roxo, representam as curvas de velocidade zero. Em azul, observamos as regiões visitadas por nossas condições iniciais, onde  $v^2 > 0$  e em branco, regiões periódicas. . . . . 51
- FIGURA 4.9 – Variação da constante de Jacobi da Terra e de Marte no sistema Sol-Júpiter ao longo de 30 anos terrestres em unidade adimensional de tempo (u.a.t.). A curva em roxo, representa o valor de  $C_J$  da Terra e em verde, o valor de  $C_J$  de Marte. . . . . 52
- FIGURA 4.10 – Seção de Poincaré do sistema Sol-Júpiter para  $C_J = 3.03$  com a posição da Terra (em azul) e de Marte (em vermelho) em 20 anos e zoom na região aproximada de movimento da Terra e de Marte, onde as curvas em verde claro, representam as curvas de velocidade zero. . . . . 53

FIGURA 4.11 –Seção de Poincaré do sistema Sol-Júpiter para $C_J = 3.06$ , onde as curvas em roxo, representam as curvas de velocidade zero. . . . .	54
FIGURA 4.12 –Seção de Poincaré do sistema Sol-Júpiter para $C_J = 3.03$ , onde as curvas em roxo, representam as curvas de velocidade zero. . . . .	54
FIGURA 4.13 –Seção de Poincaré do sistema Sol-Júpiter para $C_J = 2.95$ . . . . .	55
FIGURA 4.14 –Oscilação da distância Sol-Marte (em verde) e Sol-Terra (em roxo) no PR3C, em unidades adimensionais de distância (u.a.d.) e tempo (u.a.t.). . . . .	56
FIGURA 4.15 –Zoom na seção de Poincaré do sistema Sol-Júpiter para $C_J = 3.03$ em torno da região que compreende o movimento da Terra e de Marte, onde as curvas em roxo, representam as curvas de velocidade zero. . . . .	57
FIGURA 4.16 –Bacia de escape para $C_J = 3.06$ . Região R1 (verde), região R2 (azul), região R3 (vermelho), região R4 (roxo), conjunto colisional $C$ (amarelo). . . . .	58
FIGURA 4.17 –Bacia de escape para $C_J = 3.03$ . Região R1 (verde), região R2 (azul), região R3 (vermelho), região R4 (roxo), conjunto colisional $C$ (amarelo). . . . .	59
FIGURA 4.18 –Bacia de escape para $C_J = 2.95$ . Região R1 (verde), região R2 (azul), região R3 (vermelho), região R4 (roxo), conjunto colisional $C$ (amarelo). . . . .	60
FIGURA 4.19 –Tempo de voo para interceptar a trajetória da Terra (i.e., distância ao Sol no intervalo $\mathcal{I}_E$ ) com menor valor absoluto de $\dot{r}$ versus tempo de voo para interceptar a trajetória de Marte (i.e., distância ao Sol no intervalo $\mathcal{I}_M$ ) com menor valor absoluto de $\dot{r}$ , para as soluções da região R4 e $C = 3.03$ . . . . .	61
FIGURA 4.20 –Ampliação da Figura anterior para menores valores de tempo de voo. . . . .	61
FIGURA 4.21 –Menores valores de velocidades radiais nas proximidades da Terra (abscissa) e de Marte (ordenada), respectivamente, para $C_J = 3.03$ . . . . .	62
FIGURA 4.22 –Tempo de voo à Terra em função dos menores valores de velocidade radial nas proximidades da órbita da Terra e de Marte, respectivamente, para todas as trajetórias da região R4 para $C_J = 3.03$ . . . . .	63
FIGURA 4.23 –Tempo de voo à Marte em função dos menores valores de velocidade radial nas proximidades da órbita da Terra e de Marte, respectivamente, para todas as trajetórias da região R4 para $C_J = 3.03$ . . . . .	63

- FIGURA 4.24 –Trajetória de transferência Terra-Marte que corresponde a uma das condições iniciais da região R4 que intercepta  $\mathcal{I}_E$  e  $\mathcal{I}_M$  com um dos menores valores absolutos de velocidade radial ( $r'$ ) nas proximidades da Terra e de Marte, para  $C_J = 3.03$ . . . . . 64
- FIGURA 4.25 –Tempo de voo (t) da trajetória de transferência Terra-Marte correspondente a uma das condições iniciais da região R4 que intercepta  $\mathcal{I}_E$  e  $\mathcal{I}_M$  com um dos menores valores absolutos de velocidade radial ( $r'$ ) nas proximidades da Terra e de Marte, para  $C_J = 3.03$ . . . . . 65
- FIGURA 4.26 –Variação da velocidade radial ( $r'$ ) versus tempo de voo (t), para a trajetória de transferência Terra-Marte correspondente a uma condição inicial coletada na região R4, que intercepta  $\mathcal{I}_E$  e  $\mathcal{I}_M$  com um dos menores valores absolutos de velocidade radial ( $r'$ ) nas proximidades da Terra e de Marte, para  $C_J = 3.03$ . . . . . 66
- FIGURA 4.27 – $\Delta v_t$  é a soma dos incrementos de velocidade necessários para se efetuar se efetuar uma transferência de Hohmann (em km/s) e  $t_t$  é o tempo total gasto na transferência (em anos). Cálculo realizado para as condições de R4 para alguns valores de  $C_J$ . . . . . 67
- FIGURA 4.28 –Bacia de escape para  $C_J = 3.03$ . Região R1 (verde), região R2 (azul), região R3 (vermelho), região R4 (roxo), conjunto colisional  $C$  (amarelo). . . . . 69
- FIGURA 4.29 –Menores valores de velocidades radiais nas proximidades da Terra (abscissa) e de Vênus (ordenada), respectivamente, para  $C_J = 3.03$ . 70
- FIGURA 4.30 –Tempo de voo à Terra em função dos menores valores de velocidade radial nas proximidades da órbita da Terra e de Vênus, respectivamente, para todas as trajetórias da região R4 para  $C_J = 3.03$ . . . . 71
- FIGURA 4.31 –Tempo de voo à Vênus em função dos menores valores de velocidade radial nas proximidades da órbita da Terra e de Vênus, respectivamente, para todas as trajetórias da região R4 para  $C_J = 3.03$ . . . . 72



# Lista de Tabelas

TABELA 4.1 – Valores de parâmetros utilizados. . . . .	44
TABELA 4.2 – Pontos Lagrangeanos do Sistema Sol-Júpiter. . . . .	49

# Lista de Abreviaturas e Siglas

AU	Astronomical Unit (Unidades Astronômicas).
CVZ	Curva de Velocidade Zero.
JPL	Jet Propulsion Laboratory.
NASA	National Aeronautics and Space Administration.
PR3C	Problema Restrito de Três Corpos.
PR3CCP	Problema Restrito de Três Corpos Circular Planar.

# Lista de Símbolos

$G$	Constante de gravitação universal.
$m_1, m_2$	Corpos primários do sistema de três corpos. Se suas massas são distintas, $m_1 > m_2$ .
$m_3$	Corpo de massa infinitesimal, no PR3C.
$C_J$	Constante de Jacobi.
$\Omega$	Potencial efetivo.
$\mu$	Massa reduzida do menor primário.
$\Phi$	Potencial gravitacional.
$L_1, \dots, L_5$	Pontos Lagrangeanos.

# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	18
1.1	Motivação . . . . .	20
1.2	Objetivo . . . . .	20
1.3	Organização do trabalho . . . . .	20
2	MODELO MATEMÁTICO . . . . .	22
2.1	Problema de $N$ Corpos . . . . .	22
2.2	Problema de Três Corpos . . . . .	24
2.2.1	Problema Restrito de Três Corpos . . . . .	25
2.3	Transformação do Sistema Inercial Heliocêntrico para o Sistema Restrito de Três Corpos . . . . .	33
3	PROPRIEDADES DINÂMICAS DO SISTEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS . . . . .	35
3.1	Pontos Lagrangeanos . . . . .	35
3.2	Curvas de Velocidade Zero . . . . .	37
3.3	Órbitas Periódicas e Suas Variedades Invariantes . . . . .	39
3.4	Mapas e Seções de Poincaré . . . . .	40
3.5	Fundamentação Teórica . . . . .	41
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO . . . . .	44
4.1	Propriedades do Sistema Solar . . . . .	44
4.1.1	Modelo Estabelecido . . . . .	45
4.2	Possibilidade de Transferência Terra-Marte . . . . .	57
4.3	Resultados Preliminares para Transferências Terra-Vênus . . . . .	68

---

5	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS . . . . .	73
	REFERÊNCIAS . . . . .	74

# 1 Introdução

Desde os primórdios da humanidade, o homem questiona a razão de sua própria existência. Nesse intuito, tornou-se necessário a compreensão do Universo e para isso, imprescindível a aquisição de todo conhecimento possível, que conduzisse a respostas satisfatórias. Estas dúvidas existenciais foram apenas alguns dos principais motivos que levaram a grandes descobertas e avanços da ciência na área espacial. Devido às tecnologias advindas dessa busca incessante do saber, os conhecimentos adquiridos não só contribuíram para determinado objetivo, mas também reverteram-se de forma notável para a solução de muitos problemas da sociedade e continuam a favorecer em diversos aspectos da vida na Terra, tais como, saúde e bem estar, segurança e conforto, entre outros.

Ao longo da história, percebeu-se que o cientista está sempre preocupado em desvendar os mistérios da vida e do Universo, essa é sua motivação, mas seu maior reconhecimento está atrelado às possibilidades que são geradas, ao passo de cada conquista.

No contexto histórico, sabe-se que o homem já foi à Lua e retornou com sucesso. Boa parte das missões de exploração espacial, também foram realizadas através de sondas espaciais.

Após a exploração lunar, o próximo destino que tem despertado grande interesse é o planeta Marte. Apesar de Vênus ser o planeta rochoso que mais se aproxima da Terra, encontrou-se em Marte condições ambientais mais similares as da Terra, tais como: a temperatura superficial, a composição atmosférica e a presença de água líquida. Embora a quantidade de oxigênio disponível em sua atmosfera seja insuficiente, este poderia ser produzido in-situ, tanto para propelente quanto para a respiração, em uma possível missão humana e apesar do homem ainda não ter chegado a Marte, através de estudos realizados com a atuação de sondas espaciais, das quais, algumas já pousaram e examinaram o solo marciano, com a participação de veículos robóticos tais como o Opportunity ou Curiosity, Marte foi classificado como um dos planetas possivelmente habitáveis.

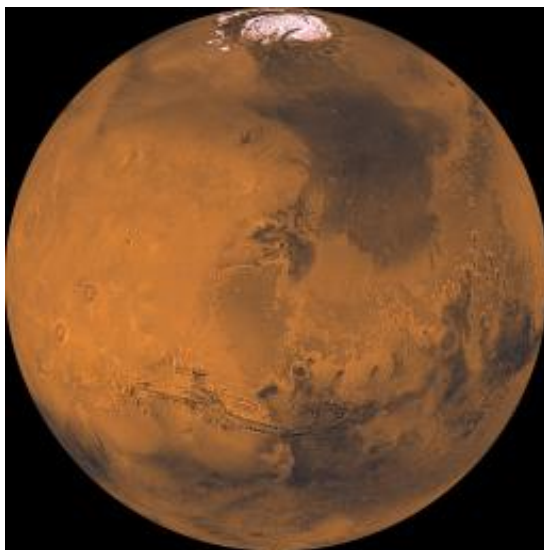


FIGURA 1.1 – Imagem do planeta Marte processada com filtros vermelho e violeta. Fonte: NASA/JPL-Caltech/USGS.

Os maiores desafios para se realizar essas expedições estão relacionados ao tempo de duração da viagem e à quantidade de combustível necessário. Sabe-se que ambos podem ser otimizados com a aplicação de técnicas específicas para esse fim, no entanto, se a dinâmica natural do sistema pode favorecer essa ocorrência, torna-se ainda mais interessante, afinal, é possível evitar gastos com técnicas de otimização, que envolvam correções orbitais. Dessa forma, torna-se de grande importância o conhecimento da dinâmica envolvida nesse sistema de transporte. Além disso, conhecer a dinâmica desse sistema pode dispensar a necessidade de um alinhamento ideal entre os planetas, para que a transferência possa ocorrer de forma natural.

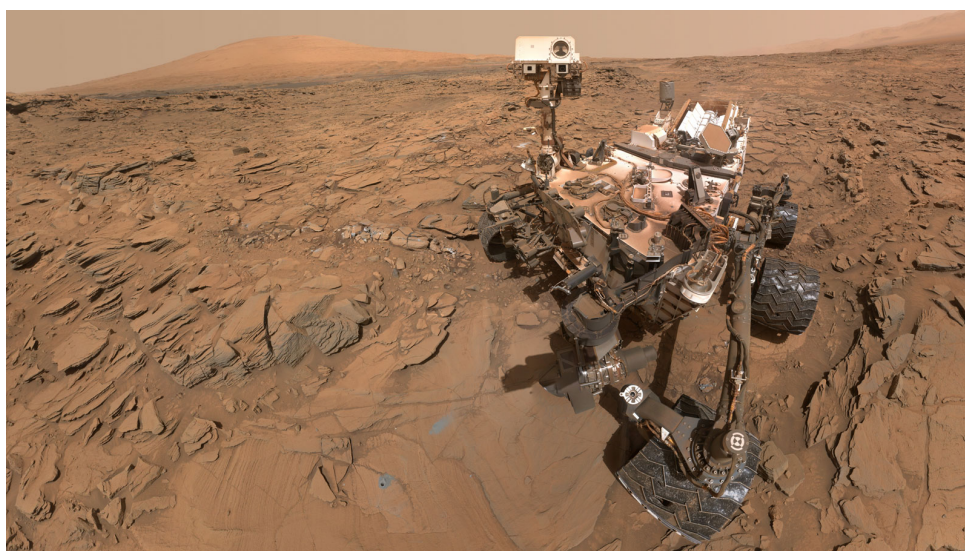


FIGURA 1.2 – Auto-retrato do veículo robótico Curiosity da NASA, em solo marciano. Fonte: NASA/JPL-Caltech/MSSS.

## 1.1 Motivação

Trabalhos recentes ( (TOPPUTO, 2005) e (MINGOTTI, 2011) ) apresentam abordagens modernas para projetos de trajetórias de transferências interplanetárias explorando propriedades dinâmicas de modelos de três e quatro corpos.

Em particular, a principal inspiração desse trabalho de dissertação surgiu através do estudo realizado sobre o trabalho de REN *et al.*, (2012). Nesse artigo, os autores investigam a possibilidade de transporte natural entre a Terra e Marte através de duas abordagens diferentes, que serão relatadas na seção 3.5.

De acordo com sua análise, não foram encontradas soluções de baixo tempo de voo para um transporte natural Terra-Marte e após examinar esta referência, uma nova abordagem foi elaborada e algumas soluções de transporte natural Terra-Marte para tempos de voo da ordem de meses e de custos não elevados foram obtidas e exemplificadas.

## 1.2 Objetivo

Existem diversos modelos já bem estabelecidos na abordagem de missões espaciais. Dentre eles, pode-se trabalhar com a dinâmica de  $N$  corpos, no caso mais geral, com o modelo de dois corpos, em uma situação mais específica ou com o modelo de três corpos, que possui grande aplicabilidade. Cabe a cada missão específica, a escolha do método mais adequado ao caso.

O modelo do problema de três corpos já é conhecido há um certo tempo, porém, com o desenvolvimento dos estudos em dinâmica não-linear, voltou a atrair grande interesse. Tratando de uma transferência do tipo Terra-Marte, que é o nosso enfoque, utilizar o modelo do problema de três corpos é uma alternativa viável. Sendo assim, o principal objetivo desse trabalho de mestrado é estudar a dinâmica no Sistema Solar para analisar as possibilidades de transporte Terra-Marte, utilizando a dinâmica natural no problema restrito de três corpos, avaliar as vantagens que podem ser obtidas com a utilização desse método ou até mesmo estudar o desenvolvimento de novas técnicas que a compreensão desse sistema dinâmico pode nos permitir.

## 1.3 Organização do trabalho

Inicialmente, devemos definir o modelo utilizado, apresentando sua formulação matemática no Capítulo 2. Em seguida, no Capítulo 3, propriedades e definições importantes para o Problema Restrito de Três Corpos são descritas. A partir disso, devemos expor



---

os resultados obtidos ao longo dessa pesquisa no Capítulo 4, elaborar uma discussão analítica que permita a compreensão dos resultados e estabelecer um conjunto de soluções de transferência Terra-Marte de baixo tempo e baixo custo. Finalizamos apresentando conclusões e perspectivas de trabalhos futuros no Capítulo 5. Possíveis aprimoramentos da análise e utilizações destes resultados são brevemente apresentados.

## 2 Modelo Matemático

### 2.1 Problema de $N$ Corpos

O problema de  $N$  corpos surgiu na mecânica celeste com o objetivo de encontrar as equações de movimento que descrevem a trajetória dos planetas no Sistema Solar. A primeira formulação para o problema de  $N$  corpos é atribuída a Isaac Newton (1643 - 1727). Em seu modelo, Newton considerou que os corpos são puntiformes<sup>1</sup> e que seus movimentos são governados pela força de atração gravitacional mútua. Então, conhecidas as massas dos  $N$  corpos e dadas suas respectivas posições e velocidades num determinado instante, pode-se calcular suas posições e velocidades num instante futuro (ROY, 2005) e (PRADO, 2001).

O problema de  $N$  corpos não possui até hoje uma solução direta para mais de dois corpos, no entanto, são utilizadas técnicas de análise numérica para estudá-lo, quando não existe uma solução analítica (MÝRDAL, 2013). Um modo comum de tratá-lo é através da “Teoria de Perturbações Gerais”, em que podemos estudá-lo como um problema de dois corpos perturbado pelos demais  $N - 2$  corpos em que a órbita dada pelo modelo de dois corpos é chamada de “órbita de referência”, com elementos orbitais constantes e a órbita perturbada é expressa por uma longa série de termos para a variação dos elementos da órbita de referência. No entanto, os resultados perdem precisão sobre os estados futuros dos corpos para longos períodos de tempo. Ainda é possível tratá-lo através da “Teoria de Perturbações Especiais”, em que todas as equações do movimento para os  $N$  corpos são integradas numericamente. Mas embora esse método seja aplicável a qualquer situação, não é possível tirar conclusões gerais a partir de seus resultados além de que é necessário calcular as posições e velocidades dos corpos em todos os instantes intermediários (ROY, 2005) e (PRADO, 2001).

Considerando um sistema de  $N$  corpos de massa  $m_i$ , cujas posições são descritas pelos vetores  $\vec{r}_i$  em relação ao referencial inercial OXYZ, conforme a imagem a seguir,

---

<sup>1</sup>No problema de  $N$  corpos puntiformes os corpos são considerados pontos de massa, frequentemente, denominados partículas.

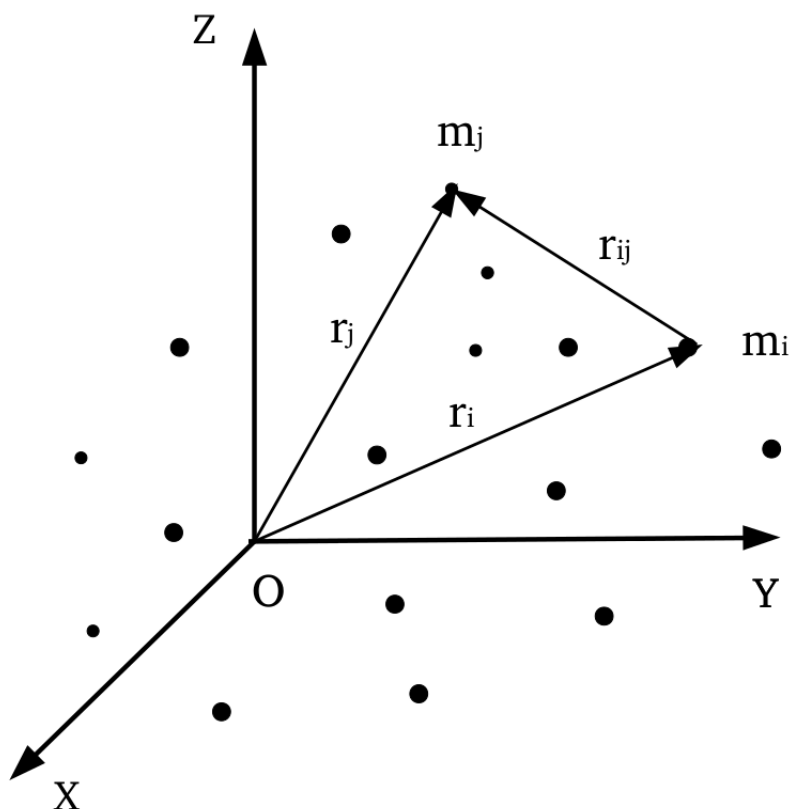


FIGURA 2.1 – Sistema de N corpos.

a equação de movimento para o corpo de massa  $m_i$ , obtida a partir da lei de gravitação de Newton é dada por:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = G \sum_{j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \quad (j \neq i, i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.1)$$

onde  $G$  é a constante de gravitação universal,  $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ , é o raio-vetor que aponta de  $m_i$  para  $m_j$  e  $\vec{r}_{ij} = -\vec{r}_{ji}$ .

Uma das dificuldades de se trabalhar com o modelo do problema de  $N$  corpos, deve-se às singularidades, que para  $N \geq 4$  pode apresentar singularidades colisionais ou não colisionais, segundo a Conjectura de Painlevé, de 1895 (HOFFMANN, 2009). As singularidades colisionais, devem-se à aproximação dos corpos, enquanto as singularidades não colisionais presumem que para um tempo infinito, a partícula pode escapar para infinito. Embora o método do problema de  $N$  corpos seja muito abrangente, a possibilidade de múltiplas quase-colisões, tornam o problema complexo. Dessa forma, tornou-se mais comum, trabalhar com modelos aproximados de menos corpos.

## 2.2 Problema de Três Corpos

Apesar da simplicidade de se trabalhar com o modelo do problema de dois corpos, este se aplica apenas a casos em que os corpos são isolados do Universo ou quando é possível desconsiderar a presença dos demais corpos, de acordo com as distâncias entre eles. Embora já tenha sido utilizado o modelo do problema de dois corpos para efetuar missões espaciais Terra-Lua, onde se obteve sucesso, no contexto geral, é mais apropriado se trabalhar com o modelo de três corpos, pois descreve melhor a realidade, dispensando dessa forma, correções de órbita devido a perturbações causadas pelos corpos mais massivos do Sistema Solar, como o Sol ou Júpiter.

O caso mais simples e talvez mais importante do problema de  $N$  corpos é o caso  $N = 3$ . Entre os grandes matemáticos que deram importantes contribuições para esse problema, estão Euler, Lagrange, Laplace, Jacobi, Le Verrier, Hamilton, Poincaré e Birkhoff (MURRAY, 1999). Mesmo que este seja um modelo simplificado, não possui uma solução geral analítica fechada, mas existem algumas soluções particulares, por exemplo, as soluções de Euler e Lagrange. Em ambos os casos, os corpos realizam movimento circular uniforme, com velocidade angular  $\omega$  constante (DEPETRI, 2011).

