

Dissertação apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Física Nuclear.

Ivana de Freitas Cunha

**PROPOSTA DE UM FILTRO DIGITAL PARA O
MODELO DE TRANSDUTORES
INDEPENDENTES NO DETECTOR MÁRIO
SCHENBERG**

Dissertação aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:



Prof. Dr. Rubens de Melo Marinho Jr.

Orientador



Dr. Vincenzo Liccardo

Coorientador

Prof. Dr. Pedro Teixeira Lacava

Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP - Brasil
2018

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Divisão de Informação e Documentação

Cunha, Ivana de Freitas
Proposta de um Filtro Digital Para o Modelo de Transdutores Independentes no Detector Mário Schenberg / Ivana de Freitas Cunha.
São José dos Campos, 2018.
101f.

Dissertação de Mestrado – Curso de Física. Área de Física Nuclear – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2018. Orientador: Prof. Dr. Rubens de Melo Marinho Jr.. Coorientador: Dr. Vincenzo Liccardo.

1. Ondas Gravitacionais. 2. Sistema Binário. 3. Filtro. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Título.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

CUNHA, Ivana de Freitas. **Proposta de um Filtro Digital Para o Modelo de Transdutores Independentes no Detector Mário Schenberg**. 2018. 101f. Dissertação de Mestrado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DA AUTORA: Ivana de Freitas Cunha
TÍTULO DO TRABALHO: Proposta de um Filtro Digital Para o Modelo de Transdutores Independentes no Detector Mário Schenberg.
TIPO DO TRABALHO/ANO: Dissertação / 2018

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta dissertação e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. A autora reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação pode ser reproduzida sem a autorização da autora.

Ivana de Freitas Cunha
Av. Cidade Jardim, 679
12.233-066 – São José dos Campos–SP

PROPOSTA DE UM FILTRO DIGITAL PARA O MODELO DE TRANSDUTORES INDEPENDENTES NO DETECTOR MÁRIO SCHENBERG

Ivana de Freitas Cunha

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr.	Manuel Maximo Bastos Malheiro de Oliveira	Presidente	-	ITA
Prof. Dr.	Rubens de Melo Marinho Jr.	Orientador	-	ITA
Dr.	Vincenzo Liccardo	Coorientador	-	ITA
Prof. Dr.	Wayne Leonardo Silva de Paula	Membro Interno	-	ITA
Prof. Dr.	Jaziel Goulart Coelho	Membro Externo	-	INPE

A todos os leitores curiosos nesta área

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelas oportunidades.

Aos meus pais Ana Paula de Freitas Cunha e Ivo de Souza Cunha o apoio e motivação.

Ao meu orientador Prof. Dr. Rubens Marinho a paciência, orientação e por me conceder
o privilégio de trabalhar em uma área tão encantadora.

Ao meu co-orientador Prof. Dr. Vincenzo Liccardo as orientações, apoio e incentivo.

Ao Prof. Dr. Cesar Lenzi o auxílio no final desta jornada.

Ao Prof. Dr. Manuel Malheiro, quem me apresentou o ITA, todo apoio e incentivo para
realizar este trabalho.

À Profa. Dra. Nadja Simão, ao Prof. Dr. Tobias Frederico, ao Prof. Dr. Luiz Ferrão e
ao Prof. Dr. Francisco Bolivar, que expandiram meus conhecimentos.

Ao meu namorado Luiz Carlos, pela paciência e carinho.

Às minhas amigas Gabi, Carla, Taís, Jacyele, Aldeni, Tatá, Evelin e Ívila, que mesmo
estando longe, me apoiaram e me escutaram durante este trajeto.

Aos meus amigos Marcelo e Tércio, pela amizade e apoio.

Aos meus colegas de trajetória Angélica, Dalton, Sílvia, Flávia entre outros.

Agradeço ao ITA pelo privilégio de ter feito parte desta instituição.

Agradeço o financiamento da CAPES.

