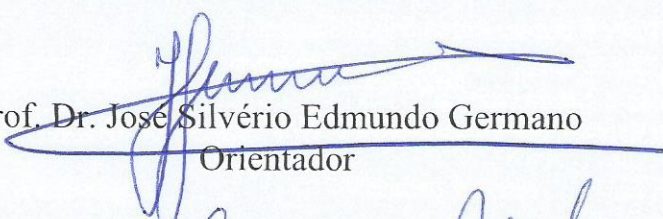


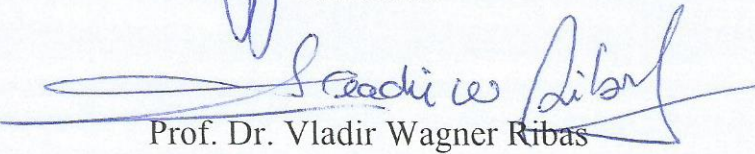
Dissertação apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Física Atômica e Molecular

Robson Alves Silva Simões

**SIMULAÇÕES TRIDIMENSIONAIS DIDÁTICAS DE
SISTEMAS MECÂNICOS COMPLEXOS COM O
MATHEMATICA®**

Dissertação aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:


Prof. Dr. José Silvério Edmundo Germano
Orientador


Prof. Dr. Vladir Wagner Ribas
Coorientador

Prof. Dr. Pedro Teixeira Lacava
Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP – Brasil
2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Divisão de Informação e Documentação

Simões, Robson Alves Silva

Simulações tridimensionais didáticas de sistemas mecânicos complexos com o *mathemática*[®] / Robson Alves Silva Simões.

São José dos Campos, 2017.

92f.

Dissertação de mestrado – Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Física Atômica e Molecular – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2017. Orientador: Prof. Dr. José Silvério Edmundo Germano; coorientador: Prof. Dr. Vládir Wagner Ribas.

1. Estruturas tridimensionais. 2. Simulação computadorizada. 3. Mecânica clássica. I. Departamento de Ciência e Tecnologia Aeroespacial. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Divisão de Ciências Fundamentais. II. Título.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SIMÕES, Robson Alves Silva. **Simulações tridimensionais didáticas de sistemas mecânicos complexos com o *mathemática*[®]**. 2017. 92f. Dissertação de Mestrado em Física – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Robson Alves Silva Simões

TÍTULO DO TRABALHO: Simulações Tridimensionais Didáticas de Sistemas Mecânicos Complexos com o *Mathemática*[®]

TIPO DO TRABALHO/ANO: Dissertação / 2017

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta dissertação e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação pode ser reproduzida sem a sua autorização (do autor).

Robson Alves Silva Simões

Av Getúlio Dorneles Vargas, 2170, casa 72, Jd. Califórnia,

CEP: 12305-010, Jacareí – SP

**SIMULAÇÕES TRIDIMENSIONAIS DIDÁTICAS DE
SISTEMAS MECÂNICOS COMPLEXOS COM O
MATHEMATICA®**

Robson Alves Silva Simões

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rubens de Melo Marinho Junior	Presidente	– ITA
Prof. Dr. José Silvério Edmundo Germano	Orientador	– ITA
Prof. Dr. Bogus Nubar Sismanoglu	Membro Interno	– ITA
Dr. Marco Aurélio Alvarenga Monteiro	Membro Externo	– UNESP

Dedico este trabalho à “Pequena”, minha namorada que agora
é esposa, por sempre caminhar leve e firme ao meu lado,
por sempre apontar com as mãos pequenas a
grandeza de nosso horizonte.

Agradecimentos

Acima de tudo a Deus Pai e Mãe, incompreensível à minha razão, de onde tudo nasce e onde tudo finda.

A minha Mãe e ao meu Pai pelo carinho em todas as horas, por crer em todos os minutos, pela força a cada segundo e pelo amor de sempre, sem eles nada seria.

A “Pequena”, namorada e agora esposa por estranhamente nunca duvidar da minha capacidade, mesmo quando eu tive a certeza de ser incapaz.

Ao professor Vladir por mostrar que as portas poderiam abrir-se mesmo quando nem mesmo em sonho poderia eu imaginar sequer a existência dessas.

Ao professor Silvério por orientar este trabalho através de suas palavras, por orientar a crença na melhoria da educação através de seus exemplos, por orientar a fé na vida através de sua própria vida.

A todos os professores e funcionários do ITA por manterem tão nobre instituição.

Aos meus alunos ao longo desses 15 anos por, de forma ingenuamente carinhosa, me fazerem professor (P. Robson).

Finalmente e novamente a Deus Mãe e Pai, incompreensível à minha razão, de onde tudo nasce e onde tudo finda.

" A alegria não chega apenas no encontro do achado, mas faz parte do processo da busca. E ensinar e aprender não pode dar-se fora da procura, fora da boniteza e da alegria".

(Paulo Freire)

Resumo

Nesse trabalho apresentamos uma proposta de construção de simulações 3D didáticas de sistemas mecânicos complexos, usando o Mathematica[®] como ambiente de desenvolvimento. As simulações 3D desenvolvidas possuem alto grau de interatividade e abrangem os seguintes sistemas mecânicos: o Pêndulo Simples, o Pêndulo Duplo, o Pêndulo com Movimento Vertical, o Pêndulo com Movimento Horizontal, Pêndulo Elástico e o Carretel Maciço com Movimento Plano. A motivação para a escolha desses sistemas, é que os mesmos são modelos básicos para a modelagem de inúmeros outros sistemas mais complexos e que são pouco estudados de maneira mais aprofundada por gerarem sistemas de equações diferenciais não lineares de difícil solução. Outra característica importante na escolha do Mathematica[®], e que não são simples de realizar em outras linguagens de programação, é o grande número de funções existentes no programa que permitem criar ambientes 3D gráfico com alto grau de realismo e variações em tempo real dos parâmetros que modelam os problemas analisados.

Palavras-chave: Simulação de sistemas físicos; Mathematica[®]; Mecânica Clássica; Formalismo lagrangeano; Pêndulo.

Abstract

The work presents a proposal to construct didactic 3D simulations of complex mechanical systems, using Mathematica® as the development environment. The 3D simulations developed have a high degree of interactivity and cover the following mechanical systems: the Simple Pendulum, the Double Pendulum, the Pendulum with Vertical Motion, the Pendulum with Horizontal Motion, the Elastic Pendulum and the Solid Reel with Plane Motion. The motivation for choosing these systems is that they are basic models for the modeling of countless other more complex systems and that are little studied in more depth by generating systems of nonlinear differential equations of difficult solution. Another important feature in choosing Mathematica®, which is not easy to perform in other programming languages, is the large number of functions in the program that allow you to create 3D graphical environments with a high degree of realism and real-time variations of parameters that model the problems analyzed.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	REFERENCIAL TEÓRICO	16
2.1	A Teoria da Aprendizagem Significativa	16
2.2	Momentos Pedagógicos de Delizoicov	18
2.2.1	Primeiro Momento Pedagógico: Problematização Inicial	19
2.2.2	Segundo Momento Pedagógico: Organização do Conhecimento	19
2.2.3	Terceiro Momento Pedagógico: Aplicação do Conhecimento	20
3	APRESENTAÇÃO DAS SITUAÇÕES PROBLEMAS.....	22
3.1	Pêndulo Simples.....	22
3.2	Pêndulo Duplo.....	24
3.2.1	Pêndulo Duplo Abordagem Newtoniana.....	24
3.2.2	Pêndulo Duplo Abordagem Lagrangeana.....	26
3.3	Pêndulo Triplo	27
3.4	Pêndulo com Movimento Vertical.....	30
3.5	Pêndulo com Movimento Horizontal	32
3.6	Pêndulo Elástico.....	33
4	APRESENTAÇÃO DAS SIMULAÇÕES	36
4.1	Pêndulo Simples.....	36
4.2	Pêndulo Duplo.....	40
4.3	Pêndulo Triplo	44
4.4	Pêndulo com Movimento Vertical.....	46
4.5	Pêndulo com Movimento Horizontal	48
4.6	Pêndulo Elástico.....	49
5	UMA PROPOSTA DE AULAS.....	52
5.1	Aula 1.....	53
5.2	Aula 2.....	61
5.3	Aula 3.....	71
6	UM EXEMPLO DE APLICAÇÃO EM LABORATÓRIO DIDÁTICO	74
6.1	Resultados obtidos	80

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....88
REFERÊNCIAS90

1 Introdução

A sociedade contemporânea de que fazemos parte, encontra-se cada vez mais inserida em uma atmosfera em que a tecnologia e a comunicação ditam, em grande parte, a ordem e o ritmo de nossas vidas. Dentro do ambiente escolar, não haveria de ser diferente. A possibilidade de cada pessoa possuir seu próprio computador e mais recentemente, através de smartphones ou tablets, poder se conectar com o mundo, mesmo inserido na sala de aula, vem alterando de maneira drástica a relação com o modelo convencional de aulas (lousa e giz), de tal forma que os professores resistentes às mudanças se queixam da crescente apatia dos alunos. E esses, por sua vez, escapam das aulas expositivas para vivências virtuais e, mesmo os alunos interessados carregam consigo indagações sem respostas do porquê, como, onde se aplicam determinados conteúdos, uma vez que as máquinas parecem resolver todas as questões de forma muito mais simples do que propõe o conteúdo que os professores ensinam na lousa.

Em resumo, uma boa parte dos professores não têm ideia de como utilizar a tecnologia interativa para chamar a atenção de seus alunos em direção ao conteúdo e boa parte dos alunos não faz ideia de que sua tão natural habilidade de lidar com novas tecnologias pode sim ajudá-los a interagir e a entender determinados conteúdos apresentados em aula e, provavelmente, estejam inseridos em seu dia-a-dia.

É importante destacar que não basta simplesmente transportar o que se escreveria na lousa para uma apresentação no computador, conforme destaca Pretto:

“Não podemos mais continuar formando aquele ser humano mercadoria, mão de obra barata para uma sociedade tecnológica. Precisamos, e aí a escola pode ter um importante papel, formar um ser humano programador da produção, capaz de interagir com mecanismos maquímicos da comunicação, um ser humano participativo que saiba dialogar com os novos valores tecnológicos e não um ser humano receptor passivo.”(PRETTO, 2001, p. 220).

Dessa maneira, procurando ater-se sobre as transformações da Nova Escola, colocando em foco a formação do ser humano participativo e considerando as vantagens e desvantagens, os problemas e benefícios do uso das tecnologias computacionais no processo de ensino aprendizagem, desenvolvemos este trabalho que trata basicamente de como utilizar as simulações computacionais interativas desenvolvidas com o Mathematica[®] para ministrar aulas de sistemas complexos, com ênfase no formalismo lagrangeano.

Para o desenvolvimento das simulações foram escolhidos basicamente sistemas de pêndulos sendo eles: pêndulo simples, pêndulo duplo, pêndulo triplo, pêndulo com movimento horizontal, pêndulo com movimento vertical e pêndulo elástico.

A motivação para a escolha desses sistemas é que são modelos básicos para a modelagem de inúmeros outros sistemas mais complexos de ampla utilização em algumas áreas da engenharias como a engenharia civil no que tange por exemplo a construção de grandes estruturas que, embora conceitualmente estáticas, estão sujeitas a efeitos dinâmicos da atmosfera como ventos e tempestades, os efeitos dinâmicos do solo como tremores e na engenharia de automação com grande interesse em sistemas de pêndulos invertidos que tem ampla utilização no estudo do equilíbrio de robôs autônomos, por exemplo. Embora esses sistemas pendulares sejam aplicados em inúmeras situações reais em engenharia, raramente são estudados nos cursos introdutórios de forma mais aprofundada, talvez por gerarem equações diferenciais não lineares de difícil solução.

Para o estudo dos sistemas listados anteriormente é comum a aplicação dos formalismos lagrangeano e hamiltoniano. Um dos motivos desses formalismos serem amplamente aplicados é a possibilidade de obtenção das equações de movimento de um sistema de modo mais metódico e com trabalho algébrico relativamente menor a aquele exigido pelo formalismo newtoniano (SILVA et al 2007). Outra vantagem importante do formalismo lagrangeano sobre o formalismo newtoniano é a não utilização de vetores, sendo necessário conhecer apenas a energia cinética e energia potencial do sistema em questão.

O estudo do formalismo lagrangeano nos cursos de engenharia, ocorre nas matérias de mecânica clássica, algumas vezes sob o título de “Introdução à Mecânica Analítica”. Seria de se esperar que tal assunto, principalmente por apresentar uma alternativa menos trabalhosa do ponto de vista algébrico com relação ao formalismo newtoniano, sejam mais fáceis de serem apresentados aos alunos. Ainda assim, quem já passou pela experiência de ministrar esses conteúdos sabe que essa tarefa pode tornar-se bastante onerosa para os professores e enfadonha para os alunos. O que ocorre é que, sendo o formalismo de Lagrange e Hamilton aplicados como alternativa algebricamente menos trabalhosa para chegar-se as equações diferenciais que irão fornecer as equações de movimento do que o formalismo newtoniano, ele pode trazer algumas dificuldades ao bom andamento das aulas sobre esse assunto, sendo elas:

a) a dificuldade ou impossibilidade de se resolver na lousa as equações diferenciais encontradas com a aplicação do formalismo;

b) a dificuldade de apresentar durante uma aula expositiva vários experimentos reais, que ilustrem bem o uso do formalismo e que capacite o aluno a enxergar outras aplicações ou possibilidades de resolução de problemas fazendo uso do formalismo langrangeano e hamiltoniano.

Como então, sem esquivar-se da proposta de resolver sistemas complexos, contornar as duas dificuldades descritas acima?

Esse trabalho apresenta uma forma alternativa de minimizar essas dificuldades sugerindo o uso de simulações desses problemas produzidas com o Mathematica[®]. Esse software é utilizado para abordagem de problemas em diversas áreas do conhecimento, tais como engenharia, biologia, química, processamento de imagens, finanças, estatística, matemática (WOLFRAM DEMONSTRATIONS PROJECT, 2017) além de outras, e é também utilizado em diversas empresas como Petrobrás, Banco Santander, Furnas, Inpe e Embraer devido a facilidade de programação e rápida solução de problemas.

Já existe uma literatura de proporções consideráveis a respeito do uso de simulações aplicadas ao ensino na qual professores podem se apoiar quando o intuito for tornar o processo de ensino e aprendizagem mais dinâmico, uma vez que o uso de simuladores pode possibilitar alguns níveis de interação bastantes peculiares como a alteração em tempo real dos parâmetros físicos que envolvem os sistemas analisados e suas consequências, além de possibilidades de ilustrações diversas através de animações e recursos gráficos.

Scanlon e Blake (2007) e Veen; Rutten e Joolingen (2012) exibem essa característica apresentando algumas simulações nas quais os parâmetros experimentais podem ser alterados nas representações de diagramas e gráficos na simulação. É mediante a essa conjuntura que estamos propondo a utilização de simulações produzidas no Mathematica[®], como uma ferramenta de apoio ao professor durante as aulas pois, conforme os exemplos apresentados, a aula pode vir a tornar-se mais interessante, prazerosa e atrativa ao ponto do aluno sentir-se impelido a pensar através de uma abordagem mais lúdica e contemporânea. Conforme aborda Shieh (2012), os alunos, durante a aprendizagem com o uso da simulação, são estimulados a participar de forma ativa: para debater, argumentar, confrontar ideias e a resolver problemas. Giroux e Pasin (2011) discorrem sobre o auxílio proporcionado pela simulação ao desenvolver habilidades de tomada de decisão e também ampliar a habilidade do trabalho em equipe. Segundo Germano et al (2012).

“A utilização de ferramentas de apoio dentro do processo ensino/aprendizagem, baseada em sistemas simulados, tem sido cada vez mais usadas e discutidas nos congressos de ensino. Isso pode ser comprovado, pela ampliação de grupos de pesquisa que cada vez mais desenvolvem ferramentas para esse fim, como por exemplo, o projeto Physics Education Technology (PHET) da universidade do Colorado (http://phet.colorado.edu/pt_BR/) que inclusive já tem uma versão em português. Outros exemplos são: o software simquest (<http://www.simquest.com/>), o software EJS (<http://fem.um.es/Ejs/>), o site com conteúdo e simulação Física com ordenador (<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/default.htm>) entre outros.”

Ainda, segundo Veen et al (2012), o uso de simulações pode acarretar um ganho de tempo durante a aula e que pode ser utilizado para que o professor possa se dedicar mais ao aluno aprofundando a conceituação do fenômeno abordado. Segundo Germano e Ando (2007)

“Deve-se salientar que a simulação não é de apenas resultados numéricos, mas também dispõe de representação gráfica bidimensional animada da situação física ao longo de um período de tempo. De maneira que tal recurso visual promove auxílio incontestável à interpretação do fenômeno”.

Finalizando esse capítulo introdutório segue-se uma breve descrição do conteúdo de cada capítulo desse trabalho.

O segundo Capítulo dessa dissertação tem por objetivo apresentar os referenciais teóricos sobre os quais nosso trabalho está apoiado que são: Teoria de Aprendizagem Significativa de David Paul Ausubel (2000) que forneceu os primeiros elementos teóricos para o início deste trabalho e os Momentos Pedagógicos de Delizoicov (1994) que nos guiou no que diz respeito a maneira de aplicação com grupos de alunos.

Já no terceiro Capítulo são apresentadas as seis situações problemas e suas respectivas modelagens matemáticas adaptadas aos tópicos vistos nos cursos de Mecânica Analítica bem como as dificuldades específicas que professores podem deparar-se ao tentar abordar tais situações em sala de aula sem o auxílio das simulações computacionais.

No quarto Capítulo dessa dissertação são apresentadas as seis simulações computacionais por nós desenvolvidas no Mathematica[®] criadas para auxiliar professores e alunos no que se refere as seis situações problemas apresentadas no capítulo 3.

O quinto Capítulo contém um planejamento bastante detalhado de 3 aulas expositivas de 1,5h para um grupo de aproximadamente 40 alunos para a apresentação do assunto Equação de Euler-Lagrange fazendo uso das seis simulações computacionais apresentadas nesse trabalho com o objetivo de atingir os resultados típicos da Teoria da Aprendizagem Significativa fazendo uso dos Momentos Pedagógicos de Delizoicov.

Já no sexto Capítulo temos um exemplo prático do uso desse tipo de simulação computacional em laboratório didático ocorrido na matéria intitulada Laboratório de FIS-26 para alunos do primeiro ano do curso de engenharia do ITA do primeiro semestre de 2017.

Finalizando temos no sétimo capítulo as considerações finais dessa dissertação que contém uma visão crítica desse trabalho bem como sugestões para trabalhos futuros no que

tange ao uso de simulações computacionais tanto em aulas teóricas como em aulas de laboratórios didáticos.

2 Referencial Teórico

Com o objetivo de sermos ancorados por um referencial teórico que nos dê suporte explicativo sobre os objetivos e resultados a serem atingidos em nossa prática de estudo, elegemos a Teoria de Aprendizagem Significativa, de David Paul Ausubel (AUSUBEL, 2000; MOREIRA, 1999; MOREIRA, 1982) por ser de um pesquisador e teórico que sempre manteve seus interesses e esforços voltados para o processo de ensino-aprendizagem no meio acadêmico, principalmente por sua teoria envolver soluções viáveis para alguns desafios do processo de ensino aprendizagem de nossa área de atuação que é o ensino de física para o ensino superior. Como metodologia de aplicação da nossa prática pedagógica escolhemos os Momentos Pedagógicos de Delizoicov. A escolha dessa metodologia se deu motivada principalmente pela proximidade com a realidade em que os autores apresentam os constantes desafios que os professores de física enfrentam para ministrarem suas aulas por meio da produção de teses e artigos sempre muito focada em oferecer de maneira muito clara e direta alternativas práticas que visam transpor os atuais obstáculos que professores e alunos enfrentam em sua vivência pedagógica, tanto no ensino médio quanto em nível superior e mesmo assim, obter níveis satisfatórios de aprendizagem por parte dos alunos. A seguir serão detalhados os principais aspectos estudados.

2.1 A Teoria da Aprendizagem Significativa

Quando se almeja produzir qualquer material didático é imprescindível que esteja claro qual o objetivo de aprendizagem se deseja atingir e de que maneira ocorre essa aprendizagem. Comumente no ensino de ciências desejamos que o estudante entenda os conceitos científicos básicos que regem os fenômenos, que desenvolvam o raciocínio lógico em relação a esses conceitos e que por fim, consigam aplicá-los em outras situações semelhantes, porém inéditas aos mesmos. Ao nos apoiarmos na Teoria de Aprendizagem Significativa de Ausubel (2000), precisamos refletir a respeito das condições necessárias para que a aprendizagem aconteça:

- Envolvimento ativo dos estudantes nas atividades propostas
- Envolvimento colaborativo com colegas
- Interação com professores e que ocorram
- Conexões com o mundo real (EZRAILSON, 2004).

O referido envolvimento ativo implica que o estudante possua condições de centrar-se e pensar profundamente a respeito do conteúdo estudado; assim sendo, os recursos interativos são de extrema utilidade, pois além de possibilitar que o estudante se relacione com o material de modo significativo também permite que, ao ritmo individual, as conexões entre o que se está sendo apresentado e o seu conhecimento prévio sejam estabelecidas de maneira bastante aprofundada.

Complementando o processo de ensino-aprendizagem usamos o modelo proposto por Ausubel em sua obra à Teoria de Aprendizagem Significativa. O conceito central de sua teoria é o da Aprendizagem Significativa, que se dá quando novas ideias vão interagindo de maneira não arbitrária e substantiva com outras preexistentes, alterando o conhecimento do indivíduo (PRASS, 2012). Ausubel chama essas ideias ou estruturas preexistentes de pensamento de subsunçores.

A aprendizagem significativa tem como principal meta gerar um conhecimento substancial e profundo que não seja somente literal e nem tão pouco arbitrário, de maneira bastante distinta a que ocorre na aprendizagem mecânica.

Na aprendizagem mecânica o estudante retém o conhecimento apenas por memorização, sendo, portanto, uma aprendizagem arbitrária e literal, processo esse que comumente gera uma aprendizagem residual nula, ou seja, o estudante pouco ou nada retém do que aprendeu. Ainda assim, é importante salientar que a aprendizagem mecânica se faz necessária quando não há a presença de subsunçores capazes de serem relacionados aos novos conceitos. Já a aprendizagem significativa somente ocorre quando novos conceitos se relacionam com outros já presentes no indivíduo, assim subsunçores são formados ou adquiridos através da aprendizagem mecânica e somente então será possível a interrelação desses com novas ideias de maneira não arbitrária e significativa.

Quando a aprendizagem significativa prevalece sobre a mecânica o aluno é capaz de discorrer sobre determinado tema sem fazer uso de repetições de conceitos memorizados, sendo ainda capaz de conectar o que aprendeu com outros assuntos de sua estrutura cognitiva, que é definida como sendo o conjunto de todo o conhecimento de um indivíduo e sua forma de organização de tal conhecimento (MOREIRA, 1999).

Ausubel (1980) aponta que existem duas condições fundamentais para que ocorra a aprendizagem significativa: a predisposição do aluno para o aprendizado e a presença de materiais que sejam potencialmente significativos. Assim sendo, nada adianta o professor

conseguir produzir ou escolher materiais de instrução concebidos segundo essa teoria e aplicá-los da maneira eficiente se o estudante não estiver interessado em seu conteúdo e, de maneira análoga, um grupo de estudantes dispostos e interessados a aprender determinado assunto poderá apresentar pouca ou nenhuma evolução no que diz respeito a aprendizagem significativa se os materiais e metodologia empregada sobre o grupo for somente a tradicional uma vez que essa, enfocando prioritariamente a aprendizagem mecânica que é basicamente alicerçada apenas sobre repetições de estruturas apresentadas pelo professor, não estimula o aprendiz a ocupar uma posição crítica diante do conhecimento ou a buscar a aplicação desse conhecimento em situações inéditas.

É importante esclarecer que a teoria da aprendizagem significativa leva fortemente em consideração o conhecimento prévio do aluno (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980), os subsunçores, sobre o qual os novos conceitos serão relacionados gerando o processo desejado; assim, os subsunçores são o ponto de partida para a aprendizagem significativa e quanto mais elaborados e robustos, maior será a sua capacidade de ancoragem, ou seja, sua capacidade de estabelecer ligações com os novos conceitos apresentados. Vale ressaltar que esses conceitos preexistentes na estrutura cognitiva do indivíduo não permanecem intactos ao se relacionarem com novos conceitos, os subsunçores também se modificam e evoluem ao longo do processo de aprendizagem, aumentando sua capacidade de ancoragem.

As simulações que apresentaremos nesse trabalho foram produzidas com o objetivo de funcionar como material potencialmente significativo, apresentando conceitos físicos de forma visual e ancorados com cálculos acurados.

2.2 Momentos Pedagógicos de Delizoicov

Delizoicov e Angotti (1994; 2003) sugerem uma metodologia que se caracteriza por dividir a atividade educativa em três momentos pedagógicos, sendo eles:

- Problematização Inicial;
- Organização do Conhecimento;
- Aplicação do Conhecimento.
- A seguir será apresentado cada um desses momentos:

2.2.1 Primeiro Momento Pedagógico: problematização inicial

O que caracteriza o primeiro momento pedagógico é a compreensão e apreensão da posição dos alunos com relação ao conteúdo que será apresentado. É de extrema importância salientar aqui o papel relevante que o professor ocupa nas discussões. Nesse momento pedagógico:

“São apresentadas questões e/ou situações para discussão com os alunos. Mais do que simples motivação para se introduzir um conteúdo específico, a problematização inicial visa à ligação desse conteúdo com situações reais que os alunos conhecem e presenciam, mas que não conseguem interpretar completamente ou corretamente, porque provavelmente não dispõem de conhecimentos científicos suficientes”. (DELIZOICOV; ANGOTTI, 1994, p. 54); (DELIZOICOV; ANGOTTI, 2003, p. 31).

Nesse primeiro momento, através de questões propostas e/ou situações problemas que estabeleçam relações entre os conteúdos de física que serão abordados e o cotidiano, os alunos devem ser desafiados a expor o que pensam sobre tais situações, com o propósito de que o professor tome conhecimento da forma como eles se relacionam com o conteúdo. Para os autores, o objetivo desse momento é ocasionar um distanciamento crítico do aluno ao se chocar com as interpretações das situações apresentadas para discussão, e proporcionar um ambiente para que o aluno perceba a necessidade de se apropriar de outros conhecimentos que ainda não possui. É recomendável também que nesse momento pedagógico sejam apresentados pequenos desafios que, para serem superados, seja necessária a interação com as simulações indicadas.

2.2.2 Segundo Momento Pedagógico: organização do conhecimento

Esse é o momento em que, através da orientação do professor, os conceitos de física necessários para a compreensão dos temas e da problematização inicial serão estudados.

Nesse momento pedagógico denominado organização do conhecimento, o professor pode utilizar várias estratégias metodológicas a fim de que o estudante tome posse do conhecimento científico de forma a se tornar capacitado a responder aos questionamentos apresentados no primeiro momento pedagógico apresentado na problematização inicial.

Com relação ao segundo momento pedagógico:

“... o conhecimento em Ciências Naturais, necessário para a compreensão do tema e da problematização inicial, será sistematicamente estudado sob orientação do professor.” (DELIZOICOV; ANGOTTI, 1994, p.55).