As soluções de Lagrange são válidas para casos em que os corpos ocupam os vértices de um triângulo e as de Euler, quando os corpos ocupam posições colineares. Nessas situações, constatou-se que a força resultante em cada corpo, passa através do centro de massa do sistema e é diretamente proporcional à distância de cada corpo ao centro de massa, além de que as velocidades iniciais têm magnitude proporcional às distâncias dos corpos ao centro de massa do sistema (PRADO, 2001) e (MARCHAL, 1990).

As equações do movimento para o sistema geral de três corpos são dadas por:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3}, \quad (2.2)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -Gm_3 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - Gm_1 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}, \quad (2.3)$$

$$\ddot{\vec{r}}_3 = -Gm_1 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3}, \quad (2.4)$$

onde  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  e  $\vec{r}_3$  são os vetores posição dos corpos de massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  respectivamente.

O problema de três corpos já tem sido investigado há um certo tempo porém continua um tanto enigmático e com o desenvolvimento dos estudos em dinâmica não-linear, tornou a atrair grande interesse.

### 2.2.1 Problema Restrito de Três Corpos

Para muitas situações de interesse, o modelo do *Problema Restrito de Três Corpos* (PR3C) é uma aproximação mais apropriada, pois se aplica a casos em que deseja-se estudar o movimento de um corpo de massa desprezível, na presença de dois corpos de massas finitas  $m_1$  e  $m_2$ .

Existem ainda algumas variações do problema restrito de três corpos, que pode ser trabalhado no sistema bidimensional ou tridimensional, no caso circular ou elíptico ou ainda em que o sistema é fixo ou girante e pulsante. No caso do sistema fixo, a origem do sistema fica localizada no baricentro dos dois corpos massivos  $m_1$  e  $m_2$ , já no caso girante, a origem também fica localizada no baricentro dos corpos massivos, entretanto, com algumas simplificações do problema geral de três corpos, torna-se possível traçar um eixo girante que conecta ambos os primários, o eixo  $\bar{x}$ , que gira juntamente com os corpos  $m_1$  e  $m_2$ , com uma velocidade angular constante. Como as órbitas de  $m_1$  e  $m_2$  são consideradas perfeitamente circulares no caso circular, mais uma simplificação do problema geral de três corpos, as coordenadas de  $m_1$  e  $m_2$  permanecem constantes neste sistema (ver Figura 2.2).

Os primários movimentam-se com velocidade angular constante em torno do centro de massa comum em órbitas perfeitamente circulares. Assim, torna-se possível traçar um eixo girante que liga ambos os primários, além de sofrer uma rotação para que as coordenadas de  $m_1$  e  $m_2$  permaneçam constantes neste sistema (ver Figura 2.2).

O modelo mais simples e estudado de todos é o *Problema Restrito de Três Corpos Circular Planar* (PR3CCP). Neste caso, o objetivo é estudar o movimento de um corpo de massa infinitesimal  $m_3$ , que se move no mesmo plano formado pelas órbitas de  $m_1$  e  $m_2$ , considerando que apenas forças gravitacionais atuem no sistema e que as órbitas dos corpos de massas finitas,  $m_1$  e  $m_2$ , são circulares, em torno do centro de massa.

Dessa forma, considerando a aproximação  $m_3 = 0$  nas equações de movimento do problema geral de três corpos (Eqs. 2.2 e 2.3), obtemos as equações do movimento para o problema restrito de três corpos:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}, \quad (2.5)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -Gm_1 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}, \quad (2.6)$$

$$\ddot{\vec{r}}_3 = -Gm_1 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} + Gm_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3}. \quad (2.7)$$

Dessa forma, torna-se possível estudar primeiramente o movimento dos primários e

posteriormente, o movimento do terceiro corpo, afinal, a massa do corpo  $m_3$  não interfere no movimento dos primários.

A figura esquemática a seguir, ilustra esse sistema de três corpos, localizados em relação ao sistema sideral (fixo) e sinódico (girante).

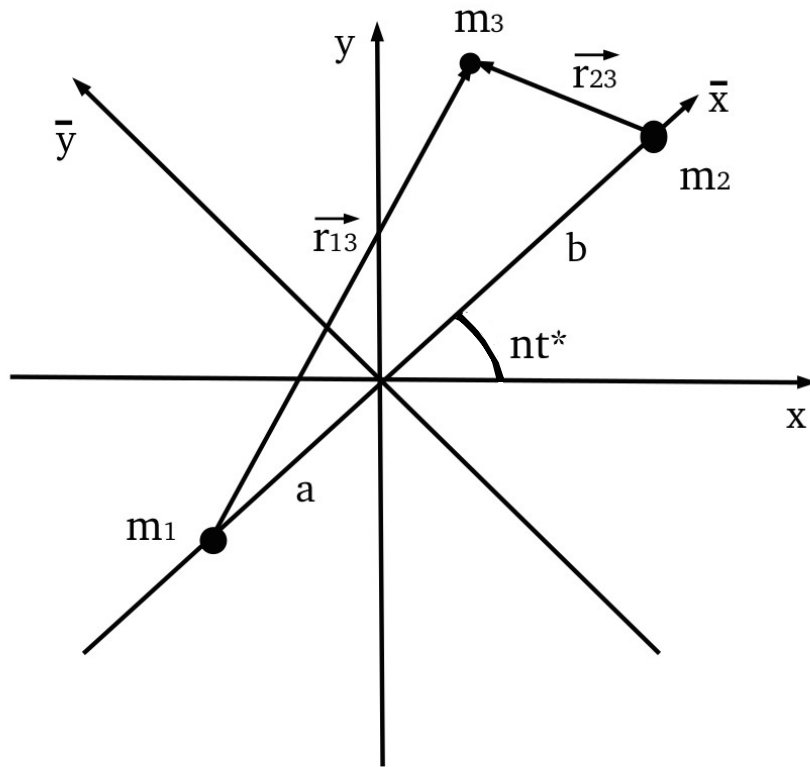


FIGURA 2.2 – Sistema de coordenadas para o PR3CCP. Os eixos  $(x, y)$  estão relacionados ao sistema inercial (fixo) e os eixos  $(\bar{x}, \bar{y})$  são referentes ao sistema não-inercial (girante), que gira com velocidade angular  $n$ , de forma a acompanhar o movimento de  $m_1$  e  $m_2$  no tempo  $t^*$ , ou seja,  $m_1$  e  $m_2$  ficam fixos nesse sistema de referência. O centro de massa de  $m_1$  e  $m_2$  é a origem do sistema.

A força sofrida pelo corpo  $m_3$  no referencial inercial, dada pela Eq. 2.7, pode ser reescrita na forma:

$$\ddot{\vec{r}}_3 = -Gm_1 \frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3} - Gm_2 \frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}^3}, \quad (2.8)$$

onde  $r_{13}^{\vec{}} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$ ,  $r_{23}^{\vec{}} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2$  e  $r_{ij} = |r_{ij}^{\vec{}}|$ .

A posição de  $m_3$  no referencial inercial é dada por  $\vec{r}_3 = (x, y)$ , a posição de  $m_1$  é  $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$  e a posição de  $m_2$  é dada por  $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$ , em que

$$x_1 = -a \cos(nt^*), \quad y_1 = -a \sin(nt^*) \quad (2.9)$$

$$x_2 = b \cos(nt^*), \quad y_2 = b \sin(nt^*) \quad (2.10)$$

Sendo assim, a Eq. 2.8 pode ser separada em duas componentes:

$$\frac{d^2x}{dt^{*2}} = -G \left[ m_1 \frac{(x + a \cos(nt^*))}{r_{13}^3} + m_2 \frac{(x - b \cos(nt^*))}{r_{23}^3} \right], \quad (2.11)$$

$$\frac{d^2y}{dt^{*2}} = -G \left[ m_1 \frac{(y + a \sin(nt^*))}{r_{13}^3} + m_2 \frac{(y - b \sin(nt^*))}{r_{23}^3} \right]. \quad (2.12)$$

Ou simplesmente,

$$\frac{d^2x}{dt^{*2}} = \frac{\partial F(x, y, t^*)}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^{*2}} = \frac{\partial F(x, y, t^*)}{\partial y} \quad (2.13)$$

onde  $F = G(m_1/r_1 + m_2/r_2)$ ,  $r_1 = [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2]^{1/2}$  e  $r_2 = [(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2]^{1/2}$ .

Essas são as equações do movimento de  $m_3$ , no sistema de referência fixo. Agora, é possível transportá-las para o sistema de referência girante, que acompanha o movimento de  $m_1$  e  $m_2$ , o que elimina a dependência explícita do tempo, afinal, as posições de  $m_1$  e  $m_2$  permanecem fixas nesse sistema.

A partir da Figura 2.2, nota-se que as equações que transformam um sistema no outro, são dadas a partir de uma rotação no sistema de coordenadas e com base na Figura 2.3 adiante, pode-se explicar como se dá essa rotação.

Sendo o sistema inercial  $Oxy$  e o sistema não-inercial  $O\bar{x}\bar{y}$ , com uma rotação de  $nt^*$  em relação ao sistema fixo, podemos determinar a posição de um ponto P, a uma distância  $r$  da origem, da seguinte forma.

No sistema não-inercial, o raio-vetor que indica a localização do ponto P, faz uma rotação  $\theta$  em relação ao eixo  $\bar{x}$ . Então,

$$P \quad \begin{cases} \bar{x} = r \cos \theta \\ \bar{y} = r \sin \theta \end{cases} \quad (2.14)$$

E no sistema inercial, o raio-vetor que indica a localização do ponto P, apresenta uma rotação  $(\theta + nt^*)$  em relação ao eixo  $x$ , assim,

$$P \quad \begin{cases} x = r \cos(\theta + nt^*) \\ y = r \sin(\theta + nt^*) \end{cases} \quad (2.15)$$

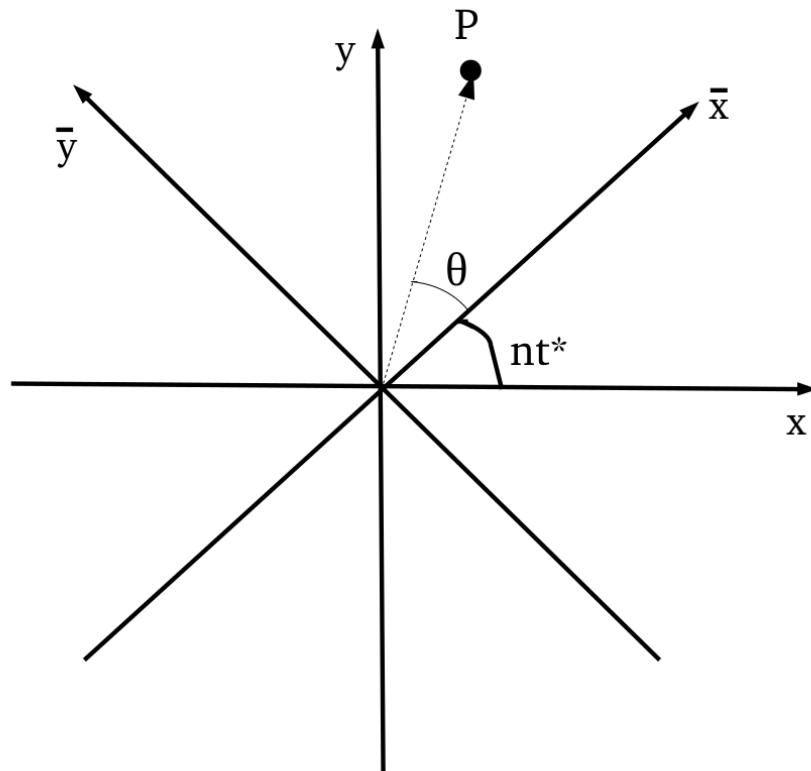


FIGURA 2.3 – Rotação no sistema de coordenadas que transporta as equações do movimento do sistema inercial para o não-inercial.

Através de transformações trigonométricas conhecidas, sabe-se que

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta, \quad (2.16)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (2.17)$$

Aplicando essas relações nas Eqs. 2.15 e substituindo as Eqs. 2.14 nestas, obtemos finalmente as equações que transformam de um sistema para o outro, que são dadas por:



$$x = \bar{x} \cos(nt^*) - \bar{y} \sin(nt^*), \quad (2.18)$$

$$y = \bar{x} \sin(nt^*) + \bar{y} \cos(nt^*). \quad (2.19)$$

Estas, podem ser reescritas na forma matricial

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{r}} \quad (2.20)$$

onde o vetor  $\mathbf{R}$  tem componentes  $(x, y)$ , o vetor  $\bar{\mathbf{r}}$  tem componentes  $(\bar{x}, \bar{y})$  e a matriz  $\mathbf{A}$  é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(nt^*) & -\sin(nt^*) \\ \sin(nt^*) & \cos(nt^*) \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

A transformação das Eqs. 2.11 e 2.12 para o sistema não-inercial devem ser simplificadas quando as variáveis complexas são introduzidas (SZEBEHELY, 1967). Então, escrevendo na forma exponencial,

$$Z = ze^{int^*}, \quad (2.22)$$

onde  $Z = x + iy$ ,  $z = \bar{x} + i\bar{y}$  e  $i = \sqrt{-1}$ .  $Z$  e  $z$  indicam a posição de  $m_3$  em ambos os sistemas de referência.

A partir disso, temos que

$$\frac{dZ}{dt^*} = \frac{dz}{dt^*} e^{int^*} + ze^{int^*} (in), \quad (2.23)$$

$$\frac{d^2 Z}{dt^{*2}} = \left[ \frac{d^2 z}{dt^{*2}} + 2 \frac{dz}{dt^*} (in) - zn^2 \right] e^{int^*}. \quad (2.24)$$

As distâncias  $r_{13}$  e  $r_{23}$  nas Eqs. 2.11 e 2.12 também podem ser reescritas nessas variáveis como

$$r_{13} = |Z - Z_1|, \quad r_{23} = |Z - Z_2| \quad (2.25)$$

em que  $Z_1 = -ae^{int^*}$  e  $Z_2 = be^{int^*}$ . Portanto,

$$r_{13} = |z + a| = \sqrt{(\bar{x} + a)^2 + \bar{y}^2}, \quad (2.26)$$

$$r_{23} = |z - b| = \sqrt{(\bar{x} - b)^2 + \bar{y}^2}. \quad (2.27)$$

Combinando as expressões 2.11 e 2.12 com 2.24, obtemos a forma complexa das equações do movimento de  $m_3$  no sistema girante, que é dada por:

$$\left[ \frac{d^2 z}{dt^{*2}} + 2 \frac{dz}{dt^*} (in) - zn^2 \right] e^{int^*} = -G \left[ m_1 \frac{z + a}{|z + a|^3} + m_2 \frac{z - b}{|z - b|^3} \right] e^{int^*}. \quad (2.28)$$

Sabendo que  $z = \bar{x} + i\bar{y}$ , pode-se separar as partes real e imaginária. Dessa forma, obtêm-se:

$$\left[ \frac{d^2 \bar{x}}{dt^{*2}} - 2n \frac{d\bar{y}}{dt^*} - n^2 \bar{x} \right] = -G \left[ m_1 \frac{(\bar{x} + a)}{r_{13}^3} + m_2 \frac{(\bar{x} - b)}{r_{23}^3} \right], \quad (2.29)$$

$$\left[ \frac{d^2 \bar{y}}{dt^{*2}} + 2n \frac{d\bar{x}}{dt^*} - n^2 \bar{y} \right] = -G \left[ m_1 \frac{\bar{y}}{r_{13}^3} + m_2 \frac{\bar{y}}{r_{23}^3} \right]. \quad (2.30)$$

Nota-se que o lado direito dessas equações não depende explicitamente do tempo. Definindo uma “função-força” para as equações do movimento, da forma

$$F = \frac{n^2}{2} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) + G \left( \frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} \right), \quad (2.31)$$

as Eqs. 2.29 e 2.30 podem ser reescritas da forma:

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^{*2}} - 2n \frac{d\bar{y}}{dt^*} = \frac{\partial F}{\partial \bar{x}}, \quad (2.32)$$

$$\frac{d^2 \bar{y}}{dt^{*2}} + 2n \frac{d\bar{x}}{dt^*} = \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \quad (2.33)$$

e estas são as equações do movimento de  $m_3$  no sistema de referência girante.

Para o problema geral de três corpos, sabe-se que a energia total do sistema é constante, afinal, seu potencial não possui uma dependência explícita no tempo, no entanto, no problema restrito, a energia total do sistema varia, violando o princípio de conservação

de energia. Essa variação na energia total, se deve ao efeito de  $m_3$  no movimento de  $m_1$  e  $m_2$ , porém, essa questão é negligenciada, devido ao fato da massa de  $m_3$  ser considerada nula. Dessa forma, multiplicando as equações do movimento de  $m_3$  no sistema girante, dadas pelas Eqs. 2.32 e 2.33 por  $\frac{d\bar{x}}{dt^*}$  e  $\frac{d\bar{y}}{dt^*}$  respectivamente, somando ambas as expressões e integrando no tempo, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \left[ \left( \frac{d^2\bar{x}}{dt^{*2}} \right) \frac{d\bar{x}}{dt^*} + \left( \frac{d^2\bar{y}}{dt^{*2}} \right) \frac{d\bar{y}}{dt^*} \right] dt^* &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\bar{x}}{dt^*} \right)^2 + \left( \frac{d\bar{y}}{dt^*} \right)^2 \right] \\ &= \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial t^*} + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial t^*} \right) dt^* = F - \frac{C_J}{2} \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde  $dF = \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} d\bar{x} + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} d\bar{y}$  e  $\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\bar{x}}{dt^*} \right)^2 + \left( \frac{d\bar{y}}{dt^*} \right)^2 \right] = \bar{V}^2$ .  $\bar{V}^2$  é a magnitude da velocidade relativa ao sistema de coordenadas girante.

Então, substituindo a expressão da função-força  $F$ , apresentada na Eq. 2.31 em 2.34 e chamando  $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = \bar{r}^2$ , resulta em:

$$\bar{V}^2 = n^2 \bar{r}^2 + 2G \left( \frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} \right) - C_J. \quad (2.35)$$

Esse resultado é conhecido como Integral de Jacobi, onde  $C_J$  é a constante de Jacobi.

É possível simplificar ainda mais as equações do movimento, utilizando quantidades adimensionais. Para isso, as seguintes grandezas são definidas.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\bar{x}}{L}; & y &= \frac{\bar{y}}{L}; & r_1 &= \frac{r_{13}}{L}; & r_2 &= \frac{r_{23}}{L}; \\ \mu_1 &= \frac{m_1}{m}; & \mu_2 &= \frac{m_2}{m}; & t &= nt^*; & \Omega &= \frac{F}{L^2 n^2}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde  $L$  é a distância entre os primários,  $m$  é a massa total do sistema ( $m_1 + m_2$ ) e  $n$  é velocidade angular do sistema girante, conforme definido anteriormente. Assim, as equações do movimento de  $m_3$  no sistema de referência girante, apresentadas nas Eqs. 2.32 e 2.33, podem ser reescritas na forma:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x, \quad (2.37)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y, \quad (2.38)$$

nas quais, os subscritos  $x$  e  $y$ , indicam derivadas parciais em  $\Omega$ , que é o potencial efetivo dado por:

$$\Omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}. \quad (2.39)$$

A integral de Jacobi também pode ser reescrita na forma:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\Omega - C_J. \quad (2.40)$$

Dessa forma, ao escolher o sistema adimensional acima, também conhecido como sistema de unidades canônicas, ficam implícitas as seguintes regras:

- A distância entre os primário é unitária.
- A massa total do sistema é unitária.
- A constante gravitacional  $G = 1$ .
- A velocidade angular  $n$ , do movimento de  $m_1 - m_2$  torna-se unitária.
- O período do movimento angular  $m_1 - m_2$  é igual a  $2\pi$ .

Para isso, definimos a massa do menor primário como sendo  $\mu_2 = \mu$ , logo, a massa do maior primário será  $\mu_1 = 1 - \mu$  e o potencial pode ser reescrito como:

$$\Omega = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \quad (2.41)$$

com  $r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}$  e  $r_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2}$ . A localização do maior primário é dada por  $(\mu, 0)$  e a do menor primário, dada por  $(-1 + \mu, 0)$ , quando o primário de maior massa se encontra ao lado direito do sistema referencial da Figura 2.2. É comum, inverter a posição de ambos, alternando  $m_1$  e  $m_2$  da Figura 2.2. Nesse caso, quando o primário de maior massa se encontra ao lado esquerdo da Figura 2.2, em  $(-\mu, 0)$  e a localização do menor primário é dada por  $(1 - \mu, 0)$ ,  $r_1$  e  $r_2$  também se alteram, de forma que  $r_1 = \sqrt{(x - \mu)^2 + y^2}$ ,  $r_2 = \sqrt{(x + 1 - \mu)^2 + y^2}$  e o potencial efetivo fica escrito da seguinte forma:

$$\Omega = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{\mu}{r_1} + \frac{1 - \mu}{r_2}. \quad (2.42)$$

Por uma simples conveniência numérica, é comum adicionar um termo constante à fórmula do potencial efetivo, que passa a ser expresso da forma:

$$\Omega = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1 - \mu)}{2}. \quad (2.43)$$

Essa conformidade deve ficar melhor esclarecida após a compreensão do Capítulo 3, onde são apresentadas algumas características intrínsecas ao sistema do PR3CCP.

## 2.3 Transformação do Sistema Inercial Heliocêntrico para o Sistema Restrito de Três Corpos

Conforme descrito anteriormente, o modelo do PR3C consiste em estudar o movimento de um corpo de massa desprezível  $m_3$ , sujeito à força de atração gravitacional gerada pelos dois primários de massa finita  $m_1$  e  $m_2$ . Quando o terceiro corpo trata-se por exemplo, de um planeta ou de um satélite natural de órbita bem definida, é possível coletar seus dados orbitais no *Sistema Inercial Heliocêntrico* e efetuar uma transformação que permita considerá-lo como uma perturbação das equações do PR3C.

Essa transformação é obtida após uma série de operações matemáticas que fornecem as coordenadas de posição do terceiro corpo no *Sistema Restrito de Três Corpos*, o que pode ser útil quando deseja-se trabalhar com o modelo do PR3C.

Pode-se reescrever a equação para o movimento de um corpo de massa  $m_i$ , dada pela 2.1, da seguinte forma:

$$\ddot{\vec{R}}_i = G \sum_j m_j \frac{\vec{R}_j - \vec{R}_i}{\|\vec{R}_j - \vec{R}_i\|^3}, \quad (2.44)$$

onde  $\vec{R}_i = (X_i, Y_i, Z_i)^T$  é o vetor posição do corpo de massa  $m_i$  em km,  $\vec{R}_j = (X_j, Y_j, Z_j)^T$  é a posição do corpo de massa  $m_j$  em km,  $\|\cdot\|$  é a norma Euclidiana e as derivadas com respeito ao tempo são realizadas em dias Julianos, que denotamos por  $t^*$ .