*O Universo, como já foi dito anteriormente,
é um lugar desconcertantemente grande,
um fato que, para continuar levando uma vida tranquila,
a maioria das pessoas tende a ignorar.*

— DOUGLA ADAMS - GUIA DO MOCHILEIRO DAS GALÁXIAS

Resumo

Este trabalho propõe a simulação uma promissora fonte de sinal de onda gravitacional envolvendo um sistema binário de composto por um buraco negro, de $3M_{\odot}$, e uma estrela de nêutrons, de $1.4M_{\odot}$, que se aplica perfeitamente na banda de detecção da antena Mário Schenberg. Estimamos a quantidade de eventos que podem ocorrer por ano e fizemos um estudo sobre a interação desse sinal gravitacional com a antena através de uma função de transferência. Usando a função de transferência, calculamos a densidade espectral de ruídos e construímos um filtro capaz de detectar este sinal gravitacional.

Abstract

The purpose present of this work is the simulation of a promising source of a gravitational wave signal of a binary system of a black hole with $3M_{\odot}$ and a neutron star with $1.4M_{\odot}$, that applies perfectly on the detection band of the Gravitational Wave Detector Mário Schenberg. We estimate the amount of the events that can occur per year and made a study about the interaction of this gravitational wave signal with the antenna. Using the detector's transfer function, we calculate the power spectral density of the noise and we built a filter that can detect this particular gravitational wave signal.

Lista de Figuras

FIGURA 2.1 – Distorção de uma circunferência de partículas livres devido a forças de maré induzidas pela passagem de uma onda gravitacional com polarização h_+ ou h_\times	32
FIGURA 3.1 – (L.; ZHAO, 2000) Materiais e suas características	37
FIGURA 3.2 – Histórica fotografia de Joseph Webber e seu detector do tipo barra ressonante.	38
FIGURA 3.3 – (MERKOWITZ; JOHNSON, 1997) Modelo icosaedro truncado para localização dos transdutores.	39
FIGURA 3.4 – (COSTA <i>et al.</i> , 2003) Localização dos transdutores do detector Mário Schenberg seguindo o modelo IT	40
FIGURA 3.5 – (INPE, 2017) Detector de ondas gravitacionais Mário Schenberg . . .	43
FIGURA 3.6 – (PITKIN <i>et al.</i> , 2011) Esquema de funcionamento detector interferométrico	45
FIGURA 3.7 – (CESAR, 2006) Curva de sensibilidade.	47
FIGURA 3.8 – (1.0, 2017) Detector interferométrico VIRGO, localizado em PISA na Itália.	48
FIGURA 3.9 – (DANZMANN; TEAM, 1996) Esquema de localização do futuro detector LISA com suas dimensões.	49
FIGURA 4.1 – (Dana Berry/NASA, 2017) Simulação de um sistema binário envolvendo uma estrela de nêutron e um buraco negro.	50

FIGURA 4.2 – Formação de estrela de nêutrons e buraco negro.	52
FIGURA 4.3 – Representação do sistema binário girando em torno do centro de massa.	55
FIGURA 4.4 – A forma de uma onda gravitacional gerada por uma estrela de nêutron e um buraco negro.	59
FIGURA 5.1 – Representação do modelo matemático que descreve o sistema acoplado do transdutor	61
FIGURA 5.2 – Representação esquemática do sistema	69
FIGURA 5.3 – Densidade espectral de ruído simulada para o detector de ondas gravitacionais Mário Schenberg.	73
FIGURA 5.4 – A figura acima representa o sinal simulado de um dos transdutores com a passagem do sinal gravitacional idêntico ao apresentado no capítulo 4 deste trabalho e a figura abaixo o espectro de frequência do sinal.	74
FIGURA 5.5 – Parte real do filtro.	76
FIGURA 5.6 – Parte imaginária do filtro.	76
FIGURA 5.7 – Sinal imerso em ruídos e o sinal filtrado.	77

Lista de Tabelas

TABELA 5.1 – Parâmetros medidos e calculados do detector Mário Schenberg . . .	68
--	----

Lista de Abreviaturas e Siglas

OG - Onda gravitacional

OGs - Ondas gravitacionais

BNEN - Buraco negro e estrela de nêutrons

GRB - Gama-ray burst (Explosões de raios gamas)