Essa dissertação apresenta atividades que, ao utilizar simulações computacionais, possibilitam ao professor diante da fase do segundo momento pedagógico de Delizoicov, o formalismo de Euler-Lagrange, desenvolvendo definições, conceitos, relações e formas de resoluções de problemas de maneira mais interativa e dinâmica. As simulações aqui apresentadas foram elaboradas de modo que, através do contato dos alunos com a animação, leitura dos gráficos, alterações imediatas causadas pela alteração dos parâmetros relevantes ao movimento dos corpos ou até mesmo com a programação das simulações, tornem-se capazes de responder às questões levantadas durante a problematização inicial e ainda possam aplicar o conhecimento adquirido no segundo momento pedagógico para desenvolver as atividades com amplitude de conhecimento.

2.2.3 Terceiro Momento Pedagógico: aplicação do conhecimento

O que caracteriza o último dos três momentos pedagógicos propostos por Delizoicov é a aplicação por parte do estudante do conhecimento adquirido através do exame da problematização inicial, principalmente em outras situações diferentes das propostas nos dois momentos anteriores. Para os autores, o terceiro momento pedagógico:

“Destina-se, sobretudo, a abordar sistematicamente o conhecimento que vem sendo incorporado pelo aluno para analisar e interpretar tanto as situações iniciais que determinaram o seu estudo, como outras situações que não estejam diretamente ligadas ao motivo inicial, mas que são explicadas pelo mesmo conhecimento”. (DELIZOICOV; ANGOTTI, 1994, p.55); (DELIZOICOV; ANGOTTI 2003, p. 31).

Assim se tem o desfecho da metodologia onde se espera que os estudantes, através da exposição de seu conhecimento prévio a respeito do conteúdo, do contato com as ideias de outros estudantes, da conscientização de que lhes faltam ferramentas e/ou conhecimento para resolver todos os problemas relacionados as situações propostas pelo professor e finalmente do contato com tais ferramentas e conceitos e suas aplicações, se apropriem do conteúdo de modo mais rápido, profundo e prazeroso do que comumente ocorre em aulas unicamente expositivas, segundo os autores:

“Num primeiro momento o aluno está com a palavra; ou seja, o professor ouve o que o aluno tem a dizer sobre o assunto: tanto sua maneira de entender o conteúdo, como também a sua experiência de vida. Um segundo momento no qual, a partir da colocação dos alunos através de atividades, o professor ensina um conteúdo novo à classe. Um terceiro momento, no qual o aluno é estimulado a aplicar este conhecimento a uma situação nova, ou a explicá-lo com suas próprias palavras, ou elaborar um trabalho qualquer, retrabalhando o que aprendeu, apropriando-se do conhecimento adquirido”. (DELIZOICOV; ANGOTTI, 1994, p. 128).

Dessa maneira, temos uma estrutura teórico-metodológica para orientar nosso trabalho, apoiada na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel (1980) e nos momentos pedagógicos de Delizoicov (1994) com as quais vislumbramos uma harmoniosa complementariedade, uma vez que, enquanto a teoria de Ausubel (1980) grifa a necessidade de que o aluno possua um conhecimento prévio, ou seja, através de uma aprendizagem mecânica já tenha formado seus subsunçores, Delizoicov e Angotti (1994; 2003) sugerem um primeiro momento pedagógico para que o professor ouça o que o aluno tem a dizer sobre o conteúdo; enquanto a teoria de Ausubel (1980) salienta que é imprescindível a ligação de novos conceitos a conceitos prévios (subsunçores), Delizoicov e Angotti (1994; 2003) apresentam o segundo momento pedagógico como aquele onde o professor, através de várias estratégias, apresenta o conteúdo aos estudantes e os convida a, de posse dos novos conceitos, responderem aos questionamentos levantados previamente com os antigos conceitos, de forma que esses se relacionem ao novo conteúdo apresentado e, por último, a aprendizagem significativa que segundo Ausubel (1980) é aquela na qual o estudante não é refém de soluções decoradas para um número limitado de situações mas é capaz de aplicar o conhecimento adquirido em situações inéditas, pode ser sedimentada e testada no terceiro momento pedagógico de Delizoicov (1994) em que o estudante é impelido a aplicar o conhecimento adquirido em problemas já vistos e principalmente em novas situações, podendo experimentar a potencialidade da aprendizagem significativa.

3 Apresentação das Situações Problemas

Nesse capítulo apresentaremos as seis situações problemas que foram usadas para desenvolver as simulações do presente trabalho, bem como suas soluções utilizando o formalismo lagrangeano. Após cada apresentação há um comentário das possíveis dificuldades ou limitações que professores podem experimentar ao apresentar essas situações em cursos de física sem fazer uso dos recursos tecnológicos propostos neste trabalho. Vale ressaltar que, embora esse trabalho não tenha a pretensão de server como suporte, tais resoluções podem sim servir como apoio para os professores durante as aulas que abordem os assuntos que serão descritos.

3.1 Pêndulo Simples

A seguir, temos a apresentação da situação problema bastante abordada em cursos introdutórios de física conhecida como Pêndulo Simples, que consiste em um corpo de massa m preso a uma haste de massa desprezível e comprimento L que, uma vez deslocada de um ângulo θ com relação a direção vertical de seu ponto de equilíbrio, move-se livremente em torno de seu ponto fixo, sempre no mesmo plano e livre de quaisquer forças de resistência ao movimento, conforme mostra a Figura 1 a seguir:

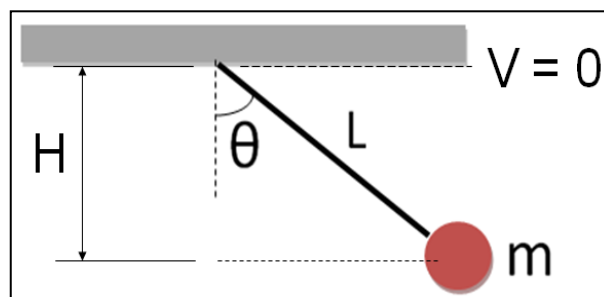


Figura 1 – Pêndulo Simples.

A estratégia para encontrar as equações diferenciais que conduzem as equações de movimento através do formalismo lagrangeano é escrever a energia cinética (T) e a energia potencial (V) do sistema, conforme sugere a Figura 1, para $H = L\cos\theta$ temos

$$T = \frac{1}{2}m(L\theta')^2$$

$$V = -mgL\cos\theta$$

Assim, a função lagrangeana $\mathcal{L} = T - V$ é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(L\theta')^2 + mgL\cos\theta$$

e a equação de Euler-Lagrange surge no formato

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta'}\right) - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}\right) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}(mL^2\theta') - (-mgL\sin\theta) = 0$$

que pode ser escrita

$$\theta'' + \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \quad (2)$$

Como mostrado, a resolução do problema do pêndulo simples é de baixa complexidade e por esse motivo é bastante utilizada nos cursos introdutórios de física, como forma introdutória de assuntos que se tornarão mais complexos tais como movimentos oscilatórios entre outras aplicações. Apesar da simplicidade desse tipo de problema conhecido como Pêndulo simples, sem fazer uso de um experimento real ou de simulações computacionais, torna-se inviável o ensino apenas fazendo uso da lousa ou de figuras estáticas, sem aproveitar de forma significativa algumas das aplicações que a modelação desse problema pode oferecer.

Um exemplo da limitação que já se encontra no uso apenas da lousa e figuras estáticas é a verificação do limite de uma boa aproximação do movimento real do pêndulo simples pelo Movimento Harmônico Simples (MHS), ou seja, como se pode verificar de forma rápida, a partir de qual ângulo inicial o modelo MHS já não é aceitável para a descrição desse movimento, ou ainda, como mostrar para os alunos que a massa, como nos mostra a equação 2, realmente não influencia no período de oscilação de um pêndulo simples? O presente trabalho oferece possibilidades para preencher exatamente esse tipo de lacuna conforme veremos de maneira mais detalhada a partir do capítulo 4. Mas antes, iremos apresentar outras cinco situações problemas nas quais estas e outras limitações serão apresentadas.

3.2 Pêndulo Duplo

A importância do estudo de pêndulos em engenharia se dá principalmente pelo grande número de sistemas que podem ser descritos através dos modelos matemáticos que regem a sua dinâmica e por serem de fácil visualização, tornando bastante didática sua abordagem. Em particular, os pêndulos duplos podem apresentar comportamento caótico (grande sensibilidade às condições iniciais) e por esse motivo, comumente são abordados nos cursos de mecânica analítica. A seguir, com o intuito de apresentar a facilidade de se chegar às equações de movimento através do formalismo lagrangeano, usado anteriormente, quando comparado ao formalismo newtoniano, vamos para essa situação (pêndulo duplo), apresentar primeiramente a solução através do formalismo newtoniano e em seguida apresentar a solução através do formalismo lagrangeano para uma reflexão da simplicidade de análise.

3.2.1 Pêndulo Duplo Abordagem Newtoniana

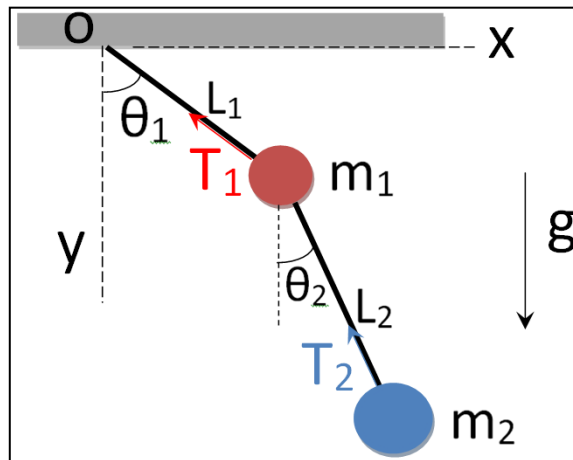


Figura 2 – Pêndulo Duplo Abordagem Newtoniana.

As coordenadas cartesianas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) podem ser relacionadas aos ângulos θ_1 e θ_2 através das relações:

$$x_1 = L_1 \sin \theta_1$$

$$y_1 = L_1 \cos \theta_1$$

$$x_2 = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2$$

$$y_2 = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2$$

Note que a origem dos eixos é o ponto O e que o eixo x está orientado na horizontal para a direita e o eixo y na vertical para baixo para este caso da abordagem newtoniana.

Aplicando-se a segunda lei de Newton às partículas de massa m_1 e m_2 , são obtidas as equações a seguir em relação às componentes cartesianas das acelerações de cada partícula:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -T_1 \text{sen}\theta_1 + T_2 \text{sen}\theta_2$$

$$m_1 \dot{y}_1 = m_1 g - T_1 \text{cos}\theta_1 + T_2 \text{cos}\theta_2$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -T_2 \text{sen}\theta_2$$

$$m_2 \dot{y}_2 = m_2 g - T_2 \text{cos}\theta_2$$

Reescrevendo essas equações em termos de θ_1 e θ_2 e suas derivadas encontraremos o sistema a seguir:

$$-m_1 L_1 (\theta_1^2 \text{sen}\theta_1 - \theta_1'' \text{cos}\theta_1) = -T_1 \text{sen}\theta_1 + T_2 \text{sen}\theta_2$$

$$-m_1 L_1 (\theta_1^2 \text{cos}\theta_1 + \theta_1'' \text{sen}\theta_1) = m_1 g - T_1 \text{cos}\theta_1 + T_2 \text{cos}\theta_2$$

$$-m_2 [L_1 (\theta_1^2 \text{sen}\theta_1 - \theta_1'' \text{cos}\theta_1) + L_2 (\theta_2^2 \text{sen}\theta_2 - \theta_2'' \text{cos}\theta_2)] = -T_2 \text{sen}\theta_2$$

$$-m_2 [L_1 (\theta_1^2 \text{cos}\theta_1 + \theta_1'' \text{sen}\theta_1) + L_2 (\theta_2^2 \text{cos}\theta_2 - \theta_2'' \text{sen}\theta_2)] = m_2 g - T_2 \text{cos}\theta_2$$

Após trabalhosas manipulações algébricas, esse sistema de quatro equações pode ser reescrito em um formato que torne evidente as derivadas segundas das coordenadas angulares.

$$\theta_1'' = \frac{m_1 \beta_1 + m_2 \beta_2}{T_1 \beta_5}$$

$$\theta_2'' = \frac{m_1 \beta_3 + m_2 \beta_4}{T_2 \beta_5}$$

Onde:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= -2g\text{sen}\theta_1 \\ \beta_2 &= L_1\theta_1'^2\text{sen}2(\theta_2 - \theta_1) + 2L_2\theta_2'^2\text{sen}(\theta_2 - \theta_1) + g\text{sen}(2\theta_2 - \theta_1) - g\text{sen}\theta_1 \\ \beta_3 &= -2L_1\theta_1'^2\text{sen}2(\theta_2 - \theta_1) + g\text{sen}(2\theta_1 - \theta_2) - g\text{sen}\theta_2 \\ \beta_4 &= -2L_1\theta_1'^2\text{sen}(\theta_2 - \theta_1) + g\text{sen}(2\theta_1 - \theta_2) - g\text{sen}\theta_2 + 2L_2\theta_2'^2\text{sen}2(\theta_2 - \theta_1) \\ \beta_5 &= 2m_1 + m_2(1 - \text{cos}2(\theta_1 - \theta_2))\end{aligned}$$

3.2.2 Pêndulo Duplo Abordagem Lagrangeana

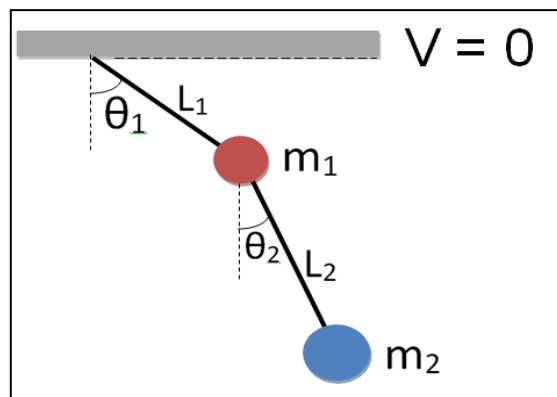


Figura 3 – Pêndulo Duplo Abordagem lagrangeana.

Para a abordagem lagrangeana o pêndulo duplo pode ser subdividido em dois pêndulos, o primeiro pêndulo de comprimento L_1 e massa m_1 estando, em um determinado tempo t , posicionado com relação a vertical segundo o ângulo θ_1 e o segundo pêndulo de comprimento L_2 e massa m_2 , estando, em um tempo t , posicionado com relação a vertical segundo o ângulo θ_2 . Importante perceber que, tanto θ_1 quanto θ_2 são funções de t ($\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$), que irão caracterizar o movimento por completo quando submetidos a aceleração gravitacional de valor g .

Pode-se então definir as energias cinética (T) e potencial (V) como sendo:

$$T = \frac{1}{2}m_1(x_1'^2 + y_1'^2) + \frac{1}{2}m_2(x_2'^2 + y_2'^2)$$

$$V = m_1gy_1 + m_2gy_2$$

Assim, a função lagrangeana $\mathcal{L} = T - V$ é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(2g(L_1(m_1 + m_2)\text{cos}(\theta_1(t)) \\ &+ L_2m_2\text{cos}(\theta_2(t)) + L_1^2(m_1 + m_2)\theta_1'(t)^2 \\ &+ 2L_1L_2m_2\text{cos}(\theta_1(t) - \theta_2(t))\theta_1'(t)\theta_2'(t) + L_2^2m_2\theta_2'(t)^2)\end{aligned}$$

A equação de Euler-Lagrange (1) para esse caso em θ_1 é

$$L_1(L_2m_2 \text{sen}(\theta_1(t) - \theta_2(t))\theta_2'(t)^2 + (m_1 + m_2)(g \text{sen}(\theta_1(t)) + L_1\theta_1''(t)) + L_2m_2 \text{cos}(\theta_1(t) - \theta_2(t))\theta_2''(t)) = 0 \quad (3)$$

e para θ_2 temos a equação (1) escrita na forma

$$L_2m_2(g \text{sen}(\theta_2(t)) - L_1 \text{sen}(\theta_1(t) - \theta_2(t))\theta_1'(t)^2 + L_1 \text{cos}(\theta_1(t) - \theta_2(t))\theta_1'(t) + L_2\theta_2''(t)) = 0 \quad (4)$$

É importante notar que é mais simples escrever as energias cinética (T) e potencial (V) na situação do pêndulo duplo do que aplicar a segunda lei de Newton, uma vez que as energias não estão vinculadas estritamente à notação vetorial e, além disso, temos apenas uma única equação lagrangeana no lugar das quatro equações obtidas pela aplicação do formalismo newtoniano. E, por fim, chegamos a um sistema de apenas duas equações através do formalismo lagrangeano em detrimento do sistema de quatro equações obtido através do formalismo newtoniano. Fica evidente que tornar explícita as derivadas segundas das coordenadas angulares desse sistema obtido através do formalismo lagrangeano deve exigir um trabalho algébrico menor do que para fazer o mesmo com o sistema obtido através do formalismo newtoniano.

Ainda que seja menos trabalhoso resolver o problema do pêndulo duplo através do formalismo lagrangeano, desenvolvê-lo na lousa requer um grande trabalho. Torna-se evidente que abordar esse problema diante de um grupo de alunos e conseguir atingir um nível satisfatório de aprendizado, sem o uso de recursos que vão além do quadro negro, é tarefa quase impossível uma vez que esse problema é apenas um entre muitos outros que precisam ser abordados em cursos de física. Isso sem citar a dificuldade em realmente mostrar para os alunos a sensibilidade peculiar a alterações nas condições iniciais que esse sistema apresenta.

3.3 Pêndulo Triplo

O sistema conhecido como pêndulo triplo é de grande importância no estudo de situações de alta não linearidade e assim, seus modelos matemáticos, são amplamente aplicados desde as análises de dinâmicas de estruturas, passando pelo estudo de pistão de motores a combustão (AWREJCEWICZ et al., 2007) e atingindo a compreensão de sistemas

biomecânicos, auxiliando inclusive trabalhos que visam a o aprimoramento de construção de próteses para o corpo humano.

Será apresentada a abordagem lagrangeana de um pêndulo triplo acoplado, livre de quaisquer forças de resistência ou atrito entre as partes.

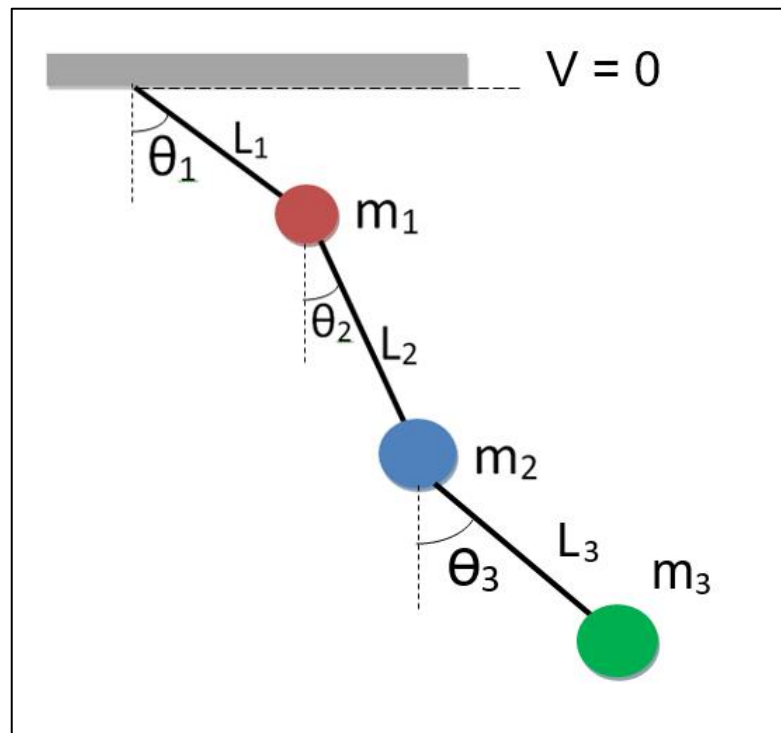


Figura 4 – Pêndulo Triplo.

O pêndulo triplo pode ser subdividido em três pêndulos, o primeiro de comprimento L_1 e massa m_1 estando, em um determinado tempo t , posicionado com relação a vertical segundo o ângulo θ_1 , o segundo, de comprimento L_2 e massa m_2 , estando, em um tempo t , posicionado com relação a vertical segundo o ângulo θ_2 e um terceiro pêndulo de comprimento L_3 e massa m_3 estando, em um determinado tempo t , posicionado com relação a vertical segundo o ângulo θ_3 . Importante perceber que θ_1 , θ_2 e θ_3 são funções de t ($\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ e $\theta_3(t)$) e que irão caracterizar o movimento por completo quando submetidos a aceleração gravitacional de valor g .

Inicialmente iremos escrever as coordenadas x e y de cada massa (m_1 , m_2 e m_3) para um referencial com origem no ponto fixo do pêndulo e positivo em sua vertical para cima e na horizontal para esquerda (usaremos esse sistema de referência em todas modelagens matemáticas desse trabalho).

$$\begin{aligned}
x_1 &= L_1 \text{sen} \theta_1 \\
y_1 &= -L_1 \text{cos} \theta_1 \\
x_2 &= L_1 \text{sen} \theta_1 + L_2 \text{sen} \theta_2 \\
y_2 &= -L_1 \text{cos} \theta_1 - L_2 \text{cos} \theta_2 \\
x_3 &= L_1 \text{sen} \theta_1 + L_2 \text{sen} \theta_2 + L_3 \text{sen} \theta_3 \\
y_3 &= -L_1 \text{cos} \theta_1 - L_2 \text{cos} \theta_2 - L_3 \text{cos} \theta_3
\end{aligned}$$

Dessa forma temos a energia cinética (T) e potencial (V) como sendo

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m_1 (x_1'^2 + y_1'^2) + \frac{1}{2} m_2 (x_2'^2 + y_2'^2) + \frac{1}{2} m_3 (x_3'^2 + y_3'^2) \\
V &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + m_3 g y_3
\end{aligned}$$

Assim, a função lagrangeana $\mathcal{L} = T - V$ é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= g L_1 m_1 \text{cos}(\theta_1(t)) - g m_2 (-L_1 \text{cos}(\theta_1(t)) - L_2 \text{cos}(\theta_2(t))) - g m_3 (-L_1 \text{cos}(\theta_1(t)) \\
&\quad - L_2 \text{cos}(\theta_2(t)) - L_3 \text{cos}(\theta_3(t))) + \frac{1}{2} m_1 (L_1^2 \text{cos}(\theta_1(t))^2 \theta_1'(t)^2 \\
&\quad + L_1^2 \text{sen}(\theta_1(t))^2 \theta_1'(t)^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} m_2 ((L_1 \text{cos}(\theta_1(t)) \theta_1'(t) + L_2 \text{cos}(\theta_2(t)) \theta_2'(t))^2 \\
&\quad + (L_1 \text{sen}(\theta_1(t)) \theta_1'(t) + L_2 \text{sen}(\theta_2(t)) \theta_2'(t))^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} m_3 ((L_1 \text{cos}(\theta_1(t)) \theta_1'(t) + L_2 \text{cos}(\theta_2(t)) \theta_2'(t) + L_3 \text{cos}(\theta_3(t)) \theta_3'(t))^2 \\
&\quad + (L_1 \text{sen}(\theta_1(t)) \theta_1'(t) + L_2 \text{sen}(\theta_2(t)) \theta_2'(t) + L_3 \text{sen}(\theta_3(t)) \theta_3'(t))^2)
\end{aligned}$$

A equação de Euler-Lagrange (1) para esse caso em θ_1 é

$$\begin{aligned}
&L_1 (g(m_1 + m_2 + m_3) \text{sen}(\theta_1(t)) + L_2 (m_2 + m_3) \text{sen}(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \theta_2'(t)^2 \\
&\quad + L_3 m_3 \text{sen}(\theta_1(t) - \theta_3(t)) \theta_3'(t)^2 + L_1 m_1 \theta_1''(t) + (m_2 + m_3) (L_1 \theta_1''(t) \\
&\quad + L_2 \text{cos}(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \theta_2''(t)) + L_3 m_3 \text{cos}(\theta_1(t) - \theta_3(t)) \theta_3''(t)) = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

A equação de Euler-Lagrange (1) para esse caso em θ_2 é

$$\begin{aligned}
&L_2 (-L_1 (m_2 + m_3) \text{sen}(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \theta_1'(t)^2 + L_3 m_3 \text{sen}(\theta_2(t) - \theta_3(t)) \theta_3'(t)^2 + (m_2 \\
&\quad + m_3) (g \text{sen}(\theta_2(t)) + L_1 \text{cos}(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \theta_1''(t) + L_2 \theta_2''(t)) \\
&\quad + L_3 m_3 \text{cos}(\theta_2(t) - \theta_3(t)) \theta_3''(t)) = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

A equação de Euler-Lagrange (1) para esse caso em θ_3 é

$$L_3 m_3 (g \operatorname{sen}(\theta_3(t)) - L_1 \operatorname{sen}(\theta_1(t) - \theta_3(t)) \theta_1'(t)^2 - L_2 \operatorname{sen}(\theta_2(t) - \theta_3(t)) \theta_2'(t)^2 + L_1 \cos(\theta_1(t) - \theta_3(t)) \theta_1''(t) + L_2 \cos(\theta_2(t) - \theta_3(t)) \theta_2''(t) + L_3 \theta_3''(t)) = 0 \quad (7)$$

Após essa breve demonstração de uma resolução do pêndulo triplo, poder-se-ia repetir tudo mais enfaticamente do que foi descrito anteriormente em relação ao pêndulo duplo, uma vez que as equações desse modelo são mais complexas que as daquele. Porém, além de ratificar tudo o que já foi dito anteriormente, gostaríamos de destacar uma outra grande dificuldade que pode surgir em um curso tradicional que pretenda abordar tal tema que é a resolução das Equações 5, 6 e 7 uma vez que, a exemplo das equações 3 e 4, essas equações também são não lineares, ou seja, sem solução analítica.

É possível nos dias atuais, abordar esse tipo de situação em sala de aula levando os alunos a um aprendizado realmente significativo sem fazer uso de recursos tecnológicos? Acreditamos que a resposta a essa pergunta é não! E encontra-se aqui um dos grandes motivos que nos levou a produzir esse trabalho. A seguir, apresentaremos ainda mais três situações problemas e a partir do capítulo quatro iremos abordar possíveis soluções das dificuldades levantadas nesse capítulo.

3.4 Pêndulo com Movimento Vertical

Como já dito, o estudo dos sistemas físicos compostos por pêndulos é de suma importância para a engenharia. O pêndulo com movimento vertical, em especial, é de grande valia para o início da modelação dos sistemas conhecidos como Pêndulo Invertido, de amplo uso na robótica e sistemas de automação de modo geral.

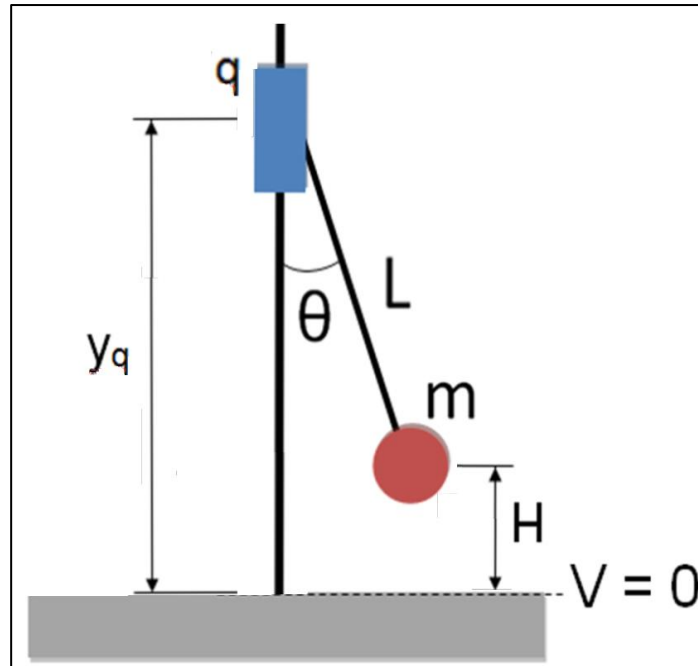


Figura 5– Pêndulo Com Movimento Vertical.