Para formular esse sistema como um PR3C perturbado, é feita a escolha dos corpos

primários de referência,  $i$  e  $j$ , de forma que  $m_i > m_j$  e a partir de uma mudança de coordenadas, é possível levar  $i$  e  $j$  para as posições constantes  $(\mu, 0, 0)$  e  $(\mu - 1, 0, 0)$  respectivamente, sendo  $\mu = m_j/(m_i + m_j)$  (MONDELO, 2001).

Efetuamos essa transformação de acordo com os seguintes passos:

- Uma translação, que leva o baricentro dos primários para a origem do sistema. As coordenadas do baricentro são dadas por:

$$\vec{B} = \frac{m_i \vec{R}_i + m_j \vec{R}_j}{m_i + m_j}. \quad (2.45)$$

- Uma rotação através da matriz ortogonal  $C = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Onde

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{R}_{ji}}{\|\vec{R}_{ji}\|}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{R}_{ji} \times \dot{\vec{R}}_{ji}}{\|\vec{R}_{ji} \times \dot{\vec{R}}_{ji}\|}, \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1, \quad (2.46)$$

sendo  $\vec{R}_{ij} = \vec{R}_j - \vec{R}_i$  e  $\vec{R}_{ji} = -\vec{R}_{ij}$ . E isso transforma o plano instantâneo de movimento dos primários no plano  $xy$  e deixa os primários no eixo  $x$ .

- Um escalonamento através de  $k = \|\vec{R}_{ji}\|$  que faz com que a distância entre os primários seja constante e igual a 1.

Então, a mudança de coordenadas pode ser escrita como:

$$\vec{R} = \vec{B} + kC\vec{r} \quad (2.47)$$

na qual,  $\vec{R} = (X, Y, Z)^T$  são as coordenadas de posição em km e  $\vec{r} = (x, y, z)^T$  as coordenadas de posição no sistema do PR3C adimensional.

# 3 Propriedades Dinâmicas do Sistema Restrito de Três Corpos

Quando trabalhamos com o PR3C é necessário o conhecimento de algumas propriedades que atuam no sistema dinâmico e que podem auxiliar em mecanismos de transporte. Como se trata de um sistema caótico, é importante identificar os aspectos que levam a essa conclusão e a partir disso, obter informações sobre seu comportamento e estabilidade. Sendo assim, algumas definições são feitas nesse capítulo. O estudo desse conjunto de características intrínsecas ao sistema, possibilita uma análise ampla e a avaliação de novas ideias.

## 3.1 Pontos Lagrangeanos

Os Pontos de Libração de uma órbita, Pontos Fixos ou Pontos Lagrangeanos, são pontos de equilíbrio do sistema, onde a resultante de todas as forças que agem no sistema é nula. Ou seja, são pontos para os quais, o gradiente do potencial dado pela Eq. 2.41 é nulo,  $\vec{\nabla}\Omega = \vec{0}$ . Através das Eqs. 2.37 e 2.38 nota-se que uma partícula com velocidade inicial nula, colocada em um ponto de equilíbrio, permanecerá nesse ponto indefinidamente, por isso também são chamados de Pontos Estacionários (PRADO, 2001).

Em um PR3C é possível identificar cinco pontos Lagrangeanos e suas posições são obtidas a partir do cálculo das derivadas parciais de  $\Omega$ , em relação a  $x$  e  $y$ .

$$\Omega_x = x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{r_2^3} = 0, \quad (3.1)$$

$$\Omega_y = y \left( 1 - \frac{(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right) = 0. \quad (3.2)$$

$\Omega_x$  e  $\Omega_y$  representam as derivadas parciais de  $\Omega$  em relação a  $x$  e  $y$ , respectivamente e conforme já definido anteriormente,  $r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}$  e  $r_2 = \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2}$ .

Temos então duas soluções possíveis para esse conjunto de equações. Quando  $y = 0$ , a segunda equação fica satisfeita e a primeira equação possui uma dependência em  $x$  e  $\mu$ , que quando resolvida, fornece três pontos de equilíbrio colineares  $(L_1, L_2, L_3)$  conforme o esquema de posições aproximadas da Figura 3.1. Quando  $y \neq 0$ , o único modo de satisfazer a segunda equação é fazer  $r_1 = r_2 = 1$ . Essa solução, também satisfaz a primeira equação e fornece o dois pontos de equilíbrio triangulares  $(L_4, L_5)$ , conforme esquematizado na figura a seguir, que são denominados triangulares, pois junto com  $m_1$  e  $m_2$ , formam triângulos equiláteros (PRADO, 2001).

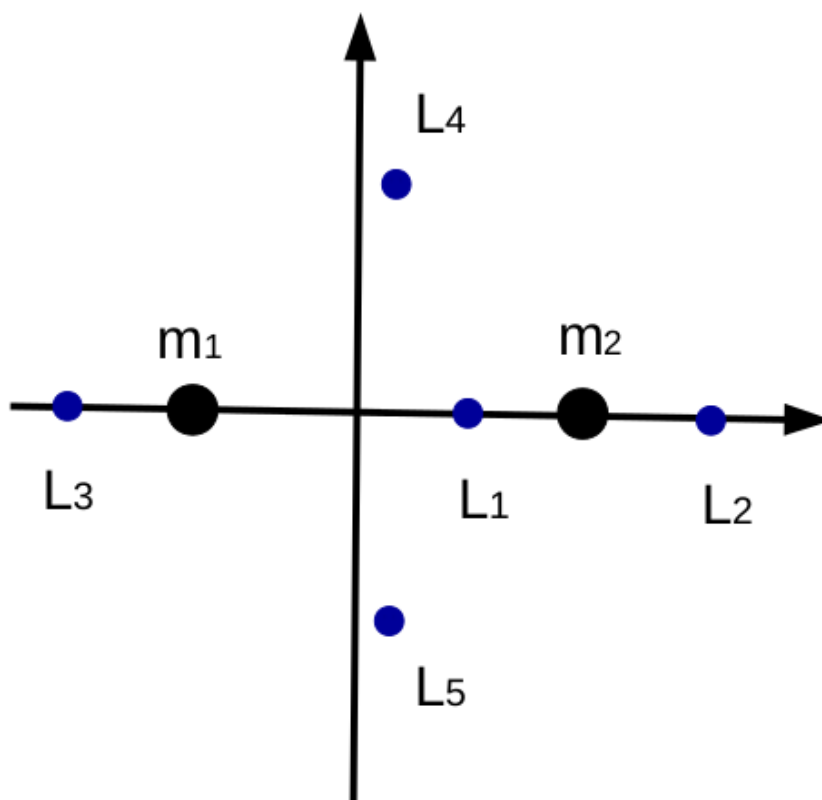


FIGURA 3.1 – Representação esquemática da localização dos pontos Lagrangeanos de um PR3C.

Existem dois métodos de se estudar a estabilidade na vizinhança de um ponto de equilíbrio de um sistema não-linear. O primeiro, conhecido como Método Indireto de Lyapunov ou Método de Linearização, consiste em fazer uma aproximação por truncamento da representação em série de Taylor em torno dos pontos de equilíbrio e sua estabilidade é estudada através da classificação de seus auto-valores, ou seja, sua estabilidade é estudada através do modelo linearizado, desse sistema não-linear. Já o segundo método, conhecido como Método Direto de Lyapunov, utiliza um critério para a avaliação de sua estabilidade referente à energia total do sistema e se aplica tanto a sistemas lineares,



quanto não-lineares, inclusive, quando o método de linearização é inconclusivo. Se um sistema possui um estado de equilíbrio estável  $x_e$ , então a energia total armazenada no sistema, decresce com o tempo até atingir o seu valor mínimo no estado de equilíbrio  $x_e$  e a estabilidade é analisada por meio de uma função escalar especial, chamada função de Lyapunov (PINTO, 2006), (PACHECO, 2015).

Utilizando o primeiro método de análise é possível concluir que para o sistema do PR3C, os pontos colineares são sempre instáveis para  $0 < \mu \leq 0.5$  e os pontos triangulares, são estáveis se  $0 < \mu < 0.0385$ , quando são classificados como pontos de equilíbrio elípticos e que inclui casos importantes como os sistemas Terra-Lua, Sol-Terra ou Sol-Júpiter e ainda temos que os pontos triangulares são instáveis se  $0.0385 < \mu \leq 0.5$ , caso em que são classificados como pontos de equilíbrio hiperbólicos (PRADO, 2001). Esses mesmos resultados são garantidos pela análise do segundo método, para os pontos colineares. Para os pontos triangulares elípticos, utilizando a análise do segundo método, há exceção de três valores de  $0 < \mu < 0.0385$ , para os quais a estabilidade não é garantida (PINTO, 2006).

## 3.2 Curvas de Velocidade Zero

As *Curvas de Velocidade Zero (CVZ)*, delimitam uma região no espaço em que o movimento de  $m_3$  é permitido, de acordo com suas condições iniciais. Essas curvas são definidas a partir da integral de Jacobi, apresentada na Eq. 2.40, que podemos reescrever da seguinte forma:

$$v^2 = 2\Omega - C_J. \tag{3.3}$$

A constante de Jacobi dada por  $C_J$  é calculada a partir das condições iniciais de posição e velocidade de  $m_3$  no sistema de coordenadas girante. Então, se consideramos que a velocidade é nula, na Eq. 3.3,  $v = 0$ , como  $\Omega$  é uma função da posição de  $m_3$  também no referencial girante, devemos obter as CVZ, também conhecidas por Curvas de Hill ou Curvas Equipotenciais.

O movimento só é permitido nas regiões onde  $2\Omega > C_J$ , caso contrário, o quadrado da velocidade teria que ser negativo, o que representa uma impossibilidade física (PRADO, 2001).

O aspecto das CVZ varia conforme a constante de Jacobi é alterada. Para um valor elevado de  $C_J$ , existem três alternativas para que a Eq. 3.3 seja satisfeita, quando  $v = 0$ :

- No primeiro caso,  $x^2 + y^2$  deve ser grande na Eq. 2.41, o que significa que  $m_3$  deve estar fora dos limites da região sombreada da Figura 3.2.a, a seguir.
- No segundo caso,  $r_1$  deve ser pequeno na Eq. 2.41, o que significa que  $m_3$  deve estar próximo de  $m_1$ , dentro da região oval esquerda ao redor de  $m_1$ , na Figura 3.2.a, a seguir.
- No terceiro caso,  $r_2$  deve ser pequeno na Eq. 2.41, o que significa que  $m_3$  deve estar próximo de  $m_2$ , dentro da região oval direita ao redor de  $m_2$ , na Figura 3.2.a, a seguir.

As regiões sombreadas representam uma região proibida em que o movimento não é permitido. Portanto, se  $m_3$  inicia seu movimento próximo de  $m_1$  ou de  $m_2$ , seu movimento deve permanecer dentro de suas respectivas regiões ovais, não sendo possível uma transferência de  $m_1$  para  $m_2$  e vice-versa ou que  $m_3$  escape para o infinito por movimento natural (sem o uso de empuxos, que alteram o valor de  $C_J$ ). Da mesma forma, se  $m_3$  inicia seu movimento longe de  $m_1$  e  $m_2$ , é impossível uma aproximação com estes. Ainda na Figura 3.2.a, podemos observar que a região oval em torno de  $m_1$  é maior que a região oval em torno de  $m_2$  e isso se deve ao fato de que  $(1 - \mu) > \mu$  ( $\mu < 0,5$ ), que permite um maior valor de  $r_1$  no termo  $(1 - \mu)/r_1$  do potencial (PRADO, 2001).

Diminuindo o valor de  $C_J$ , notamos que o tamanho das regiões ovais aumentam, pois isso indica maiores valores de  $r_1$  e  $r_2$ , portanto, a região proibida que é sombreada, diminui de tamanho, na Figura 3.2.b, de forma que as regiões ovais nos entornos de  $m_1$  e  $m_2$  se tocam no ponto Lagrangeano  $L_1$ , que é o primeiro ponto de contato, tornado possível um transferência entre  $m_1$  e  $m_2$  por movimento natural (PRADO, 2001).

Conforme o valor de  $C_J$  é reduzido, nota-se que a região de comunicação entre  $m_1$  e  $m_2$ , aumenta, até que obtêm-se um primeiro ponto de contato entre a vizinhança de  $m_1 - m_2$  e o infinito, que ocorre no ponto Lagrangeano  $L_2$ , conforme a Figura 3.2.d.

Reduzindo ainda mais o valor de  $C_J$ , obtêm-se o segundo ponto de contato entre a vizinhança de  $m_1 - m_2$  e o infinito, que ocorre no ponto Lagrangeano  $L_3$ , conforme a Figura 3.2.e. E se prosseguir diminuindo o valor de  $C_J$ , devemos observar uma redução ainda maior da região proibida, que deve se situar no entorno dos pontos Lagrangeanos  $L_4$  e  $L_5$ , como podemos observar na Figura 3.2.f. Portanto,  $m_3$  pode se mover por todo o plano, exceto nas regiões próximas de  $L_4$  e  $L_5$ . É possível reduzir novamente o valor de  $C_J$ , de forma que o movimento de  $m_3$  possa ocorrer em todo o plano x-y, sem exceções.

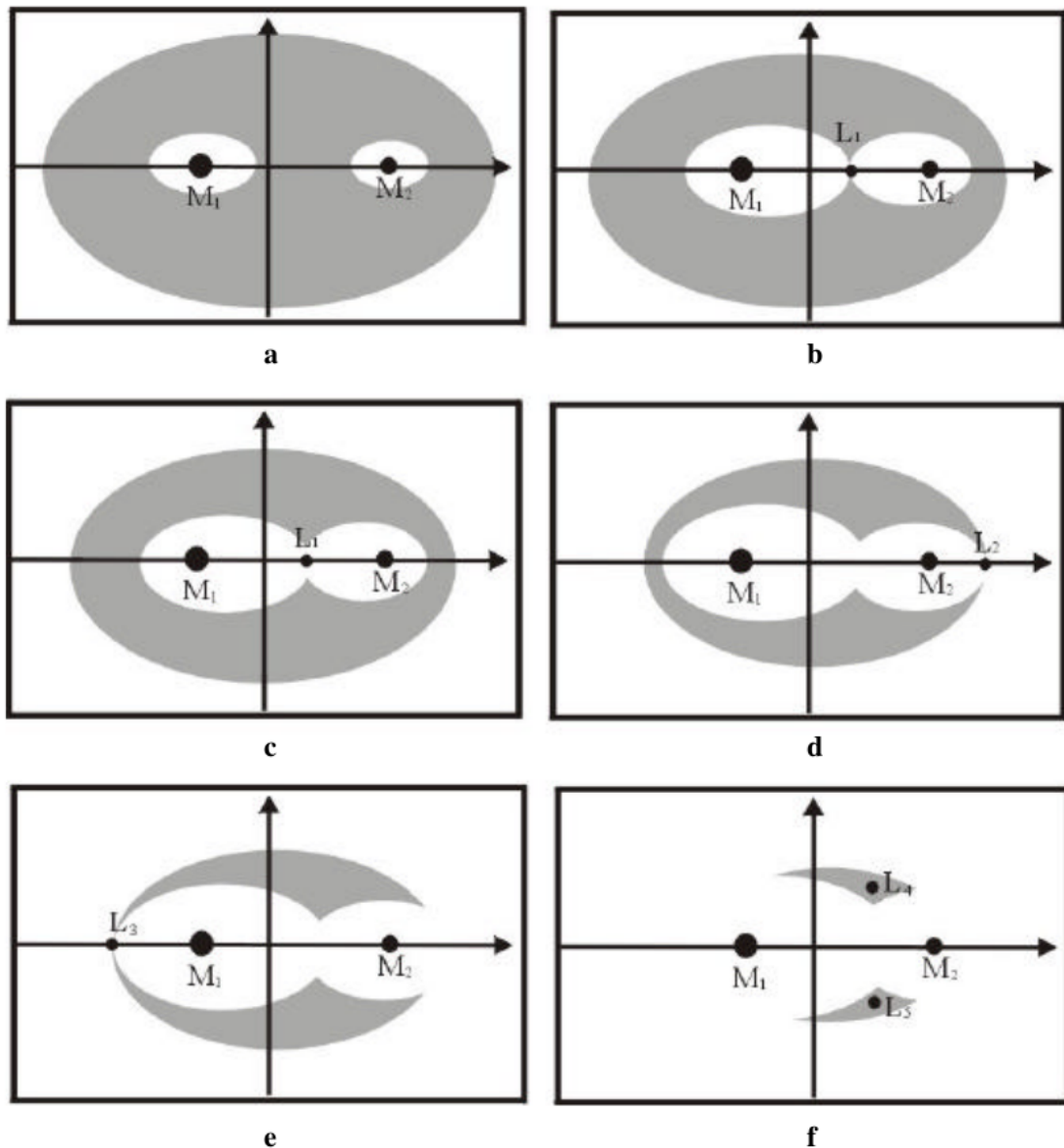


FIGURA 3.2 – Representação esquemática das curvas de Velocidade Zero, conforme o valor de  $C_J$  decresce. As regiões sombreadas representam as regiões proibidas, onde o movimento de  $m_3$  não é permitido (PRADO, 2001).

### 3.3 Órbitas Periódicas e Suas Variedades Invariantes

Devido às propriedades de estabilidades dos pontos de equilíbrio colineares do PR3C, definidas pelos autovalores associados, em torno de cada uma destas soluções, para o caso planar, existe uma família uniparamétrica contínua de órbitas periódicas instáveis, denominadas Órbitas de Lyapunov Planares. Associada a cada uma delas, tem-se as vari-

idades hiperbólicas estáveis e instáveis que tem sido exploradas como canais de transporte (SZEBEHELY, 1967), (KOON *et al.*, 2000) e (GÓMEZ *et al.*, 2004), principalmente, para o Sistema Terra-Lua.

Contudo, REN *et al.*, (2012) mostra que para muitos casos de transporte interplanetário no Sistema Solar, as variedades hiperbólicas das variedades centrais dos pontos Lagrangeanos não se interceptam e, portanto, não podem ser utilizadas como canais de transporte. A análise de REN *et al.*, (2012) mostra que conexões de tempo curto existem apenas entre Júpiter-Saturno e Urano-Netuno. Para o caso Terra-Marte, as variedades hiperbólicas também não se interceptam e outras alternativas de transporte tem que ser exploradas.

### 3.4 Mapas e Seções de Poincaré

Chama-se Mapa, os sistemas dinâmicos que evoluem no tempo de uma forma discreta e a Seção de Poincaré é uma forma de reduzir o estudo de um sistema contínuo, que evolui como um fluxo, continuamente no tempo, num espaço de fases de dimensão  $N$  para o estudo de um mapa discreto, denominado Mapa de Poincaré, em um espaço de fases com dimensão  $N - 1$ . Em vez de se analisar as equações que descrevem a trajetória do fluxo, torna-se possível analisar o mapa originado por sucessivas intersecções do fluxo com o plano, onde as equações que relacionam as sucessivas posições dos pontos nesse plano é o Mapa de Poincaré e este plano é a Seção de Poincaré (MICHELIN, 2013).

Embora não exista um método geral para sua construção, o procedimento para sua obtenção pode ser baseado no estudo de órbitas próximas a órbitas periódicas, homoclínicas<sup>2</sup> ou heteroclínicas<sup>3</sup> e consiste em definir uma superfície  $\Sigma$  de dimensão  $N - 1$ , transversa ao campo vetorial do fluxo  $\varphi$  em um ponto  $x$  e construir uma transformação  $P$ , onde  $P$  é o mapa de Poincaré, de forma que associe pontos em  $V$ , com pontos de retorno em  $\Sigma$ :

$$P : V \rightarrow \Sigma, \quad x \rightarrow \varphi(x, \tau(x)). \quad (3.4)$$

onde  $\tau(x)$  é o tempo do primeiro retorno do ponto  $x$  para  $\Sigma$  e  $V$  é um conjunto de pontos (SAVI, 2006).

A imagem a seguir é uma representação esquemática de como se dá a construção de uma seção de Poincaré.

---

<sup>2</sup>Órbita que faz intersecção de variedades estáveis e instáveis de um mesmo ponto fixo.

<sup>3</sup>Órbita que faz intersecção de variedades estáveis e instáveis de diferentes pontos fixos.

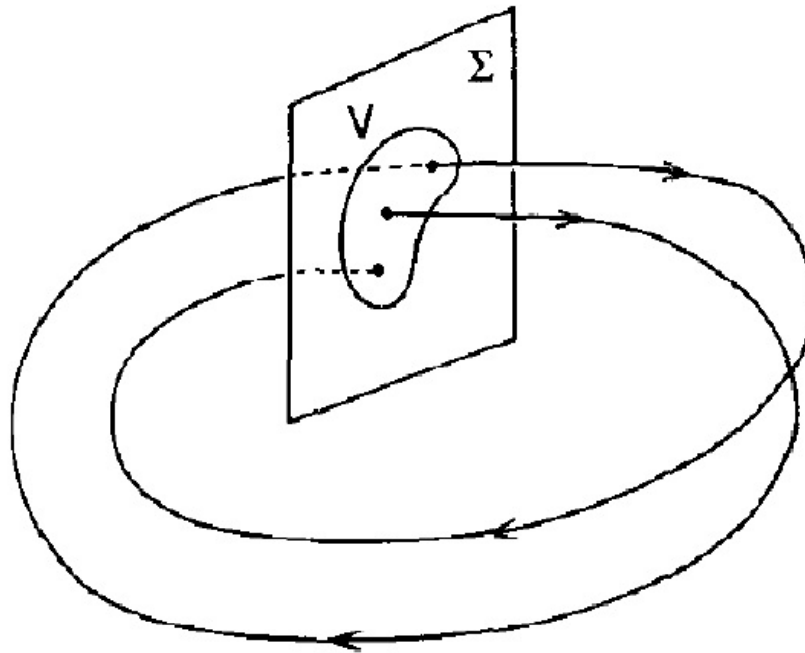


FIGURA 3.3 – Representação esquemática da construção de uma seção de Poincaré  $\Sigma$ , para um conjunto de pontos  $V$  de órbitas periódicas (MICHELIN, 2013).

Para a construção de uma seção de Poincaré, com mapeamento de uma órbita homoclínica ou heteroclínica, o procedimento é baseado no estudo da estrutura de órbitas associadas aos pontos fixos do sistema.

### 3.5 Fundamentação Teórica

Realizadas as definições necessárias para a compreensão desse trabalho, é relatada brevemente nessa seção, a forma como se conduziu a pesquisa executada por REN *et al.*, (2012), que inspirou a realização dessa obra. Em seu trabalho, os autores investigam a possibilidade de transporte Terra-Marte através de duas metodologias diferentes.

Inicialmente, é investigada a possibilidade de transporte natural de curto período, explorando as variedades invariantes como canais de transporte e conclui-se que para o caso Terra-Marte, essas variedades não se interceptam, não sendo possível a realização de um transporte natural Terra-Marte utilizando esse método. Posteriormente, é analisada a possibilidade de se efetuar um transporte natural Terra-Marte de longo período, através da dinâmica caótica do menor corpo no sistema restrito de três corpos circular planar e conclui-se que essa transferência só seria possível em um tempo de voo da ordem de algumas centenas de anos, sendo inviável para um projeto de missão espacial. Entretanto, o método encontrado nesse trabalho, garante a conexão entre as órbitas da Terra e de Marte.