IT - Icosaedro truncado

MS - Mário Schenberg

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
2	ONDAS GRAVITACIONAIS	20
2.1	Equações de Campo da Relatividade Geral	20
2.2	Ondas Gravitacionais	22
2.3	Transformações de <i>gauge</i>	25
2.4	Polarização das Ondas Gravitacionais	28
2.5	Determinação dos ϵ_μ	30
2.6	A Fórmula do Quadripolo	31
2.7	Efeito da passagem da onda gravitacional	32
3	DETECTORES DE ONDAS GRAVITACIONAIS	34
3.1	Detectores de massa ressonante	35
3.1.1	Transdutores	36
3.1.2	Características de Detectores de Massa Ressonante	36
3.1.3	Detectores de Tipo Barra	37
3.1.4	Detectores Esféricos	38
3.1.5	Ruídos	40
3.1.6	Ruídos Internos	40
3.1.7	Ruídos Externos	41

3.1.8	Detector de Ondas Gravitacionais Mário Schenberg	43
3.2	Detectores Interferométricos	44
3.2.1	Funcionamento de Detectores Interferométricos	45
3.2.2	LIGO	46
3.2.3	Curva de sensibilidade do LIGO e do Schenberg	47
3.2.4	VIRGO	48
3.2.5	LISA	48
4	SISTEMA BINÁRIO	50
4.1	Estrelas de Nêutrons e Buracos Negros	51
4.1.1	Formação do Sistema Binário BN-EN	51
4.1.2	Determinação da Taxa de Eventos por Ano	53
4.2	Cálculo da Coalescência	55
5	ANÁLISE DE DADOS EM DETECTORES ESFÉRICOS	60
5.1	Modelo Matemático	60
5.1.1	Função de Transferência	61
5.2	Método para Análise de Sinal	69
5.2.1	Filtro	69
5.3	Densidade Espectral de Ruídos	72
5.4	O Sinal na Saída da Antena	73
5.5	Filtro Digital	75
6	CONCLUSÃO	78
	REFERÊNCIAS	80
	APÊNDICE A – CÓDIGOS	84

A.1	SchenbergFilter.m	84
A.2	MatchedFilter.m	93
A.3	SimuladadosIvana	94

1 Introdução

Ondas gravitacionais (OGs) são perturbações no tecido espaço-tempo previstas por Albert Einstein em 1916 na sua teoria da relatividade geral. Elas percorrem o Universo na velocidade da luz trazendo consigo informações sobre sua origem. A existência ou não das OGs foi discutida por anos e as especulações ganharam corpo através da primeira evidência indireta deste fenômeno. Os físicos Russell Hulse e Joseph Taylor estudaram os pulsos emitidos por um pulsar que gira em torno do centro de massa em comum com uma estrela de nêutrons em 1974, eles analisaram estes pulsos por anos e perceberam que a distância entre os dois corpos diminuía gradativamente através de perda de energia em forma de OGs obedecendo as equações de Einstein (TAYLOR, 1994).

A primeira detecção direta de OG, ocorreu em setembro de 2015 pelos detectores gêmeos LIGO (sigla em inglês: *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) de colaboração mundial (ABBOTT *et al.*, 2016b), quase 100 anos após a formulação da teoria. Devido o impacto desta comprovação no cenário da física atual, uma nova janela se abriu, a astronomia de ondas gravitacionais. Com a importância desta descoberta os cientistas Rainer Weiss, Barry Barish e Kip Thorne, idealizadores do projeto, foram laureados com o prêmio nobel de física em 2017.

Apesar da primeira detecção de OGs tenha ocorrido recentemente pelos detectores

gêmeos LIGO, a busca pelo sinal gravitacional foi iniciada na década de 1960 por Joseph Weber, com antenas do tipo massa ressonante e evoluído para outras técnicas aprimorando o modelo inicial.

No Brasil, o projeto Graviton, coordenado pelo Prof. Dr. Odylio Aguiar do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), consiste na construção e operação da primeira antena de massa ressonante criogênica da América Latina. Essa antena, leva o nome do físico brasileiro Prof. Dr. Mário Schenberg da Universidade de São Paulo (USP) e cujo objetivo é a detecção de OGs e como consequência, o desenvolvimento de novas tecnologias.

O detector de OGs entrou em operação pela primeira vez em 2006 gerando diversos estudos, artigos, dissertações e teses, como o presente trabalho (PAULA, 2013) (AGUIAR *et al.*, 2002).