Esse sistema também pode ser subdividido em dois para abordagem com formalismo lagrangeano, sendo eles: um corpo q de massa desprezível que oscila na vertical obedecendo a função $y_q = A \cos(\omega t)$, onde A é a amplitude do movimento vertical, ω é a pulsação ou frequência angular e t é o tempo; e o outro composto por uma haste de comprimento L que está presa ao corpo q e que possui uma massa m em sua outra extremidade que descreve um ângulo θ com a vertical em um determinado tempo t .

As energias cinética (T) e potencial (V) do sistema são dadas por:

$$T = \frac{1}{2} m ((-A\omega \sin(\omega t) + L \sin(\theta(t)) \theta'(t))^2 + L^2 \cos^2(\theta(t)) \theta'(t)^2)$$

$$V = mg(A \cos(\omega t) - L \cos(\theta(t)))$$

Assim, a função lagrangeana $\mathcal{L} = T - V$ de ser escrita por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(-2Ag \cos(\omega t) + 2gL \cos(\theta(t)) + L_1^2 \cos^2(\theta(t)) + (A\omega \sin(\omega t) - L \sin(\theta(t)) \theta_1'(t))^2 \right)$$

e a equação de Euler-Lagrange (1) é dada por:

$$Lm((g - A\omega^2 \cos(\omega t)) \sin(\theta(t)) + L\theta''(t)^2) = 0 \quad (8)$$

Com este exemplo é possível identificar inicialmente a complexidade em se resolver a Equação 8 na lousa. Agregada a abordagem limitada ao quadro negro é a demonstração do que seria um pêndulo invertido. Na ausência de um experimento real ou de recursos tecnológicos como um computador, o professor se restringe a somente citar a existência desse tipo de movimento e, ainda que o faça, dificilmente conseguirá provocar nos alunos aquele positivo desconforto que experimentamos quando nos deparamos com uma situação nova e que contraria nossa expectativa diante de um fenômeno que não nos é familiar.

3.5 Pêndulo com Movimento Horizontal

Os pêndulos com movimento horizontal também são de grande importância na modelagem matemática de sistemas de automação e em especial, no que tange a sistemas de pêndulos invertidos que são sistemas mecânicos de grande utilidade no estudo de controle do posicionamento de sistemas instáveis como o controle de posição de veículos espaciais durante o lançamento (OGATA, 2003) ou o controle da postura ereta natural dos seres bípedes (NAVES, 2006) entre outros, vale ressaltar que comumente os protótipos de sistemas de pêndulos invertidos são construídos primeiramente como pêndulos com movimento horizontal que possuem a finalidade de, por exemplo, equilibrar uma haste sempre na posição vertical contra a gravidade.

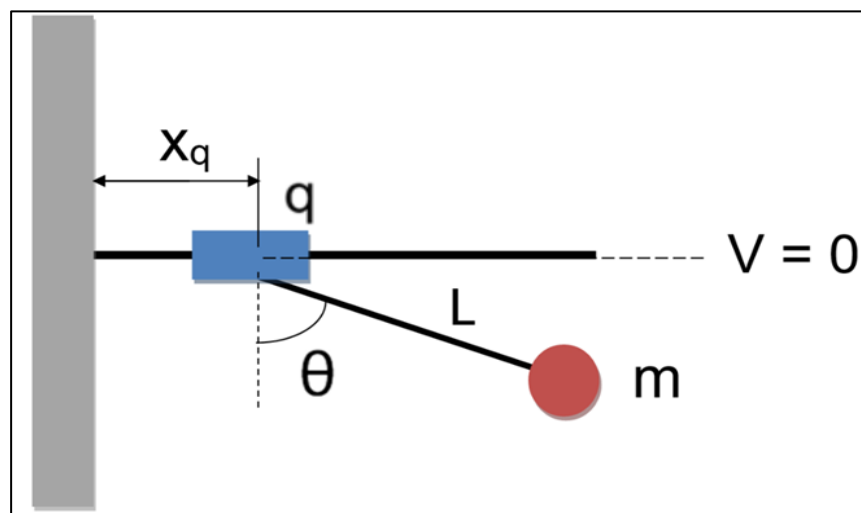


Figura 6 – Pêndulo com Movimento Horizontal.

Esse sistema também pode ser subdividido em dois para abordagem através do formalismo lagrangeano, sendo eles: um corpo q de massa desprezível que oscila na horizontal obedecendo a função $x_q = A \cos(\omega t)$, onde A é a amplitude do movimento horizontal, ω é a

pulsação ou frequência angular e t é o tempo; e o outro composto por uma haste de comprimento L que está presa ao corpo q e que possui uma massa m em sua outra extremidade que descreve um ângulo θ com a vertical em um determinado tempo t .

A energia cinética (T) e a energia potencial (V) decorrentes, podem ser escritas como sendo:

$$T = \frac{1}{2}m((-A\omega\text{sen}(\omega t) + L\text{cos}(\theta(t))\theta'(t))^2 + L^2\text{sen}(\theta(t))^2\theta'(t)^2)$$

$$V = -mgL\text{cos}(\theta(t))$$

Dessa forma, a função lagrangeana $\mathcal{L} = T - V$ é dada por:

$$\mathcal{L} = mgL\text{cos}(\theta(t)) + \frac{1}{2}m(L^2\text{sen}(\theta(t))^2\theta'(t)^2 + (-A\omega\text{sen}(\omega t) + L\text{cos}(\theta(t))\theta'(t))^2)$$

e a equação de Euler-Lagrange (1) é dada por

$$Lm\left(-A\omega^2\text{cos}(\omega t)\text{cos}(\theta(t)) + g\text{sen}(\theta(t)) + L\theta''(t)\right) = 0 \quad (9)$$

As dificuldades de abordagem decorrentes neste estudo são semelhantes às existentes no pêndulo com movimento vertical, porém, como os experimentos que funcionam com os princípios dos pêndulos com movimento horizontal são mais comuns que os pêndulos de movimento vertical se tornam ainda mais relevante fazer uso de outros recursos que não somente o quadro negro para o estudo detalhado das variáveis envolvidas para esse caso.

3.6 Pêndulo Elástico

A modelagem matemática do pêndulo elástico é muitas vezes apresentada em artigos especializados em física moderna devido a semelhança e simplicidade nos modelos que os envolvem, tendo como exemplos algumas situações relacionadas à física de plasma e à construção de aceleradores de partículas, que podem ser bem descritas por este tipo de modelagem.

A seguir apresentamos uma caracterização desse problema através do formalismo lagrangiano em que uma massa m presa a uma mola de constante k oscila, impulsionada a partir de um ângulo θ qualquer.

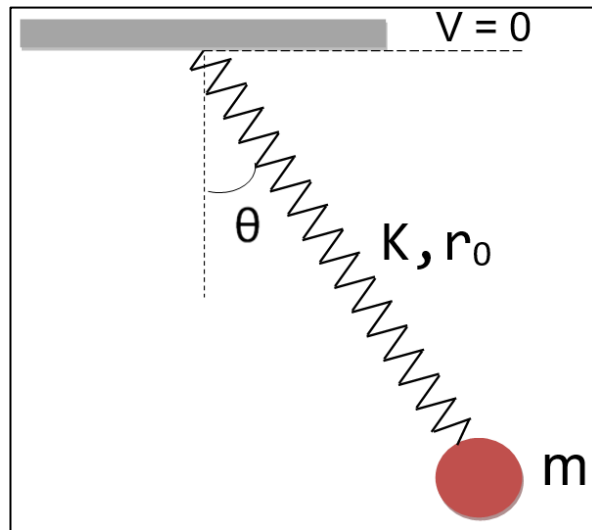


Figura 7 – Pêndulo Elástico.

A estratégia nesta análise é escrever a energia cinética (T) e a energia potencial (V) do sistema da seguinte forma:

$$T = \frac{1}{2}m(r'(t)^2 + r(t)^2\theta'(t)^2)$$

$$V = -mg\cos(\theta(t))r(t) + \frac{1}{2}k(-r_0 + r(t))^2$$

Assim, a função lagrangeana $\mathcal{L} = T - V$ é dada por

$$\mathcal{L} = mg\cos(\theta(t))r(t) - \frac{1}{2}k[-r_0 + r(t)]^2 + \frac{1}{2}m[r'(t)^2 + r(t)^2\theta'(t)^2]$$

A equação de Euler-Lagrange (1) para esse caso em $r(t)$ é

$$kr_0 + mg\cos(\theta(t)) + mr(t)\theta'(t)^2 - kr(t) - mr''(t) = 0 \quad (10)$$

e a equação de Euler-Lagrange (1) em $\theta(t)$ é

$$mr(t)[g\sin(\theta(t)) + 2r'(t)\theta'(t) + r(t)\theta''(t)] = 0 \quad (11)$$

Contrariamente aos dois problemas apresentados anteriormente, este tipo de sistema físico é muito comum aos alunos que já tiveram contato com laboratórios de física, mas não tão

rigorosamente estudado como apresentado neste estudo. Ocorre que comumente, nos cursos introdutórios de física, seja no laboratório ou nas salas de aula tradicionais, esse problema é apresentado para abordar temas relacionados a oscilações ou a Lei de Hooke. Porém, a abordagem deve levar em consideração à liberdade em movimentar-se na horizontal e não somente se restringir às componentes verticais.

Devido às dificuldades didáticas em estudar detalhadamente as componentes horizontais e verticais, isoladas ou simultaneamente e em tempo real, aliadas a extensa aplicabilidade deste modelo, torna-se necessário gerar análises profundas, consistentes e que possam retratar situações em que alguns parâmetros físicos variem de forma controlada afim de que se possa obter resultados satisfatórios e consistentes.

Se tal movimento surge de modo tão comum nos laboratórios porque não abordar esse problema de maneira mais completa? Percebemos que as faltas de recursos visuais mais efetivos para a aprendizagem tornam esse tipo de análise onerosa em um nível que desencoraja vários docentes a fazê-la diante de seus alunos, seja no que diz respeito a impossibilidade de discutir a sensibilidade a variações das condições iniciais desse sistema ou simplesmente a resolução detalhada da Equação 11.

4 Apresentação das Simulações

No Capítulo anterior foi apresentado o equacionamento de seis situações problemas através do formalismo lagrangeano que, de forma bastante onerosa em alguns casos, pode ser feito na lousa ou, como de costume em cursos que abordam esse assunto, exposto em slides.

O que apresentamos nesse capítulo são seis simulações feitas no Mathematica[®] que proporciona a resolução numérica das equações diferenciais em cada caso, visualização de gráficos dos parâmetros mais relevantes dos problemas, uma animação tridimensional da situação e a área de controle de parâmetros (massa, velocidade inicial, comprimentos, etc) que podem ser alterados a qualquer momento sendo possível de modo instantâneo, acompanhar os efeitos dessas alterações tanto nos gráficos quanto na animação tridimensional.

4.1 Pêndulo Simples

Como já dito anteriormente, o pêndulo simples é comumente apresentado e estudado nos cursos de física inclusive no ensino médio, porque então fazer uso desse tipo de simulação para um assunto relativamente simples?

É justamente pela simplicidade e a popularidade que esse problema foi escolhido para ser o primeiro a ser apresentado nesse formato. O fato de ser um problema relativamente simples de uma situação corriqueiramente apresentada em aulas de física nos faz crer que um aluno do ensino superior já saiba bastante a respeito dessa situação e, por conta disso, ao apresenta-lá em uma primeira simulação, o professor poderá, com muito mais clareza, destacar as vantagens que esse tipo de simulação proporciona em detrimento da abordagem comum na lousa, uma vez que o aluno, já tendo conhecimento desse problema pode ater-se apenas a perceber a forma que outros problemas realmente complexos serão abordados no que tange a resolução numérica das equações, limite aceitável de aproximações comumente usadas para a resolução como nesse caso ocorre com relação a soluções para pequenos ângulos, estamos aqui nos referindo a possibilidade imediata de respondermos a pergunta “ Até que valor o ângulo é pequeno o bastante para tal aproximação seja uma solução aceitável?”, e ainda como utilizar as simulações para entender a influência dos parâmetros como massa, velocidades iniciais, gravidade, etc. Mas acima de tudo, a abordagem desse problema em um primeiro momento, tem o intuito de imprimir no grupo de alunos a confiança em todas as outras simulações, uma vez que ele, conhecendo o comportamento do pêndulo simples, pode verificar que as respostas

as questões como, por exemplo, a influência da massa no período de oscilação, são corroboradas por essa simulação, conferindo as demais simulações um maior grau de confiança por parte de quem entra em contato com elas, de que realmente simulam um sistema que obedece o modelo matemático proposto.

Essa, como todas as outras simulações, foram construídas utilizando o formalismo lagrangeano para chegamos as equações que regem seus movimentos. A seguir temos a sub-rotina para a resolução numérica da equação diferencial

$$\theta'' + \frac{g}{L} \text{sen}\theta = 0$$

obtida através do formalismo lagrangeano como demonstrado no Capítulo 3.

```
solucao = NDSolve[{L1 m1 (g Sin[θ1[t]] + L1 θ1''[t]) == 0,
                 θ1[0] == θ10, θ1'[0] == v10},
                 θ1[t], {t, 0, tmax}];

θa[t_] = θ1[t] /. First[solucao];
```

Figura 8 – Linhas de Comando para Resolução da Equação 2.

É importante destacar que na primeira linha temos o comando para resolução numérica da equação diferencial 2, conforme a Figura 8, que aqui fora obtida com o Mathematica[®] e por isso apresenta um formato diferente mas que, como pode-se facilmente verificar, torna-se exatamente igual a Equação 2 do Capítulo 3 se dividirmos todos os termos por $L_1 m_1$. As soluções dessa equação estarão vinculadas à variável ($\theta_a[t]$), mas os parâmetros iniciais comprimento da haste (L_1), massa (m_1), gravidade local (g), posição angular inicial ($\theta_1[0]$) e velocidade angular inicial ($\theta_1'[0]$), ainda não apresentam, nesta etapa da programação, seus valores numéricos pois, os mesmos, serão definidos pelo usuário na área de controle dos parâmetros, e é essa estrutura que permite a grande interatividade do usuário com a simulação.

A Figura a seguir apresenta a tela principal da simulação do pêndulo simples.

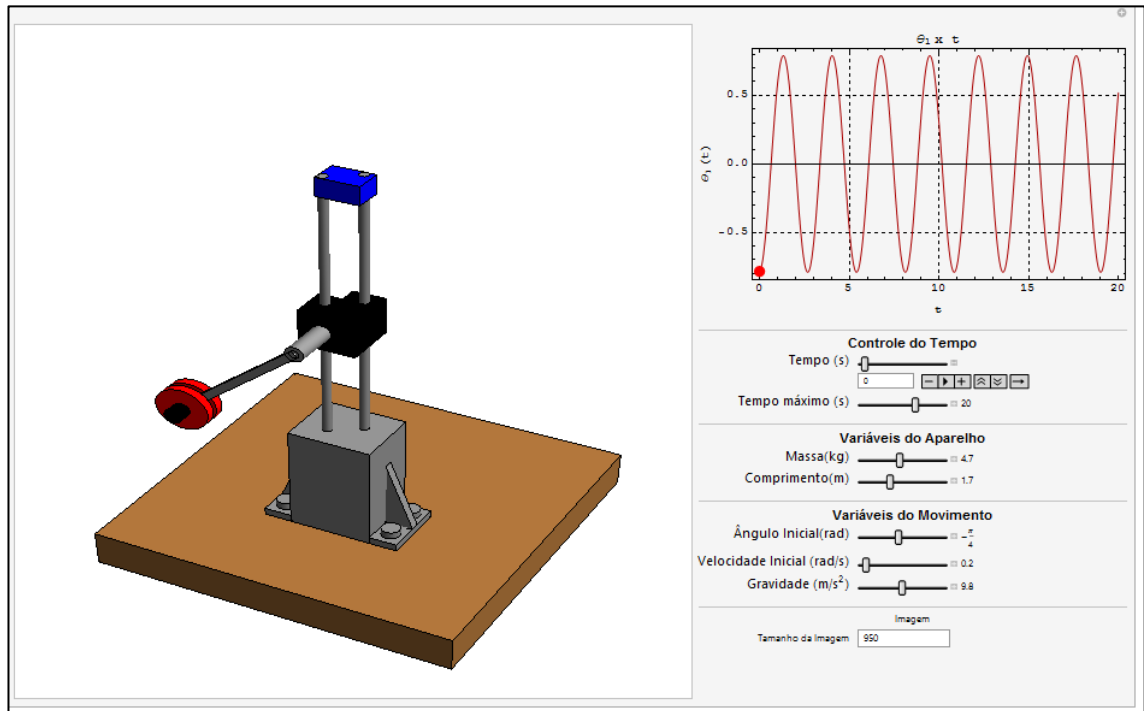


Figura 9 – Tela Principal da Simulação Pêndulo Simples.

Essa tela principal conforme a Figura 9 está dividida em três grandes áreas sendo elas:

Animação tridimensional a esquerda onde é possível ver o movimento do pêndulo em tempo real e acompanhar a modificação em seus movimentos causada pela modificação dos parâmetros iniciais (massa, comprimento da haste, etc), é possível também mudar a perspectiva da qual se observa a animação apenas clicando com a seta do mouse e reposicionando a animação da forma desejada. É importante destacar que, embora a haste da animação tenha sido desenhada de modo bastante próximo a uma haste real com massa e momento de inércia, para este trabalho, tais parâmetros da haste foram desprezados, ou seja, esta haste apresenta massa e momento de inércia desprezíveis

Gráfico do ângulo em relação ao tempo no canto superior direito onde, através do pequeno círculo vermelho, é possível acompanhar a evolução temporal do valor da posição angular do pêndulo por exemplo, ou ainda, estimar seu período.

Controle de parâmetros no canto inferior direito onde pode-se alterar os parâmetros tempo, massa, comprimento da haste, ângulo inicial, velocidade angular inicial, gravidade e tamanho da imagem.

Como podemos ver na Figura 10 a seguir a área de controle de parâmetros está subdividida em 4 regiões, Controle do Tempo, Variáveis do Aparelho, Variáveis do Movimento e Imagem.

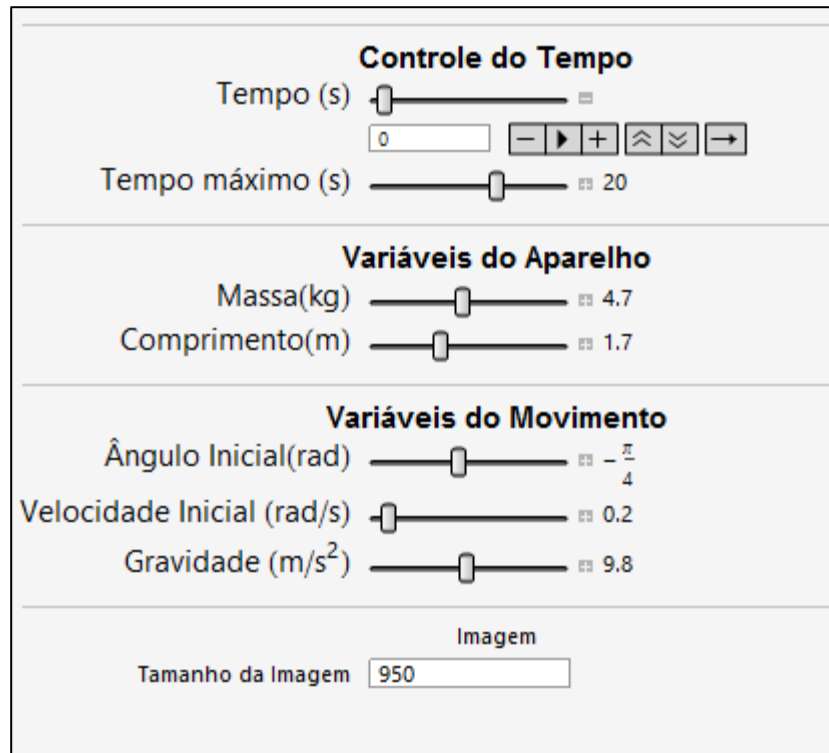


Figura 10 – Área de Controle de Parâmetros.

Controle do Tempo contém os controles:

- **Tempo (s)** onde é possível acompanhar através do pequeno visor o decorrer do tempo na animação e no gráfico, além disso é possível acelerar ou retardar a animação e ainda congelar a animação em um tempo específico.
- **Tempo máximo (s)** com o qual controla-se o tempo de duração da animação e consequentemente o limite do eixo das abcissas do gráfico

A região Variáveis do Aparelho contém os controles:

- **Massa (kg)** com a qual é possível controlar o valor correspondente a massa (m_1) para a solução da equação diferencial 3 através do posicionamento do cursor ou digitação direta no visor de um valor específico.
- **Comprimento (m)** através do qual se estabelece o valor correspondente ao tamanho da haste (L_1) para a solução da equação diferencial 3.

Na região Variáveis do Movimento encontra-se os controles:

- **Ângulo inicial (rad)** através do qual determina-se o valor correspondente a posição angular inicial ($\theta_1[0]$) para a solução da equação diferencial 3.

- **Velocidade inicial (rad/s)** que determina o valor correspondente a velocidade angular inicial ($\theta_1'[0]$) para a solução da equação diferencial 3.
- **Gravidade(m/s²)** com o qual é possível determinar o valor correspondente a aceleração da gravidade local (g) para a solução da equação diferencial 3.

4.2 Pêndulo Duplo

A simulação que será apresentada nesta sessão trata de um pêndulo duplo composto por duas hastes de massas desprezíveis que possuem cada uma em suas extremidades corpos cilíndricos dotados de massas não desprezíveis que não sofrem atrito de quaisquer naturezas.

Assim como a simulação do pêndulo simples essa do pêndulo duplo e as demais podem ser compreendidas como compostas por dois grandes blocos sendo eles, a resolução numérica de uma equação obtida através do formalismo lagrangeano e um segundo bloco sempre composto por uma animação tridimensional, gráficos e uma área de controle de parâmetros.

A seguir temos a linha de comando cuja função é resolver numericamente as Equações 12 e 13.

$$L_1(L_2m_2 \text{sen}(\theta_1(t) - \theta_2(t))\theta_2'(t)^2 + (m_1 + m_2)(g \text{sen}(\theta_1(t)) + L_1\theta_1''(t)) + L_2m_2 \text{cos}(\theta_1(t) - \theta_2(t))\theta_2''(t)) = 0 \quad (12)$$

$$L_2m_2 \left(g \text{sen}(\theta_2(t)) - L_1 \text{sen}(\theta_1(t) - \theta_2(t))\theta_1'(t)^2 + L_1 \text{cos}(\theta_1(t) - \theta_2(t))\theta_1'(t) + L_2\theta_2''(t) \right) = 0 \quad (13)$$

obtidas através do formalismo de lagrangeano conforme já demonstrado no Capítulo 3.


```

solucao =
NDSolve[
{L1 (L2 m2 Sin[θ1[t] - θ2[t]] θ2'[t]^2 + (m1 + m2) (g Sin[θ1[t]] + L1 θ1''[t]) +
L2 m2 Cos[θ1[t] - θ2[t]] θ2''[t]) == 0,
L2 m2 (g Sin[θ2[t]] - L1 Sin[θ1[t] - θ2[t]] θ1'[t]^2 + L1 Cos[θ1[t] - θ2[t]] θ1''[t] + L2 θ2''[t]) ==
0,
θ1[0] == θ10, θ1'[0] == 0,
θ2[0] == θ20, θ2'[0] == v20},
{θ1[t], θ2[t]}, {t, 0, tmax}];
θa[t_] = θ1[t] /. First[solucao];
θb[t_] = θ2[t] /. First[solucao];

```

Figura 11 – Linhas de Comando para Resolução das Equações 12 e 13.

Nas três primeiras linhas do comando da Figura acima temos escritas as Equações 12 e 13 e na sequência, as definições dos parâmetros iniciais para a resolução numérica dessas duas equações sendo esses parâmetros posição angular inicial da haste 1 ($\theta_1[0]$), velocidade angular inicial da haste 1 ($\theta_1'[0]$), posição angular inicial da haste 2 ($\theta_2[0]$), velocidade angular inicial da haste 2 ($\theta_2'[0]$), pode-se notar que com exceção de $\theta_1'[0]$ (velocidade angular inicial da haste 1) que é sempre igual a zero os outros parâmetros listados anteriormente serão definidos pelo usuário da área de Controle de Parâmetros bem como as variáveis relacionadas ao comprimento da haste 1 (L_1), massa da haste 1 (m_1), comprimento da haste 2 (L_2), massa da haste 2 (m_2) e o valor da gravidade local (g). É importante notar que as respostas dessas equações serão vinculadas as variáveis $\theta_a[t]$ e $\theta_b[t]$ apresentadas nas duas últimas linhas da figura anterior.

Na Figura 12 a seguir temos a tela principal da simulação do Pêndulo Duplo.

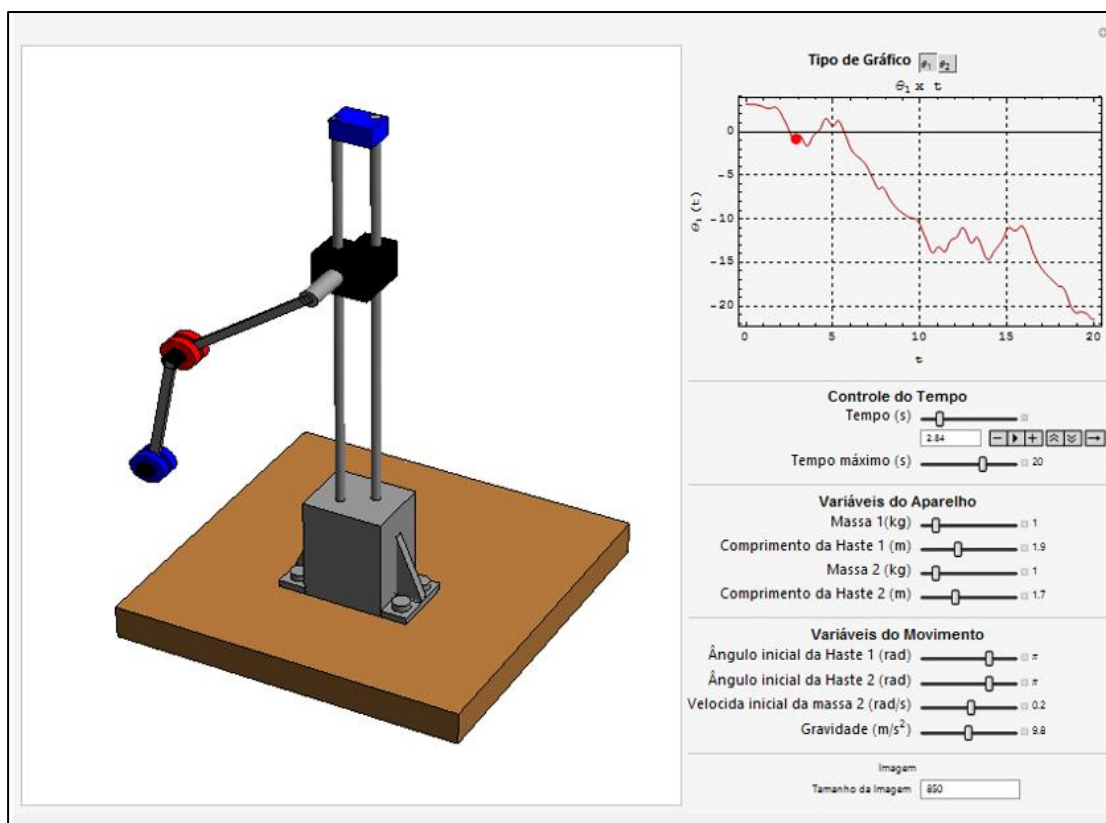


Figura 12 – Tela Principal da Simulação do Pêndulo Duplo.