*Y. Ren et al./Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 17 (2012) 844–853*

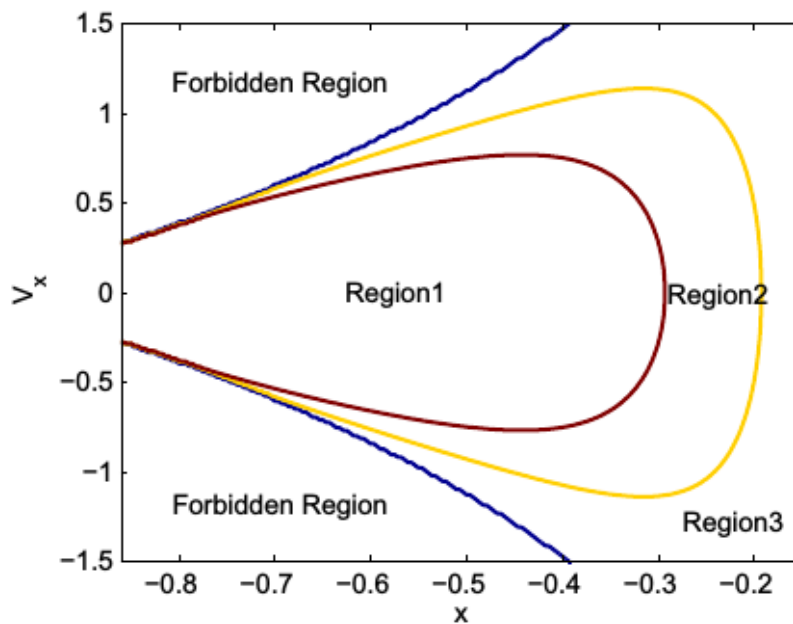


FIGURA 3.4 – Na região R1 não ocorre intersecção entre as órbitas da Terra e de Marte, na região R2, ocorre intersecções apenas com a órbita de Marte, na região R3, ocorre apenas intersecções com a órbita da Terra e a Região Proibida representa estados que não existem para esse nível de energia (REN *et al.*, 2012).

Na Figura 3.4, é apresentada uma subdivisão de condições iniciais de uma grade de  $35 \times 25$  condições iniciais, distribuídas em uma seção de Poincaré no plano  $x - \dot{x}$  definida pelas relações  $\tan^{-1}(y/x) = 180^\circ$  e  $\dot{y} < 0$ , para um valor de constante de Jacobi fixo,  $C_J = 3.03$ . Nessa seção de Poincaré são definidas as seguintes regiões: R1 corresponde à uma região em que não ocorre intersecção entre as órbitas da Terra e de Marte, R2 corresponde à uma região em que ocorre intersecções apenas com a órbita de Marte, R3 corresponde à uma região em que ocorre apenas intersecções com a órbita da Terra e a Região Proibida, correspondendo aos estados iniciais não acessíveis para esse nível de energia. Uma região que corresponde a trajetórias com intersecção tanto com as órbitas da Terra quanto a de Marte também é definida, denominada R4.

Para a detecção destas regiões, os autores realizam a evolução temporal de cada condição inicial durante um curto período de tempo (i.e.,  $< 2\pi$  em unidades adimensionais de tempo definidas no sistema Sol-Júpiter), gerando um curto segmento de trajetória no sistema de coordenadas sinódico, que corresponde a uma órbita elíptica quase completa no referencial inercial. Determinando as distâncias do afélio e periélio de cada órbita no referencial inercial, os autores classificam as condições iniciais na seção de Poincaré em regiões de R1 a R4.

Em seguida, segundo essa análise, encontrar transporte entre as regiões R2 e R3 é equivalente a encontrar transporte entre Terra e Marte no espaço de configuração, uma vez que para esta análise, a região R4 não apresenta soluções. Contudo, esta abordagem conduziu apenas a soluções de transporte natural Terra-Marte com tempo de voo da ordem de algumas centenas de anos.

A partir do estudo dessa metodologia, propomos e implementamos nova abordagem de análise, cujos resultados apresentamos a seguir no próximo capítulo.

# 4 Resultados e Discussão

## 4.1 Propriedades do Sistema Solar

A princípio, para efetuar transferências interplanetárias no Sistema Solar, é necessário conhecer a influência gravitacional exercida pelos planetas ao longo da trajetória de interesse. Portanto, analisamos inicialmente a forma pela qual a distribuição do potencial gravitacional exercida pelos planetas do Sistema Solar atua no espaço bidimensional, na Figura 4.1.

Para o cálculo do potencial gravitacional, é utilizada a expressão conhecida:

$$\Phi = -\frac{Gm}{r}. \quad (4.1)$$

onde  $m$  é a massa do planeta que está causando o campo gravitacional e  $r$  é a distância entre o centro de massa desse planeta e o ponto considerado para análise.

Utilizamos os valores de massa ( $m_i$ ) e distância média do centro de massa do planeta ao Sol ( $x_i$ ), apresentados na tabela abaixo, que foram disponibilizados em websites da *National Aeronautics and Space Administration (NASA)*.

TABELA 4.1 – Valores de parâmetros utilizados.

Planeta	Massa ( $\times 10^{24}$ Kg)	Distância média Sol-Planeta ( $\times 10^8$ Km)
Mercúrio	0.33011	0.5791
Vênus	4.8675	1.0821
Terra	5.9723	1.495978707
Marte	0.64171	2.27925
Júpiter	1898.19	7.7857
Saturno	568.34	14.33475
Urano	86.813	28.7246
Netuno	102.413	44.9506



Para a obtenção da Figura 4.1, as distâncias  $x_i$  apresentadas na Tabela 4.1 foram normalizadas para *Unidades Astronômicas (AU)*, em que uma unidade astronômica é definida como sendo a distância média Terra-Sol; assim como as unidades de distância da constante de gravitação universal  $G$ , também foram convertidas para unidades astronômicas. Então, para cada planeta no Sistema Solar, inserimos seus valores de massa  $m_i$ , apresentados na Tabela 4.1 na Equação 4.1 e calculamos o potencial gravitacional exercido ao longo do Sistema Solar, em que o Sol se encontra na origem do sistema e a distância  $r$  corresponde à  $\sqrt{x - x_i}$ , onde  $x$  varia de 0 à 40 unidades astronômicas.

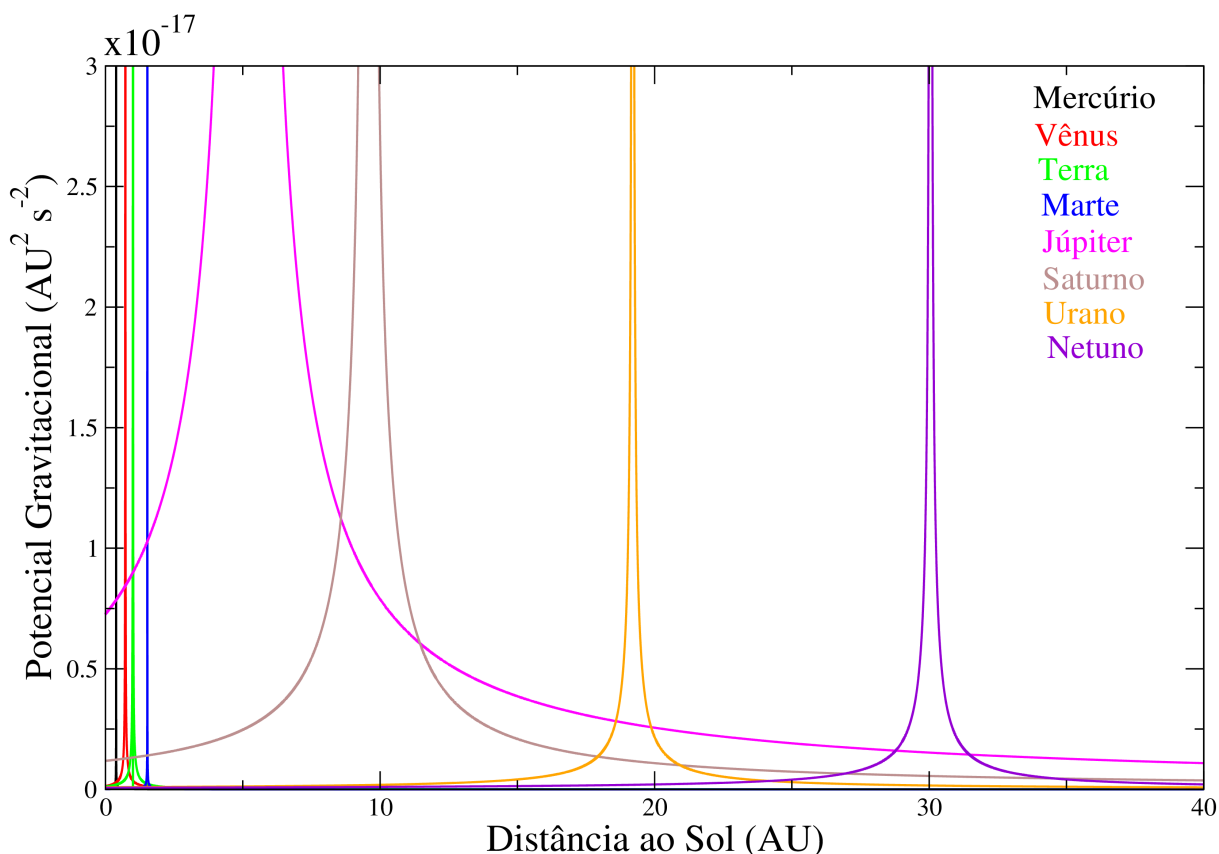


FIGURA 4.1 – Efeito gravitacional dos planetas ao longo do Sistema Solar, onde o Sol está localizado na origem do sistema e as unidades de distância, na fórmula do potencial, foram convertidas para *Unidades Astronômicas (AU)*. Uma unidade astronômica é definida como sendo a distância média Terra-Sol, apresentada na Tabela 4.1

Se plotamos o potencial gravitacional exercido pelo Sol, na mesma escala da Figura 4.1, não conseguimos observar seu comportamento, afinal, sua influência gravitacional sobre o Sistema Solar não se compara a que observamos na escala planetária.

#### 4.1.1 Modelo Estabelecido

Limitando a escala do eixo  $x$  para a região de interesse situada entre Terra e Marte, podemos observar a dominância dos potenciais gravitacionais de Júpiter, Saturno e Vênus,

em ordem decrescente de intensidade (ver Figura 4.2), sendo notável a predominância do potencial gravitacional de Júpiter em relação aos potenciais dos demais corpos. Isso se deve ao fato de Júpiter ser o planeta mais massivo do Sistema Solar. A Figura 4.3 ilustra os potenciais dos quatro corpos principais envolvidos numa Transferência Terra-Marte. Dessa forma, para efetuar um transporte natural Terra-Marte, utilizando o modelo do PR3C, é apropriado trabalhar com o sistema Sol-Júpiter.

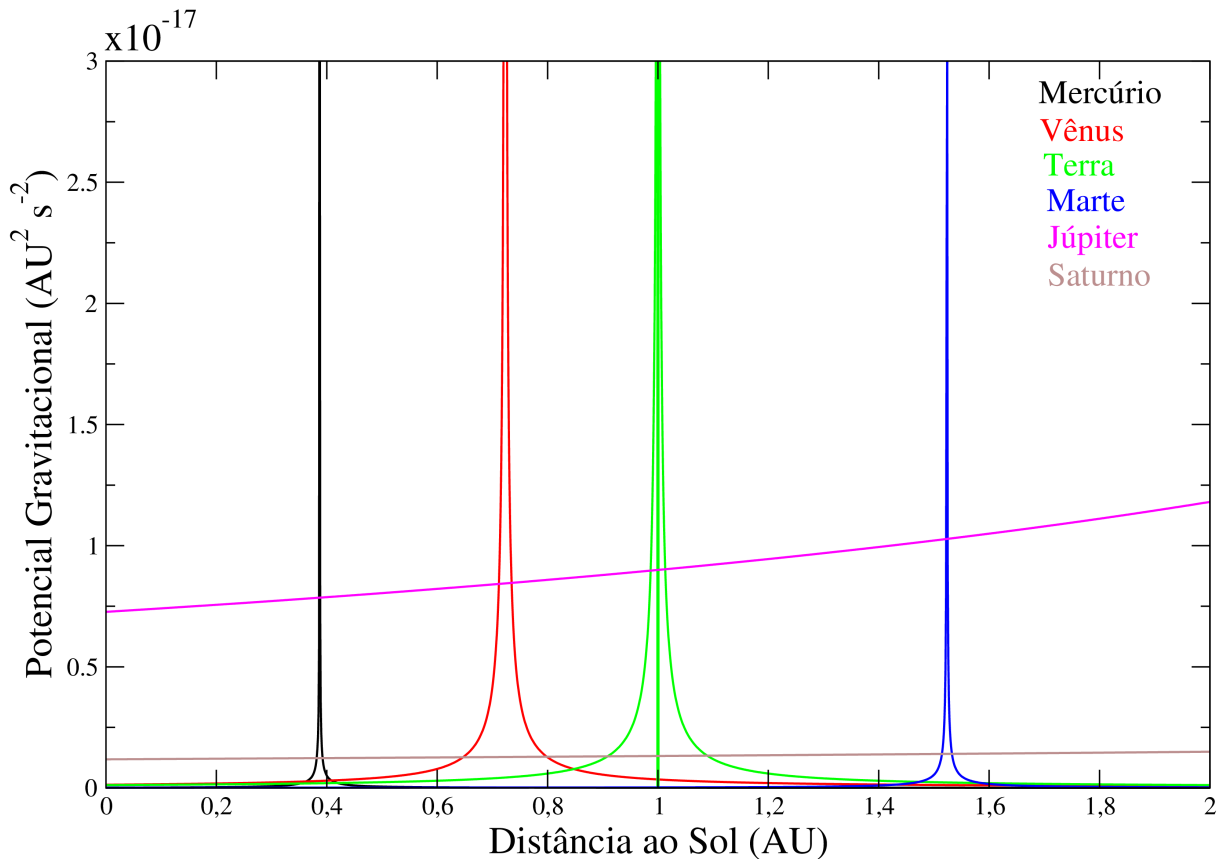


FIGURA 4.2 – Influência do potencial gravitacional dos planetas do Sistema Solar, na região de interesse, situada entre Terra e Marte.

Construímos um programa para efetuar uma transformação do sistema inercial heliocêntrico para o sistema de referência do problema restrito de três corpos, conforme o procedimento descrito na Seção 2.3, considerando Sol e Júpiter como primários principais. Tendo isso, consideramos Terra e Marte, como sendo corpos de massa infinitesimal (terceiro corpo do PR3C). Para isso, utilizamos os dados de posição e velocidade do sistema inercial heliocêntrico disponibilizados pelo sistema HORIZONS do *Jet Propulsion Laboratory (JPL)*, que fornece efemérides de alta precisão para corpos do sistema solar e utilizamos o método de diferenças finitas para o cálculo da aceleração de Júpiter, necessária para a transformação das velocidades.

Dessa forma, obtivemos os dados de posição (Figura 4.4) e velocidade (Figura 4.5) em cinco anos terrestres (de 1/08/2017 a 1/08/2022) no sistema restrito de três corpos, para

sistemas Sol-Júpiter-Terra e Sol-Júpiter-Marte.

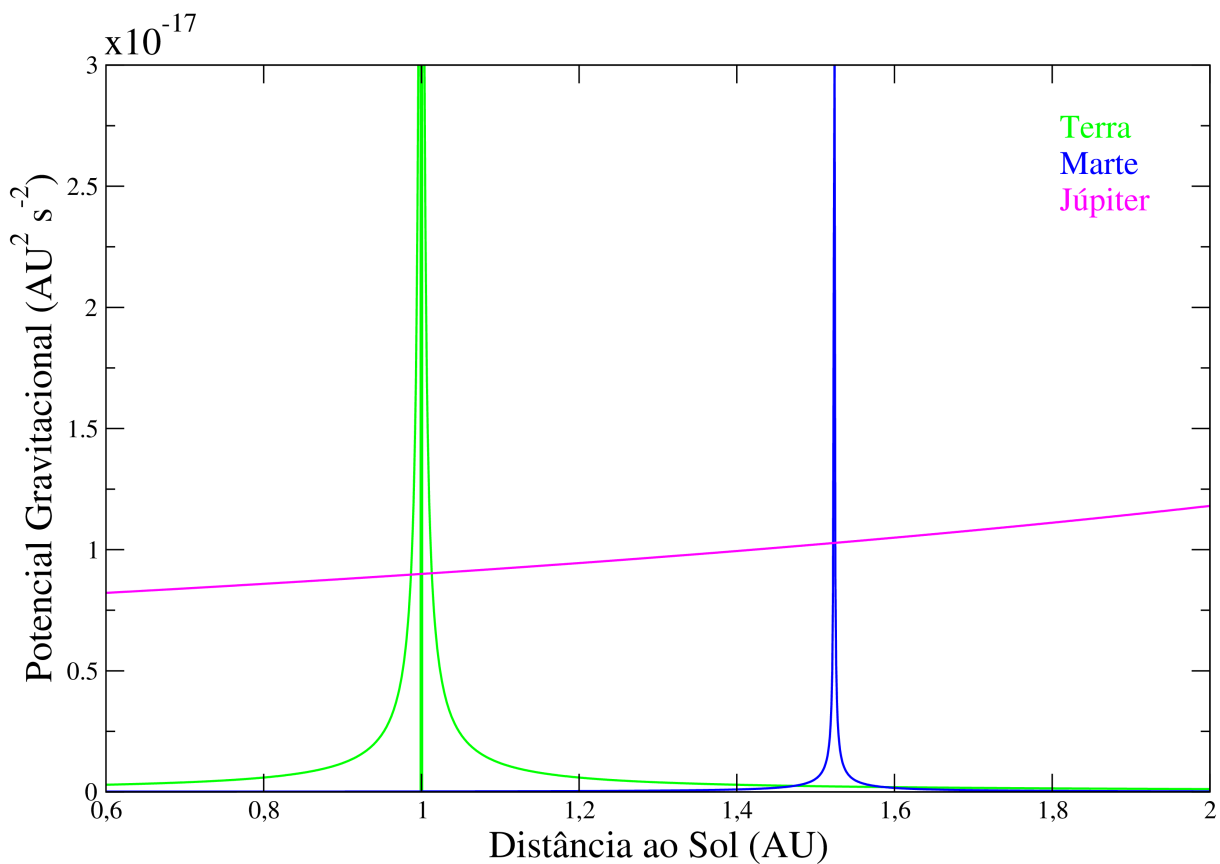


FIGURA 4.3 – Influência do potencial gravitacional dos planetas do Sistema Solar que devemos considerar em uma trajetória de transferência Terra-Marte.

Na Figura 4.4 podemos notar que conforme o esperado, Júpiter se encontra em  $(-1 + \mu, 0, 0)$  e o Sol, em  $(\mu, 0, 0)$ . Além disso, podemos notar que as órbitas variam em uma escala muito menor no eixo  $z$ , comparadas ao eixo  $x$  e  $y$ . O que justifica a possibilidade de se trabalhar com esse sistema no caso planar.

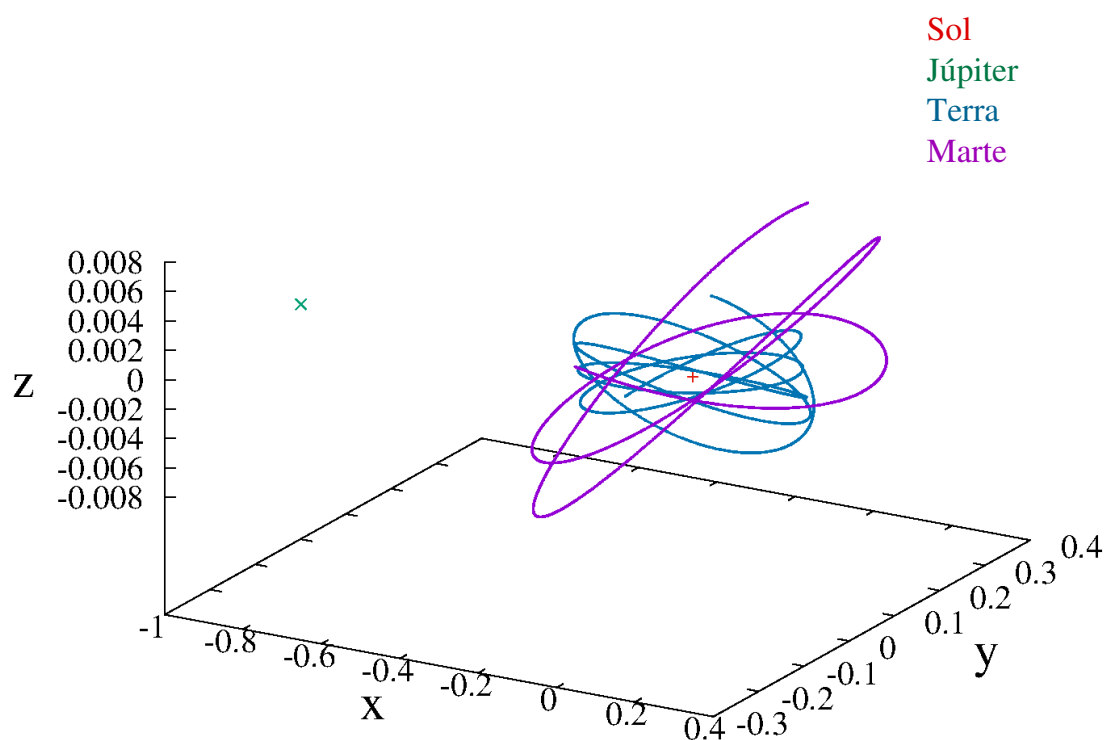


FIGURA 4.4 – Coordenadas de posição do sistema Sol-Júpiter-Terra e Sol-Júpiter-Marte no PR3C. Onde Júpiter se encontra em  $(-1 + \mu, 0, 0)$  e o Sol, em  $(\mu, 0, 0)$ .

Podemos verificar também na Figura 4.5 que ambas as velocidades do Sol e de Júpiter são nulas nesse referencial, de acordo com as especificações para o PR3C no sistema girante, afinal, os primários são fixos nesse sistema.