As peculiaridades na forma de propagação e a baixíssima ordem de grandeza da amplitude de OGs as tornam pouco interagentes com a matéria. Sua detecção exige um aparato experimental extremamente sensível, um dos motivos pelos quais houve a dificuldade da detecção do primeiro sinal direto. Além da sensibilidade dos detectores, outro desafio é a análise dos dados, visto que muitos sinais indesejados de fontes não gravitacionais também são detectados e faz-se necessário uma rigorosa filtragem em busca do sinal gravitacional.

Partindo do contexto atual sobre a corrida na detecção de novas fontes de OGs, este trabalho propõe simular uma promissora fonte de sinal envolvendo um sistema binário composto por um buraco negro e uma estrela de nêutrons, no qual se aplica perfeitamente na banda de detecção da antena Mário Schenberg e o estudo da interação deste sinal gravitacional com a antena.

A importância deste estudo se dá pelo fato de que ainda não houve a detecção de nenhum evento envolvendo esses dois tipos de corpos astrofísicos até o momento atual desta tese.

Este trabalho é dividido em 6 capítulos, sendo que esta parte inicial é uma breve introdução, seguido do próximo capítulo que trata-se de uma revisão sobre a derivação da equação da onda gravitacional através de aproximações de campo fraco, os efeitos da passagem da OG em um anel de partículas, o que é fundamental para o entendimento de como OGs podem ser detectadas.

No terceiro capítulo há um breve histórico sobre a detecção de ondas gravitacionais, descrevendo os detectores de massa ressonante e interferométricos com ênfase no detector nacional Mário Schenberg devido sua importância nesta tese. Foi feita uma comparação das curvas de sensibilidade entre detectores e as possíveis fontes gravitacionais detectáveis por eles. Apresentamos também neste capítulo, as expectativas para futuros detectores e suas possíveis fontes, como o projeto para construção de um detector fora da Terra.

O quarto capítulo descreve um sistema binário formado por um buraco negro e uma estrela de nêutrons (BN-EN). A detecção deste tipo de evento é de fundamental importância para estudos que vão desde a física de formação de elementos pesados até o comportamento astrofísico destes objetos compactos, porém o foco deste trabalho é o de apresentar a assinatura simplificada da OG gerada por este sistema até o momento da coalescência. Foram feitas estimativas da taxa de ocorrência deste tipo de evento, usando como base estudos prévios, e com base nos dados obtidos demonstramos a consistência de possibilidade de detecção pela antena do Mário Schenberg.

No modelo matemático de como o detector Mário Schenberg reage com a passagem da OG quando excitado por ela, os modos de ressonância são selecionados aproximando-se

o conjunto a um sistema massa-mola e construindo-se assim a função matemática que descreve a transferência de energia no sistema. Como demonstrado no Capítulo 5, através desta função pode-se calcular as características de comportamento do detector diante de um estímulo, seja do sinal gravitacional ou ruidoso.

A extração de um sinal conhecido de ruídos é bastante conhecida desde a década de 1940 para o tratamento de sinais de radares e é aplicada neste contexto. No presente trabalho, usamos um programa computacional desenvolvido pelo pesquisador Cesar Costa (CESAR, 2006), do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, para simular a interação de um ruído gaussiano na entrada da antena, somamos a este sinal o sinal da coalescência do sistema BHNS, e construímos o filtro casado (*matched filter*) para a recuperação do sinal na saída da antena.

2 Ondas Gravitacionais

Ondas gravitacionais são distorções na métrica do espaço-tempo que se propagam com a velocidade da luz. Elas são produzidas sempre que a derivada temporal terceira do momento de quadripolo seja diferente de zero.

Albert Einstein, em 1916, mostrou matematicamente através de uma série de aproximações, soluções ondulatórias para equações de campo da relatividade geral.

Em 1974 Hulse e Taylor obtiveram a primeira evidência experimental indireta através da observação da redução do período de rotação do sistema binário de duas estrelas, PSR 1913-16, o que fez eles receberem o prêmio Nobel de física em 1993.

Finalmente em 14 de setembro de 2015 cientistas do projeto LIGO conseguiram a detecção direta de ondas gravitacionais geradas por dois buracos negros (ABBOTT *et al.*, 2016b).