A exemplo da simulação do pêndulo simples temos aqui também essa tela dividida em três regiões sendo elas a da Animação que ocupa o lado esquerdo da tela, a dos Gráficos que ocupa a região superior direita e, logo abaixo, a região de Controles de Parâmetros subdividida em Controle do Tempo, Variáveis do Aparelho, Variáveis do Movimento e Imagem. É importante destacar que, a exemplo do pêndulo simples, embora as hastes da animação tenham sido desenhadas de modo bastante próximo a hastes reais que possuem massa e momento de inércia, para este trabalho, tais parâmetros das hastes foram desprezados, ou seja, estas hastes apresentam massa e momento de inércia desprezíveis.

Uma diferença que se percebe aqui com relação a simulação do pêndulo simples é a existência de dois pequenos botões no lado superior direito logo após o título gráficos, esses botões servem para a escolha de qual gráfico se deseja visualizar; aquele que descreve a evolução temporal da posição angular da haste 1 ou o que descreve a posição angular da haste 2.

A seguir temos um exemplo desses dois gráficos nas Figuras 13 e 14:

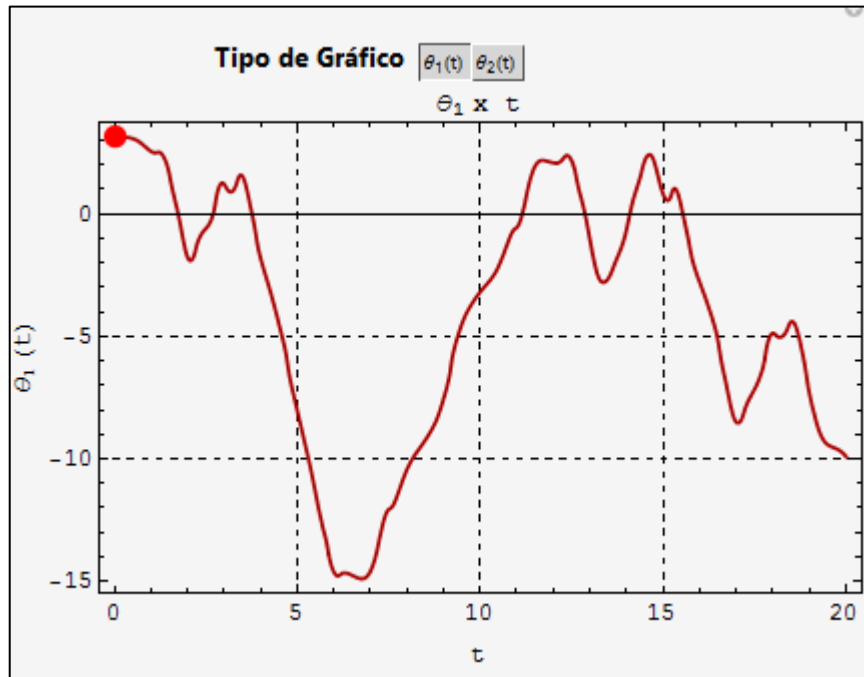


Figura 13 – Gráfico da Posição Angular da Haste 1 com Relação ao Tempo.

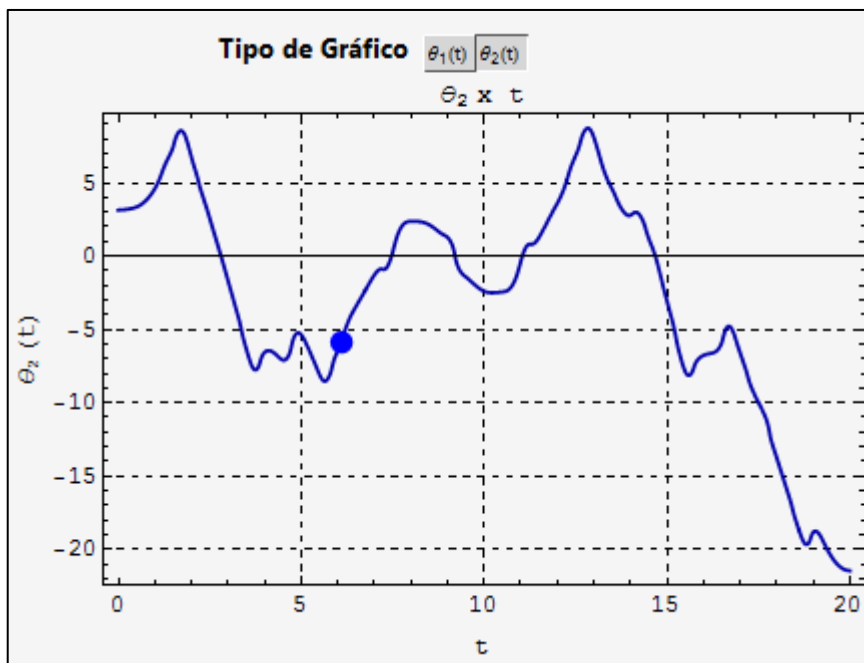


Figura 14 – Gráfico da Posição Angular da Haste 2 com Relação ao Tempo.

Para facilitar a rápida visualização e entendimento dos gráficos temos as cores dos gráficos (vermelho e azul) de acordo com as cores dos corpos cilíndricos da animação e ainda

o pequeno círculo que, ao deslizar sobre a linha do gráfico, indica qual o ponto encontra-se a animação em relação aos dados apresentados pelos referidos gráficos.

4.3 Pêndulo Triplo

A simulação que será apresentada a seguir trata de um pêndulo triplo composto por três hastes de massas desprezíveis que possuem em suas extremidades três corpos cilíndricos dotados de massas que não sofrem atrito de quaisquer naturezas.

Como já mencionado anteriormente, as simulações são divididas em dois grandes blocos, o de resolução numérica das equações obtidas pelas equações de Euler-Lagrange e o bloco que contém a animação, gráficos e controle de parâmetros.

Temos a seguir a linha de comando para a resolução das Equações 14, 15 e 16.

$$L_1 \left(g(m_1 + m_2 + m_3) \text{sen}(\theta_1(t)) + L_2(m_2 + m_3) \text{sen}(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \theta_2'(t)^2 + L_3 m_3 \text{sen}(\theta_1(t) - \theta_3(t)) \theta_3'(t)^2 + L_1 m_1 \theta_1''(t) + (m_2 + m_3) \left(L_1 \theta_1''(t) + L_2 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \theta_2''(t) \right) + L_3 m_3 \cos(\theta_1(t) - \theta_3(t)) \theta_3''(t) \right) = 0 \quad \dots \quad (14)$$

$$L_2 \left(-L_1(m_2 + m_3) \text{sen}(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \theta_1'(t)^2 + L_3 m_3 \text{sen}(\theta_2(t) - \theta_3(t)) \theta_3'(t)^2 + (m_2 + m_3) \left(g \text{sen}(\theta_2(t)) + L_1 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \theta_1''(t) + L_2 \theta_2''(t) \right) + L_3 m_3 \cos(\theta_2(t) - \theta_3(t)) \theta_3''(t) \right) = 0 \quad (15)$$

$$L_3 m_3 \left(g \text{sen}(\theta_3(t)) - L_1 \text{sen}(\theta_1(t) - \theta_3(t)) \theta_1'(t)^2 - L_2 \text{sen}(\theta_2(t) - \theta_3(t)) \theta_2'(t)^2 + L_1 \cos(\theta_1(t) - \theta_3(t)) \theta_1''(t) + L_2 \cos(\theta_2(t) - \theta_3(t)) \theta_2''(t) + L_3 \theta_3''(t) \right) = 0 \quad (16)$$

obtidas através do formalismo lagrangeano conforme exposto do Capítulo 3.

```

solucao =
NDSolve[
{L1 (g (m1 + m2 + m3) Sin[θ1[t]] + L2 (m2 + m3) Sin[θ1[t] - θ2[t]] θ2'[t]^2 +
L3 m3 Sin[θ1[t] - θ3[t]] θ3'[t]^2 + L1 m1 θ1''[t] +
(m2 + m3) (L1 θ1''[t] + L2 Cos[θ1[t] - θ2[t]] θ2''[t]) + L3 m3 Cos[θ1[t] - θ3[t]] θ3''[t]) == 0,
L2 (-L1 (m2 + m3) Sin[θ1[t] - θ2[t]] θ1'[t]^2 + L3 m3 Sin[θ2[t] - θ3[t]] θ3'[t]^2 +
(m2 + m3) (g Sin[θ2[t]] + L1 Cos[θ1[t] - θ2[t]] θ1''[t] + L2 θ2''[t]) +
L3 m3 Cos[θ2[t] - θ3[t]] θ3''[t]) == 0,
L3 m3 (g Sin[θ3[t]] - L1 Sin[θ1[t] - θ3[t]] θ1'[t]^2 - L2 Sin[θ2[t] - θ3[t]] θ2'[t]^2 +
L1 Cos[θ1[t] - θ3[t]] θ1''[t] + L2 Cos[θ2[t] - θ3[t]] θ2''[t] + L3 θ3''[t]) == 0,
θ1[0] == θ10, θ1'[0] == 0,
θ2[0] == θ20, θ2'[0] == 0,
θ3[0] == θ30, θ3'[0] == v30},
{θ1[t], θ2[t], θ3[t]}, {t, 0, tmax}];

θa[t_] = θ1[t] /. First[solucao];
θb[t_] = θ2[t] /. First[solucao];
θc[t_] = θ3[t] /. First[solucao];

```

Figura 15 – Linhas de Comando para a Resolução das Equações 14, 15 e 16.

Aqui, na Figura 15, temos as oito primeiras linhas do comando dedicadas a escrita das Equações 14, 15 e 16 obtidas pelo formalismo lagrangeano, as 4 subsequentes relativas aos parâmetros iniciais a serem determinados pelo usuário e as três últimas linhas com a função de nomearem as variáveis que irão guardar os dados obtidos pela execução do comando.

Na Figura 16 é apresentado o segundo bloco dessa simulação que é a tela da Animação, Gráficos e Controle de Parâmetro. É importante destacar que, a exemplo da simulação do pêndulo duplo, embora as hastes da animação tenham sido desenhadas de modo bastante próximo a hastes reais que possuem massa e momento de inércia, para este trabalho, tais parâmetros das hastes foram desprezados, ou seja, estas hastes apresentam massa e momento de inércia desprezíveis.

Note que de forma semelhante a tela do pêndulo duplo aqui também é possível, na região dos gráficos, escolher a qualquer momento qual dos três gráficos deseja-se consultar, gráficos esses que também estão a todo momento em consonância com a animação no que diz respeito a suas cores e evolução no tempo.

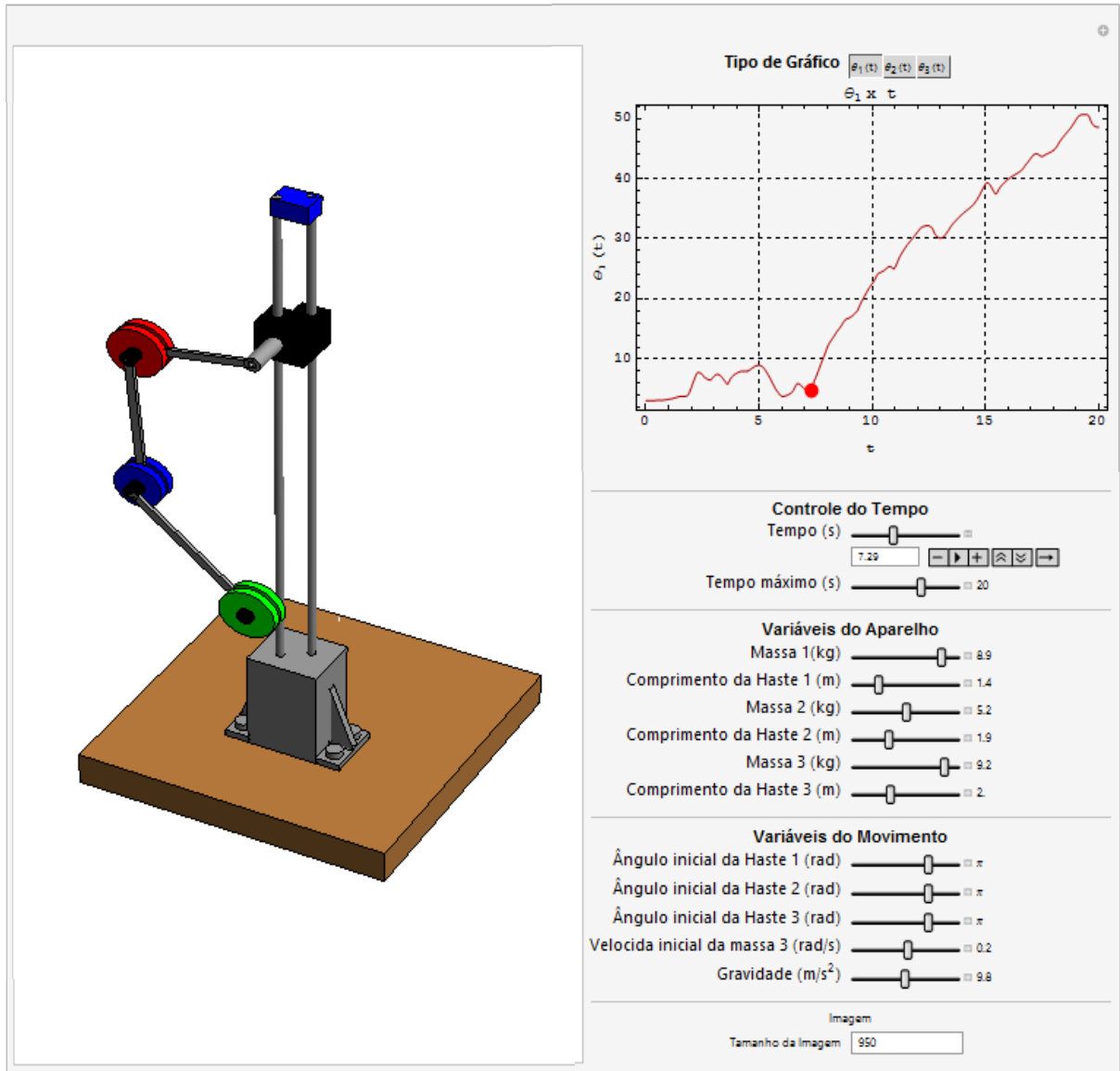


Figura 16 – Tela Principal da Simulação do Pêndulo Triplo.

4.4 Pêndulo com Movimento Vertical

Nesta sessão será apresentada uma simulação de um pêndulo com movimento vertical que é composto por um corpo cilíndrico dotado de massa preso a uma haste de massa desprezível que por sua vez está presa a um suporte que move-se na vertical executando um MHS (movimento harmônico simples) que não é afetado pelo movimento ou posicionamento da haste. Todas as forças de atrito são consideradas desprezíveis.

A Figura 17 a seguir apresenta a sub-rotina para a resolução numérica da Equação 17.

$$Lm((g - A\omega^2 \cos(\omega t))\text{sen}(\theta(t)) + L\theta''(t))^2 = 0 \quad (17)$$

obtida através da aplicação do formalismo lagrangeano como já apresentado no Capítulo 3

```
solucao = NDSolve[{L m ((g - A w^2 Cos[t w]) Sin[θ[t]] + L θ''[t]) == 0,
  θ[0] == θ0, θ'[0] == v0},
  θ[t], {t, 0, tmax}];

θa[t_] = θ[t] /. First[solucao];
```

Figura 17 – Linhas de Comando para Resolução da Equação 17.

Aqui os parâmetros que podem ser alterados pelo usuário da simulação são comprimento do pêndulo (L), a massa (m), a gravidade (g), a amplitude do movimento vertical do suporte da haste (A), a pulsação desse suporte (w), a posição angular da haste ($\theta[0]$) e a velocidade inicial ($\theta'[0]$).

As soluções encontradas pelo programa são armazenadas na variável $\theta a[t]$.

É importante destacar que, a exemplo das simulações anteriores que, embora a haste da animação tenha sido desenhada de modo bastante próximo a uma haste real que possui massa e momento de inércia, para este trabalho, tais parâmetros da haste foram desprezados, ou seja, esta haste apresenta massa e momento de inércia desprezíveis.

Na sequência temos a Figura 18 que apresenta a tela principal da simulação onde encontra-se a animação do pêndulo com movimento vertical, o gráfico da evolução temporal da posição angular da haste e os controles dos parâmetros.

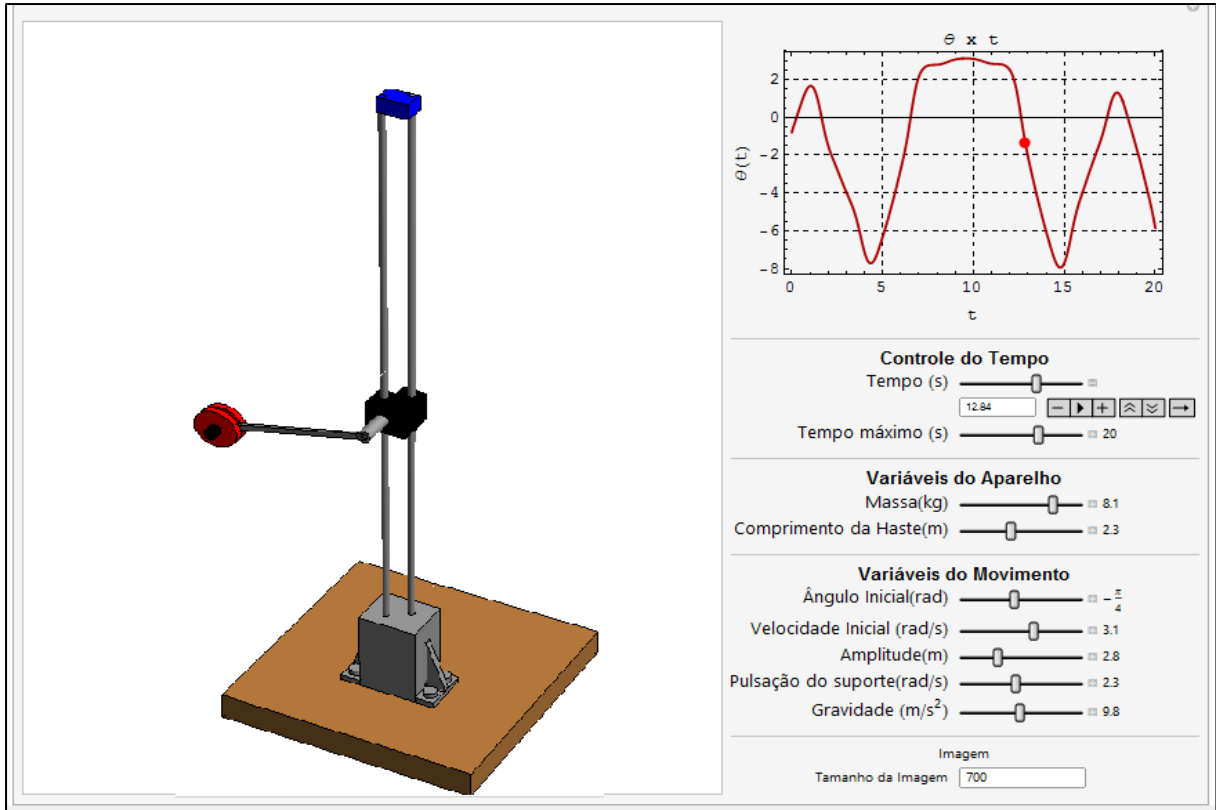


Figura 18 – Tela Principal da Simulação do Pêndulo com Movimento Vertical.

4.5 Pêndulo com Movimento Horizontal

A seguir é apresentada uma simulação de um pêndulo com movimento horizontal que é composto por um corpo cilíndrico dotado de massa preso a uma haste de massa desprezível que por sua vez está presa a um suporte que move-se na horizontal executando um MHS (movimento harmônico simples) que não é afetado pelo movimento ou posicionamento da haste. Todas as forças de atrito são consideradas desprezíveis.

A Figura 19 a seguir apresenta a sub-rotina para a resolução numérica da Equação 18.

$$Lm \left(-A\omega^2 \cos(\omega t) \cos(\theta(t)) + g \sin(\theta(t)) + L\theta''(t) \right) = 0 \quad (18)$$

obtida através da aplicação do formalismo lagrangeano como já apresentado no Capítulo 3

```
solucao = NDSolve[ { L m (-A w^2 Cos[t w] Cos[theta[t]] + g Sin[theta[t]] + L theta''[t]) == 0,
  theta[0] == theta0, theta'[0] == v0 },
  theta[t], {t, 0, tmax} ];

theta_a[t_] = theta[t] /. First[solucao];
```

Figura 19 – Linhas de Comando para a Resolução da Equação 18.

Nesta simulação, de maneira muito semelhante a que ocorre com a simulação apresentada anteriormente os parâmetros que podem ser alterados pelo usuário da simulação são comprimento do pêndulo (L), a massa (m), a gravidade (g), a amplitude do movimento horizontal do suporte da haste (A), a pulsação desse suporte (w), a posição angular da haste ($\theta[0]$) e a velocidade inicial ($\theta'[0]$).

A variável $\theta_a[t]$ armazena as soluções encontradas pela sub-rotina que resolve numericamente a equação escrita na primeira linha.

Na Figura 20 é apresentada a tela principal da simulação onde encontra-se a animação do pêndulo com movimento horizontal, o gráfico da evolução temporal a posição angular da haste e os controles dos parâmetros.

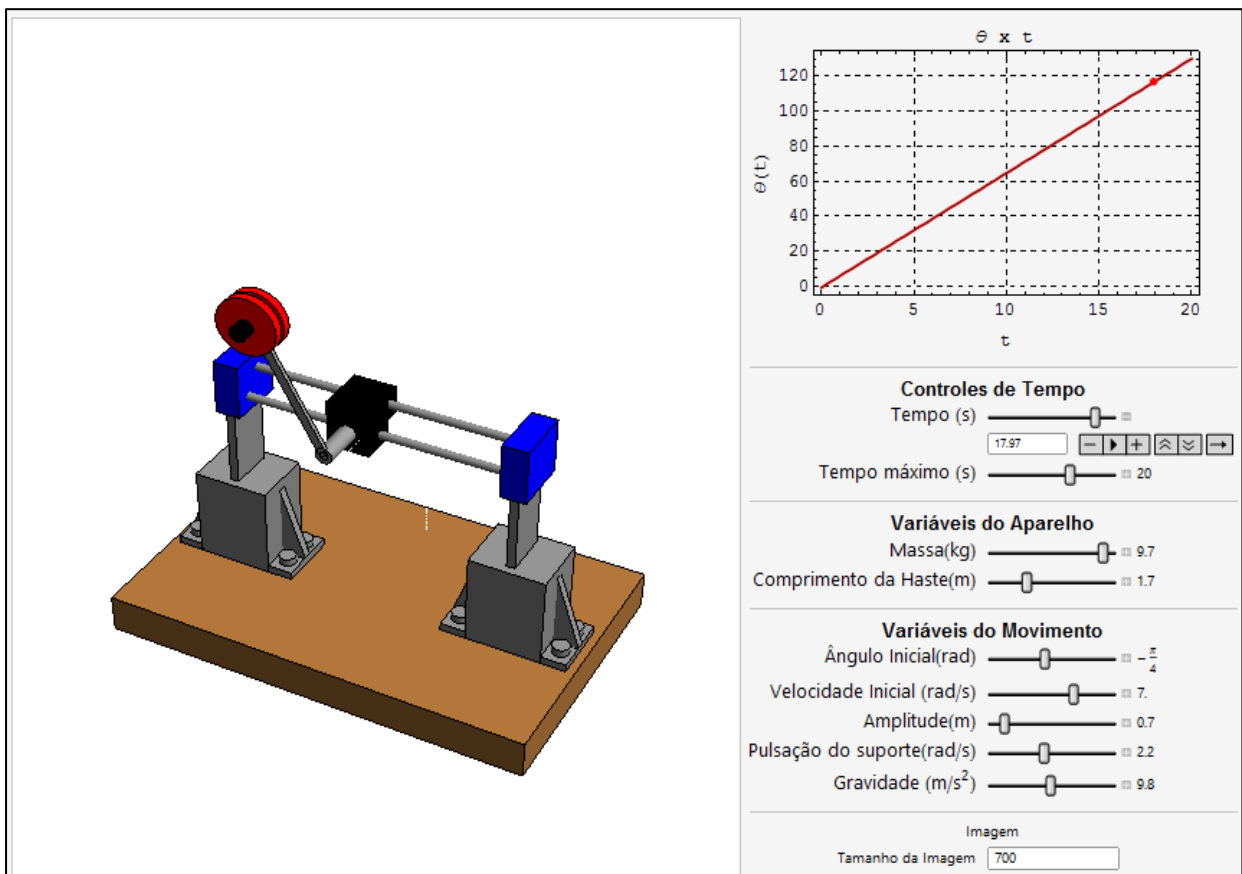


Figura 20 – Tela Principal da Simulação do Pêndulo com Movimento Horizontal.

4.6 Pêndulo Elástico

A simulação a seguir refere-se a um pêndulo elástico que é semelhante a um pêndulo simples como o da sessão 4.1 mas diferindo-se desse por ter este uma mola ideal de constante

K, tamanho inicial r_0 e massa desprezível no lugar da haste rígida do pêndulo simples. Nesta simulação quaisquer atritos foram desprezados.

A Figura 21 apresenta a sub-rotina que tem por função a resolução numérica das Equações 19 e 20

$$kr_0 + mg\cos(\theta(t)) + mr(t)\theta'(t)^2 - kr(t) - mr''(t) = 0 \quad (19)$$

e

$$mr(t)[g\sin(\theta(t)) + 2r'(t)\theta'(t) + r(t)\theta''(t)] = 0 \quad (20)$$

obtidas através do formalismo lagrangeano conforme Capítulo 3.

```
solucao = NDSolve[{k r0 + g m Cos[θ[t]] + m r[t] θ'[t]^2 == k r[t] + m r''[t],
  m r[t] (g Sin[θ[t]] + 2 r'[t] θ'[t] + r[t] θ''[t]) == 0,

  r[0] == r0, r'[0] == 0,
  θ[0] == θ0, θ'[0] == v0},

  {r[t], θ[t]}, {t, 0, tmax}];

ra[t_] = r[t] /. First[solucao];
θa[t_] = θ[t] /. First[solucao];
```

Figura 21 – Linhas de Comando para a Resolução das Equações 19 e 20.

Nesta simulação, os parâmetros que podem ser alterados pelo usuário da simulação são a constante elástica da mola (k) comprimento inicial da mola (r_0), a velocidade inicial do corpo cilíndrico na direção que se encontra a mola, a massa (m), a gravidade (g), a posição angular inicial da mola ($\theta[0]$) a velocidade angular inicial do corpo cilíndrico ($\theta'[0]$).

A variáveis $ra[t]$ e $\theta a[t]$ armazenam as soluções encontradas pela sub-rotina que resolve numericamente as equações escritas nas suas duas primeiras linhas conforme apresentado na figura anterior.

A Figura 22 refere-se a tela principal da animação onde encontra-se a animação do pêndulo elástico, os gráficos da evolução temporal da posição angular da mola e da evolução temporal do comprimento r da mola e os controles dos parâmetros.