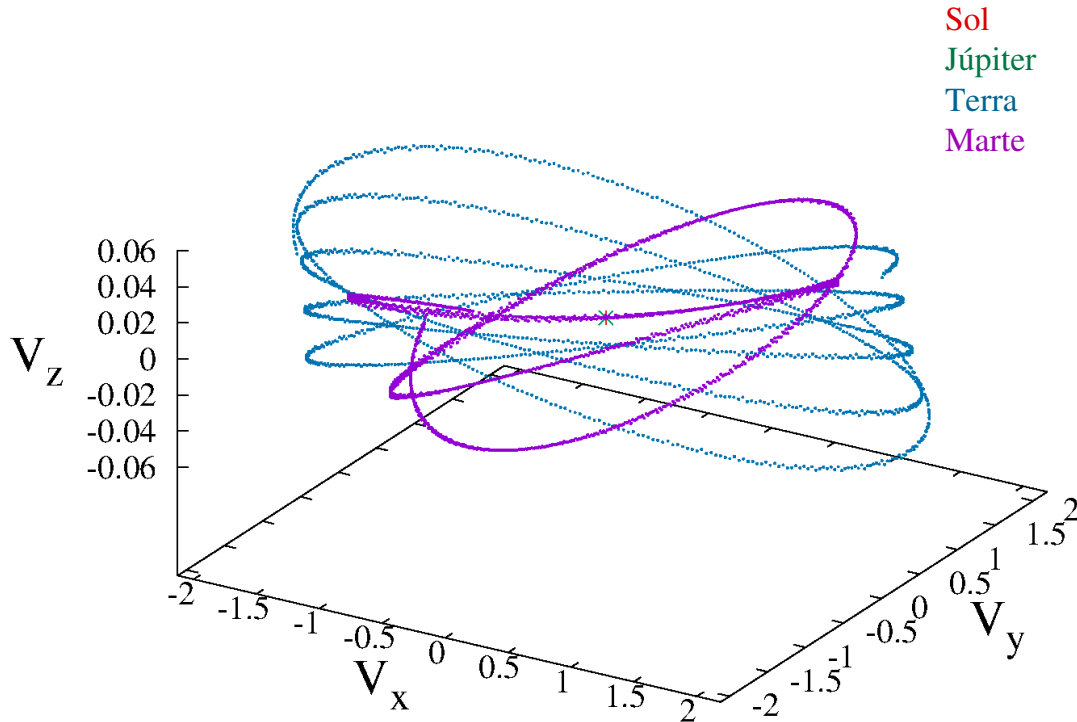


FIGURA 4.5 – Coordenadas de velocidade do sistema Sol-Júpiter-Terra e Sol-Júpiter-Marte no PR3C, referencial no qual os corpos primários estão fixos, portanto a velocidade de ambos é nula.

Os valores de posição  $x$  e  $y$  dos pontos Lagrangeanos, no sistema Sol-Júpiter, podem ser obtidos conforme o processo descrito na seção 3.1, encontrando as soluções das Equações (3.1) e (3.2). Obtidos os valores de posição dos pontos Lagrangeanos, basta inserir na Equação (3.3), considerando  $v = 0$ , para que se obtenha os valores de  $C_J$  relacionados a cada ponto Lagrangeano. Para o sistema Sol-Júpiter, temos os seguintes valores:

TABELA 4.2 – Pontos Lagrangeanos do Sistema Sol-Júpiter.

Ponto Lagrangeano	$x$	$y$	$C_J$
$L_1$	0.93237038184808185	0.0	3.0397083550523409
$L_2$	1.0688256926719319	0.0	3.0384365372299094
$L_3$	-1.0003973639117909	0.0	3.0019064183897930
$L_4$	0.49904632649850100	0.86602540378443860	3.0000000000000004
$L_5$	0.49904632649850100	-0.86602540378443860	3.0000000000000004

Utilizando as relações  $\tan^{-1}(y/x) = 180^\circ$  e  $\dot{y} < 0$  REN *et al.*, (2012), construímos a seção de Poincaré no plano  $x - \dot{x}$  para o sistema Sol-Júpiter no PR3CCP com uma grade

de  $35 \times 25$  condições iniciais para valores fixos de  $C_J$ , próximos aos valores de  $C_J$  dos pontos Lagrangeanos desse sistema, apresentados na Tabela 4.2. Essa seção de Poincaré, nos permite analisar a dinâmica desse sistema e observar seu comportamento para diversos valores de  $C_J$ .

Para valores de  $C_J$  maiores que o valor de  $C_J$  associado à  $L_1$ , como  $C_J = 3.50$  e  $C_J = 3.06$  não há ainda nenhuma região de contato entre o sistema Sol-Júpiter e o meio externo. Portanto, não seria possível uma transferência natural entre Sol e Júpiter ou uma transferência do Sol ou de Júpiter para o infinito.

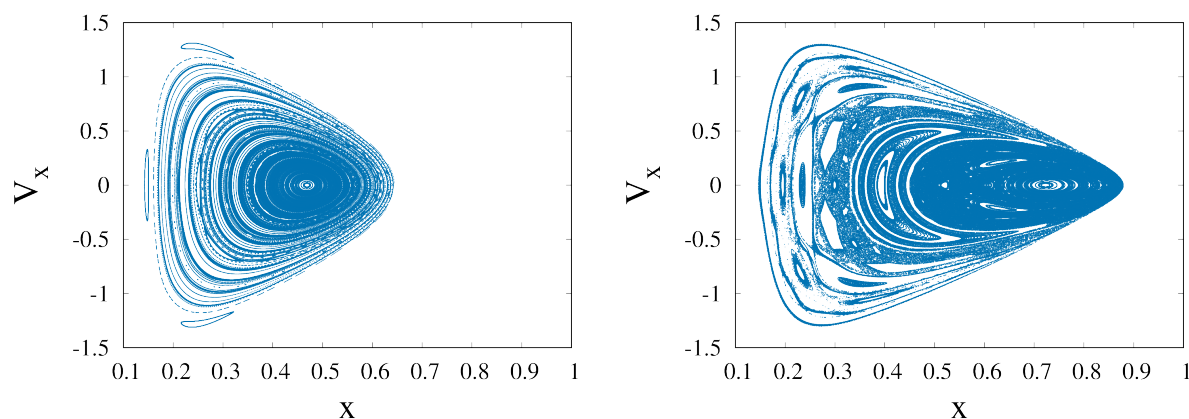


FIGURA 4.6 – Seção de Poincaré do sistema Sol-Júpiter para  $C_J = 3.50$  e  $C_J = 3.06$ . Em azul, observamos as regiões visitadas por nossas condições iniciais, onde  $v^2 > 0$  e em branco, regiões periódicas.

Para valores de  $C_J$  menores que o valor de  $C_J$  associado à  $L_1$  e  $L_2$ , como  $C_J = 3.03$  e  $C_J = 3.01$ , já existe a possibilidade de transporte entre Sol e Júpiter ou para a região fora desse sistema.

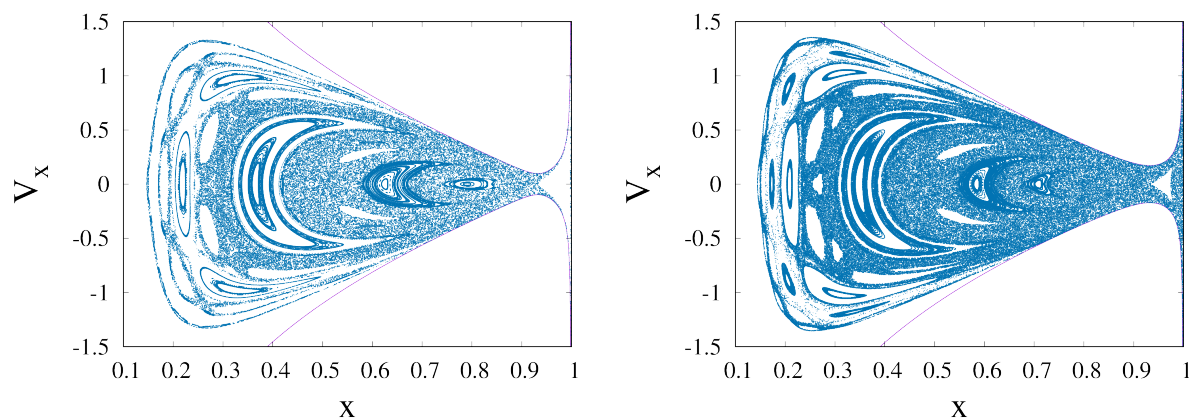


FIGURA 4.7 – Seção de Poincaré do sistema Sol-Júpiter para  $C_J = 3.03$  e  $C_J = 3.01$ , onde as curvas em roxo, representam as curvas de velocidade zero. Em azul, observamos as regiões visitadas por nossas condições iniciais, onde  $v^2 > 0$  e em branco, regiões periódicas.

Para valores de  $C_J$  menores que  $C_J$  associado à  $L_5$ , como  $C_J = 2.95$  e  $C_J = 2.50$ , existe a possibilidade de qualquer transferência no espaço de fases. É possível observar que conforme o valor de  $C_J$  decresce o caos no sistema aumenta.

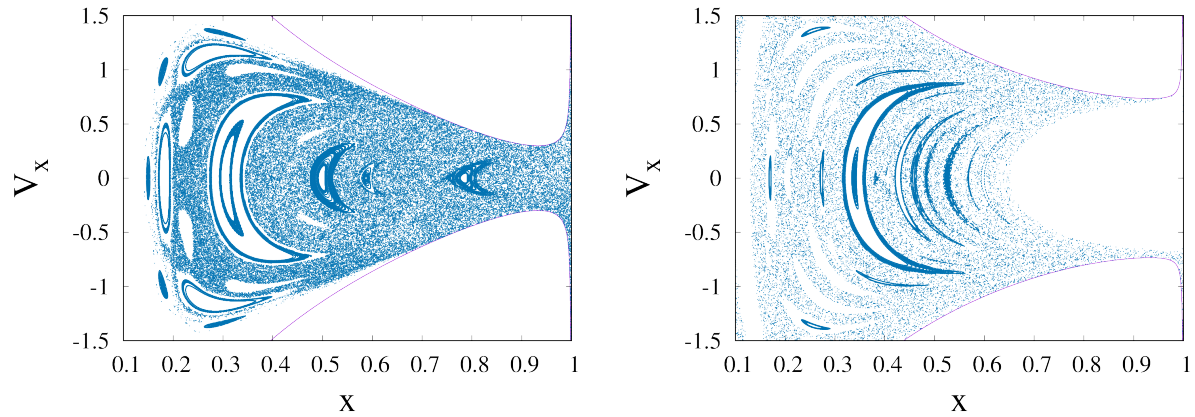


FIGURA 4.8 – Seção de Poincaré do sistema Sol-Júpiter para  $C_J = 2.95$  e  $C_J = 2.50$ , onde as curvas em roxo, representam as curvas de velocidade zero. Em azul, observamos as regiões visitadas por nossas condições iniciais, onde  $v^2 > 0$  e em branco, regiões periódicas.

Calculando o valor de  $C_J$  da Terra e de Marte, após a realização da transformação do sistema inercial heliocêntrico para o sistema do PR3C, observamos que  $C_J$  não se conserva, conforme esperado, além de apresentar valores elevados, conforme a Figura 4.9. Além disso, através dos dados coletados de 30 anos terrestres do JPL, podemos observar que ambos os valores de  $C_J$  oscilam em torno de valores médios.

O fato da constante de Jacobi não se conservar para Terra e Marte é esperado uma vez que este é um invariante do PR3C, que não leva em consideração os efeitos físicos devidos aos demais corpos do Sistema Solar.

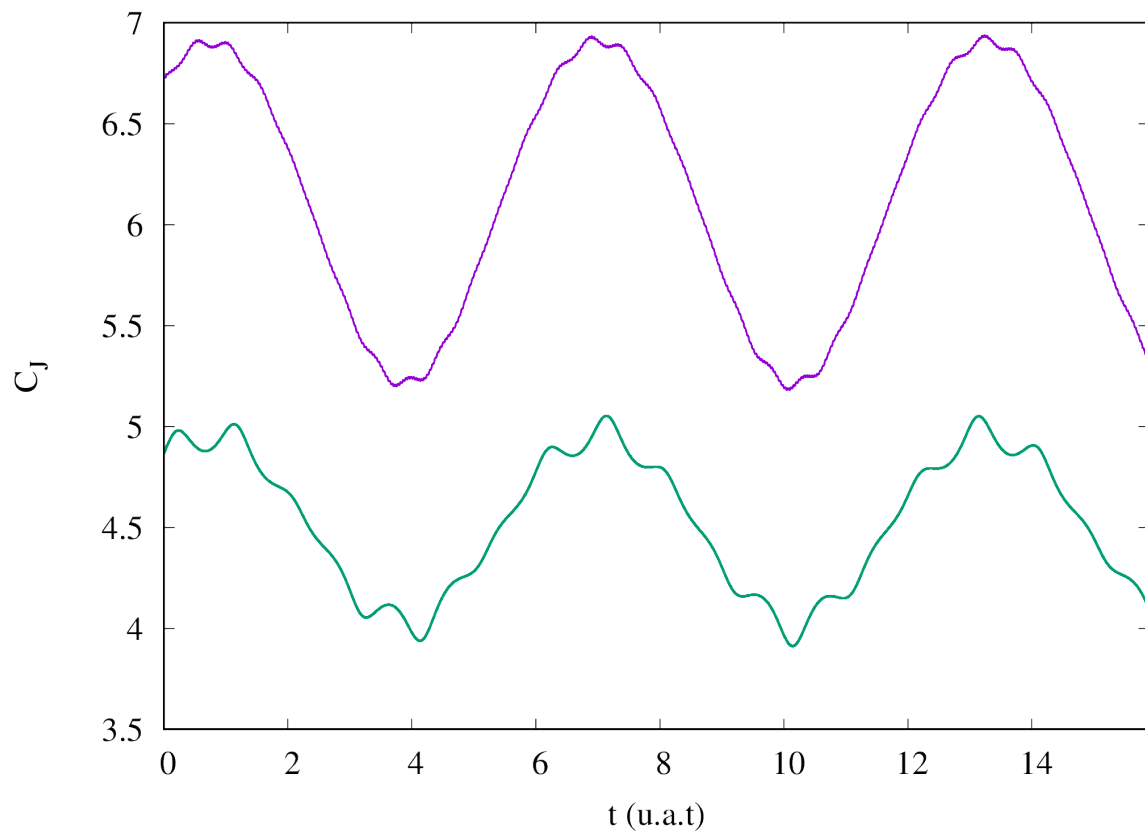


FIGURA 4.9 – Variação da constante de Jacobi da Terra e de Marte no sistema Sol-Júpiter ao longo de 30 anos terrestres em unidade adimensional de tempo (u.a.t.). A curva em roxo, representa o valor de  $C_J$  da Terra e em verde, o valor de  $C_J$  de Marte.

Para o valor de  $C_J = 3.03$ , em que os gargalos em torno de  $L_1$  e  $L_2$  encontram-se abertos, possibilitando o transporte interno e externo ao sistema Sol-Júpiter, inserimos os dados das trajetórias da Terra e de Marte na seção de Poincaré, apesar da dinâmica destes corpos estar em outra camada de energia (e respectivamente corresponderem a outro valor médio de  $C_J$ ), para analisarmos a dinâmica na região de seu movimento.



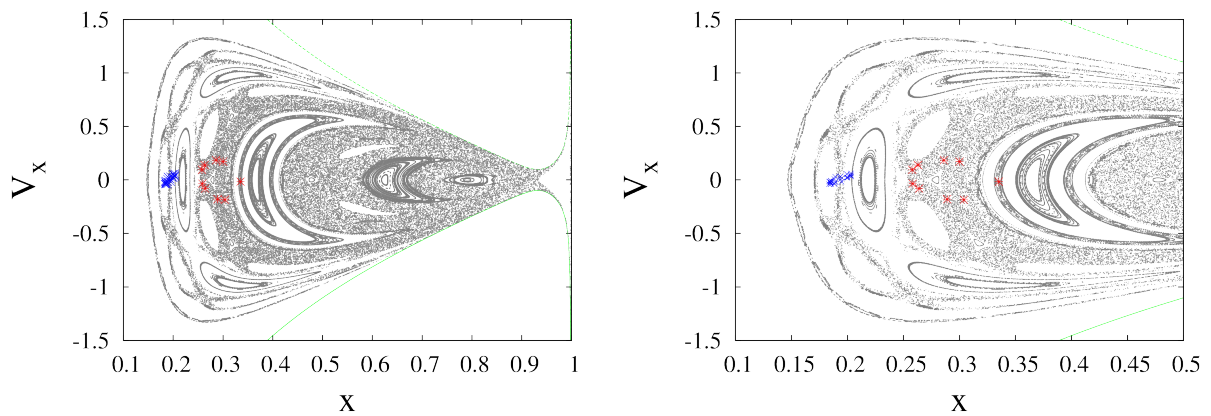


FIGURA 4.10 – Seção de Poincaré do sistema Sol-Júpiter para  $C_J = 3.03$  com a posição da Terra (em azul) e de Marte (em vermelho) em 20 anos e zoom na região aproximada de movimento da Terra e de Marte, onde as curvas em verde claro, representam as curvas de velocidade zero.

Essa seção de Poincaré é importante quando deseja-se analisar a possibilidade de transporte no sistema Sol-Júpiter, levando em consideração a velocidade com que  $m_3$  deve chegar em seu destino. No entanto, para uma primeira análise de possibilidade de se efetuar uma transferência natural nesse sistema, convém avaliarmos a dinâmica no espaço de posições.

Dessa forma, construímos uma seção de Poincaré para o sistema Sol-Júpiter no PR3CCP, no plano  $x - y$ , na qual,  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} > 0$ , para um valor de  $C_J$  fixo.

Para um valor de  $C_J$  maior que o valor de abertura de  $L_1$ , por exemplo, para  $C_J = 3.06$ , obtemos a Figura 4.11.

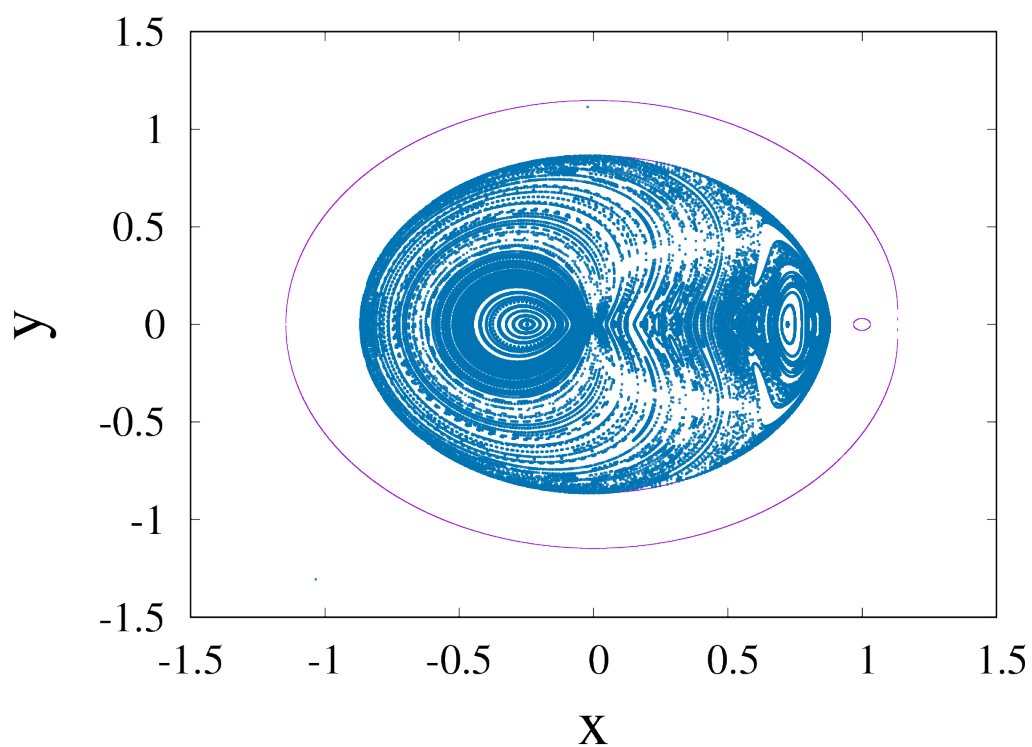


FIGURA 4.11 – Seção de Poincaré do sistema Sol-Júpiter para  $C_J = 3.06$ , onde as curvas em roxo, representam as curvas de velocidade zero.

Para o valor de  $C_J = 3.03$ , temos a abertura de  $L_1$  e  $L_2$ , conforme a Figura 4.12.

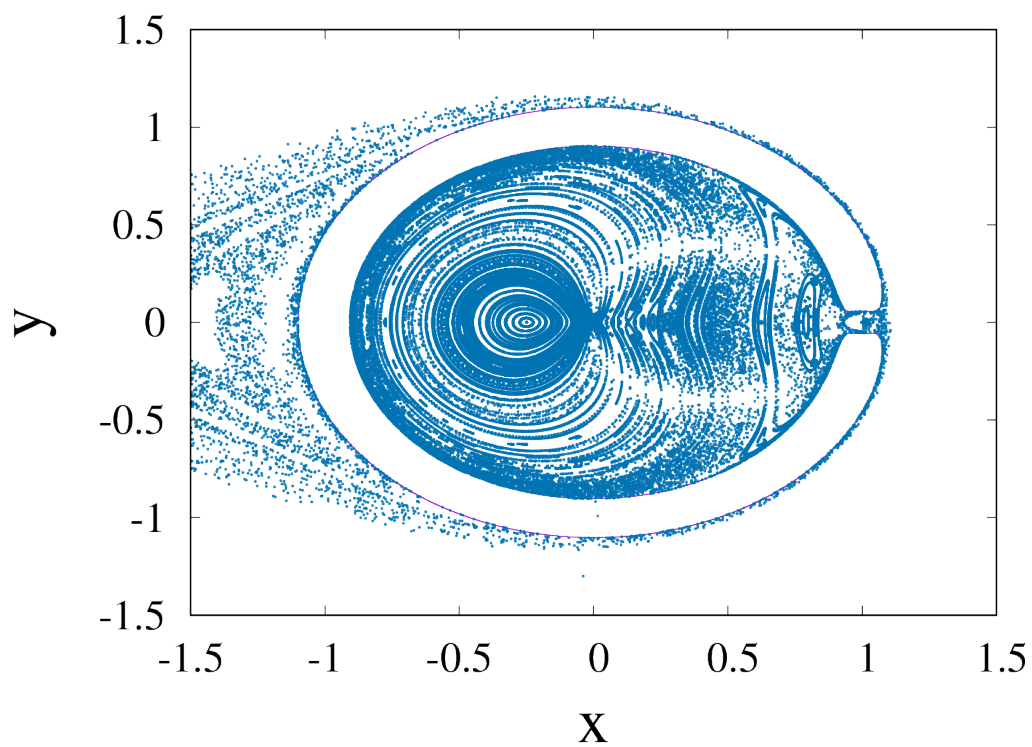


FIGURA 4.12 – Seção de Poincaré do sistema Sol-Júpiter para  $C_J = 3.03$ , onde as curvas em roxo, representam as curvas de velocidade zero.

E para um valor de  $C_J$  menor que o valor de abertura de  $L_5$ , por exemplo, para  $C_J = 2.95$ , obtemos a Figura 4.13, em que todos os canais de transporte estão abertos.