2.1 Equações de Campo da Relatividade Geral

As equações de campo de Einstein, relacionam a geometria do espaço-tempo com a matéria e energia por intermédio do tensor de energia momento $T_{\mu\nu}$ (OHANIAN; RUFFINI,

2013)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

em que $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, $g_{\mu\nu}$ a métrica do espaço-tempo, $R = R^\mu{}_\mu$ o escalar de curvatura, G a constante de gravitação universal e c a velocidade da luz. O tensor de Ricci é obtido a partir do tensor de Riemann

$$R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} = R_{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

O tensor de Riemann escrito em termos do símbolo de Christoffel de segunda espécie

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \quad (2.3)$$

é

$$R^\alpha{}_{\mu\beta\nu} = \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\Gamma^\alpha{}_{\sigma\beta} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\beta}\Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu}, \quad (2.4)$$

em que a notação

$$A_{,\mu} = \partial_\mu A = \frac{\partial A}{\partial x^\mu}. \quad (2.5)$$

De tal forma que

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha{}_{\alpha\mu,\nu} + \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\Gamma^\alpha{}_{\sigma\alpha} - \Gamma^\sigma{}_{\alpha\mu}\Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu}. \quad (2.6)$$

2.2 Ondas Gravitacionais

Em 1916 Einstein estudou a solução de campo fraco de suas equações supondo uma perturbação $h_{\mu\nu}$ na métrica do espaço-tempo plano, fazendo (OHANIAN; RUFFINI, 2013)

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

em que $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minskowski

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Nessa aproximação $g^{\mu\nu}$ é dada por ¹

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

¹ A inversa da métrica, $g^{\mu\nu}$, pode ser obtida sabendo que

$$g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}. \quad (2.9)$$

Usando a Eq.(2.7) vamos procurar por um tensor $t^{\sigma\nu}$ tal que

$$\delta_{\mu}^{\nu} = g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu} = (\eta_{\mu\sigma} + h_{\mu\sigma})(\eta^{\sigma\nu} + t^{\sigma\nu}). \quad (2.10)$$

Contraindo os índices e desprezando o termo $h_{\mu\sigma}t^{\sigma\nu}$ por ser de segunda ordem resulta

$$\delta_{\mu}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} + \eta_{\mu\sigma}t^{\sigma\nu} + h_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu} \quad \therefore \quad \eta_{\mu\sigma}t^{\sigma\nu} = -h_{\mu}^{\nu}. \quad (2.11)$$

Subindo o índice μ e contraindo essa equação com $\eta^{\beta\mu}$ vem

$$t^{\beta\nu} = -h^{\beta\nu} \quad \therefore \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

Assim $h_\mu{}^\nu$ e h são obtidos da seguinte forma

$$h_\mu{}^\nu = g^{\nu\alpha} h_{\mu\alpha} = \eta^{\nu\alpha} h_{\mu\alpha} - h^{\nu\alpha} h_{\mu\alpha} = \eta^{\nu\alpha} h_{\mu\alpha}, \quad (2.14)$$

em que o termo $h^{\nu\alpha} h_{\mu\alpha}$ foi desprezado por ser de segunda ordem. Analogamente

$$h = h_\mu{}^\mu = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}. \quad (2.15)$$

Observamos que nessa aproximação a métrica de Minkowski η e sua inversa são usadas para levantar e abaixar índices.

O símbolo de Christoffel se reduz a

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\sigma} (h_{\sigma\mu,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma}), \quad (2.16)$$

cuja derivada é

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu,\beta} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\sigma} (h_{\sigma\mu,\nu\beta} + h_{\nu\sigma,\mu\beta} - h_{\mu\nu,\sigma\beta}), \quad (2.17)$$

resultando para o tensor de Riemann, preservando apenas os termos de primeira ordem em $h_{\mu\nu}$,

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{1}{2} (h_{\alpha\nu,\mu\beta} + h_{\mu\beta,\alpha\nu} - h_{\alpha\beta,\mu\nu} - h_{\mu\nu,\alpha\beta}) \quad (2.18)$$

e para o tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(h_{,\mu\nu} - h_{\nu,\mu\alpha}^{\alpha} - h_{\mu,\nu\alpha}^{\alpha}), \quad (2.19)$$

em que o \square é o D'Alambertiano ².