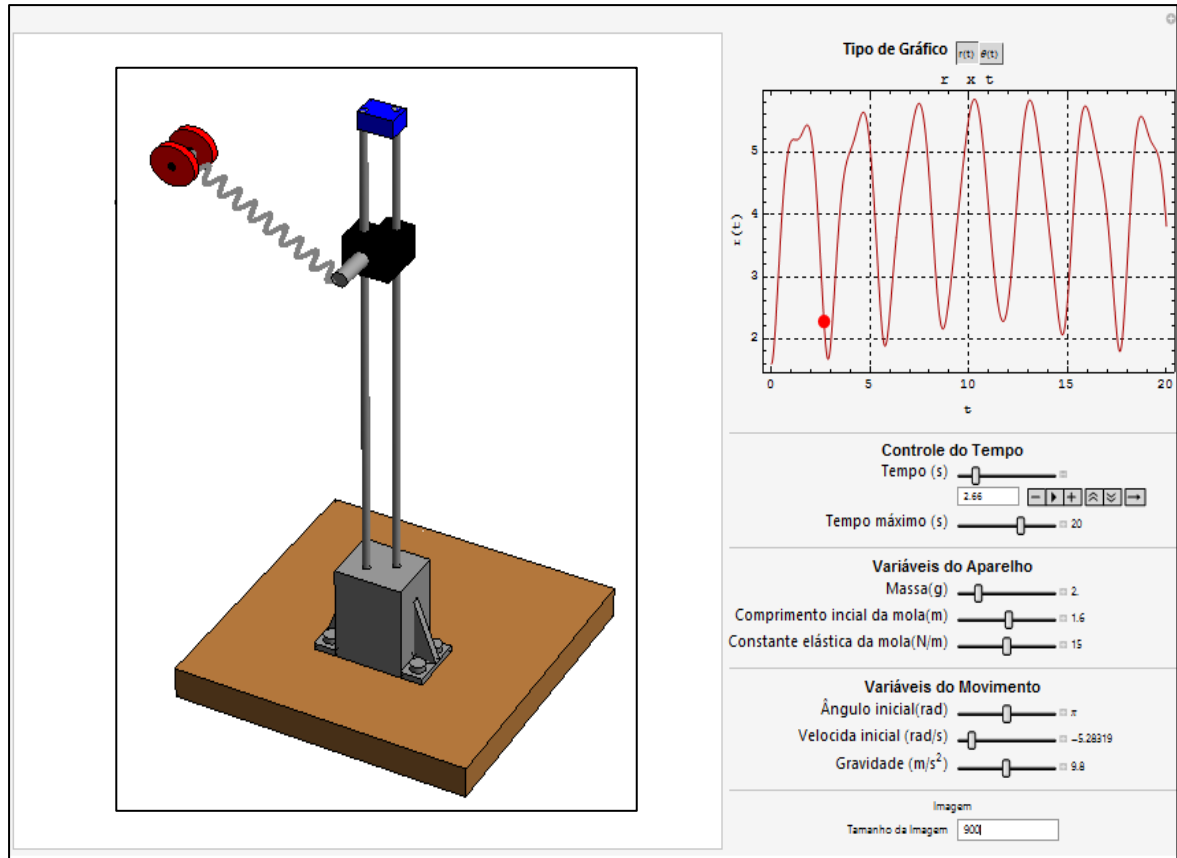


Figura 22 – Tela Principal da Simulação do Pêndulo Elástico.

5 Uma Proposta de Aulas

A forma geral adotada para o uso das simulações computacionais nesse trabalho foi planejada para aulas expositivas com a utilização da projeção da tela de um computador sobre uma lousa para um grupo de aproximadamente 40 alunos que tenham, durante algumas aulas, acesso a computadores individuais ou, pelo menos, uma máquina para cada 3 ou 4 alunos pois, para o modelo aqui apresentado é imperativo o diálogo entre professor e alunos para a implementação de uma aprendizagem significativa. A utilização das simulações é feita ora para apresentar determinados conceitos e soluções aos alunos e ora como fonte de investigação para obtenção de respostas a questões propostas pelo professor. Tais questões são elaboradas com o intuito de estimular as discussões em grupo, o levantamento de hipóteses e a produção de textos. Para que tais objetivos sejam atingidos os materiais precisam ser potencialmente significativos, de forma que sejam capazes de estabelecer elos de ligação entre os conhecimentos prévios dos alunos e os novos apresentados, com o claro objetivo de estabelecer a consolidação, revisão e diferenciação dos conceitos apresentados. Vale ratificar que essa forma de trabalho, aulas expositivas pautadas no tripé proposto por Dileizocov (1994) (Problematização inicial, Organização do conhecimento e Aplicação do conhecimento) com destaque em discussões em grupo e diálogos, através do uso de simulações computacionais permite apresentar e fazer a análise de situações físicas lançando mão da utilização de multiplicidade de linguagens e formas de interação com o objetivo de propor questionamentos aos alunos através da análise dos fenômenos em seu formato mais interativo e dinâmico.

Dentro da metodologia proposta a função do professor não é fornecer definições acabadas e inquestionáveis, mas sim de estimular o grupo de alunos a apresentar seus conhecimentos prévios a respeito dos conceitos apresentados e, através de suas intervenções e interações com os materiais a disposição, apresentar suas percepções sobre os sistemas que serão simulados e adquirirem novas habilidades para responder os questionamentos propostos pelo professor ou pelo próprio grupo de alunos. Sendo assim, é muito importante que o professor responda simplesmente aos questionamentos dos alunos, mas que conduza discussões que induzam os alunos a analisar os conceitos e métodos apresentados e produzam suas próprias conclusões a respeito das situações e conceitos apresentados.

No próximo tópico será apresentado um exemplo de 3 aulas de 1,5 h, cujo objetivo é apresentar as equações de Euler-Lagrange como ferramenta para a obtenção das equações de movimento de seis sistemas pendulares.

Conforme exposto no Capítulo 2 usaremos como suporte metodológico para o exemplo de planejamento dessas aulas os Momentos Pedagógicos de Delizoicov que se estruturam da seguinte forma:

- Problematização Inicial;
- Organização do Conhecimento;
- Aplicação do Conhecimento.

Assim, a aula 1 está estruturada para dar conta da Problematização Inicial e para começar a trabalhar a fase de Organização do Conhecimento. A aula 2 encarrega-se de esgotar para esse assunto a Organização do Conhecimento e de iniciar as atividades que tratam da fase de Aplicação do Conhecimento.

5.1 Aula 1

A aula 1 está esquematizada para dois momentos pedagógicos sendo eles I Problematização Inicial e II de Organização do Conhecimento.

A fase I – Problematização Inicial – é aquela que pretende despertar no aluno a consciência de que há situações problemas que ele ainda não é capaz de resolver de maneira adequada com o conhecimento prévio que possui, bem como, através da interação professor-aluno, revelar ao professor qual o conhecimento prévio que o aluno possui com relação aos conceitos e conteúdo que se pretende abordar, assim, é imprescindível que haja inicialmente um diálogo entre professor e aluno. Com o intuito de fomentar esse diálogo sugerimos que seja exibido o vídeo *Double Pendulum* (<https://www.youtube.com/watch?v=U39RMUzCjiU>) que mostra um pêndulo duplo através do qual o professor pode explorar os seguintes aspectos:

I – a importância da resolução desse problema para os dias atuais;

II – a dificuldade de se estruturar a resolução desses problemas com o formalismo newtoniano;

III – explorar através de questionamento qual seria a alternativa se é que há, de se resolver esse problema sem o uso da mecânica newtoniana;

IV – colocar a equação diferencial (3) que resolve o problema do pendulo duplo na lousa e perguntar se eles saberiam como resolver essa equação.

V – perguntar como se pode ter ideia da sensibilidade de um determinado sistema as condições iniciais.

A fase II – Organização do Conhecimento – é aquela na qual, através da orientação do professor, os conceitos de física necessários para a compreensão dos temas e da problematização inicial são estudados. Apresenta-se então nessa altura da aula o formalismo de Lagrange chegando-se até a Equação 1.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta'} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \right) = 0$$

e utiliza-se a mesma para resolver o problema do pêndulo simples como demonstrado no capítulo 3 chegando-se a Equação 2

$$\theta'' + \frac{g}{L} \text{sen}\theta = 0$$

Pode-se perguntar para os alunos, “será que realmente essa equação descreve o movimento de um pêndulo simples?”, e como ferramenta de investigação o professor apresenta a Simulação 1 que está nomeada como “01 Pêndulo Simples.ntb”.

Vale lembrar que a simulação 1 é apresentada aos alunos principalmente para credenciar essa estrutura de programação para resolver outros problemas realmente complexos assim, é importante que o professor exponha em linhas gerais o algoritmo que irá gerar a simulação do pêndulo simples.

Essa explicitação do funcionamento do algoritmo de resolução pode começar com uma breve explicação do terceiro Box (Figura 23) que aparece logo no início do programa que gera a simulação do pêndulo simples com o objetivo de que os alunos visualizem a correlação existente entre os elementos desse Box e a equação 1 de Euler-Lagrange que foi apresentada na lousa.

```
Lagrangiana[T_, V_, Q_: 0, genCoords_List] :=
Module[{L = T - V}, (D[D[L, D[#, t]], t] - D[L, #] == Q) & /@ coord]
```

Figura 23 – Algoritmo de Resolução.

Note que a estrutura entre chaves logo após o comando Module corresponde a Lagrangeana ($\mathcal{L} = T - V$) e logo a seguir temos a estrutura $(D[D[L, D[#, t]], t] - D[L, #] == Q)$ que corresponde exatamente a Equação 1 mas ainda com a variável Q não definida.

A estrutura de resolução adotada nessas simulações permite que a priori determinemos uma sentença matemática como por exemplo ($\mathcal{L} = T - V$) ou ($D[D[L, D[\#, t]], t] - D[L, \#] = Q$) e posteriormente informemos ao programa quais os valores que as variáveis (T, V e Q) irão assumir, assim, é importante que o professor, ao apresentar essas rotinas aos alunos deixe claro que esse programa permite nos darmos ao luxo de nem mesmo montarmos a lagrangeana de um determinado problema, muito menos resolver as respectivas equações de Euler-Lagrange, bastando para tanto informar corretamente a estrutura de formação das energias cinéticas e potencial como veremos a seguir.

<code>coord = {θ[t]}</code>
<code>{θ[t]}</code>
<code>x[t_] = L1 * Sin[θ[t]]</code>
<code>L1 Sin[θ[t]]</code>
<code>y[t_] = -L1 * Cos[θ[t]]</code>
<code>-L1 Cos[θ[t]]</code>
<code>T = (1/2) * m ((x'[t])^2 + (y'[t])^2)</code> <code>V = m * g * y[t]</code> <code>Q = 0;</code>
$\frac{1}{2} m (L1^2 \cos[\theta[t]]^2 \theta'[t]^2 + L1^2 \sin[\theta[t]]^2 \theta'[t]^2)$
<code>-g L1 m Cos[θ[t]]</code>

Figura 24 – Quadro de Programação.

Na primeira linha desse quadro da programação (retângulo azul) da Figura 24, temos a definição de qual será a variável sob a qual o programa deve executar as derivadas da estrutura equivalente a equação de Euler-Lagrange e na segunda linha (retângulo branco) temos a confirmação por parte do programa que o mesmo assimilou o comando.

Na terceira linha (retângulo azul) temos a definição de uma função $x(t)$ que relaciona o comprimento da haste ($L1$) com sua posição angular $\theta(t)$ em relação a um eixo x que tem origem na articulação do pêndulo com valores positivos a direita. Na quarta linha (retângulo branco) o programa confirma a informação fornecida.

Temos na quinta linha (retângulo branco) o mesmo tipo de informação da terceira linha mas aqui com relação a um eixo y de origem na articulação do pêndulo e com valores positivos

para cima deste ponto e na linha seguinte a confirmação do programa com relação a esta informação.

Nas próximas 3 linhas (grande retângulo azul) temos a definição da energia cinética T em função de $x(t)$ e $y(t)$ informados ao programa na terceira e quinta linha, temos também a definição da energia potencial V em função de $y(t)$ e finalmente da variável Q . Nas duas últimas linhas temos (dois últimos retângulos brancos) temos a confirmação do entendimento das energias cinética e potencial respectivamente já com as devidas derivadas efetuadas.

Na Figura 25 a seguir temos as quatro linhas que dizem respeito a definição da lagrangeana do sistema ($\mathcal{L} = T - V$) e da equação de Euler-Lagrange Equação 1.

```

lagrange = Lagrangiana[T, V, Q, coord] // FullSimplify
{L1 m (g Sin[θ[t]] + L1 θ''[t]) == 0}
eq1 = lagrange[[1]]
L1 m (g Sin[θ[t]] + L1 θ''[t]) == 0

```

Figura 25 – Definição da Lagrangeana.

Na primeira linha temos o acionamento da variável “lagrange” que já havia sido determinada anteriormente mas que neste ponto irá trabalhar com as novas definições de T , V e Q e em seguida temos, na segunda linha (retângulo branco), a lagrangeana ($\mathcal{L} = T - V$) encontrada pelo programa.

Na terceira linha (retângulo azul) é dado o comando para executar a sub-rotina que gerará na próxima linha (retângulo em branco) a equação de Euler-Lagrange Equação 1 que pode ser confrontada com a equação que o professor definiu na lousa com os alunos.

Podemos dizer que aqui acaba o primeiro dos três blocos da apresentação da simulação e o professor pode passar para o segundo bloco que trata em especial da obtenção da solução numérica da equação de Euler-Lagrange encontrada pelo programa e do uso dessas soluções para gerar a animação interativa e os gráficos que são parte dessa simulação.

A Figura a seguir mostra a sub-rotina de resolução da equação de Euler-Lagrange encontrada pelo programa.


```

Style [Manipulate[

solucao = NDSolve[{L1 m (g Sin[θ[t]] + L1 θ''[t]) == 0,
                 θ[0] == θ0, θ'[0] == v0},
                 θ[t], {t, 0, tmax}];

θa[t_] = θ[t] /. First[solucao];

```

Figura 26 – Sub-rotina de Resolução da Equação de Euler-Lagrange

Temos inicialmente a variável solucao recebendo os valores do comando NDSolve que irá gerar soluções numéricas para a equação que vem logo a seguir segundo as condições iniciais que serão definidas mais a frente pelo usuário e armazenadas nas variáveis $\theta[0]$ e $\theta'[0]$ que correspondem respectivamente a posição angular e velocidade angular inicial do corpo cilíndrico do pêndulo. É importante destacar que as respostas numéricas serão encontradas para $\theta(t)$ serão armazenadas na variável $\theta a[t]$ conforme a última linha da figura anterior.

A Figura 27 mostra o início dos comandos de desenho da animação propriamente dita.

```

Show[{
Graphics3D[{

  (*****Móveis*****

  (**Barra1 e Massa1**)
  Rotate[{Gray, Cuboid[{-0.05, 0, 0}, {0.05, 0.05, -L1}], θa[t], {0, -1, 0}, {0, 0, 0}],
  Gray, Cylinder[{{0, 0, 0}, {0, 0.05, 0}}, 0.05],

  (*Red, Sphere[{L1*Sin[θa[t]], 0, -L1*Cos[θa[t]], 0.2*(m1)^(1/3)*},
  Red, Cylinder[{{L1 * Sin[θa[t]], 0.05, -L1 * Cos[θa[t]]},
  {L1 * Sin[θa[t]], 0.15, -L1 * Cos[θa[t]]}], 0.2 * (m)^(1/4)],
  Red, Cylinder[{{L1 * Sin[θa[t]], 0, -L1 * Cos[θa[t]]},
  {L1 * Sin[θa[t]], -0.10, -L1 * Cos[θa[t]]}], 0.2 * (m)^(1/4)],
  Black, Cylinder[{{L1 * Sin[θa[t]], 0, -L1 * Cos[θa[t]]},
  {L1 * Sin[θa[t]], -0.25, -L1 * Cos[θa[t]]}], 0.1],

```

Figura 27 – Comandos de Desenhos da Animação

O importante aqui é que o professor destaque que o programa usará as soluções numéricas das equações armazenadas na variável $\theta a[t]$ para gerar os movimentos das figuras (cubos e cilindros) que compõe a animação conforme pode-se perceber em todas as linhas, bem como os parâmetros que serão definidos pelo usuário como comprimento do pêndulo ($L1$) e massa (m) que também pode-se perceber nesta Figura.

Por último, nesse segundo bloco da apresentação, o professor pode rolar a programação até a região mostrada nas últimas duas figuras (Figura 28 e 29) que tratam respectivamente da construção do gráfico ($\theta x t$) e das sub-rotinas que permitem a criação da área de controle de parâmetros onde o usuário irá definir a massa do pêndulo (m), comprimento do pêndulo (L_1), posição inicial θ_0 , gravidade (g) entre outros.

```
Dynamic[
  Show[Plot[ $\theta a[t]$ , {t, 0, tmax},
    Epilog → {Red, PointSize[0.03], Point[{t1,  $\theta a[t1]$ ]},
      LabelStyle → Directive[13],
      FrameLabel → {"t", " $\theta$  (t)"},
      PlotStyle → Directive[Darker[Red], Thick],
      GridLines → Automatic,
      GridLinesStyle → Directive[Black, Dashed],
      Frame → True,
      PlotRange → All,
      ImageSize → 0.5 I,
      PlotLabel → Style[" $\theta$  x t", 15] ] ]
],
```

Figura 28 – Comandos de Construção do Gráfico ($\theta x t$).

```
Delimiter,
Item["Variáveis do Aparelho", DefaultBaseStyle → {Bold, 15, FontFamily → "Helvetica"},
  Alignment → Center],

{{m, 1, Style["Massa (kg)", "Helvetica", 15]}, .1, 10, .1, ImageSize → Small,
  Appearance → "Labeled"},
{{L1, 1, Style["Comprimento da haste (m)", "Helvetica", 15]}, .1, 5, .1, ImageSize → Small,
  Appearance → "Labeled"},

Delimiter,
Item["Variáveis do Movimento", DefaultBaseStyle → {Bold, 15, FontFamily → "Helvetica"},
  Alignment → Center],
{{ $\theta_0$ , -Pi/4, Style["Ângulo Inicial (rad)", "Helvetica", 15]}, -2 Pi, 2 Pi, .1,
  ImageSize → Small, Appearance → "Labeled"},
{{V0, 0.2, Style["Velocidade Inicial (rad/s)", "Helvetica", 15]}, 0, 10, .1,
  ImageSize → Small, Appearance → "Labeled"},
{{g, 9.8, Style["Gravidade (m/s2)", "Helvetica", 15]}, .1, 20, .1, ImageSize → Small,
```

Figura 29 – Comandos de Criação da Área de Controle de Parâmetros.

Finalmente pode agora o professor mostrar a parte mais dinâmica da simulação que é a animação, o gráfico e a área de controle de parâmetros conforme a Figura 30.

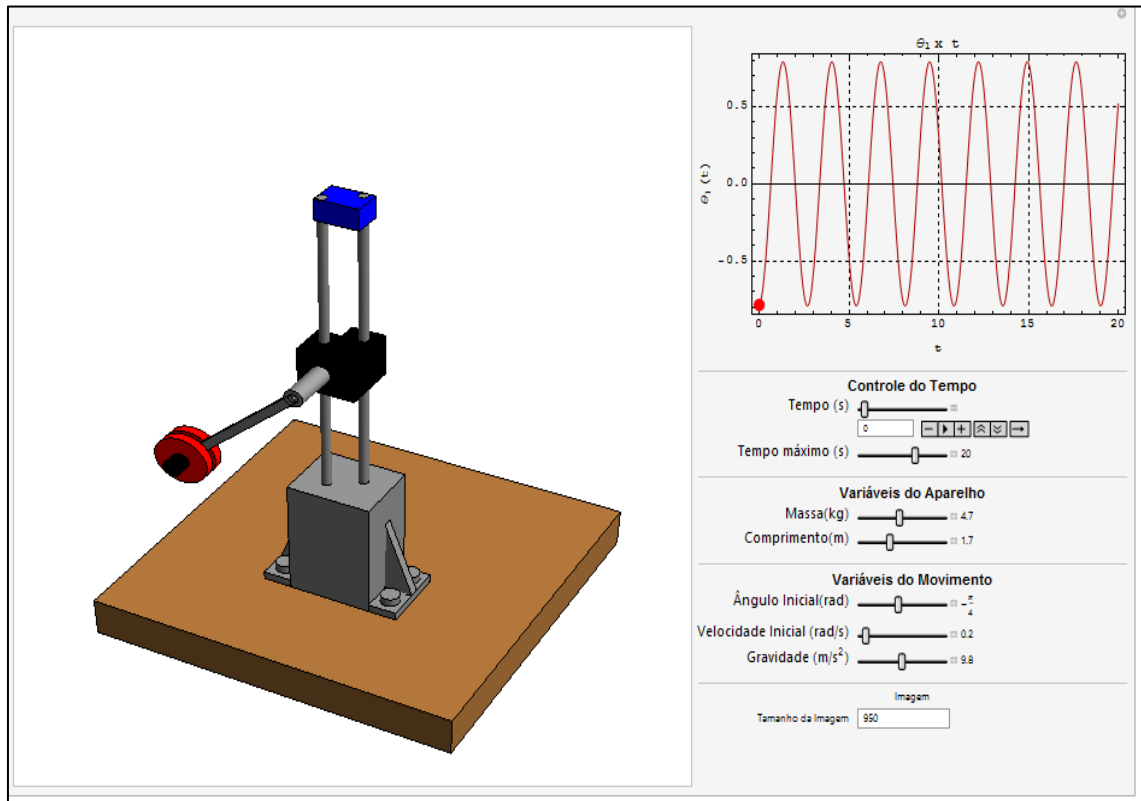


Figura 30 – Tela Principal da Pimulação do Pêndulo Simples.

É importante que o professor ressalte que essa tela está dividida em 3 áreas sendo uma a da animação, outra a de um único gráfico nesse caso e a área de controle de parâmetros. Também é necessário que o professor acione o botão play do tempo e mostre a animação funcionando e sua modificação quando os parâmetros são alterados.

Agora seria interessante o professor lembrar os alunos do questionamento inicial antes da apresentação da simulação “será que realmente essa Equação.

$$\theta'' + \frac{g}{L} \text{sen}\theta = 0$$

descreve o movimento de um pêndulo simples?”

Agora que o grupo tem em mãos uma simulação que foi construída com o formalismo lagrangeano basta, para medir o sucesso ou fracasso desse formalismo, submeter a simulação a uma condição inicial que deverá produzir uma resposta conhecida obtida através de outras estruturas de resolução já conhecida pelos alunos como por exemplo calcular a velocidade mínima (Figura 31) que o pêndulo deve ter para conseguir dar uma volta completa usando apenas a conservação de energia e testar isso na simulação como sugerido a seguir.

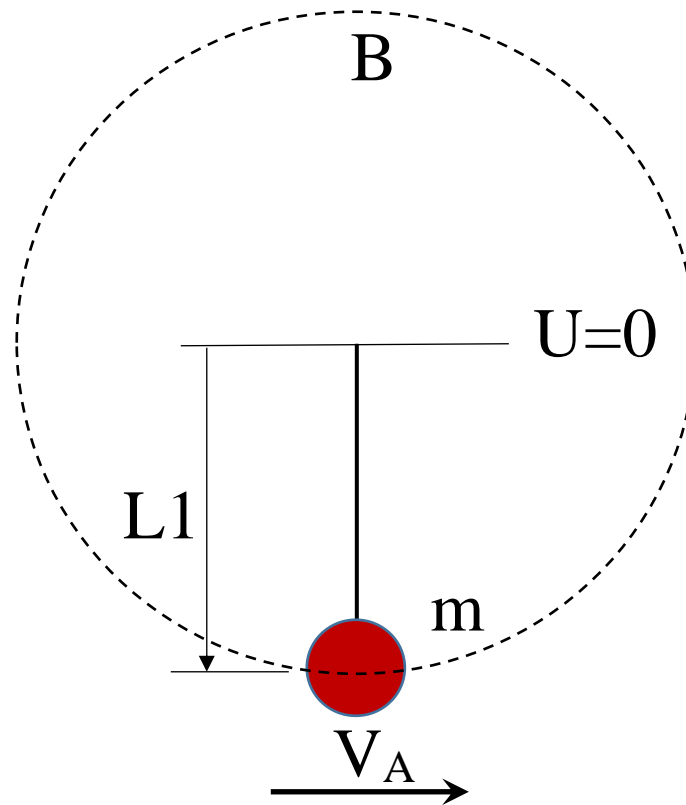


Figura 31 – Velocidade Mínima.

$$E_A = E_B$$

$$U_A + K_A = U_B + K_B$$

$$-mgL1 + \frac{mV_A^2}{2} = mgL1 + 0$$

$$V_A = \sqrt{2 \cdot g \cdot L1}$$

e como

$$V_A = \theta' \cdot R$$

Temos

$$\theta' = \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot L1}}{L1}$$

para $L = 2,5\text{m}$ e $g = 10\text{m/s}^2$ chegamos a

$$\theta' = 4 \text{ rad/s}$$

Agora basta o professor ir a área de controle de parâmetros e colocar no item Comprimento da haste (m) valor 2,5, no item Ângulo inicial (rad) valor 0 no item Velocidade inicial (rad/s) valor 4 e finalmente no item Gravidade (m/s^2) impor o valor 10 e acionar o botão play do tempo para observar a situação de velocidade mínima para uma volta completa mostrada pela animação e pelo gráfico. Pode-se ainda explorar o valor de 4,1 e 3,9 o item Velocidade inicial (rad/s) na simulação para mostrar que o valor 4 é realmente aquele que divide dois comportamentos distintos para esse sistema; executar ou não uma volta completa.

Assim o professor pode agora argumentar que o formalismo lagrangeano consegue representar muito bem essa situação uma vez que uma simulação computacional elaborada com sua estrutura responde da forma esperada com relação a resultados previstos.

O professor pode, ao fim da aula, ressaltar o benefício de se ter uma simulação computacional para testar os cálculos realizados no papel e ainda para conseguir a resolução numérica das equações de movimento de sistemas sem ter necessariamente que conseguir ao menos montar a lagrangeana do sistema, mas apenas fornecer as funções $x(t)$ e $y(t)$ em relação a $\theta(t)$.

5.2 Aulas 2

A aula 2 está planejada para esgotar o segundo momento pedagógico – Organização do Conhecimento e iniciar o desenvolvimento do terceiro momento pedagógico – Aplicação do Conhecimento sendo que este último é aquele no qual estimula-se o estudante a aplicar o conhecimento adquirido no momento anterior em situações diferentes das já apresentadas, com o intuito de que o estudante se aproprie realmente do conteúdo apresentado.

Deve-se começar esta aula retomando rapidamente parte da aula anterior, ou seja, mostrando a simulação do Pêndulo Simples, escrevendo a lagrangeana do sistema e a equação de Euler-Lagrange para esse sistema e comparando com as equações encontradas pelo programa. É interessante também lembrar a situação da velocidade angular inicial mínima no ponto mais baixo da trajetória necessária para executar uma volta completa.

Como essa é uma outra aula mas que ainda contempla o segundo momento pedagógico – Organização do Conhecimento se faz necessário a abordagem de um segundo problema para se atingir o nível almejado no segundo momento pedagógico, para tal foi pensado a apresentação de um segundo problema seguido por sua respectiva simulação, sendo então escolhido o problema do Pêndulo Duplo. É bastante interessante a apresentação desse segundo problema por se tratar de uma situação semelhante a do pêndulo simples no que diz respeito ao equacionamento mas que apresenta suas particularidades que vão permitir ao aluno distinguir os aspectos gerais do formalismo lagrangeano para serem aplicados em outros problemas como por exemplo a equação de Euler-Lagrange definida para duas variáveis (θ_1 e θ_2). Outro aspecto bastante relevante pode ser apresentado aqui que é a já comentada anteriormente vantagem algébrica que o formalismo Lagrangeano apresenta para o equacionamento deste problema com relação ao formalismo newtoniano, o professor pode abordar este aspecto mostrando uma possível abordagem newtoniana do problema como a que apresentamos no capítulo 3 apenas com slides e depois equacionar o problema juntamente com os alunos usando o formalismo lagrangeano até a equação de Euler-Lagrange (Equação 1).