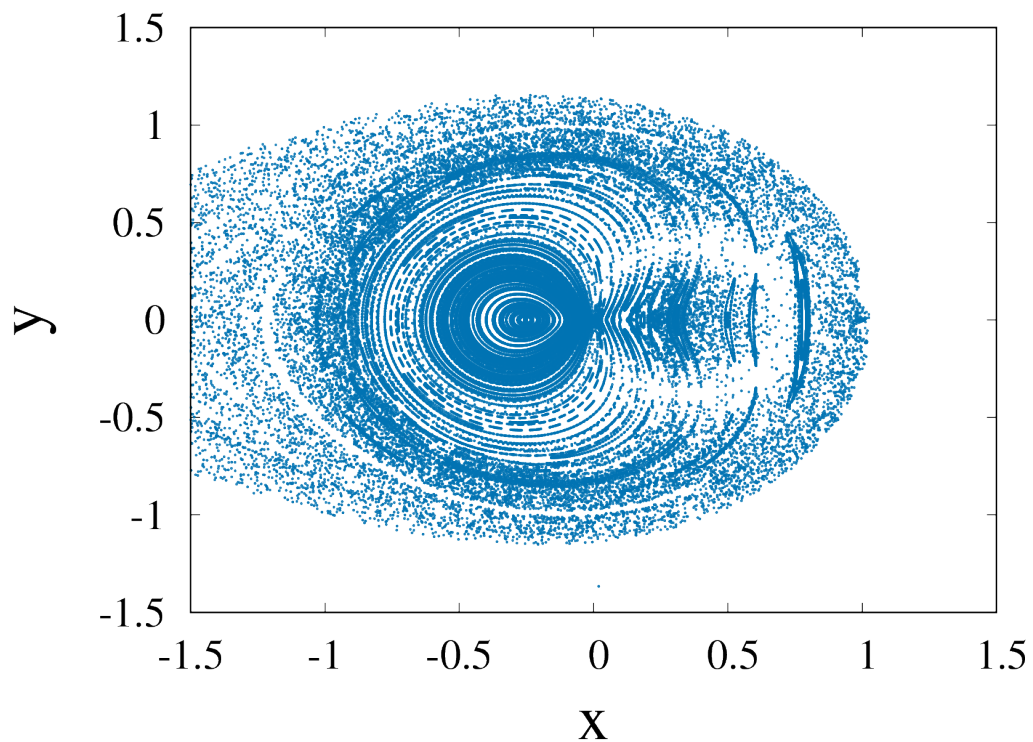


FIGURA 4.13 – Seção de Poincaré do sistema Sol-Júpiter para  $C_J = 2.95$ .

Analisamos a variação da distância Sol-Terra e Sol-Marte no sistema do PR3C e observamos que estas oscilam em torno de valores médios, conforme a Figura 4.14.

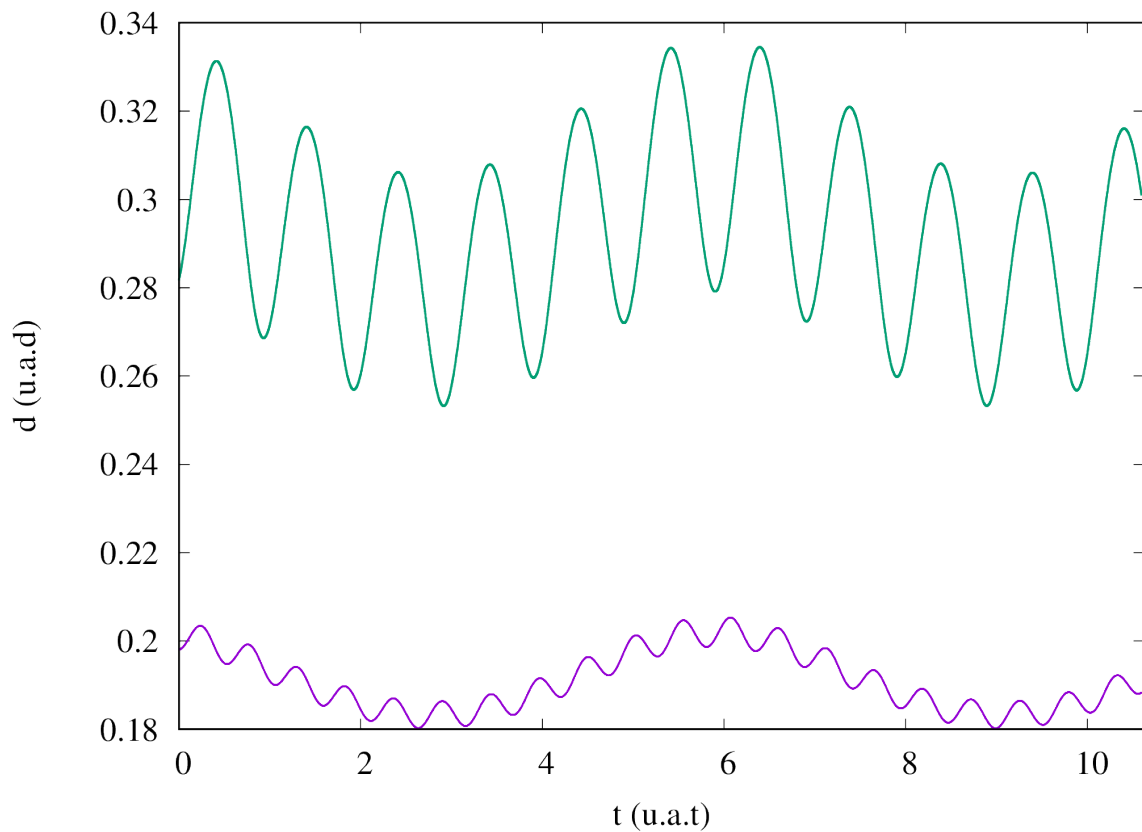


FIGURA 4.14 – Oscilação da distância Sol-Marte (em verde) e Sol-Terra (em roxo) no PR3C, em unidades adimensionais de distância (u.a.d.) e tempo (u.a.t.).

Na seção de Poincaré do sistema Sol-Júpiter é possível estimar a região aproximada do movimento da Terra e de Marte (Figura 4.15) e inclusive, inserir nessa seção de Poincaré as órbitas de ambos os planetas, semelhante ao que foi feito na Figura 4.10, o que permite analisar a dinâmica desse sistema para determinados valores fixos de  $C_J$ . Isso nos dá informações sobre como a dinâmica nesse sistema varia, conforme variamos  $C_J$ , mas não é suficiente para formular uma solução possível de transporte natural.

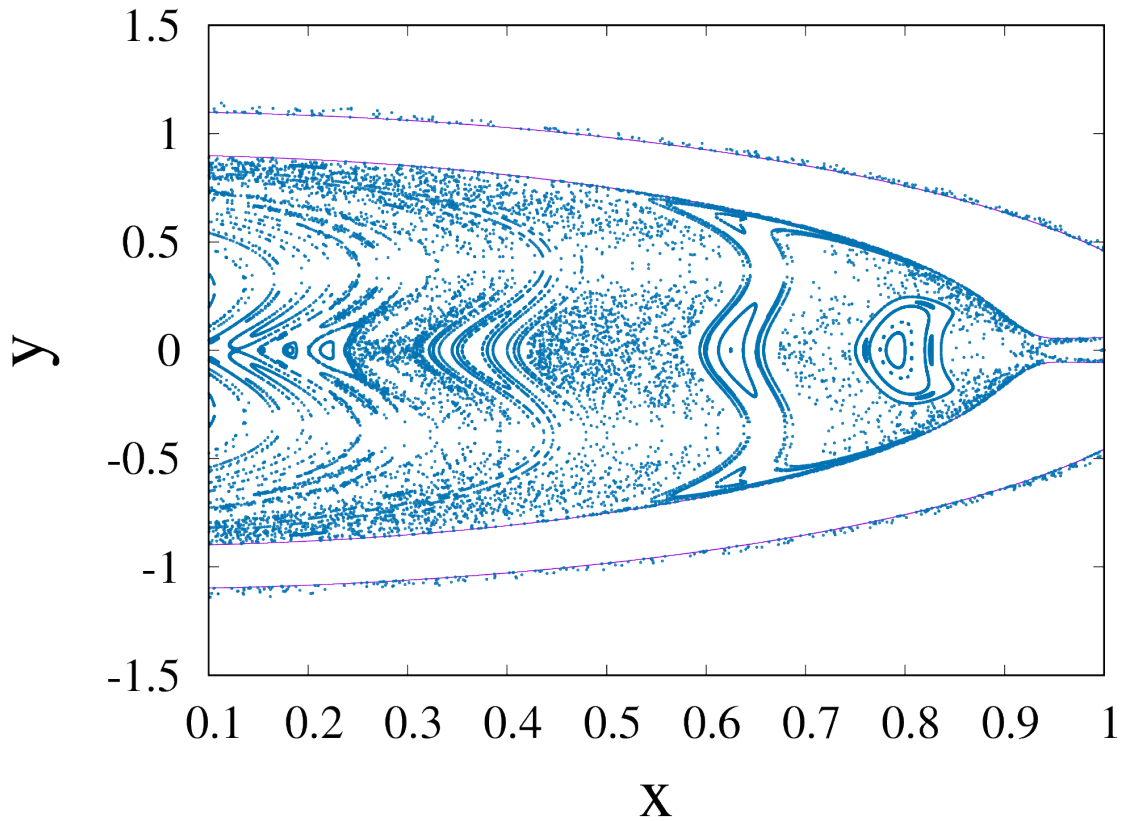


FIGURA 4.15 – Zoom na seção de Poincaré do sistema Sol-Júpiter para  $C_J = 3.03$  em torno da região que compreende o movimento da Terra e de Marte, onde as curvas em roxo, representam as curvas de velocidade zero.

## 4.2 Possibilidade de Transferência Terra-Marte

Para analisar a possibilidade de uma transferência Terra-Marte construímos bacias de escape de condições iniciais para determinados valores fixos de  $C_J$ , no sistema Sol-Júpiter. Sabemos que as órbitas da Terra e de Marte no sistema inercial heliocêntrico são órbitas que descrevem elipses, com máxima distância ao Sol em seu afélio (respectivamente,  $R_{max}^E$  e  $R_{max}^M$ ) e com mínima distância ao Sol em seu periélio (respectivamente,  $R_{min}^E$  e  $R_{min}^M$ ), sendo  $R_{min}$  e  $R_{mas}$  os raios médios do periélio e afélio dessas órbitas ao longo de sua evolução. Consideramos assim os intervalos definidos respectivamente pelas distâncias do afélio e do periélio das trajetórias da Terra e de Marte, i.e.,  $\mathcal{I}_E = [R_{min}^E, R_{max}^E]$  e  $\mathcal{I}_M = [R_{min}^M, R_{max}^M]$

Então, o processo de construção dessas bacias consiste em evoluir uma grade de condições iniciais definidas no plano de Poincaré  $x - y$ , com  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} > 0$  por um tempo máximo  $t_f = 300$  (u.a.t), e ao longo da evolução temporal, calcular as distâncias ao Sol no referencial inercial, de modo a detectar se em algum instante esses valores estão contidos nos intervalos  $\mathcal{I}_E$  e  $\mathcal{I}_M$ . Isso definirá as três principais bacias desta análise: a região R2



representa o conjunto de condições iniciais que apenas intercepta a órbita da Terra, a região R3, o conjunto de condições iniciais que apenas intercepta a órbita de Marte, a região R4 representa o conjunto de condições iniciais que intercepta ambas as órbitas da Terra e de Marte e a região R1, o conjunto de condições iniciais que não intercepta nenhuma órbita. Além disso é verificado se estas trajetórias interceptam com os raios médios do Sol e de Júpiter, definindo um conjunto colisional  $C$ . Se a variação da constante de Jacobi excede uma tolerância, i.e., se  $|C_J - C_{J_0}| > 10^{-10}$ , definimos um conjunto de falha  $F$ . Dessa forma, construímos uma bacia de escape de condições iniciais para valores fixos de constante de Jacobi.

Para o valor de  $C_J = 3.06$ , maior que o valor de abertura de  $L_1$ , obtemos a Figura 4.16.

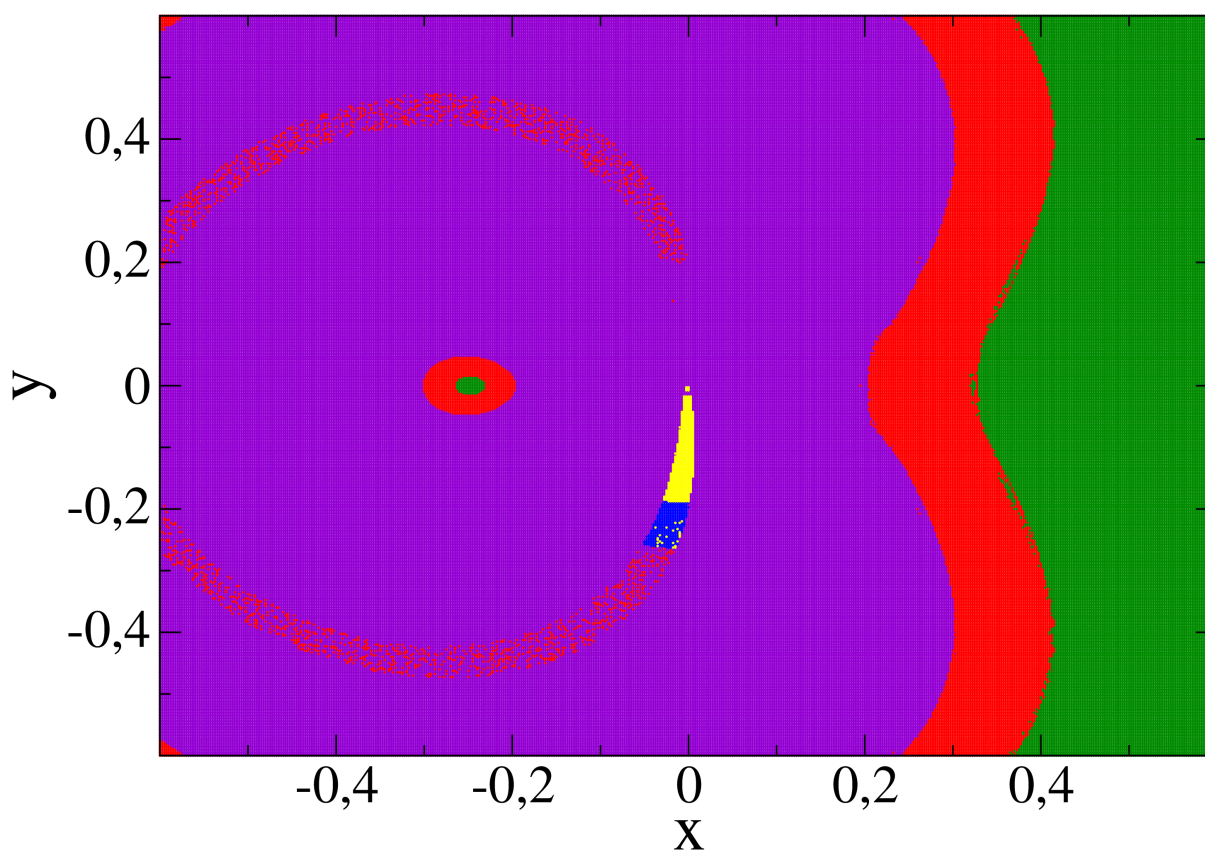


FIGURA 4.16 – Bacia de escape para  $C_J = 3.06$ . Região R1 (verde), região R2 (azul), região R3 (vermelho), região R4 (roxo), conjunto colisional  $C$  (amarelo).

Para o valor de  $C_J = 3.03$ , quando  $L_1$  e  $L_2$  estão abertos, obtemos a Figura 4.17. Podemos notar que a região do conjunto colisional  $C$  aumenta, conforme esperado, afinal, agora é possível realizar um transporte entre Sol e Júpiter, acrescentando a possibilidade de colidir com eles. O conjunto R3 também sofre um acréscimo.



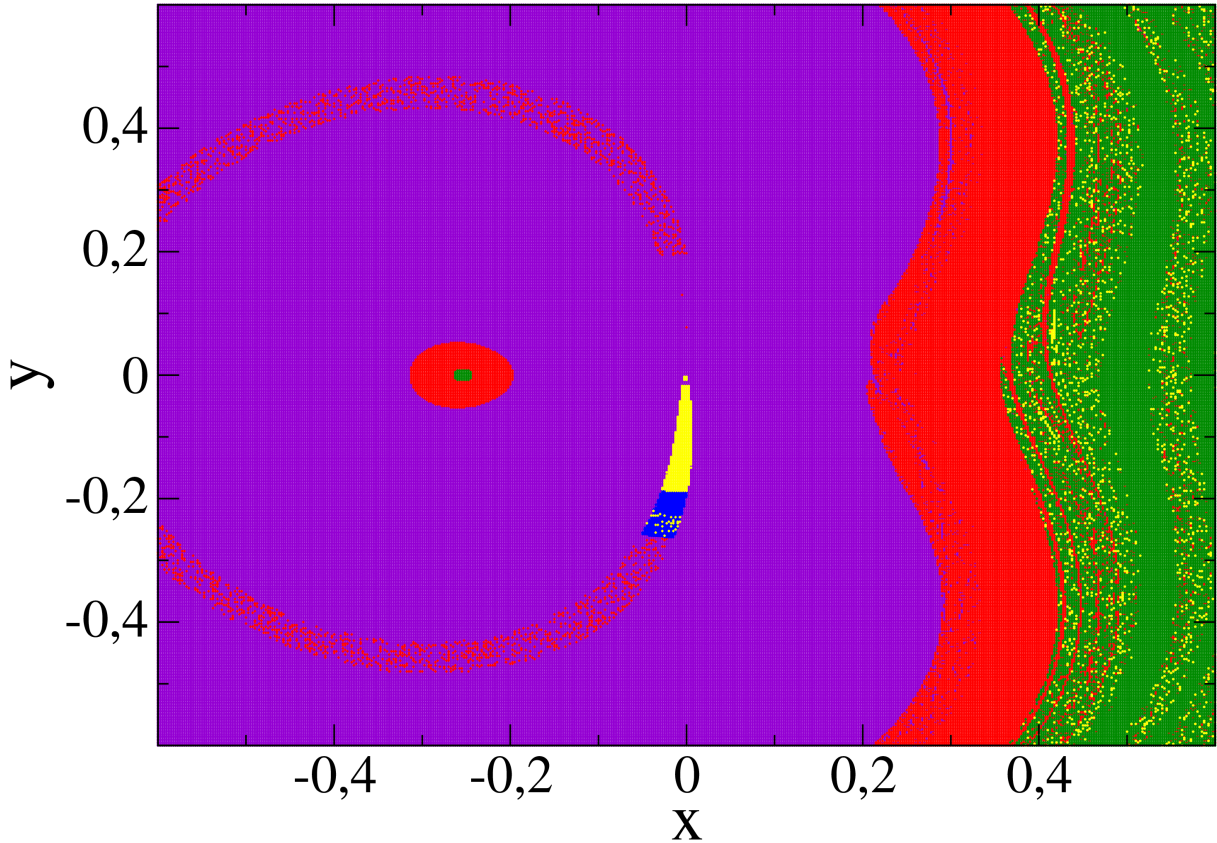


FIGURA 4.18 – Bacia de escape para  $C_J = 2.95$ . Região R1 (verde), região R2 (azul), região R3 (vermelho), região R4 (roxo), conjunto colisional  $C$  (amarelo).

Portanto, a partir dessas bacias de escape, podemos notar a existência de muitas trajetórias que interceptam ambas as trajetórias da Terra e de Marte. Aliás, para estes valores de  $C_J$ , a maior parte das condições que interceptam a órbita da Terra, também interceptam a órbita de Marte, o que indica a grande possibilidade de se efetuar uma transferência Terra-Marte.

No entanto, para que seja possível explorar o transporte natural Terra-Marte em projetos de missões espaciais, é necessário analisar o tempo de voo e a velocidade de  $m_3$  nas proximidades dos planetas, afinal, se a velocidade de  $m_3$  for um valor consideravelmente alto, pode ser necessário um maior gasto de combustível para corrigir a órbita de  $m_3$  de forma que possa ser capturada pelo corpo de destino e caso o tempo de duração do transporte seja muito elevado, pode ser inviável realizar uma determinada missão. Em particular, sabe-se que manobras orbitais impulsivas realizadas em estados para os quais  $\dot{r} = 0$ , tem o menor consumo de combustível.

Dados esses fatos, quando uma determinada trajetória dista do Sol de um valor contido em  $\mathcal{I}_E$  ou  $\mathcal{I}_M$ , buscamos detectar o instante de tempo que corresponde ao menor valor de  $\dot{r}$ . Para as trajetórias do conjunto R4, temos os instantes de tempo  $t_E$  e  $t_M$  que correspondem ao estado de aproximação das órbitas da Terra e de Marte com menor valor possível de



velocidade radial, ou seja, os estados mais próximos de um apside.

Assim sendo, para  $C_J = 3.03$  e trajetórias da região R4, apresentamos na Figura 4.19, o tempo de voo de cada condição inicial ao estado com menor valor absoluto de  $\dot{r}$  no intervalo  $\mathcal{I}_E$  versus o tempo de voo da mesma condição inicial ao estado com menor valor absoluto de  $\dot{r}$  no intervalo  $\mathcal{I}_M$ . A Figura 4.20 mostra que existe uma grande quantidade de trajetórias que interceptam a órbita da Terra e de Marte em um tempo aceitável para a realização de missões espaciais.

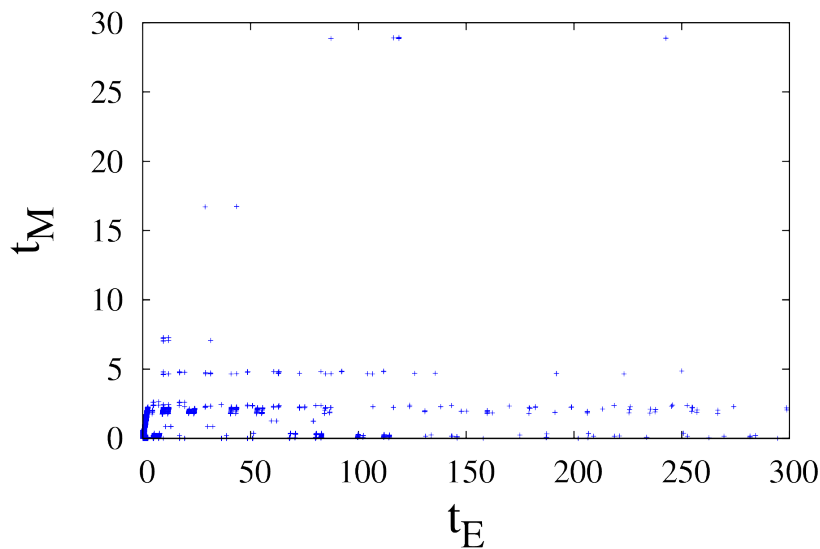


FIGURA 4.19 – Tempo de voo para interceptar a trajetória da Terra (i.e., distância ao Sol no intervalo  $\mathcal{I}_E$ ) com menor valor absoluto de  $\dot{r}$  versus tempo de voo para interceptar a trajetória de Marte (i.e., distância ao Sol no intervalo  $\mathcal{I}_M$ ) com menor valor absoluto de  $\dot{r}$ , para as soluções da região R4 e  $C = 3.03$ .