Os três termos entre parêntese na equação acima podem ser escritos da seguinte forma

$$h_{,\mu\nu} - h_{\nu,\mu\alpha}^{\alpha} - h_{\mu,\nu\alpha}^{\alpha} = - \left(h_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\nu}^{\alpha} h \right)_{,\mu\alpha} - \left(h_{\mu}^{\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\mu}^{\alpha} h \right)_{,\nu\alpha}. \quad (2.21)$$

Com uma adequada escolha do sistema de referência, *gauge*, podemos tornar estes termos nulos impondo

$$(\bar{h}_{\mu}^{\alpha})_{,\alpha} = \left(h_{\mu}^{\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\mu}^{\alpha} h \right)_{,\alpha} = 0. \quad (2.22)$$

Na próxima seção mostraremos que essa escolha de gauge não define univocamente os $h_{\mu\nu}$.

Finalmente temos para a Eq.(2.19)

$$\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\square h = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad \therefore \quad \square \bar{h}_{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.23)$$

Que é a equação da onda gravitacional na presença de uma fonte.

² O D'Alambertiano é definido como

$$\square = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} = -(\partial_0 \partial_0 - \partial_k \partial_k) = -(\partial_0 \partial^0 + \partial_k \partial^k) = -\partial_{\mu} \partial^{\mu}. \quad (2.20)$$

A solução dessa equação é bem conhecida da eletrodinâmica

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}(\mathbf{r}', x^0 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3x'. \quad (2.24)$$

Numa região longe das fontes os $h_{\mu\nu}$ obedecem a equação de Laplace

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.25)$$

Esta equação tem solução de ondas planas do tipo

$$\bar{h}_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} e^{jk_\sigma x^\sigma}, \quad (2.26)$$

em que k_μ é o vetor de onda.

2.3 Transformações de *gauge*

Desejamos saber agora em que condições a Eq.(2.22) é satisfeita.

A relatividade geral é invariante pelo grupo de transformações

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta}. \quad (2.27)$$

Seja a transformação infinitesimal de coordenadas

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu. \quad (2.28)$$

Usando Eq.(2.7), preservando somente termos de primeira ordem, a perturbação $h^{\mu\nu}$ se transforma em

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \epsilon^{\mu,\nu} - \epsilon^{\nu,\mu} \quad \therefore \quad h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \epsilon_{\mu,\nu} - \epsilon_{\nu,\mu}. \quad (2.29)$$

Por simples substituição podemos ver que a Eq.(2.18) é invariante por essa transformação, isto é,

$$R'_{\alpha\mu\beta\nu} = R_{\alpha\mu\beta\nu} + \frac{1}{2}(-\epsilon_{\alpha,\nu\mu\beta} - \epsilon_{\mu,\beta\alpha\nu} + \epsilon_{\alpha,\beta\mu\nu} + \epsilon_{\mu,\nu\alpha\beta}) = R_{\alpha\mu\beta\nu}. \quad (2.30)$$

Sendo assim, o tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R, \quad (2.31)$$

em primeira ordem, também será invariante por essa transformação.

Usando as Eq.(2.19, 2.21) a equação de Einstein resulta em

$$\frac{1}{2}\square\left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h\right) + \frac{1}{2}\left(h_{\nu}{}^{\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\nu}{}^{\alpha}h\right)_{,\mu\alpha} + \frac{1}{2}\left(h_{\mu}{}^{\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\mu}{}^{\alpha}h\right)_{,\nu\alpha} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.32)$$

Vamos supor que o segundo e o terceiro termos sejam diferentes de zero, então, que-

remos saber qual é a transformação do tipo Eq.(2.28) que leva essa equação a

$$\frac{1}{2}\square' \left(h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h' \right) + \frac{1}{2} \left(h'_{\nu}{}^{\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\nu}{}^{\alpha}h' \right)_{,\mu\alpha} + \frac{1}{2} \left(h'_{\mu}{}^{\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\mu}{}^{\alpha}h' \right)_{,\nu\alpha} = \frac{8\pi G}{c^4}T'_{\mu\nu} \quad (2.33)$$

de tal forma a zerar esses termos no novo referencial.