A exemplo do que foi feito na aula 1 com relação a apresentação da primeira simulação, sugerimos aqui algo semelhante mas que pode ser feito com uma velocidade um pouco maior:

- Mostrar a estrutura responsável por montar a lagrangeana do sistemas e as equações de Euler-Lagrange conforme a Figura a seguir:

```
Lagrangiana[T_, V_, Q_: 0, genCoords_List] :=
Module[{L = T - V}, (D[D[L, D[#, t]], t] - D[L, #] == Q) & /@ coord]
```

Figura 32 – Estrutura de Montagem da Lagrangeana do Sistema.

- Apresentar o equacionamento das coordenadas em forma de função que agora serão quatro por termos duas massas (m_1 e m_2), conforme a Figura 33 a seguir:

<code>coord = {θ1[t], θ2[t]}</code>
<code>{θ1[t], θ2[t]}</code>
<code>x1[t_] = L1 * Sin[θ1[t]]</code>
<code>L1 Sin[θ1[t]]</code>
<code>y1[t_] = -L1 * Cos[θ1[t]]</code>
<code>-L1 Cos[θ1[t]]</code>
<code>x2[t_] = x1[t] + L2 * Sin[θ2[t]]</code>
<code>L1 Sin[θ1[t]] + L2 Sin[θ2[t]]</code>
<code>y2[t_] = y1[t] - L2 * Cos[θ2[t]]</code>
<code>-L1 Cos[θ1[t]] - L2 Cos[θ2[t]]</code>

Figura 33 – Equacionamento as Coordenadas em Forma de Função.

- Apresentar a montagem das energias cinéticas (T) e potencial (V) e as respectivas Lagrangeanas do sistema e suas equações de Euler-Lagrange, é importante que o professor chame a atenção dos alunos para a complexidade das equações que estão sendo encontradas pelo programa com relação ao grande número de termos conforme a Figura 34 a seguir:

<code>T = (1/2) * m1 ((x1'[t])^2 + (y1'[t])^2) + (1/2) * m2 ((x2'[t])^2 + (y2'[t])^2);</code> <code>V = m1 * g * y1[t] + m2 * g * y2[t];</code> <code>Q = 0;</code>
<code>lagrange = Lagrangiana[T, V, Q, coord] // FullSimplify</code>
<code>{L1 (L2 m2 Sin[θ1[t] - θ2[t]] θ2'[t]^2 +</code> <code>(m1 + m2) (g Sin[θ1[t]] + L1 θ1''[t]) + L2 m2 Cos[θ1[t] - θ2[t]] θ2''[t]) == 0,</code> <code>L2 m2 (g Sin[θ2[t]] - L1 Sin[θ1[t] - θ2[t]] θ1'[t]^2 + L1 Cos[θ1[t] - θ2[t]] θ1''[t] + L2 θ2''[t]) == 0}</code>
<code>eq1 = lagrange[[1]]</code>
<code>L1 (L2 m2 Sin[θ1[t] - θ2[t]] θ2'[t]^2 +</code> <code>(m1 + m2) (g Sin[θ1[t]] + L1 θ1''[t]) + L2 m2 Cos[θ1[t] - θ2[t]] θ2''[t]) == 0</code>
<code>eq2 = lagrange[[2]]</code>
<code>L2 m2 (g Sin[θ2[t]] - L1 Sin[θ1[t] - θ2[t]] θ1'[t]^2 + L1 Cos[θ1[t] - θ2[t]] θ1''[t] + L2 θ2''[t]) == 0</code>

Figura 34 – Energias Cinéticas, Potenciais e as Respectiveas Lagrangeanas do Sistema.

- Apresentar a rotina de resolução numérica das duas equações de Euler-Lagrange encontradas pelo programa conforme a Figura 35 e as variáveis que irão armazenar essas soluções ($\theta_a[t]$ e $\theta_b[t]$).

```

Style [Manipulate[

solucao =
NDSolve[
{L1 (L2 m2 Sin[θ1[t] - θ2[t]] θ2'[t]^2 + (m1 + m2) (g Sin[θ1[t]] + L1 θ1''[t]) +
L2 m2 Cos[θ1[t] - θ2[t]] θ2''[t]) == 0,
L2 m2 (g Sin[θ2[t]] - L1 Sin[θ1[t] - θ2[t]] θ1'[t]^2 + L1 Cos[θ1[t] - θ2[t]] θ1''[t] + L2 θ2''[t]) ==
0,
θ1[0] == θ10, θ1'[0] == 0,
θ2[0] == θ20, θ2'[0] == v20},
{θ1[t], θ2[t]}, {t, 0, tmax}];

θa[t_] = θ1[t] /. First[solucao];
θb[t_] = θ2[t] /. First[solucao];

```

Figura 35 – Rotina de Resolução Numérica das Equações de Euler-Lagrange.

- Conforme mostrado na Figura 36, indicar para os alunos que os desenhos criados pelo programa usam as respostas das soluções numérica armazenadas nas variáveis $\theta_a[t]$ e $\theta_b[t]$ bem como os dois gráficos gerados nessa simulação.

```

Show[ {
Graphics3D[ {
(*****Móveis*****
(**Barral e Massa**)
Rotate[ {Gray, Cuboid[{-0.05, 0, 0}, {0.05, 0.05, -L1}], θa[t], {0, -1, 0}, {0, 0, 0}],
Gray, Cylinder[{{0, 0, 0}, {0, 0.05, 0}}, 0.05],

(*Red, Sphere[{L1*Sin[θa[t]], 0, -L1*Cos[θa[t]]}, 0.2*(m1)^(1/3)]*),
Red, Cylinder[{{x1[t], 0.05, y1[t]}, {x1[t], 0.15, y1[t]}}, 0.2*(m1)^(1/4)],
Red, Cylinder[{{x1[t], 0, y1[t]}, {x1[t], -0.10, y1[t]}}, 0.2*(m1)^(1/4)],
Black, Cylinder[{{x1[t], 0, y1[t]}, {x1[t], -0.25, y1[t]}}, 0.1],

```

Figura 36 – Comandos de Criação da Animação.

- e finalmente apresentar aos alunos a parte gráfica da simulação na qual é importante novamente destacar que a mesma está dividida entre 3 áreas (animação, gráficos e controles de parâmetros) conforme a Figura 37.

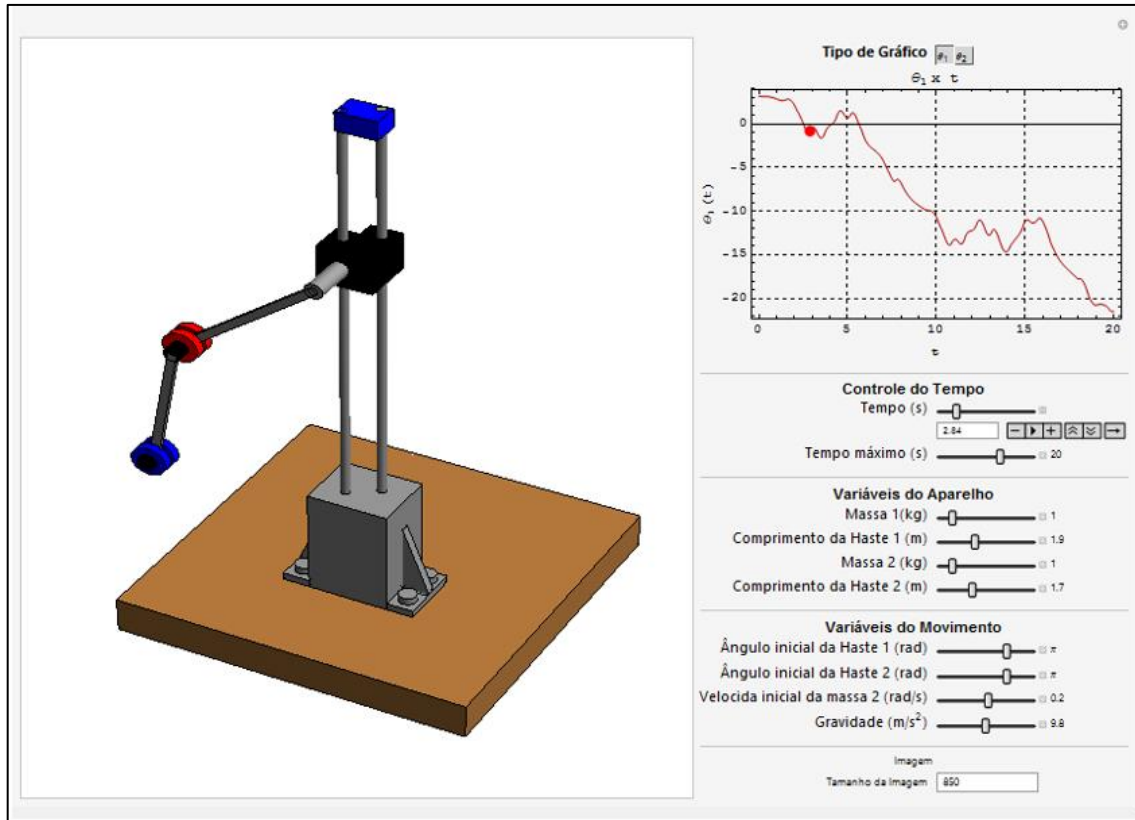


Figura 37 – Tela Principal da Animação do Pêndulo Duplo.

Note que agora, na área de gráficos temos duas possibilidades de visualização sendo o gráfico de $\theta_1 x t$ e $\theta_2 x t$, diferentemente da simulação do pêndulo simples no qual tínhamos apenas um tipo de gráfico, sendo assim, é importante o professor chamar a atenção para essa diferença. Além disso o professor deverá ainda mostrar rapidamente que essa simulação também é sensível as modificações dos parâmetros da área de controle (massas, comprimentos de hastes, gravidade, etc).

Nesse terceiro e último momento pedagógico os estudantes devem colocar em prática os conhecimentos apresentados até aqui em situações diferentes das duas apresentadas anteriormente afim de que, através do esforço pessoal ou em grupo para resolver os novos problemas propostos, cada estudante internalize realmente os conceitos que até o presente momento foram apresentados apenas na lousa, slides ou por meio das duas simulações já apresentadas.

Para que esse novo momento pedagógico ocorra de maneira eficiente e eficaz planejamos dividir os alunos em grupos de 3 ou 4 pessoas de forma que possam interagir entre si para, através da troca de suas impressões, chegarem de maneira mais rápida e segura as soluções dos problemas que o professor irá propor.

Após os grupos formados o professor deve apresentar as 4 situações a seguir:

- Pêndulo Triplo.

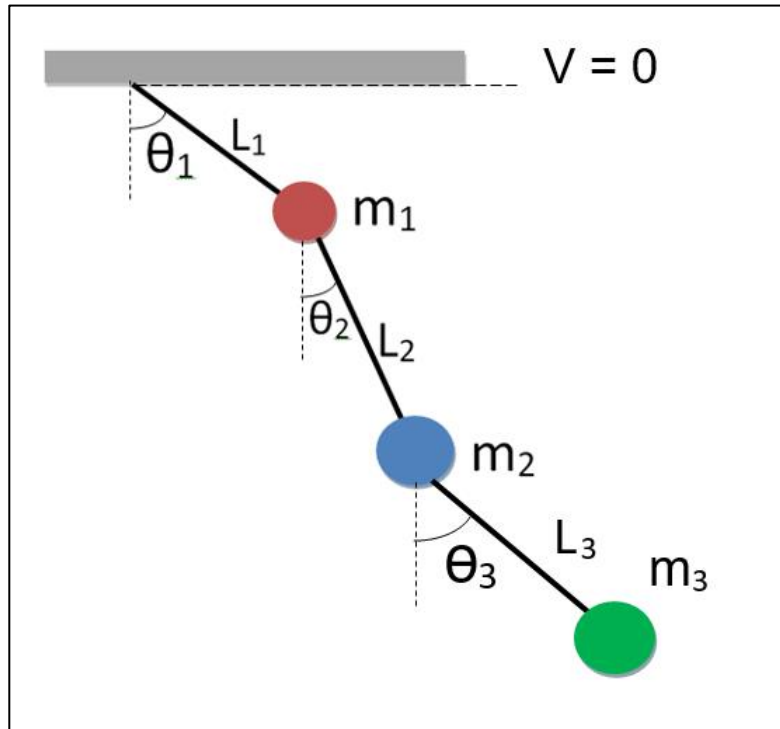


Figura 38 – Pêndulo Triplo.

- Pêndulo com Movimento Vertical.

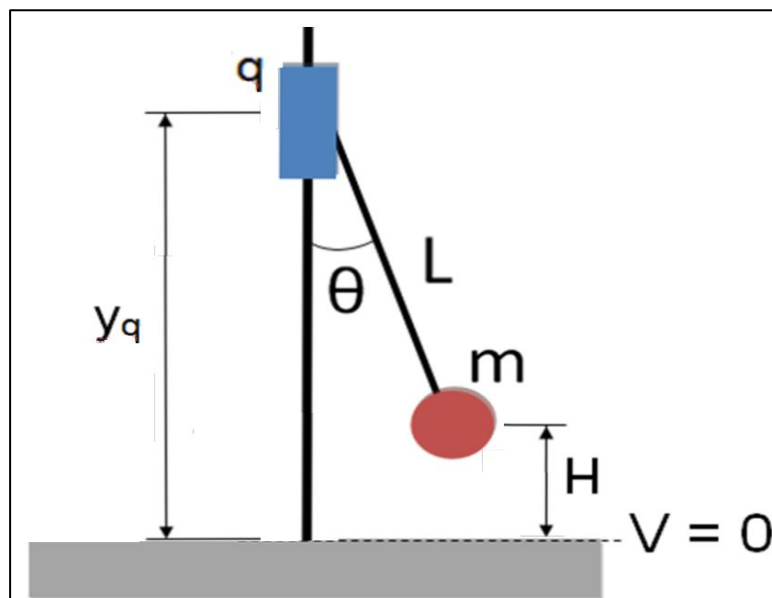


Figura 39 – Pêndulo Com Movimento Vertical.

Para o qual $y_q = A\cos(\omega t)$

- Pêndulo com Movimento Horizontal.

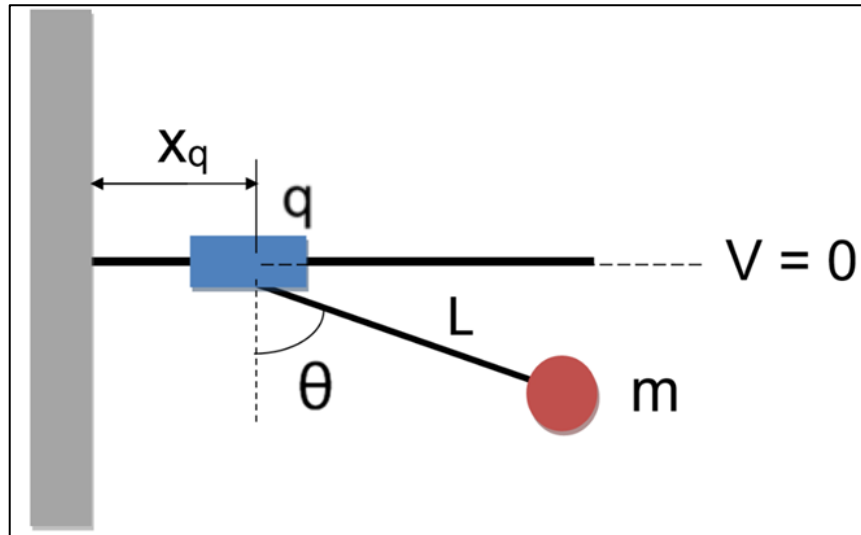


Figura 40 – Pêndulo Com Movimento Horizontal.

Para o qual $x_q = A\cos(\omega t)$

- Pêndulo Elástico.

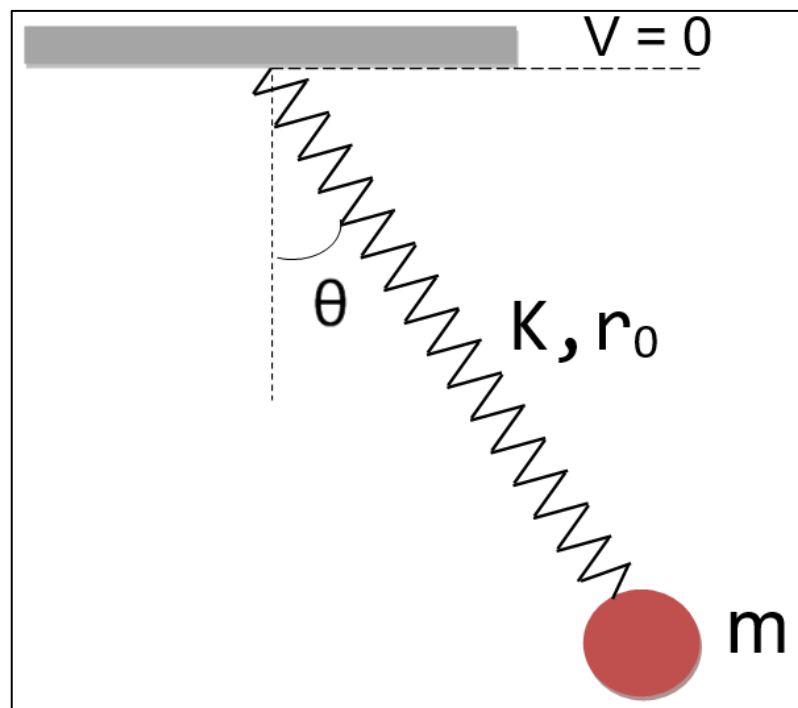


Figura 41 – Pêndulo Elástico.

e pedir que cada grupo determine para cada situação:

I - as coordenadas generalizadas;

II - as energias cinéticas e potencial;

III - a lagrangeana de cada sistema;

IV - e as equações de Euler-Lagrange para cada coordenada generalizada.

Obviamente enquanto os grupos discutem as possíveis soluções o professor deve estar acessível para dialogar com cada grupo pois é nesse momento que as dúvidas realmente surgem mas é também através superação dessas dificuldades que os conceitos são realmente internalizados e cada indivíduo torna-se autônomo para aplicar as novas ferramentas em outras situações.

Após o professor perceber que todos os grupos propostos para chegaram a algum tipo de solução para cada item, é hora de apresentar para toda a sala uma possível resposta para cada item e discutir com os alunos o caminho trilhado para chegar-se a cada uma das respostas, a seguir temos uma sugestão de resposta para cada item proposto anteriormente:

Pêndulo Triplo

Coordenadas generalizadas são θ_1, θ_2 e θ_3

$$x_1 = L_1 \text{sen}\theta_1 ; y_1 = -L_1 \text{cos}\theta_1$$

$$x_2 = L_1 \text{sen}\theta_1 + L_2 \text{sen}\theta_2 ; y_2 = -(L_1 \text{cos}\theta_1 + L_2 \text{cos}\theta_2)$$

$$x_3 = L_1 \text{sen}\theta_1 + L_2 \text{sen}\theta_2 + L_3 \text{sen}\theta_3 ; y_3 = -(L_1 \text{cos}\theta_1 + L_2 \text{cos}\theta_2 + L_3 \text{cos}\theta_3)$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 (x_1'^2 + y_1'^2) + \frac{1}{2} m_2 (x_2'^2 + y_2'^2) + \frac{1}{2} m_3 (x_3'^2 + y_3'^2)$$

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + m_3 g y_3$$

$$\mathcal{L} = T - V$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 (x_1'^2 + y_1'^2) + \frac{1}{2} m_2 (x_2'^2 + y_2'^2) + \frac{1}{2} m_3 (x_3'^2 + y_3'^2) - (m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + m_3 g y_3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta'} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1'} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2'} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_3'} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_3} \right) = 0$$

Pêndulo com Movimento Vertical.

Coordenada generalizada θ

$$x = L \sin \theta ; y = A \cos(\omega t) - L \cos \theta$$

$$T = \frac{1}{2} m (x'^2 + y'^2)$$

$$V = mg(A \cos(\omega t) - L \cos \theta)$$

$$\mathcal{L} = T - V$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (x'^2 + y'^2) - mg(A \cos(\omega t) - L \cos \theta)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta'} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \right) = 0$$

Pêndulo com Movimento Horizontal.

Coordenadas generalizadas r e θ

$$T = \frac{1}{2} m (r'(t)^2 + r(t)^2 \theta'(t)^2)$$

$$V = \frac{1}{2}k(r(t) - r_0)^2 - mgr(t)\cos(\theta(t))$$

$$\mathcal{L} = T - V$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(r'(t)^2 + r(t)^2\theta'(t)^2) - \left(\frac{1}{2}k(r(t) - r_0)^2 - mgr(t)\cos(\theta(t))\right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r'} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta'} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \right) = 0$$

Após apresentar essas possíveis respostas para cada uma das quatro situações problemas o professor pode chamar a atenção para o fato de ser extremamente oneroso conseguir obter manualmente as equações de Euler-Lagrange ou até mesmo a Lagrangeana de sistemas como o pêndulo triplo, mas que com as simulações deste trabalho ou com outras ferramentas computacionais torna-se bastante simples, é importante frisar ainda que somente aquele que realmente domina os conceitos físicos e matemáticos envolvidos em cada uma dessas situações é que tem possibilidade de beneficiar-se das facilidades de tais ferramentas computacionais bem como entender os resultados que elas produzem do contrário, quem tenta fazer uso dessas ferramentas assemelha-se a uma criança que ainda não dominando as quatro operações básicas da aritmética brinca com uma calculadora científica sem ter noção das respostas que tal aparelho fornece.

Finalmente o professor apresenta as 4 simulações deste trabalho (pêndulo triplo, pêndulo com movimento vertical, pêndulo com movimento horizontal e pêndulo elástico) de forma semelhante a apresentação já feita com as simulações do pêndulo simples e pêndulo duplo, ou seja, destacando em cada uma as estruturas que irão gerar as Lagrangeanas dos sistemas, as equações de Euler-Lagrange e, desta vez principalmente, chamando a atenção para as resoluções que o programa fornece para cada equação (Energia Cinética, Energia Potencial, Lagrangeanas, etc) e ainda conseguindo fornecer soluções numéricas das equações encontradas e fazer animações e gráficos dessas soluções, algo que vai muito além do que se conseguiria fazer apenas com caneta e papel ou ainda giz e lousa.

5.3 Aula 3

As A aula de número 3 é a última das três aulas planejadas para esta atividade e trata única e exclusivamente do terceiro e último momento pedagógico que é o da Aplicação do Conhecimento. Essa aula foi planejada quase que exclusivamente sobre atividades de investigação de situações criadas para serem respondidas pelos alunos utilizando as simulações computacionais.

O professor deverá começar essa aula retomando rapidamente as 4 situações problemas estudadas na aula anterior e de forma rápida, suas respectivas lagrangeanas e equações de Euler-Lagrange, poderá também abrir uma das simulações e relembrar a forma como essas equações aparecem no programa e como são resolvidas dentro da estrutura dos mesmos. A seguir o professor pode anunciar que nesta aula o trabalho em equipe dos alunos será de investigação mais profunda dos resultados obtidos das equações da aula passada, e abrindo a simulação do pêndulo simples exemplificar o trabalho desta aula da seguinte forma: “Será que o movimento do pêndulo simples depende da massa?” Alterar então a massa na área de controle de parâmetros e verificar que não ocorre nenhuma modificação no movimento do pêndulo. Destacar para os alunos que a equação de Euler –Lagrange encontrada pelo programa

$$L1m(g\text{Sin}[\theta[t]] + L1\theta''[t]) == 0$$

Pode ser reescrita no seguinte formato:

$$L\theta''(t) + g\text{sen}(\theta(t)) = 0$$

Equação essa que realmente não apresenta dependência da massa m.

O professor pode da mesma forma levantar a questão: “O que se espera do comportamento desse pêndulo de aumentarmos seu comprimento?”. Da mesma forma altera-se o comprimento do pêndulo na área de controle de parâmetros e verifica-se que quanto maior o comprimento do pêndulo maior será seu período. Por último o professor pode perguntar “Será que o pêndulo simples é um sistema que apresenta grande sensibilidade a mudanças de condições iniciais?”. Ao alterar os parâmetros como comprimento, gravidade, velocidade inicial ou posição inicial é possível perceber que esse sistema não altera bruscamente seu comportamento chegando-se assim a conclusão de que esse sistema apresenta pouca sensibilidade a modificações nas condições iniciais. O professor anuncia então que este será o

trabalho dos alunos, investigar o comportamento dos sistemas estudados na aula passada no que diz respeito a sensibilidade as mudanças ocorridas nas condições iniciais bem como entender melhor de que forma os parâmetros como massa, gravidade, comprimentos, influenciam no movimento de seus componentes e pede para que os alunos dividam-se em grupos de 3 ou 4 pessoas.

A seguir o professor anuncia que as questões respondidas por eles devem ser as seguintes:

Com relação ao pêndulo duplo e pêndulo triplo:

I - As massas e a gravidade tem influência nos movimentos desse sistemas? De que forma e porque ocorre essa influência?

II - Esses sistemas apresentam grande sensibilidade as mudanças de condições iniciais? Como chegaram a essa conclusão? Quais dos dois sistemas parece ser mais sensível a mudanças de condições iniciais?

Com relação ao pêndulo com movimento vertical e movimento horizontal as questões respondidas devem ser:

I - As massas e gravidade interferem nos movimentos e que modo? Explique porque.

II - A amplitude e a pulsação interferem de que modo nos movimentos dos pêndulos?

III - Os sistemas são tão sensíveis a mudanças de comprimentos das hastes ou mudanças nas massas quanto os pêndulos duplo e triplos?

Com relação ao pêndulo elástico as questões respondidas devem ser:

I - A massa, constante elástica e comprimento inicial da mola interferem no movimento do pêndulo elástico? Como cada uma dessas características interferem no movimento?

II - Esse sistema sempre apresenta movimento periódico? Como chegaram a essa conclusão?

Para levar os alunos a última investigação o professor exhibe o filme *Control of Double Inverted Pendulum* (<https://www.youtube.com/watch?v=JpNAhKT7yY4>) e pede para que encontrem os valores para o movimento equivalente ao pêndulo invertido nas simulações do pêndulo com movimento vertical.

Após alguns minutos de tentativas dos alunos o professor pode mostrar uma das possibilidades de movimento de pêndulo invertido da simulação Pêndulo com Movimento Vertical, colocando na área de controle de parâmetros os seguintes valores:

$$\text{Massa (Kg)} = 10$$

$$\text{Comprimento (m)} = 3,4$$

$$\text{Ângulo Inicial(rad)} = \pi$$

$$\text{Velocidade Inicial (rad/s)} = 0.2$$

$$\text{Amplitude (m)} = 2$$

$$\text{Pulsção do Suporte (rad/s)} = 5$$

$$\text{Gravidade (m/s}^2\text{)} = 9,8$$

Pode-se ainda pedir que os alunos coloquem exatamente esses valores em suas simulações e descubram quais desses parâmetros não influenciam para modificação do movimento de pêndulo invertido.

Esta é a sugestão para um conjunto de três aulas de aproximadamente 100 minutos cada uma para o ensino superior para uma sala de aproximadamente 40 alunos com acesso de um computador para pelo menos cada 3 alunos com enfoque principal de administrar o conteúdo inicial de formalismo lagrangeano utilizando as seis simulações apresentadas neste trabalho para exemplificação e fixação do conhecimento e interatividade com simulação de sistemas muito próximos da realidade.