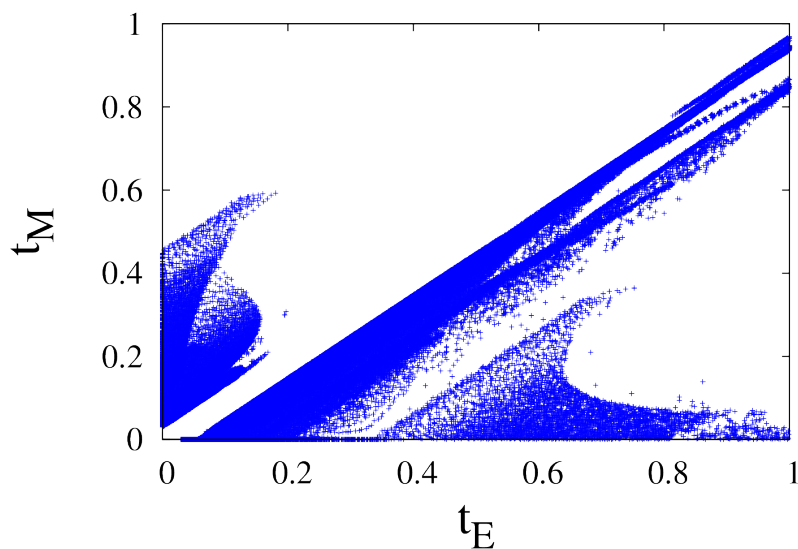


FIGURA 4.20 – Ampliação da Figura anterior para menores valores de tempo de voo.

A fim de selecionar soluções da região R4 que correspondam a um menor gasto de combustível para obter órbitas circulares em torno de Marte e Terra, inspecionamos os estados de cada trajetória que correspondem aos menores valores absolutos de velocidade radial ao passar pelas proximidades das órbitas da Terra e de Marte. Verificamos assim, a existência de soluções com velocidade radial muito próxima a zero, tanto na passagem por Marte, quanto pela Terra. Estas soluções devem corresponder às transferências entre estes dois planetas com menor custo para obtenção de trajetórias capturadas.

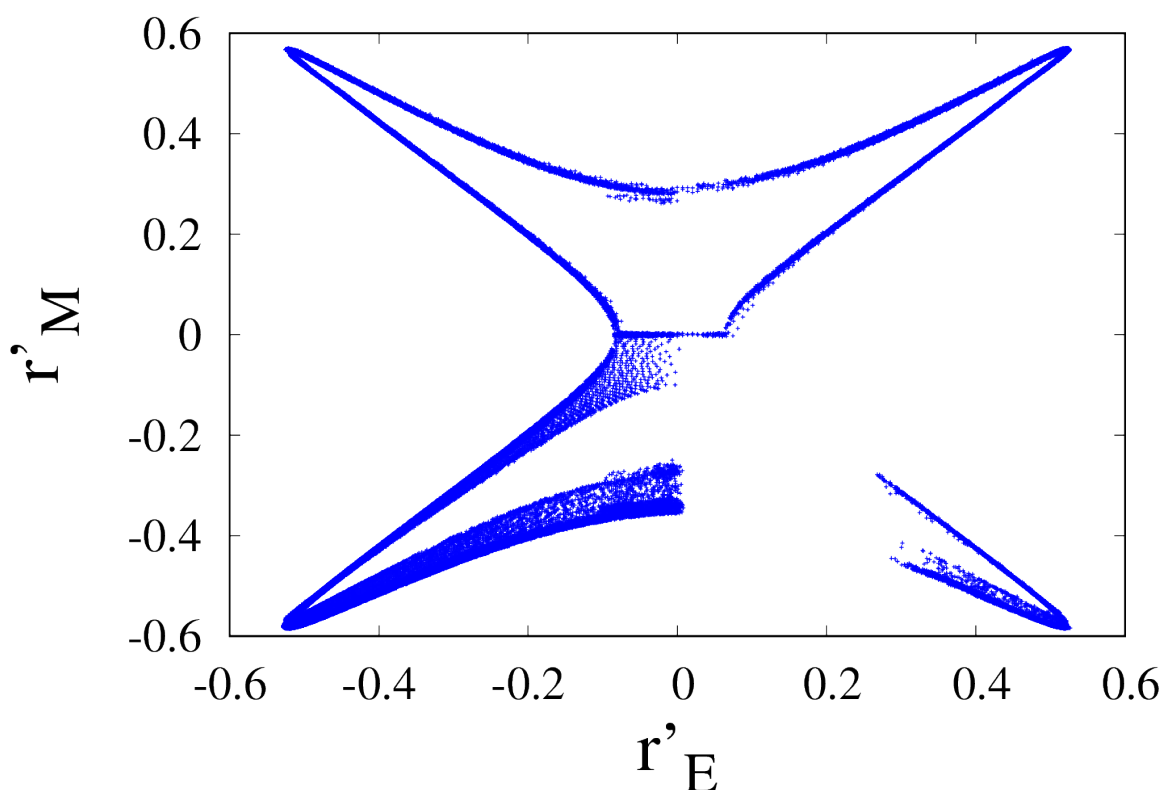


FIGURA 4.21 – Menores valores de velocidades radiais nas proximidades da Terra (abscissa) e de Marte (ordenada), respectivamente, para  $C_J = 3.03$ .

Devemos agora verificar a existência de trajetórias que satisfazem ambas condições, isto é, apresentam tanto baixo tempo de voo ao planeta e baixo valor de velocidade radial em suas proximidades. As Figuras 4.22 e 4.23 mostram que, de fato, a maior parte das soluções apresentam baixos tempos de voos, inclusive as soluções de baixo custo, ilustrando a existência de potenciais trajetórias de transferências entre estes dois planetas, dado o modelo matemático considerado.

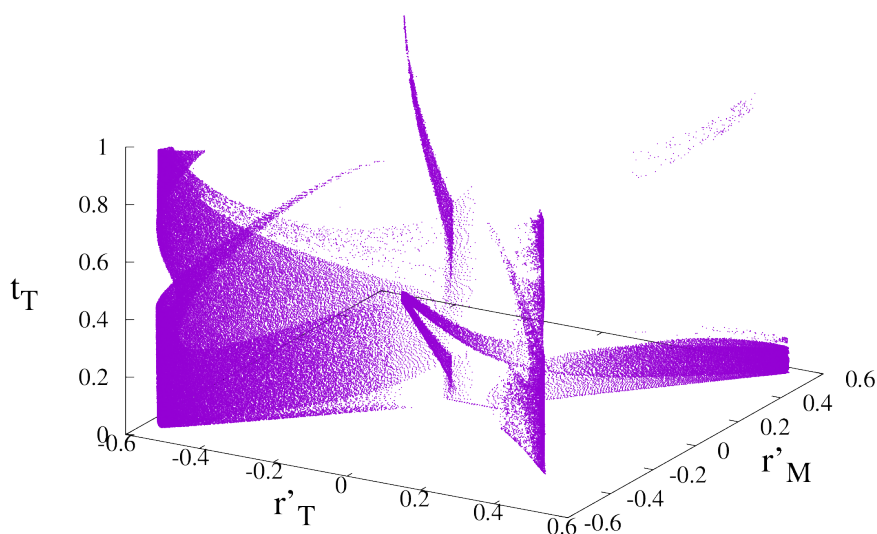


FIGURA 4.22 – Tempo de voo à Terra em função dos menores valores de velocidade radial nas proximidades da órbita da Terra e de Marte, respectivamente, para todas as trajetórias da região R4 para  $C_J = 3.03$ .

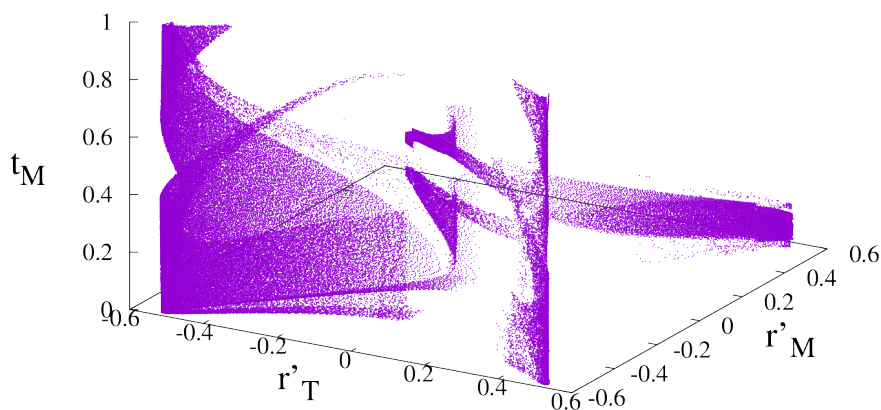


FIGURA 4.23 – Tempo de voo à Marte em função dos menores valores de velocidade radial nas proximidades da órbita da Terra e de Marte, respectivamente, para todas as trajetórias da região R4 para  $C_J = 3.03$ .

A fim de exemplificar uma aplicação do método, selecionamos uma das condições iniciais da região R4, cuja trajetória intercepta os intervalos  $\mathcal{I}_E$  e  $\mathcal{I}_M$  com um dos menores

valores absolutos de velocidade radial nas proximidades da Terra e de Marte ( $|\dot{r}_E| < 0.01$  e  $|\dot{r}_M| < 0.01$ ), para  $C_J = 3.03$  e evoluímos sua trajetória no tempo. Na Figura 4.24, podemos observar então, uma trajetória de transporte natural Terra-Marte com a variação da velocidade radial e na Figura 4.25, sua progressão no tempo.

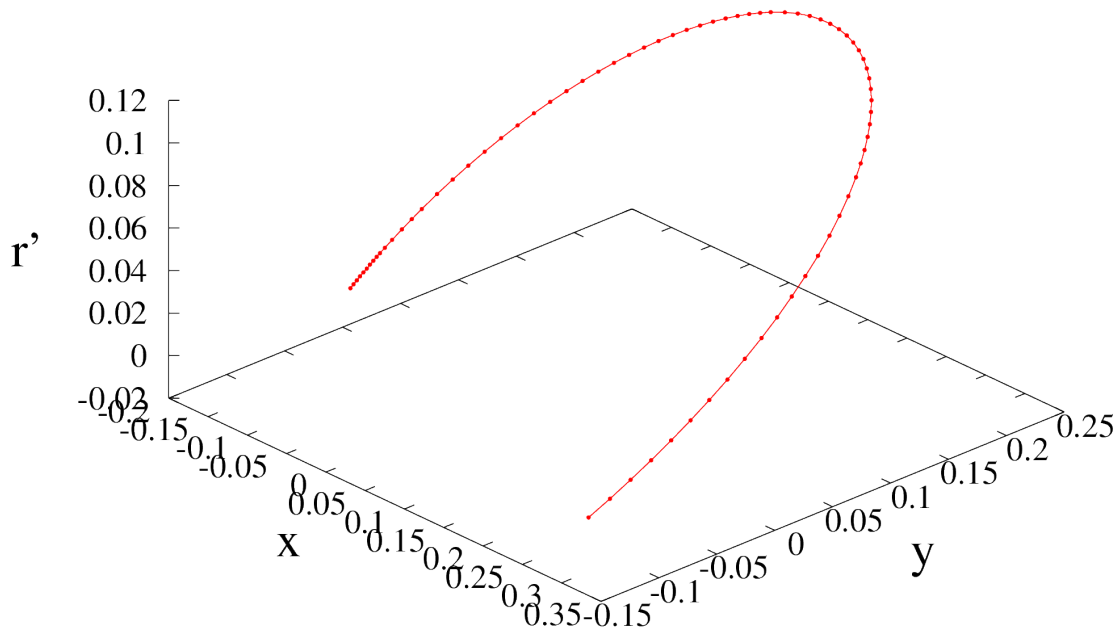


FIGURA 4.24 – Trajetória de transferência Terra-Marte que corresponde a uma das condições iniciais da região R4 que intercepta  $\mathcal{I}_E$  e  $\mathcal{I}_M$  com um dos menores valores absolutos de velocidade radial ( $r'$ ) nas proximidades da Terra e de Marte, para  $C_J = 3.03$ .

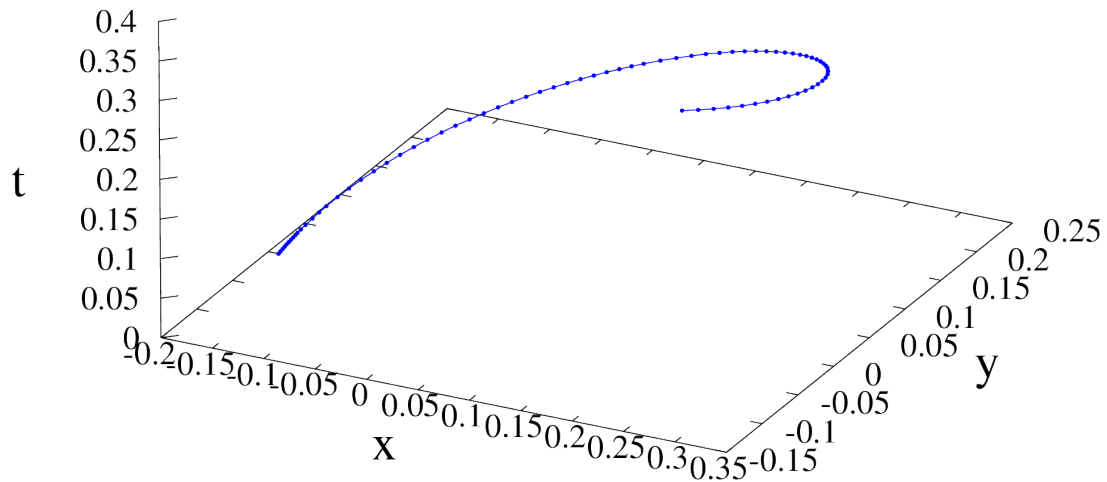


FIGURA 4.25 – Tempo de voo ( $t$ ) da trajetória de transferência Terra-Marte correspondente a uma das condições iniciais da região R4 que intercepta  $\mathcal{I}_E$  e  $\mathcal{I}_M$  com um dos menores valores absolutos de velocidade radial ( $r'$ ) nas proximidades da Terra e de Marte, para  $C_J = 3.03$ .

Na Figura 4.26 podemos observar a variação da velocidade radial dessa trajetória no tempo e notamos que nas extremidades da trajetória,  $\dot{r}$  é muito próximo de zero e o tempo de voo para essa trajetória varia até aproximadamente 0.392111 (u.a.t), que convertendo para o sistema de unidades inerciais, fornece um tempo de voo de aproximadamente 0.740029 anos terrestres. Outras condições iniciais podem fornecer valores ainda menores de tempo de voo e velocidade radial. Utilizando outros valores de  $C_J$  também há essa possibilidade.

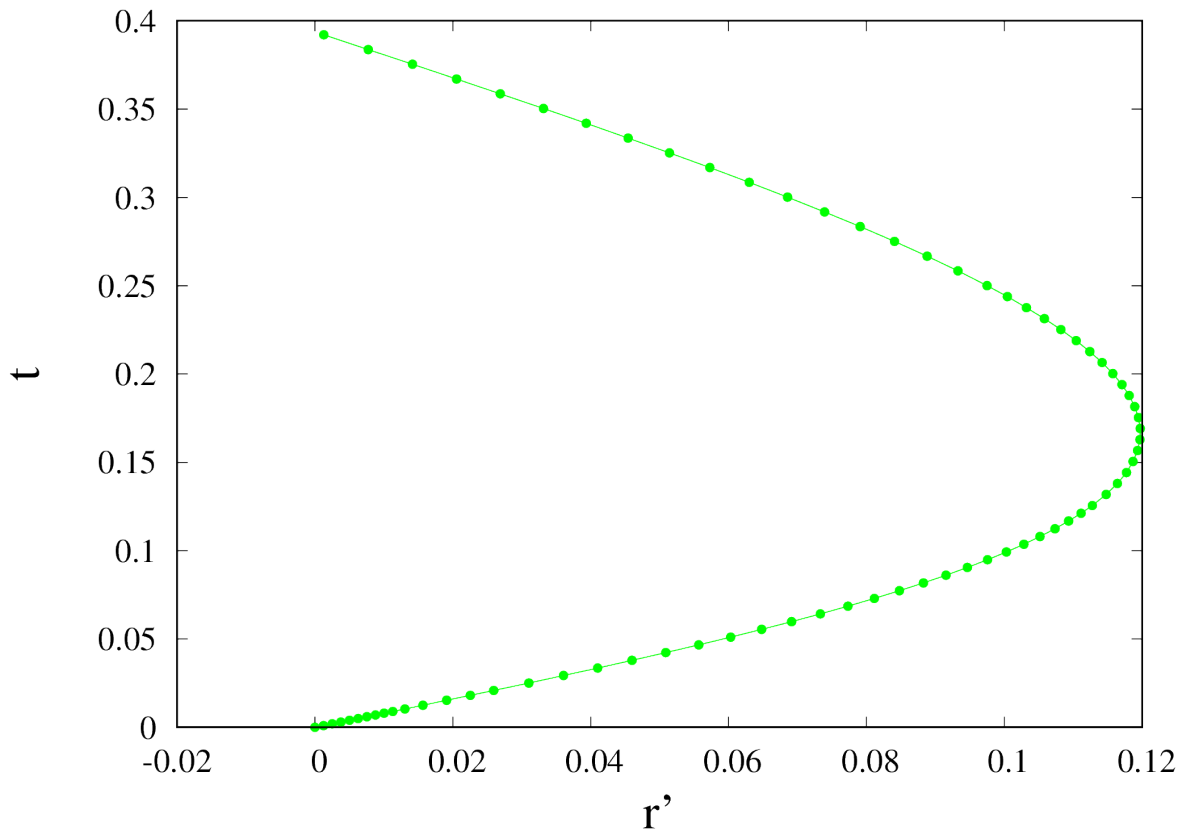


FIGURA 4.26 – Variação da velocidade radial ( $r'$ ) versus tempo de voo ( $t$ ), para a trajetória de transferência Terra-Marte correspondente a uma condição inicial coletada na região R4, que intercepta  $\mathcal{I}_E$  e  $\mathcal{I}_M$  com um dos menores valores absolutos de velocidade radial ( $r'$ ) nas proximidades da Terra e de Marte, para  $C_J = 3.03$ .

Sabe-se que boa parte das sondas que já foram enviadas a Marte chegaram em suas proximidades em um período de 6 meses a um ano, aproximadamente. No entanto, é necessário considerar o custo da missão com gastos de combustível para se realizar manobras orbitais que permitam esse transporte.

Para se realizar uma transferência de Hohmann do tipo bi-circular, por exemplo, é necessário inserir dois acréscimos de velocidade em pontos específicos da trajetória para que haja transferência entre uma órbita circular de raio menor e uma órbita circular de raio maior, ou no caso inverso, é necessário dois decréscimos de velocidade, para que haja transferência entre uma órbita circular de raio maior, para uma órbita circular de raio menor. Entretanto, o modelo para se trabalhar com esse tipo de transferência é o modelo de dois corpos, que no caso Terra-Marte, seria equivalente a desconsiderar os efeitos gravitacionais de Júpiter e do Sol, principalmente, exigindo outras aplicações de impulso para correções orbitais.

Aplicando uma transferência de Hohmann bi-circular entre Terra e Marte, é necessário, um incremento total de velocidade da ordem de  $\Delta v = 5.5938$  km/s e o tempo total gasto para se realizar esse transporte é  $t_t = 0.7092$  anos aproximadamente. Com a finalidade

de compararmos os resultados obtidos nesse trabalho com os resultados que se obtém por uma transferência de Hohmann, realizamos os mesmos cálculos de  $\Delta v$  e  $t_t$  para as condições iniciais da região R4 referentes à alguns valores de  $C_J$ .

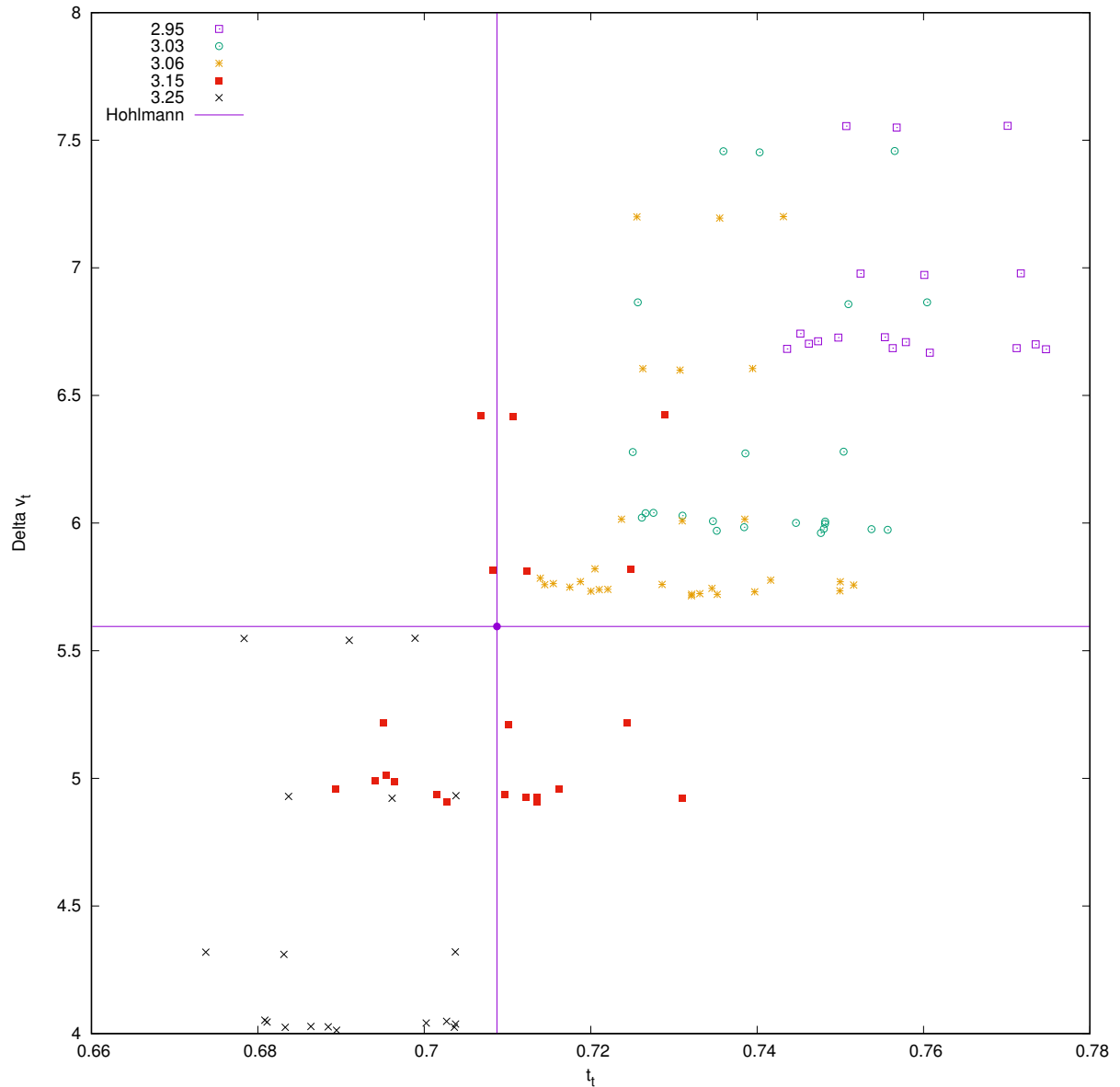


FIGURA 4.27 –  $\Delta v_t$  é a soma dos incrementos de velocidade necessários para se efetuar se efetuar uma transferência de Hohmann (em km/s) e  $t_t$  é o tempo total gasto na transferência (em anos). Cálculo realizado para as condições de R4 para alguns valores de  $C_J$ .