Escrevendo em uma notação mais condensada usando

$$\bar{h}'_{\nu}{}^{\alpha} = h'_{\nu}{}^{\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\nu}{}^{\alpha}h' \quad (2.34)$$

temos

$$\frac{1}{2}\square'\bar{h}'_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\bar{h}'_{\nu}{}^{\alpha})_{,\mu\alpha} + \frac{1}{2}(\bar{h}'_{\mu}{}^{\alpha})_{,\nu\alpha} = \frac{8\pi G}{c^4}T'_{\mu\nu}. \quad (2.35)$$

Calculamos o divergente da Eq.(2.34)

$$\begin{aligned} \bar{h}'_{\nu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha} &= h'_{\nu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\nu}{}^{\alpha}h'_{,\alpha} \\ &= h'_{\nu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha} - \epsilon_{\nu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha} - \epsilon^{\alpha}{}_{,\nu\alpha} \\ &\quad - \frac{1}{2}\eta_{\nu}{}^{\alpha}h_{,\alpha} + \frac{1}{2}\eta_{\nu}{}^{\alpha}\epsilon_{\sigma}{}^{\sigma}{}_{,\alpha} + \frac{1}{2}\eta_{\nu}{}^{\alpha}\epsilon^{\sigma}{}_{,\sigma\alpha} \\ &= \bar{h}'_{\nu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha} + \square'\epsilon_{\nu}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Em outras palavras, para zerar $\bar{h}'_{\nu,\alpha}$ basta encontrar um vetor ϵ_ν que satisfaça

$$\bar{h}'_{\nu,\alpha} = -\square\epsilon_\nu. \quad (2.37)$$

Convém salientar aqui que mesmo se já estivermos em um referencial em que $\bar{h}'_{\nu,\alpha} = 0$, ainda assim pode ser feita uma transformação de coordenadas preservando essa condição desde que

$$\square\epsilon_\nu = 0. \quad (2.38)$$

Esta equação também tem como solução

$$\epsilon_\mu = e_\mu e^{jk_\sigma x^\sigma}. \quad (2.39)$$

2.4 Polarização das Ondas Gravitacionais

A solução das equações Eq.(2.26,2.39) é qualquer função do tipo $f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - kct)$.

Em particular vamos supor que é uma onda plana e ela se propaga na direção positiva do eixo x . Todas as componentes de $h_{\mu\nu}$ e de ϵ_μ são funções somente de $-k(x - ct) = k_1x^1 + k_0x^0$.

Como explicado na última seção, existe um sistema de coordenadas tal que $\bar{h}'_{\mu,\nu} = 0$.

Considerando que estamos nele e usando a solução de ondas planas isto se reduz a

$$\bar{h}'_{\mu,\nu} = a_\mu{}^\nu j e^{jk_\sigma x^\sigma} k_\sigma \delta^\sigma_\nu = j k_\nu \bar{h}'_{\mu}{}^\nu = 0 \quad \therefore \quad k_0 \bar{h}'_{\mu}{}^0 + k_1 \bar{h}'_{\mu}{}^1 = 0. \quad (2.40)$$

Daqui tiramos 4 equações

$$\begin{aligned}
 k_0 \bar{h}_0^0 + k_1 \bar{h}_0^1 &= 0 \\
 k_0 \bar{h}_1^0 + k_1 \bar{h}_1^1 &= 0 \\
 k_0 \bar{h}_2^0 + k_1 \bar{h}_2^1 &= 0 \\
 k_0 \bar{h}_3^0 + k_1 \bar{h}_3^1 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Usando a arbitrariedade que ainda temos, ainda preservando $\bar{h}_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} = 0$, podemos achar um vetor ϵ_{μ} que transforma esse sistema para um novo sistema de coordenadas de tal forma a zerar

$$\bar{h}'_1{}^0 = 0, \bar{h}'_2{}^0 = 0, \bar{h}'_3{}^0 = 0 \text{ e } \bar{h}'_2{}^2 + \bar{h}'_3{}^3 = 0. \tag{2.42}$$