6 Um Exemplo de Aplicação em Laboratório Didático

Este Capítulo versa sobre o uso de uma das simulações elaboradas e que foi utilizada como recurso pedagógico com alunos de graduação do curso de engenharia do primeiro ano do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) na matéria intitulada Laboratório de FIS-26 e coordenada pelo professor José Silvério Edmundo Germano que é o orientador deste trabalho. Tal matéria tem por objetivo propiciar o contato dos alunos com experimentos didáticos que auxiliem, conforme a ementa do curso, o aprendizado de alguns tópicos de Mecânica Clássica tais como Dinâmica do Corpo Rígido, Movimento Oscilatório, Movimento Ondulatório, Gravitação e Mecânica Analítica.

É importante esclarecer, antes de continuarmos este capítulo, que o método de trabalho escolhido pela equipe coordenadora desta matéria não é aquele que tradicionalmente é adotado nos cursos de laboratórios para engenharia no qual os alunos são separados em pequenos grupos e, geralmente após uma introdução teórica dada pelo professor da matéria, precisam coletar dados de dispositivos previamente montados por um técnico sobre bancadas e posteriormente apresentarem um relatório que no geral contém uma descrição dos conceitos físicos que regem o funcionamento de tal experimento, uma descrição do experimento, os dados coletados, uma comparação entre esses dados coletados e aqueles previstos pelo modelo teórico e uma conclusão que deve entre outras possibilidades conter hipóteses que possam esclarecer as causas das diferenças entre os valores previstos pelo modelo teórico e aqueles coletados pelo grupo de alunos.

A estratégia escolhida pela coordenação dessa matéria se diferencia da estratégia comumente adotada em laboratórios didáticos descrita anteriormente principalmente pelo fato dos alunos poderem sugerir quais problemas eles mesmos irão estudar e proporem experimentos que abordem os conceitos necessários para a resolução de tais problemas, desde que essas situações tenham o envolvimento necessário com os assuntos da ementa da matéria Laboratório de FIS-26. Essa metodologia de trabalho baseia-se em uma estratégia de ensino denominada PBL (Problem Based Learning), também denominada ABP (Aprendizagem Baseada em Problemas). O PBL é uma estratégia de ensino-aprendizagem que tem em seu foco principal os estudantes que vão, paulatinamente, tornando-se responsáveis por sua própria aprendizagem e assim, dentro desse processo, vão tornando-se cada vez mais independentes do professor, desta maneira a responsabilidade do professor é fornecer orientações e materiais didáticos que potencializem a aprendizagem de seu grupo de alunos.

Descrição da metodologia de trabalho no laboratório.

Ao matricular-se no primeiro semestre do curso de engenharia do ITA o aluno está automaticamente matriculado na matéria Laboratório de FIS-26 tendo que comparecer as aulas que no primeiro semestre de 2017 ocorreram todas as tardes ao longo da semana.

Dentro da metodologia norteadora (PBL) o foco principal de cada professor durante os encontros no laboratório é motivar, orientar e fornecer material de apoio aos alunos, nas quais a meta a ser atingida é a compreensão do problema a ser estudado e que deve ser montado sobre a bancada de trabalho do laboratório. Desta forma, no primeiro dia os alunos formam duplas e são apresentados aos seguintes tópicos: ementa do curso, a metodologia PBL com a qual terão que trabalhar, os assuntos da matéria que terão que pesquisar nos computadores do próprio laboratório com os quais eles têm acesso a periódicos que comumente trazem artigos sobre experimentos didáticos como a Revista Brasileira de Ensino de Física ou Journal Physics pesquisa nome, entre outras revistas. Logo em seguida a todas as pesquisas efetuadas, cada grupo escolhe tres experimentos que abordem os tópicos da ementa e que serão construídos e analisados durante o curso. Para cada uma das montagens a serem estudadas e analisadas todos os grupos terão que explorar vários aspectos do problema, tais como: uma simulação computacional que pode ser feita em qualquer programa como por exemplo Mathematica[®] , Interactive Physics, Algodo, etc; analisar os dados obtidos por vídeo no Tracker que trata-se de um software freeware (grátis) de vídeo analise que permite extrair por exemplo, dados como posição, velocidade, aceleração de vídeos simples de corpos em movimento; e um relatório escrito no formato de um artigo científico.

Como já se espera, nem todas as duplas conseguem propor bons experimentos para todas as situações ou experimentos que possam ser construídos dentro das limitações do laboratório, assim, em alguns casos, é necessário que os professores sugiram experimentos que o laboratório já possui em seu acervo. Esse foi o ocorrido com 4 duplas de alunos no primeiro semestre de 2017e, entre outros experimentos, foi-lhes sugerido a montagem experimental que denominamos Carretel.

O Carretel que é composto de um cilindro oco de aço de Diâmetro Interno de aproximadamente 90 mm com altura aproximada de 100 mm onde foram fixadas dois discos sem furos nas bordas de Diâmetro Externo de 150mm aproximados, a massa total desse Carretel é de aproximadamente 2,0 Kg (Figura 42).

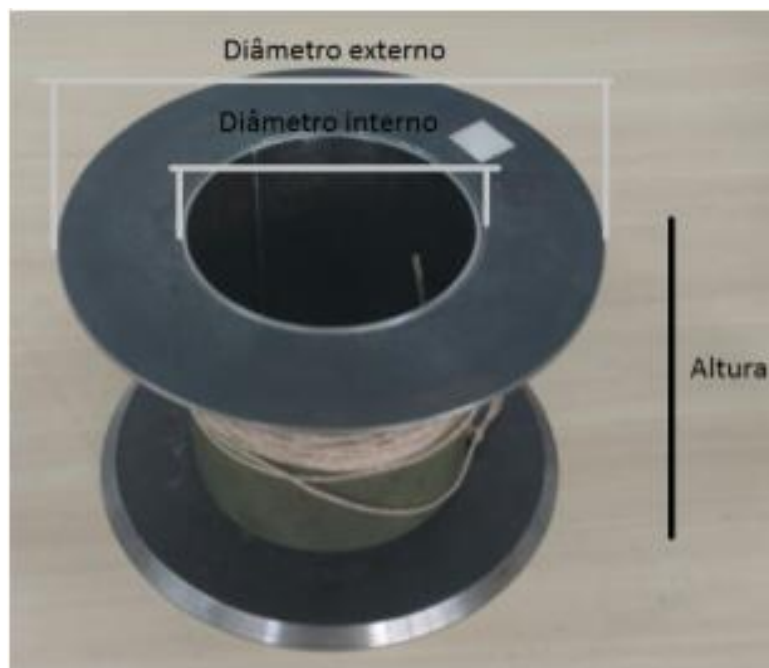


Figura 42 – Carretel (Relatório Dupla 1).

O objetivo dessa montagem experimental é estudar a dinâmica de rotação de um corpo rígido, sendo assim, é enrolado um barbante ao corpo cilíndrico do carretel e, com o mesmo na horizontal, esse barbante é puxado. Nota-se, de maneira bastante curiosa, que se o ângulo que o fio faz com a horizontal for abaixo de um determinado valor o carretel gira em um sentido, mas se o ângulo for acima de um determinado valor o sentido de giro do carretel é o oposto. O trabalho dessas 4 duplas de alunos era o de entender e explicar esses movimentos.

Diferentemente do que geralmente se faz nesse laboratório resolvemos disponibilizar para os alunos, além do carretel, duas simulações desenvolvidas no Mathematica[®]. O intuito de fornecer essas duas simulações aos grupos antes deles mesmo produzirem suas próprias simulações foi o de perceber qual o efeito que o convívio dos alunos com simulações de experimentos poderia impactar o desenvolvimento de seus trabalhos no laboratório.

A seguir temos uma breve apresentação das duas simulações.

As duas simulações são iguais com relação ao modelo matemático que aborda o fenômeno conforme se segue:

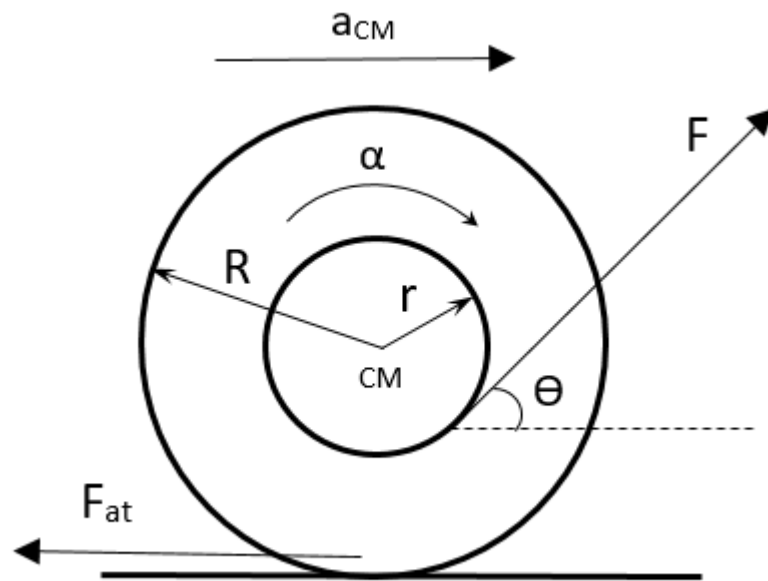


Figura 43 – Carretel - Leis de Newton.

Aplicando a segunda lei de Newton temos:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_{cm} \\ F \cos \theta - F_{at} &= ma_{cm} \end{aligned} \quad (21)$$

Aplicando agora a somatória de torques temos:

$$\begin{aligned} \sum \tau_{cm} &= \alpha I_{cm} \\ -F \cdot r + F_{at} \cdot R &= \alpha I_{cm} \end{aligned} \quad (22)$$

Se considerarmos exclusivamente o rolamento sem deslizamento podemos admitir que $a_{cm} = \alpha \cdot R$ e desta forma, isolando-se a força de atrito em 21 e 22 temos:

$$\alpha = \frac{(r - R \cos \theta) F}{I_{cm} + mR^2} \quad (23)$$

Onde α é a aceleração angular, R é o raio externo dos discos, r é o raio do cilindro, F é a força de tração aplicada ao barbante, θ é o ângulo que o barbante faz com a horizontal e I_{cm} é o momento de inércia com relação ao centro de massa do carretel.

Note que se aplicarmos a condição $\alpha = 0$, determinamos o ângulo crítico θ_C :

$$\theta_C = \arccos\left(\frac{r}{R}\right)$$

de forma que se:

$\theta > \theta_C$: a aceleração do centro de massa é negativa e o carretel move-se para a esquerda;

$\theta = \theta_C$: a aceleração do centro de massa é 0 e o carretel não apresenta movimento de rotação e se

$\theta < \theta_C$: a aceleração do centro de massa é positiva e o carretel move-se para a direita.

As duas simulações, como pode-se verificar na próxima figura, fazem uso da Equação 23 para estabelecer os movimentos das respectivas animações e produzir os gráficos.

```
Style [Manipulate[

(*Calculando Acel angular (alfa)*)
alfa = (r - R * Cos[teta]) * F / (Icm + m * (R ^ 2)) ;
If[alfa > 0, ur = 1 (*antiHorário*), ur = -1 (*Horario*)] ;
```

Figura 44 – Linhas de Comando Sobre a Equação 23.

Embora para as duas simulações os modelos matemáticos sejam os mesmos, essas se diferenciam na área referente a animação, de forma que uma delas contém apenas uma animação mais simples em duas dimensões e uma área de controle de parâmetros (Figura 45) enquanto outra, mais sofisticada, possui uma animação em três dimensões, uma área de controle de parâmetros e ainda uma área com dois gráficos que podem ser visualizados conforme a vontade do usuário sendo eles da posição em relação ao tempo ($s \times t$) e outro, da posição angular em relação ao tempo ($\theta \times t$) (Figura 46).

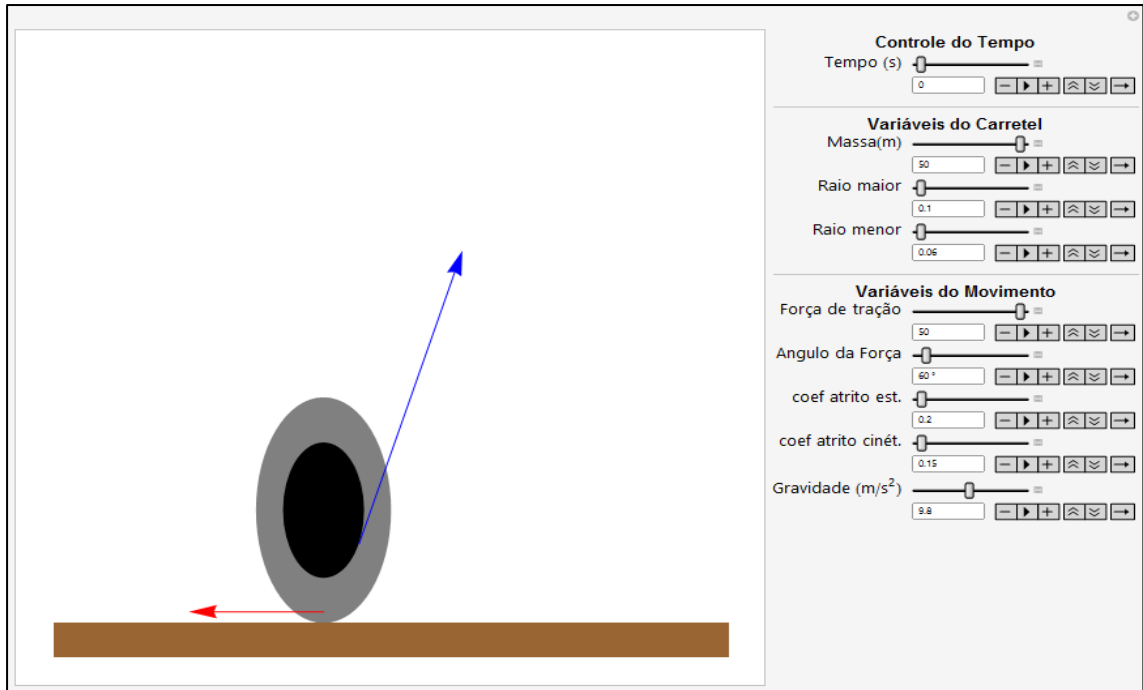


Figura 45 – Simulação Simples 2d.

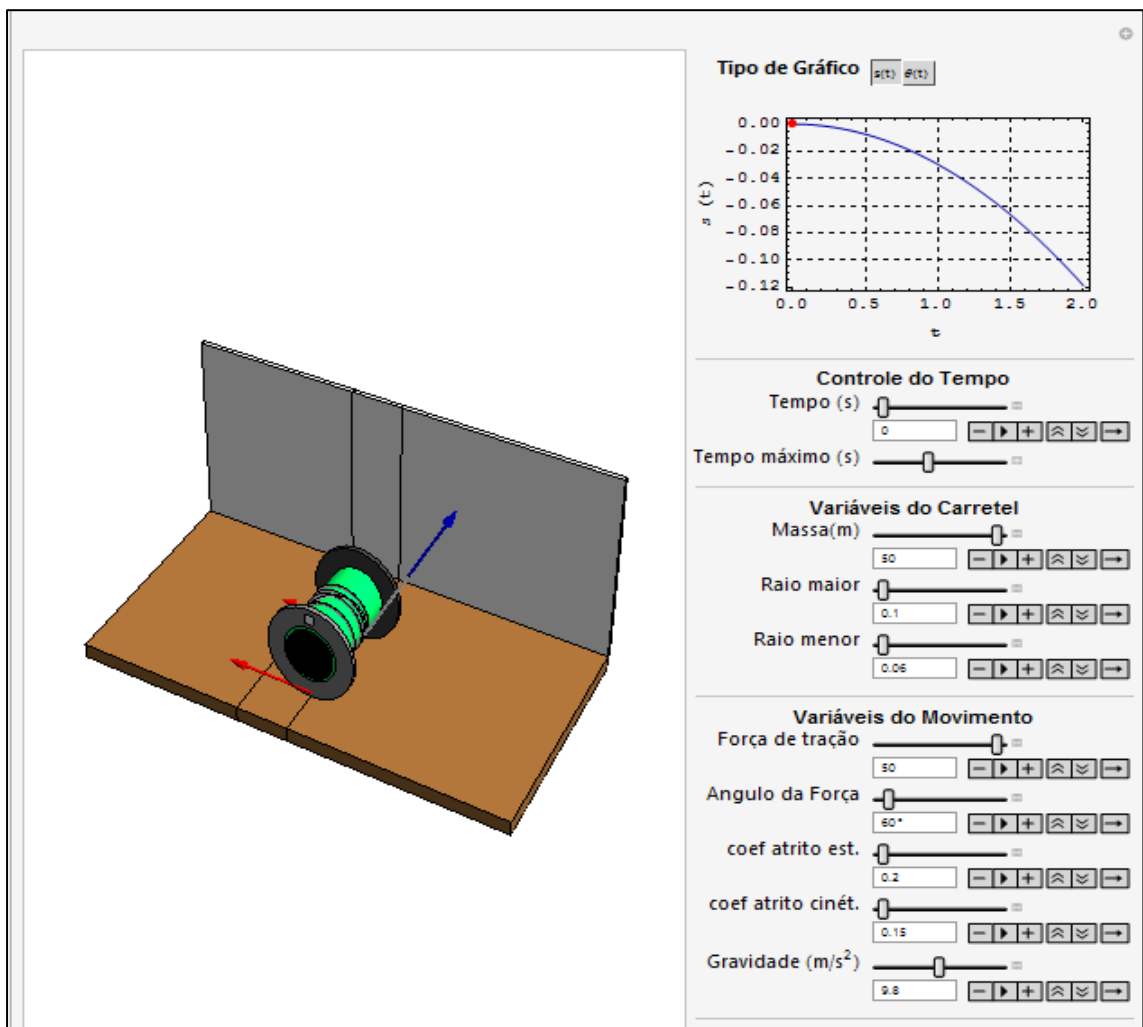


Figura 46 – Simulação sofisticada 3d.

Vale esclarecer que, embora as duas simulações forneçam os mesmos resultados uma vez que obedecem ao mesmo modelo matemático, houve uma intenção pedagógica ao fornecer duas simulações aos alunos ao invés de apenas uma delas, a simulação mais simples é de mais fácil compreensão com relação a sua estrutura interna de programação o que poderia propiciar aos alunos um entendimento mais fácil de como sua estrutura interna foi escrita, já a simulação mais sofisticada poderia levar os alunos a enxergar de modo mais imediato o experimento em si e ter uma visão mais realista de como é o arranjo experimental na realidade, além de servir como estímulo para que eles mesmos, em outras simulações, se esforcem para produzirem outras mais sofisticadas.

6.1 Resultados Obtidos

Antes de quaisquer resultados obtidos especificamente para essas quatro duplas de alunos que escolheram trabalhar com a montagem experimental do carretel é importante frisar que, de um modo geral, a aplicação da metodologia PBL no laboratório didático tem gerado melhores resultados com relação ao domínio do conteúdo proposto na ementa do curso que dificilmente se atingia quando tal matéria era trabalhada da maneira tradicional, e isso torna-se claramente perceptível não apenas ao final do semestre, mas sim durante todo o processo uma vez que a motivação e o envolvimento dos alunos com seu objeto de estudo são muito mais profundos pois os mesmos, ao serem convocados a participar de maneira ativa na elaboração dos experimentos, percebem-se responsáveis pelo seu aprendizado e, evidentemente, nota-se o crescimento de cada dupla na forma de abordagem de cada novo problema pois os mesmos vão aprimorando suas habilidades de lidar com as ferramentas e aquilo que era uma barreira a ser superada nos primeiros experimentos torna-se recurso facilitador na compreensão de novas situações.

Com relação específica as quatro duplas que trabalharam com o carretel percebemos um ganho de motivação para realizarem esse estudo uma vez que já tendo em mãos as simulações, conforme relato dos mesmos, a compreensão do que é relevante para os fenômenos envolvidos no experimento ocorreu de maneira muito mais rápida. Comumente, nesse tipo de montagem experimental, os alunos que não possuem a simulação previamente procuram determinar o valor de parâmetros irrelevantes como coeficientes de atrito com a superfície ou não percebem de imediato que terão que manter o ângulo aproximadamente constante de aplicação da força enquanto o carretel gira para sua filmagem, com esses quatro grupos isso não ocorreu de forma

que ao chegarem para realizar o experimento demonstraram um incomum nível de intimidade com os dispositivos como se já tivessem realizado esse experimento outras vezes.

É importante também destacar que uma das duplas que chamaremos de dupla 1 incorporou a simulação ao seu trabalho modificando-a ao acrescentar outros gráficos que originalmente não faziam parte da simulação mais sofisticada. Essa dupla dividiu os gráficos em dois tipos sendo eles, gráficos de resultado teóricos e gráficos de resultados práticos comparativos, os gráficos de resultados teóricos são um total de quatro gráficos sendo eles:

- a) Aceleração do centro de massa pelo ângulo de aplicação da força (Figura 47)
- b) Torque pelo ângulo de aplicação da força (Figura 48)
- c) Aceleração angular pelo ângulo de aplicação da força (Figura 49)
- d) Força de atrito pelo ângulo de aplicação da força (Figura 50)

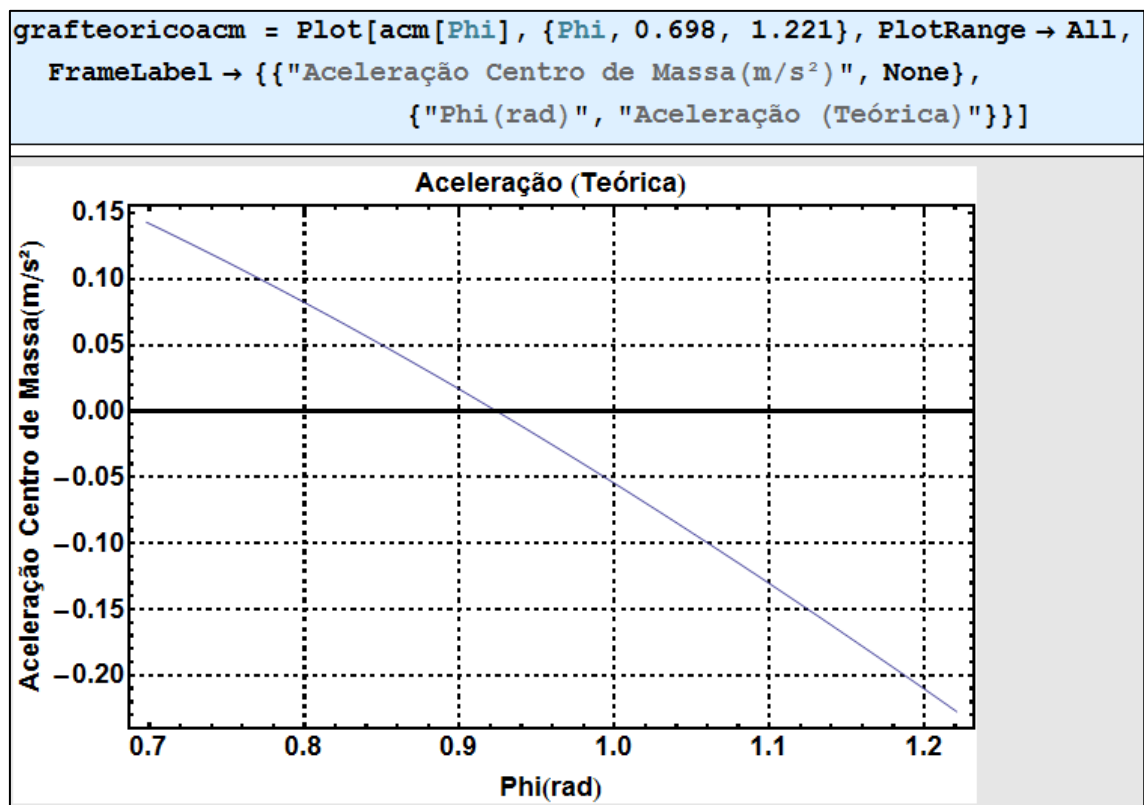


Figura 47 – a) Gráfico de Aceleração por Ângulo de Ação da Força.

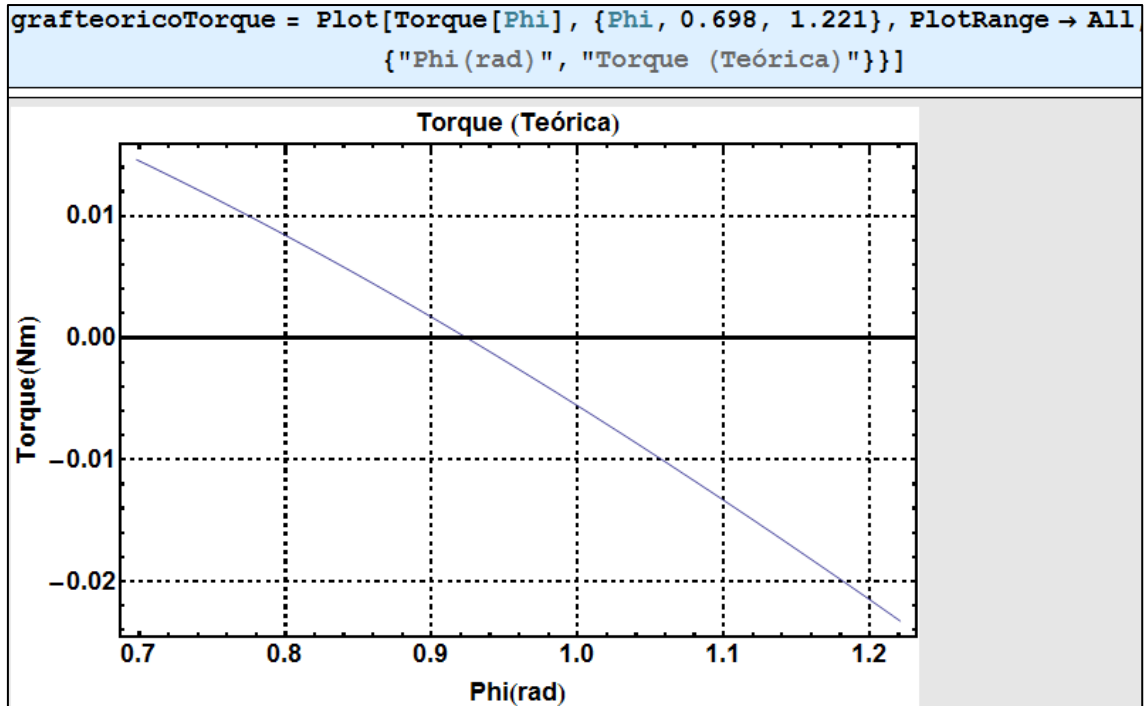


Figura 48 – b) Gráfico de Torque por ângulo de ação da força

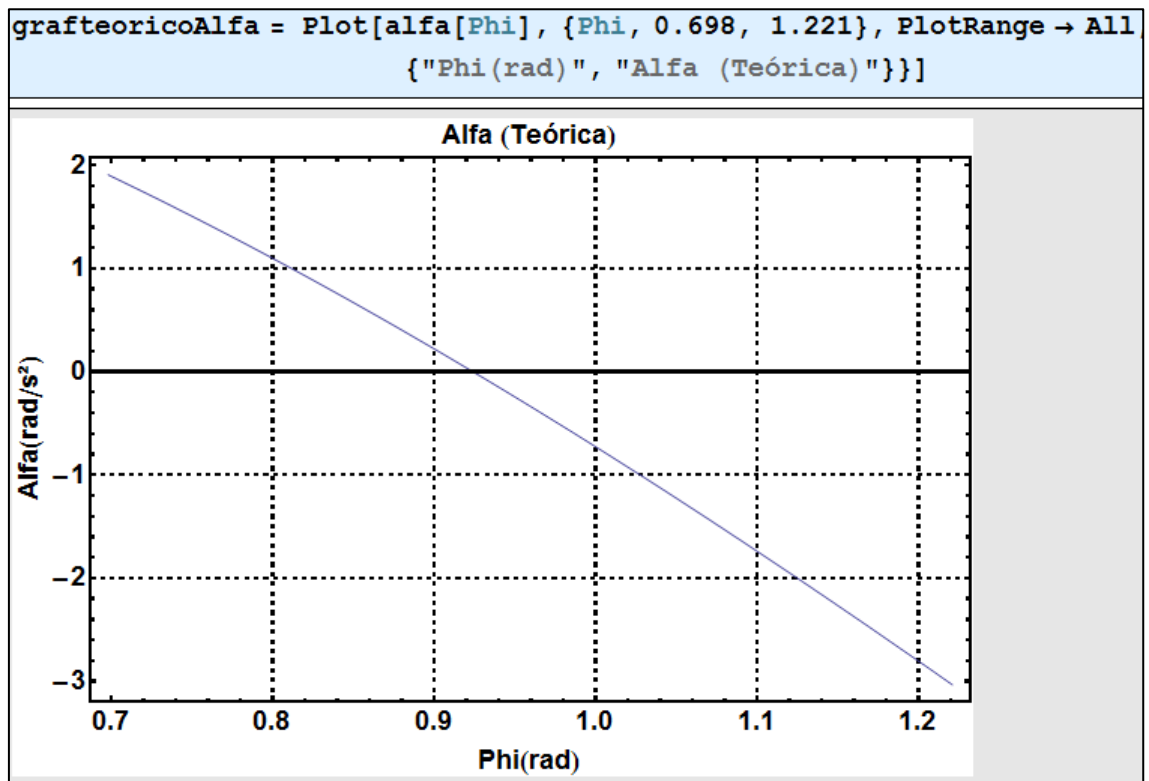


Figura 49 – c) Gráfico de Aceleração Angular por Ângulo de Ação da Força.