Conforme os resultados obtidos na Figura 4.27, podemos observar que existem condições iniciais do conjunto R4 que apresentam menores valores de  $\Delta v$  e  $t_t$ , para os valores de  $C_J$  avaliados. Isso indica que existe a possibilidade de realizar um transporte natural Terra-Marte em um menor tempo de voo e com um menor gasto de combustível que em uma transferência de Hohmann. Realizando essa análise para outros valores de  $C_J$ ,

poderia-se obter uma maior quantidade de resultados com valores de  $\Delta v$  e  $t_i$  menores.

### 4.3 Resultados Preliminares para Transferências Terra-Vênus

A fim de ilustrar que este método se aplica para outros corpos do Sistema Solar, realizamos o mesmo procedimento para uma transferência natural Terra-Vênus.

Considerando o mesmo valor de  $C_J = 3.03$ , construímos a bacia de escape de condições iniciais no plano  $x - y$  com  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} > 0$  por um tempo máximo  $t_f = 300$  (u.a.t). Neste caso, temos os intervalos definidos por  $\mathcal{I}_E = [R_{min}^E, R_{max}^E]$  e  $\mathcal{I}_V = [R_{min}^V, R_{max}^V]$ , que correspondem às distâncias do afélio e do periélio das trajetórias da Terra e de Vênus, respectivamente. Então, evoluímos uma grade de condições iniciais e calculamos as distâncias ao Sol no sistema inercial ao longo da evolução, de forma a detectar se em algum instante esses valores estão contidos nos intervalos  $\mathcal{I}_E$  e  $\mathcal{I}_V$ .

A Figura 4.28 apresenta os resultados obtidos para essa bacia de escape, onde a região R2 representa o conjunto de condições iniciais que apenas intercepta a órbita da Terra, a região R3, o conjunto de condições iniciais que apenas intercepta a órbita de Vênus, a região R4 representa o conjunto de condições iniciais que intercepta ambas as órbitas da Terra e de Vênus e a região R1, o conjunto de condições iniciais que não intercepta nenhuma órbita. E definimos um conjunto colisional  $C$  que verifica se estas trajetórias interceptam com os raios médios do Sol ou de Júpiter. Se a variação da constante de Jacobi excede uma tolerância, i.e., se  $|C_J - C_{J_0}| > 10^{-10}$ , definimos um conjunto de falha  $F$ .



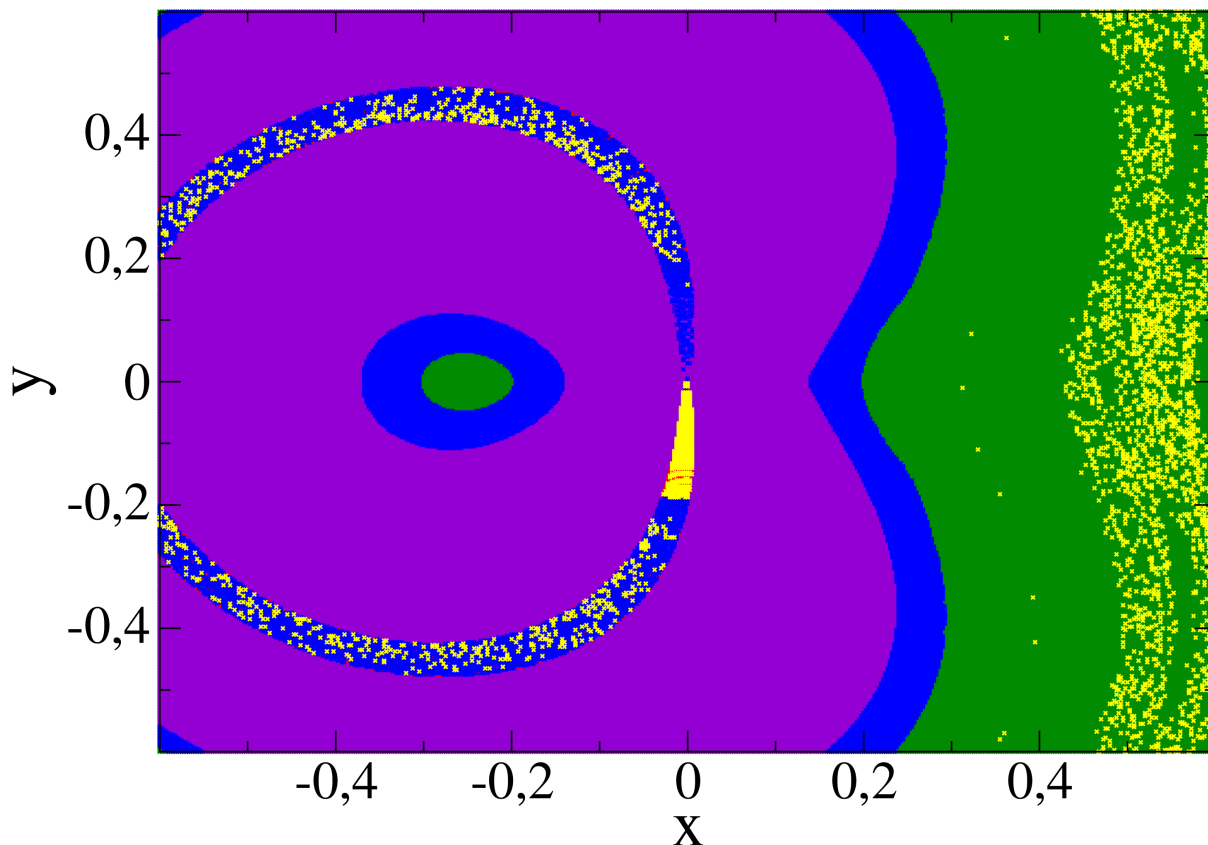


FIGURA 4.28 – Bacia de escape para  $C_J = 3.03$ . Região R1 (verde), região R2 (azul), região R3 (vermelho), região R4 (roxo), conjunto colisional  $C$  (amarelo).

Realizamos uma análise das condições iniciais da região R4, verificando os estados de cada trajetória que correspondem aos menores valores absolutos de velocidade radial ao passar pelas proximidades da Terra e de Vênus. A partir da Figura 4.29, podemos verificar que para esse valor de  $C_J$  não há soluções com velocidade radial muito próximas a zero, embora os menores valores obtidos para a velocidade radial nas proximidades da Terra, correspondam aos menores valores de velocidade radial nas proximidades de Vênus.

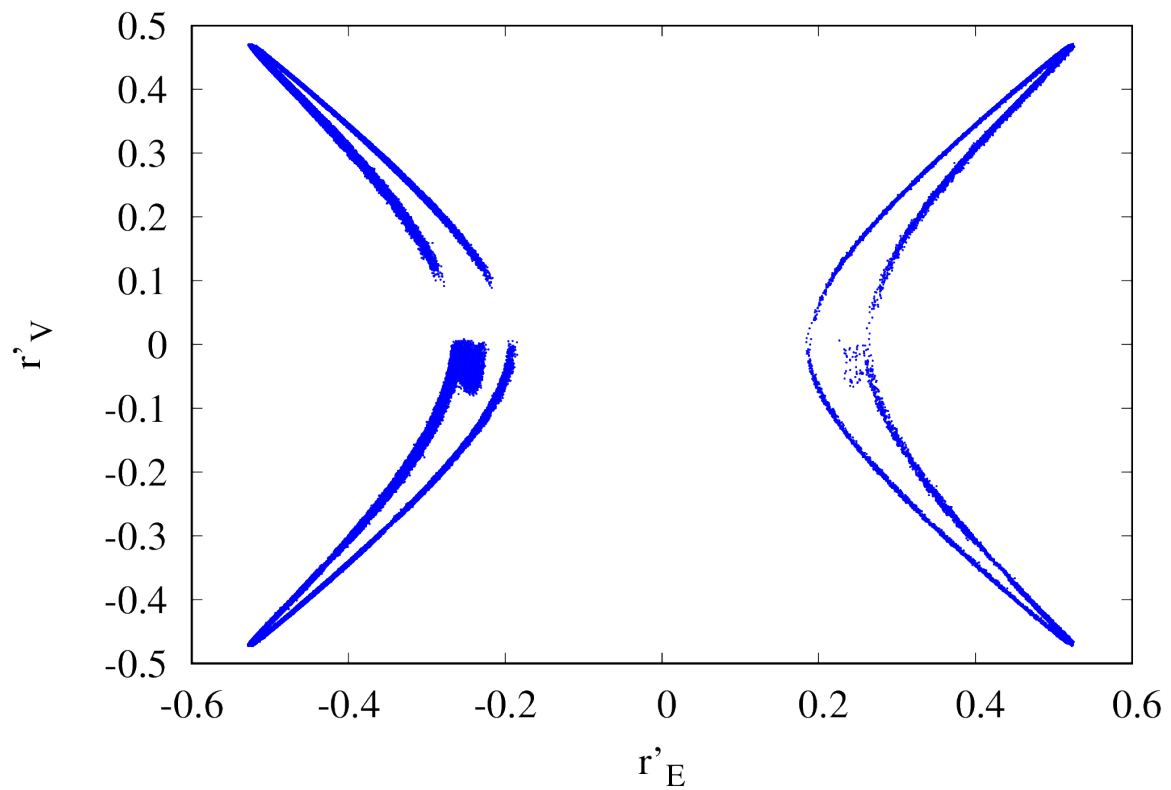


FIGURA 4.29 – Menores valores de velocidades radiais nas proximidades da Terra (abscissa) e de Vênus (ordenada), respectivamente, para  $C_J = 3.03$ .

Verificamos também o tempo de voo para interceptar a trajetória da Terra ( $t_E$ ) e de Vênus ( $t_V$ ), nas Figuras 4.30 e 4.31, respectivamente. E analisando sua variação, em função das velocidades radiais  $\dot{r}_T$  e  $\dot{r}_M$ , podemos concluir que existe uma grande quantidade de condições iniciais que fornecem um baixo tempo de voo para as soluções de menores valores de  $\dot{r}$ .

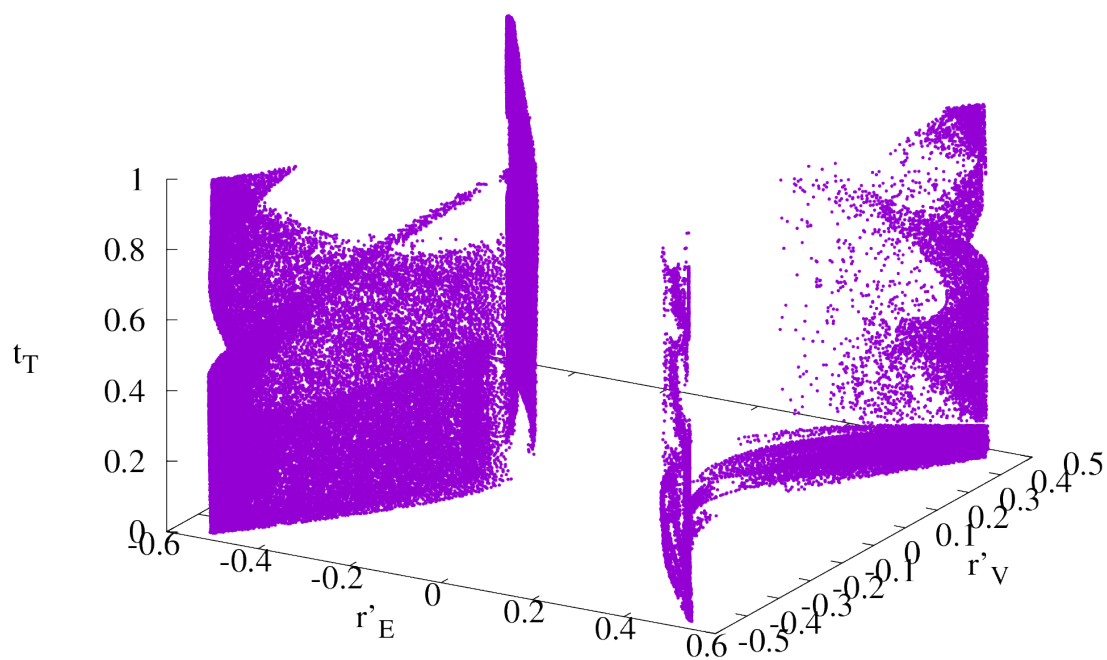


FIGURA 4.30 – Tempo de voo à Terra em função dos menores valores de velocidade radial nas proximidades da órbita da Terra e de Vênus, respectivamente, para todas as trajetórias da região R4 para  $C_J = 3.03$ .

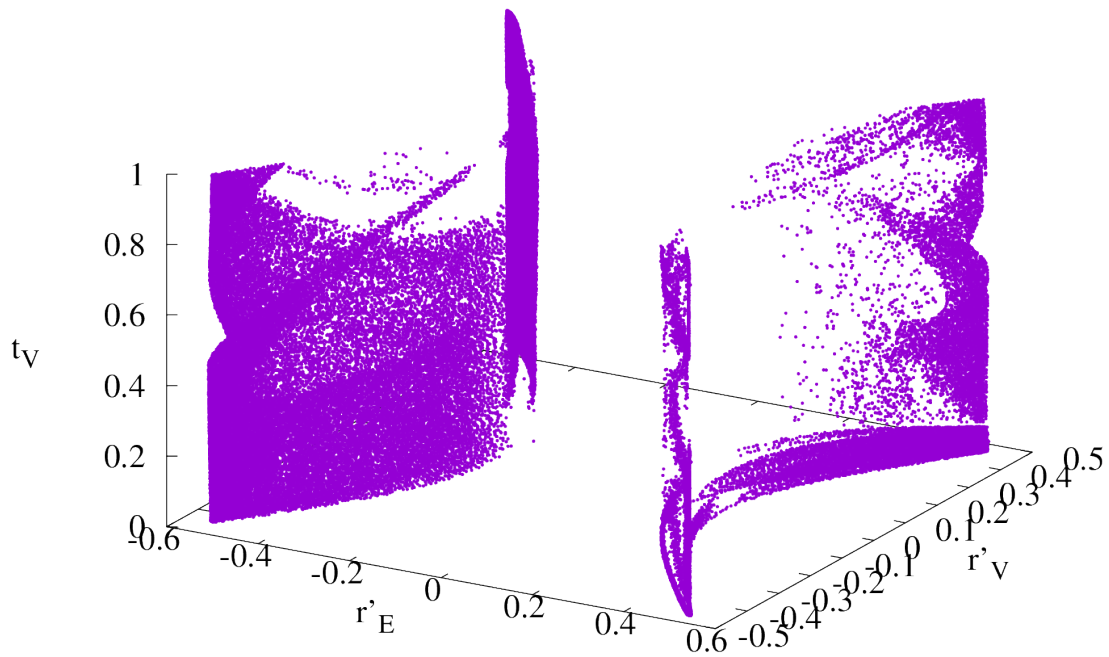


FIGURA 4.31 – Tempo de voo à Vênus em função dos menores valores de velocidade radial nas proximidades da órbita da Terra e de Vênus, respectivamente, para todas as trajetórias da região R4 para  $C_J = 3.03$ .

Para garantir soluções com valor de  $\dot{r}$  mais próximos a zero, poderia se construir um algoritmo para avaliar as melhores soluções de baixo custo e baixo tempo de voo para uma grade de valores de  $C_J$ .

## 5 Conclusão e Perspectivas de Trabalhos Futuros

O transporte natural entre planetas no Sistema Solar foi investigado recentemente por REN *et al.*, (2012), considerando dois mecanismos de transporte. O primeiro deles é devido às variedades hiperbólicas das variedades centrais de pontos Lagrangeanos instáveis, enquanto o segundo mecanismo deve-se ao transporte de longo período através da difusão de trajetórias em mar caótico. Para o caso específico Terra-Marte, o algoritmo proposto pelos autores encontrou apenas soluções de transporte da ordem de centenas de anos.

Neste trabalho, investigamos o transporte natural entre Terra e Marte através da dinâmica do Problema Restrito de Três Corpos Planar, considerando Sol e Júpiter como primários principais. Para a análise de possíveis soluções de transferências, consideramos conjuntos de condições iniciais em uma seção de Poincaré com valor fixo de Constante de Jacobi e detectamos aquelas que passam entre o periélio e o afélio das trajetórias da Terra e de Marte, registrando tanto o tempo de voo, quanto o valor da velocidade radial em relação ao Baricentro do sistema Sol-Júpiter, para um longo tempo de voo. A seguir, selecionamos soluções de menores valores de velocidade radial em relação ao baricentro dessas trajetórias nas proximidades da órbita da Terra e da órbita de Marte. Para nossa surpresa, verificamos que estas soluções correspondem a um curto tempo de voo entre os planetas (alguns meses). Assim, exploramos algumas destas soluções, mostrando a existência de soluções de transferência natural entre estes corpos que potencialmente podem ser aplicadas em projetos preliminares de missões espaciais. Para mostrar a robustez de nossa análise, apresentamos também alguns resultados preliminares para transferências Terra-Vênus.

Num futuro próximo, essas soluções podem ser validadas e refinadas por modelos mais realísticos com a inclusão de efeitos de N corpos. Outras transferências interplanetárias podem ser investigadas por esta abordagem. O caso espacial do PR3C pode ser também considerado, ampliando consideravelmente o conjunto de soluções candidatas a transferências interplanetárias.

# Referências

- DEPETRI, G. I. **Coreografias no problema de  $n$  corpos**. 2011. 107 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) — Universidade de São Paulo, São Paulo.
- GÓMEZ, G.; KOON, W.S.; LO, M.W.; MARSDEN, J.E.; MASDEMONT, J.; ROSS, S.D. Connecting orbits and invariant manifolds in the spatial restricted three-body problem **Nonlinearity**, v. 17, n. 5, p. 1571–1606, 2004.
- HOFFMANN, A. **Introdução ao problema de  $n$ -corpos**. 2009. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- KOON, W.S.; LO, M.W.; MARSDEN, J.E.; ROSS, S.D. Heteroclinic connections between periodic orbits and resonance transitions in celestial mechanics **Chaos: an interdisciplinary journal of nonlinear science**, v. 10, n. 2, p. 427–469, 2000.
- MARCHAL, C. **The three-body problem**. Amsterdam: Elsevier, 1990. 576 p.
- MICHELIN, J. V. **Emaranhados homoclínicos no problema de três corpos**. 2013. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física), Universidade Federal de São Carlos, São Carlos.
- MINGOTTI, G.; TOPPUTO, F.; BERNELLI-ZAZZERA, F. Earth–Mars transfers with ballistic escape and low-thrust capture **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 110, n. 2, p. 169–188, 2011.
- MONDELO, J. M. **Contribution to the study of Fourier methods for quasi-periodic functions and the vicinity of the collinear libration points**. 2004. 251 f. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada e Análises) — Universidade de Barcelona, Barcelona, 2001.
- MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar system dynamics**. New York: Cambridge University Press, 1999. 592 p.
- MÝRDAL, K. K. G. **Some theoretical and numerical aspects of the  $n$ -body problem**. 2013. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Ciências Matemáticas), Lund University, Suécia.
- PACHECO, M. P. **Teorema de lyapunov**. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemáticas), Universidade Federal do Amapá, Macapá.

- PINTO, D. M. C. **Estabilidade do problema de três corpos**. 2006. 105 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade do Minho, Portugal.
- PRADO, A. F. B. de A. **Trajétórias espaciais e manobras assistidas por gravidade**. São José dos Campos: INPE, 2001. 172 p.
- REN, Y.; MASDEMONT, J. J.; GÓMEZ, G.; FANTINO, E. Two mechanisms of natural transport in the Solar System **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 17, n. 2, p. 844–853, 2012.
- ROY, A. E. **Orbital motion**. Bristol, 2005. 493 p.
- SAVI, M. A. **Dinâmica não-linear e caos**. Rio de Janeiro: E-papers Serviços Editoriais, 2006. 304 p.
- SZEBEHELY, V. G. **Theory of orbit: the restricted problem of three bodies**. London: Academic Press, 1967. 668 p.
- TOPPUTO, F.; VASILE, M.; BERNELLI-ZAZZERA, F. Low energy interplanetary transfers exploiting invariant manifolds of the restricted three-body **Journal of the Astronautical Sciences**, v. 53, n. 4, p. 353–372, 2005.
- VIANA, M.; ESPINAR, J. **Equações diferenciais ordinárias**. Rio de Janeiro, [2018!]. Disponível em: <<http://edoimpa.br/Livro>>. Acesso em: 29 jan. 2018.

## FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

<sup>1.</sup> CLASSIFICAÇÃO/TIPO <p style="text-align: center;">DM</p>	<sup>2.</sup> DATA <p style="text-align: center;">27 de junho de 2018</p>	<sup>3.</sup> REGISTRO Nº <p style="text-align: center;">DCTA/ITA/DM-036/2018</p>	<sup>4.</sup> Nº DE PÁGINAS <p style="text-align: center;">75</p>
<sup>5.</sup> TÍTULO E SUBTÍTULO: <p>Análise de transporte no sistema Terra-Marte.</p>			
<sup>6.</sup> AUTOR(ES): <p><b>Gabriella Aureliano Braz</b></p>			
<sup>7.</sup> INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): <p>Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA</p>			
<sup>8.</sup> PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: <p>Problema restrito de três corpos; Sistema Caótico; Dinâmica no sistema solar; Transferência Terra-Marte; Física.</p>			
<sup>9.</sup> PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: <p>Problema de três corpos; Trajetória Terra-Marte; Modelos matemáticos; Mecânica celeste; Física.</p>			
<sup>10.</sup> APRESENTAÇÃO: <p style="text-align: right;"><b>X Nacional      Internacional</b></p> <p>ITA, São José dos Campos. Curso de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Dinâmica Não-Linear e Sistemas Complexos. Orientadora: Profa. Dra. Maisa de Oliveira Terra. Defesa em 29/05/2018. Publicada em 2018.</p>			
<sup>11.</sup> RESUMO: <p>Este trabalho investiga o transporte natural entre Terra e Marte, utilizando o Problema Restrito de Três Corpos para o Sistema Sol-Júpiter como modelo matemático. De fato, objetivamos estudar possibilidades de transporte natural de massa no Sistema Solar entre dois corpos celestes (que podem ser planetas e/ou satélites naturais), para os quais as variedades hiperbólicas associadas às variedades centrais dos pontos lagrangeanos do Problema Restrito de Três Corpos não se interceptam e, portanto, não propiciam canais de transporte entre estes corpos. Para o caso Terra-Marte, mostramos a existência de soluções de conexão de baixo tempo e potencial baixo custo que podem ser usadas em futuros projetos de trajetórias entre estes dois planetas. A mesma análise pode ser aplicada a outros sistemas, como para o caso Terra-Vênus, para o qual apresentamos resultados preliminares.</p>			
<sup>12.</sup> GRAU DE SIGILO: <p style="text-align: center;">(X) OSTENSIVO      ( ) RESERVADO      ( ) SECRETO</p>			