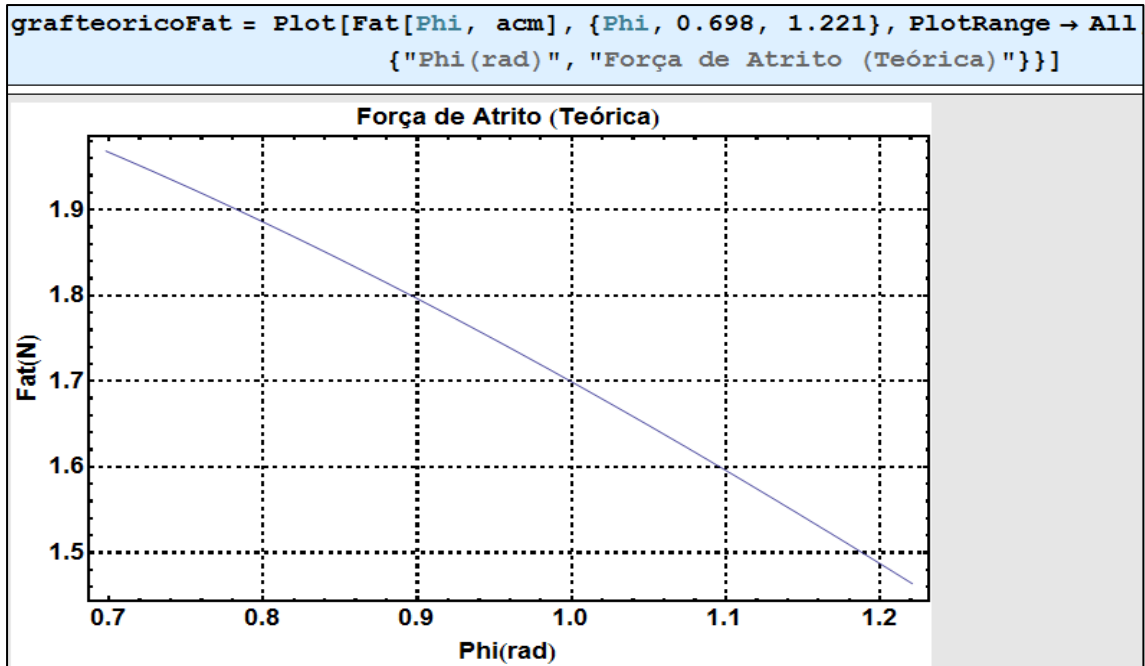


Figura 50 – d) Gráfico de Força de Atrito por Ângulo de Ação da Força.

E dois gráficos de resultados reais sendo eles:

a) Aceleração do centro de massa pelo ângulo de aplicação da força (Figura 51)

b) Aceleração do centro de massa pelo ângulo de aplicação da força (Comparativo)

(Figura 52).

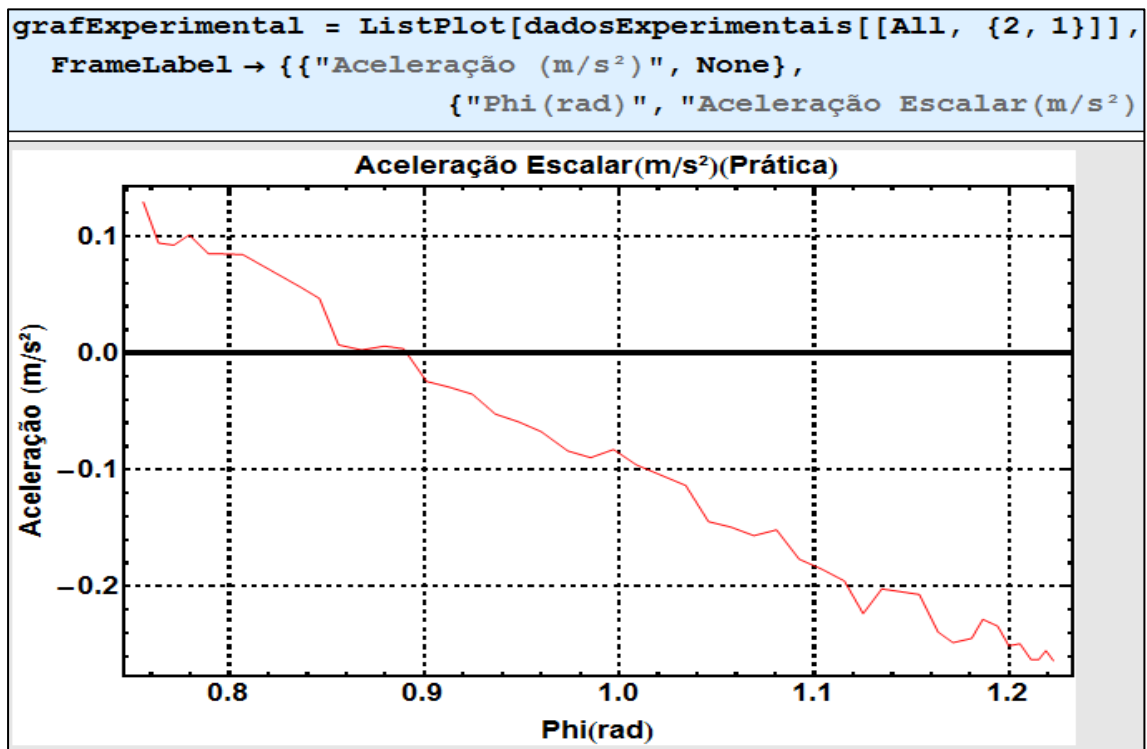


Figura 51 – Gráfico de Aceleração por Ângulo de Ação da Força.

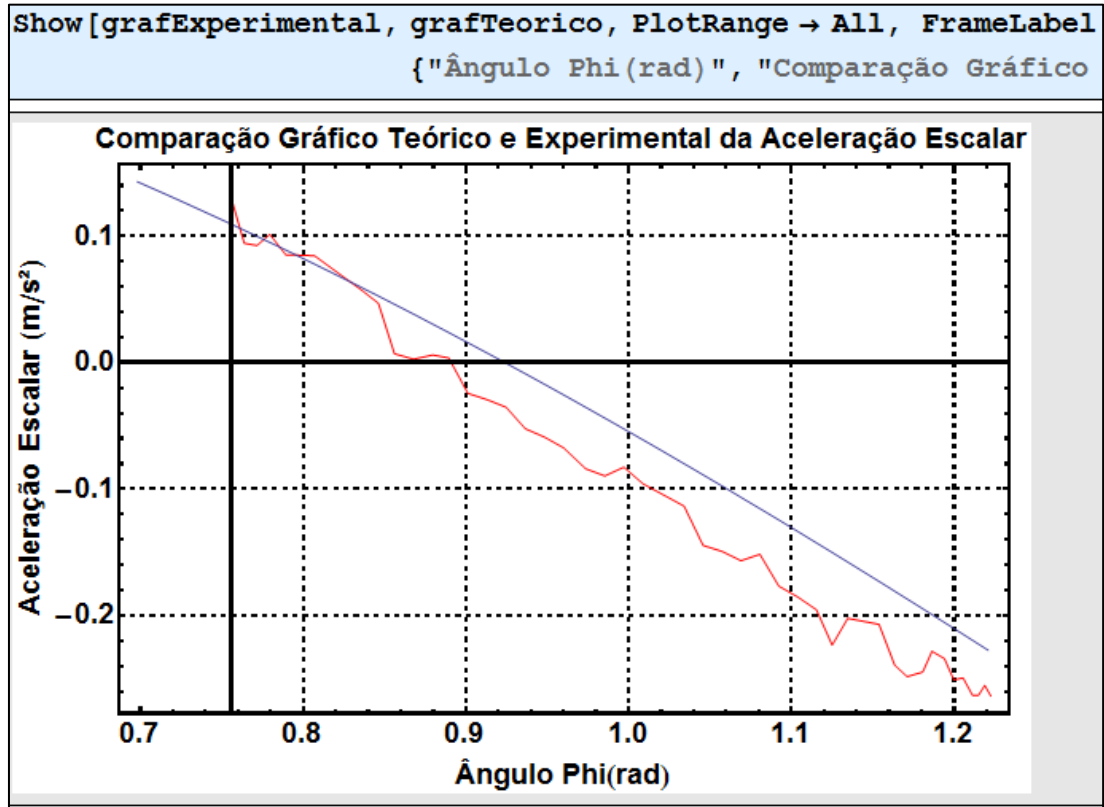


Figura 52 – b) Gráfico Comparativo Aceleração por Ângulo de Ação da Força.

Temos aqui um exemplo muito rico de como a simulação estimulou os alunos a compreenderem o problema e irem mais além, o que aqui vemos nos gráficos comparativos poderia muito bem ter sido mostrado através de tabelas, mas os próprios alunos enxergaram a possibilidade de usar a simulação que já estava finalizada como ferramenta de auxílio para o comparativo entre os dados da previsão teóricas e aqueles obtidos experimentalmente, gerando uma simulação mais robusta, atribuímos essa iniciativa por parte dos alunos a dinâmica típica que a metodologia PBL acaba estabelecendo, dinâmica esta que estimula os alunos a construir seus próprios materiais sem, como de costume, rotular tais materiais de apoio como inalteráveis e finalizados. É importante chamar a atenção para o fato de haver um gráfico teórico de força de atrito e não haver um comparativo com dados medidos uma vez que os grupos perceberam em sua modelação matemática que esse parâmetro é irrelevante para este problema.

A segunda dupla de alunos, que denominaremos dupla 2, não cita as simulações fornecidas como parte de seu trabalho, mas também não informa como obteve o dado teórico de ângulo crítico (ângulo de aplicação da força para qual o carretel não gira) e apesar da ausência dessas informações no relatório final expõe um gráfico comparativo entre os valores

esperados para a aceleração do centro de massa e seus valores obtidos através da análise de vídeo com o software Tracker e ainda uma curva de aproximação desses últimos valores conforme a Figura 53.

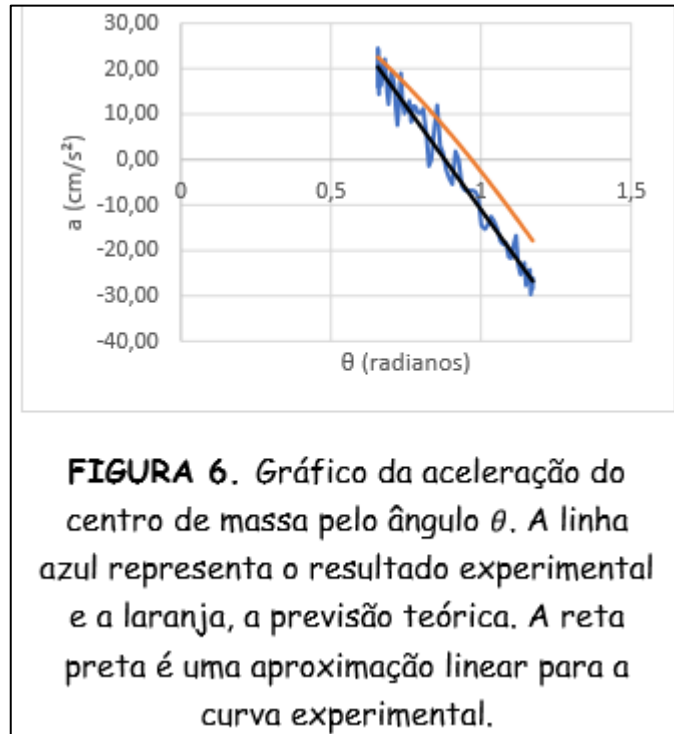


Figura 53 – Gráfico de Comparativo entre Acelerações da Dupla 2 (Relatório dupla 2).

A terceira dupla (dupla 3) disponibilizou dois vídeos com os quais fizeram a análise no software Tracker, é interessante perceber que nessas imagens os alunos primeiro procuram ângulos maiores para demonstrar que o carretel gira em um sentido em um dos vídeos e no outro vídeo buscam ângulos menores para os quais o carretel gira no sentido oposto, demonstrando claramente que já entendiam perfeitamente o experimento quando foram fazer essa filmagem, atribuímos esse entendimento ao convívio prévio com as simulações fornecidas.

Em seu relatório escrito essa dupla cita a simulação de maneira bastante curiosa, pois para eles, o resultado teórico esperado não vem simplesmente da relação teórica da aceleração angular que os mesmos demonstram, mas sim da simulação que obviamente obedece ao mesmo modelo, dessa forma podemos inferir que essa dupla entendeu a simulação como seu principal referencial teórico e são os resultados desse referencial que foram comparados com os obtidos com o software Tracker.

Tabela 1 – Comparação entre valores teóricos e experimentais.

	Ângulo Crítico (°)
<u>Tracker</u>	57,2
<u>Mathematica</u>	57,7
Variação	1%

Ou seja, os dados experimentais se encaixam dentro da tolerância estabelecida previamente, de maneira que a correspondência entre o teórico e o experimental foi satisfatório.

Figura 54 – Quadro Comparativo Citando o Mathematica® (Relatório Dupla 3).

A última dupla a ser analisada, dupla 4, decidiu fazer uma outra simulação do carretel ao invés de utilizar as fornecidas ou incrementa-las, para tanto usaram o software Algodoo, que é um ótimo software para a visualização de algumas situações físicas em duas dimensões mas que possui sérias limitações quando comparado com o Mathematica® no que diz respeito a gerar uma animação ou gráficos que obedecem a um modelo matemático específico, vale aqui ressaltar que a própria dupla de alunos registra em seu relatório essa limitação do software da seguinte maneira:

“...através da simulação feita no Algodoo foi encontrado um ângulo similar. Devido a limitações do programa, não foi possível simular todas os cenários do problema proposto. Além disso, a simulação não foi capaz de encontrar o ângulo exato, apenas um em que o carretel girava numa velocidade perto de zero.”

Consideramos que o entendimento dessa dupla com relação a limitação da simulação no software Algodoo deve-se principalmente ao conhecimento das duas simulações previamente fornecidas uma vez que os alunos, de posse dessas simulações, podem estimar o ângulo crítico exato para quaisquer raios do carretel e não o conseguem fazer da mesma forma no Algodoo.

De um modo geral consideramos que as quatro duplas atingiram o objetivo mínimo de entendimento da rotação de corpos rígidos através dessa montagem experimental uma vez que cada uma das duplas apresentou um relatório bem estruturado, sem erros conceituais e demonstraram ter passado por todas as etapas que a metodologia adotada pela coordenação da

matéria Laboratório de FIS-26 e acima de tudo, percebemos claramente a diferença entre alunos que simplesmente coletam dados de maneira passiva em um laboratório didático tradicional e esses que são convocados a fazerem parte da estruturação das ferramentas de seu conhecimento, sendo que esses últimos, além de apresentarem durante o desenvolvimento, maior motivação para suas atividades ainda demonstram um conhecimento mais profundo a respeito dos tópicos abordados em cada montagem experimental, vale novamente ressaltar que, para essas 4 duplas, o convívio prévio com as simulações além de motiva-los propiciou-lhes um entendimento da situação experimental de maneira mais rápida e eficiente que aqueles que apenas leem textos a respeito desse assunto.

7 Considerações Finais

Nesse trabalho, apresentamos uma forma alternativa de desenvolvimento e possibilidades de uso de simulações 3D de sistemas mecânicos complexos construídos com o Mathematica[®]. A ferramenta se mostrou muito útil para esse tipo de aplicação pois possui funções gráficas e de soluções numéricas de equações diferenciais poderosas e que permite explorar vários aspectos importante no processo de desenvolvimento e criação das simulações a serem concebidas. Outro ponto forte e que cada vez mais deve ser discutido no âmbito do processo educacional, é a flexibilidade do uso do material didático a ser desenvolvido, que deve ser usado tanto pelo professor no ambiente da sala de aula, bem como pelos alunos num ambiente de internet em seus estudos extraclasse ou ainda em laboratórios didáticos. Nesse contexto, enfatizamos que o diferencial das simulações desenvolvidas nesse trabalho são: ilustração com animação tridimensional que confere ao problema uma grande proximidade com o experimento real, ilustração dos gráficos correspondentes as soluções das equações de movimento permitindo uma discussão da influência dos parâmetros que envolvem o problema no comportamento desses gráficos e uma forte interação devido a possibilidade de alterar os parâmetros físicos como massa, velocidade inicial, comprimentos de hastes, podendo observar simultaneamente o efeito dessas alterações, tanto através dos movimentos na animação quanto nos gráficos correspondentes.

Consideramos ainda que é importante a utilização de ferramentas que podem nos conduzir a uma maneira inovadora de ensinar conteúdos de física na qual a percepção e entendimentos de fenômenos não é feita apenas através de experimentos ou da abstrata modelagem matemática, mas também através de interação dos alunos com as simulações dinâmicas e interativas. Tais materiais mostram-se ser potencialmente significativo, de acordo com Moreira (1999b), um material potencialmente significativo é aquele que pode ser relacionado ou incorporado à estrutura cognitiva do aluno, de modo não-arbitrária e não-literal, assim, nossas simulações, por possuírem características altamente interativas e trabalharem instantaneamente a visualização das situações físicas através de animações tridimensionais e gráficos possuem alto potencial de, conectando a observação natural do aprendiz a linguagem específica fisico-matemática, ir além do aprendizado através de simples repetições de um algoritmo mecanicamente memorizado pelos mesmos, ou seja, realmente concluir todas as etapas da aprendizagem significativa.

Dentro do contexto atual de aulas tradicionais do ensino de física para o ensino superior que está basicamente alicerçado na repetição de algoritmos para resolução de exercícios com grande ênfase na matematização abstrata de situações hipotéticas, é importante e necessário desenvolver uma cultura de utilização sistemática de aplicativos computacionais, uma vez que as gerações que a partir de agora alcançam a idade para ingresso no nível superior já nasceram dentro de uma realidade muito influenciada pelo desenvolvimento tecnológico computacional, por que então deveria o ambiente de formação do ensino de ciências permanecer apartado dessa tendência?

Acreditamos estar disponibilizando para toda a comunidade um conjunto de simuladores computacionais que, por permitir vários níveis de interatividade, por fazer uso adequado da visualização científica das situações propostas, por estimular que professores os utilizem inclusive em combinações com outros materiais, formam um importante conjunto de material de apoio instrucional.

Para finalizar, enfatizamos a importância do professor como figura central na organização do material no que diz respeito a escolha das simulações, forma de utilização das mesmas em consonância com outros materiais e estruturação das aulas e principalmente como a figura que propulsiona os alunos durante as aulas e fora delas a adquirir conhecimento, seja pela provocação através de questionamentos, seja pela disponibilidade de dialogar e tirar dúvidas ou ainda pela maneira que apresenta aos alunos os novos conceitos que deverão ser por eles adquiridos, sendo assim, é imperativo que, em trabalhos futuros, sejam desenvolvidas metodologias para treino de tais profissionais, uma vez que alterando-se os materiais e os métodos de ensino, se faz necessário que a formação do professor também caminhe em consonância com tal sistema de ensino aprendizagem.

Referências

AUSUBEL, D. P. **The acquisition and retention of knowledge: a cognitive view.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. (1980). **Psicologia educacional.** Rio de Janeiro, Interamericana. (Trad.) NICK, E.; et al Educational psychology: a cognitive view.

AWREJCEWICZ, J.; KUDRA, G.; WASILEWSKI, G. Experimental and numerical investigation of chaotic regions in the triple physical pendulum. **Nonlinear Dynamics**, v. 50, n. 4, p. 755–766, 2007.

DELIZOICOV; D.; ANGOTTI, J. A. P. **Física.** 2. ed. São Paulo: Cortez, 2003. 184 p.

DELIZOICOV; D.; ANGOTTI, J. A. P. **Metodologia do ensino de ciências.** 2. ed. São Paulo: Cortez, 1994. 208 p.

EZRILSON, C. M.; ALLEN, G. D.; LOVING, C. C. **Analysing dynamic pendulum motion in na interactive online environment using flash.** Netherlands: Kluwer Academic Press, 2004, p. 437-457.

GERMANO, J. S. E., et al. Programas de simulação podem auxiliar o professor em sala de aula? Um estudo de caso do uso de programa Interactive Physics aplicado em oscilações mecânicas. In: XLI CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA. 2012., 41. Gramado, RS. **Anais...** Gramado, RS: COBENGE. 23-26 setembro, 2012.

GERMANO, J. S. E.; ANDO, V. F. Simulações físicas educacionais com parâmetros variáveis em interactive physics. In: XIII ENCONTRO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E PÓS-GRADUAÇÃO DO ITA (ENCITA). 2007., 13. São José dos Campos. **Anais...** São José dos Campos: ITA, 01 – 04 outubro, 2007.

GIROUX, H.; PASIN, F. The impact of a simulation game on operations management education. **Computers Education**, v. 57, p. 1240–1254, 2011.

SYMOM, K. R. **Mecânica.** Rio de Janeiro: Editora Campus, 1982.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **Mechanics**, Third Edition, Ed. Butterworth Heinemann, 2000.

LEMOS, N. A. **Mecânica analítica.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004.

MELLER, M. **Control of double inverted pendulum**. Polónia: Politechnika Gdanska, 2014. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=JpNAhKT7yY4>>. Acesso em: 20 set. 2017.

MOREIRA, M. A. **Teorias de aprendizagem**. São Paulo: EPU, 1999a.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa**. 1ª Edição. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1999b.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. **Aprendizagem significativa – a teoria de David Ausubel**. São Paulo: Moraes, 1982.

NAVES, E. L. M. **Modelagem e simulação do controle da postura ereta humana quasi-estática com reflexos neuromusculares**. 2006. 96f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Uberlândia.

NUSSENZVEIG, H. MOYSÉS; **Curso de física básica**; São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1997.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**, 4ª ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2003.

PRASS, A. R. **Teoria de aprendizagem**. Rio Grande do Sul: ScriniaLibris.com. 2012.

PRETTO, N. de L. **Uma escola sem/com futuro**. 3. ed. Campinas, SP: Papyrus, 2001. 246 p.

SCANLON, E. E.; BLAKE, C. Reconsidering simulations in science education at a distance: features of effective use. **Journal of Computer Assisted Learning**, v. 23, n. 6, p. 491-502, 2007.

SHIEH, R. S. The impact of technology-enabled active learning (TEAL) implementation on student learning and teachers' teaching in a high school context. **Computers & Education**, v. 59, n. 2, 206–214, 2012.

SILVA, E. V. C et al. O Formalismo variacional de lagrange e Hamilton no ensino de mecânica básica na graduação em engenharia. **Revista de Ensino de Engenharia**, v. 26, n. 1, p. 9-17, 2007.

VEEN J. T., RUTTEN, N.; JOOLINGEN, W.R. The learning effects of computer simulations in science education. **Computers & Education**, v. 58, p.136–153, 2012.

WOLFRAM DEMONSTRATIONS PROJECT. **Mathematics**, 2017. Disponível em: <<http://demonstrations.wolfram.com>> Acesso em: 01 jan. 2017.

YOUTUBE. **Double pendulum**. 2010. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=U39RMUzCjiU>>. Acesso em: 18 de set. 2017.

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

^{1.} CLASSIFICAÇÃO/TIPO <p style="text-align: center;">DM</p>	^{2.} DATA <p style="text-align: center;">01 de novembro de 2017</p>	^{3.} REGISTRO N° <p style="text-align: center;">DCTA/ITA/DM-101/2017</p>	^{4.} N° DE PÁGINAS <p style="text-align: center;">92</p>
^{5.} TÍTULO E SUBTÍTULO: <p>Simulações tridimensionais didáticas de sistemas mecânicos complexos com o mathematica®</p>			
^{6.} AUTOR(ES): <p>Robson Alves Silva Simões</p>			
^{7.} INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): <p>Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA</p>			
^{8.} PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: <p>1. Simulação de Sistemas Físicos. 2. Mathematica®. 3. Mecânica Clássica.</p>			
^{9.} PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: <p>Estruturas tridimensionais; Simulação computadorizada; Mecânica clássica; Sistemas complexos; Linguagens de programação; Física.</p>			
^{10.} APRESENTAÇÃO: <p style="text-align: right;">X Nacional Internacional</p> <p>ITA, São José dos Campos. Curso de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Física Atômica e Molecular. Orientador: Prof. Dr. José Silvério Edmundo Germano; coorientador: Vladimir Wagner Ribas. Defesa em 20/10/2017. Publicada em 2017.</p>			
^{11.} RESUMO: <p>Nesse trabalho apresentamos uma proposta de construção de simulações 3D didáticas de sistemas mecânicos complexos, usando o Mathematica® como ambiente de desenvolvimento. As simulações 3D desenvolvidas possuem alto grau de interatividade e abrangem os seguintes sistemas mecânicos: o Pêndulo Simples, o Pêndulo Duplo, o Pêndulo com Movimento Vertical, o Pêndulo com Movimento Horizontal, Pêndulo Elástico e o Carretel Maciço com Movimento Plano. A motivação para a escolha desses sistemas, é que os mesmos são modelos básicos para a modelagem de inúmeros outros sistemas mais complexos e que são pouco estudados de maneira mais aprofundada por gerarem sistemas de equações diferenciais não lineares de difícil solução. Outra característica importante na escolha do Mathematica®, e que não são simples de realizar em outras linguagens de programação, é o grande número de funções existentes no programa que permitem criar ambientes 3D gráfico com alto grau de realismo e variações em tempo real dos parâmetros que modelam os problemas analisados.</p>			
^{12.} GRAU DE SIGILO: <p style="text-align: center;">(X) OSTENSIVO () RESERVADO () SECRETO</p>			