Neste novo sistema as Eq.(2.41) são

$$\begin{aligned}
 k_0 \bar{h}'_0{}^0 + k_1 \bar{h}'_0{}^1 &= 0 \\
 k_0 \bar{h}'_1{}^0 + k_1 \bar{h}'_1{}^1 &= 0 \\
 k_0 \bar{h}'_2{}^0 + k_1 \bar{h}'_2{}^1 &= 0 \\
 k_0 \bar{h}'_3{}^0 + k_1 \bar{h}'_3{}^1 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Substituindo as Eq.(2.42) nas Eq.(2.43) obtemos

$$\bar{h}'_0{}^0 = 0, \bar{h}'_1{}^1 = 0, \bar{h}'_2{}^1 = 0 \text{ e } \bar{h}'_3{}^1 = 0. \tag{2.44}$$

Sendo assim o nosso \bar{h}'

$$\bar{h}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{h}'_{22} & \bar{h}'_{23} \\ 0 & 0 & \bar{h}'_{23} & -\bar{h}'_{22} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

mostrando que temos apenas dois termos independentes, que são as duas polarizações possíveis para a onda gravitacional.

Estas polarizações também são conhecidas como $h_{22} = h_+$ e $h_{23} = h_\times$.

Também podemos ver que com esta escolha de gauge $k_\mu \bar{h}'^\mu{}_\nu = 0$ e $\bar{h}'^\mu{}_\mu = 0$, isto é, este é o gauge transversal sem traço.

2.5 Determinação dos ϵ_μ

Usando as Eq.(2.29 e 2.39) temos

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \epsilon_{\mu,\nu} - \epsilon_{\nu,\mu} = h_{\mu\nu} - jk_\nu \epsilon_\mu - jk_\mu \epsilon_\nu \quad \therefore \quad h' = h - 2jk_\sigma \epsilon^\sigma, \quad (2.46)$$

de tal forma que

$$\bar{h}'^\nu{}_\mu = \bar{h}_\mu{}^\nu - jk^\nu \epsilon_\mu - jk_\mu \epsilon^\nu + j\eta_\mu{}^\nu k^\sigma \epsilon_\sigma. \quad (2.47)$$

Substituindo essas equações nas condições Eq.(2.42) podemos determinar os ϵ_μ resol-

vendo o sistema

$$\begin{aligned}
\bar{h}'_1{}^0 &= \bar{h}_1{}^0 - jk^0\epsilon_1 - jk_1\epsilon^0 + j\eta_1{}^0 k^\sigma \epsilon_\sigma & \therefore \bar{h}_1{}^0 &= jk_0\epsilon_1 + jk_1\epsilon_0 \\
\bar{h}'_2{}^0 &= \bar{h}_2{}^0 - jk^0\epsilon_2 - jk_2\epsilon^0 + j\eta_2{}^0 k^\sigma \epsilon_\sigma & \therefore \bar{h}_2{}^0 &= jk_0\epsilon_2 \\
\bar{h}'_3{}^0 &= \bar{h}_3{}^0 - jk^0\epsilon_3 - jk_3\epsilon^0 + j\eta_3{}^0 k^\sigma \epsilon_\sigma & \therefore \bar{h}_3{}^0 &= jk_0\epsilon_3 \\
\left. \begin{aligned} \bar{h}'_2{}^2 &= \bar{h}_2{}^2 + j(k^0\epsilon_0 + k^1\epsilon_1 - 2k^2\epsilon_2) \\ \bar{h}'_3{}^3 &= \bar{h}_3{}^3 + j(k^0\epsilon_0 + k^1\epsilon_1 + 2k^3\epsilon_3) \end{aligned} \right\} & \therefore \bar{h}_2{}^2 + \bar{h}_3{}^3 &= -2j(k_0\epsilon_0 - k_1\epsilon_1).
\end{aligned} \tag{2.48}$$

2.6 A Fórmula do Quadripolo

Em analogia com as ondas eletromagnéticas, as quais podem ser geradas por aceleração de cargas, ondas gravitacionais são produzidas por aceleração de massas irradiadas, sempre que a derivada terceira temporal do momento de quadripolo de uma fonte material seja diferente de zero, de acordo com a equação

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{G}{5c^5} \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right)^2, \tag{2.49}$$

onde

$$Q_{ij} = \int \rho \left(x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2 \right) d^3 x \tag{2.50}$$

e ρ a densidade de massa da fonte.

A constante universal, na Eq. (2.49), dá uma indicação de que a menos que \ddot{Q}_{ij} envolva energias de proporções astronômicas, a energia irradiada será extremamente pequena. Sendo assim, só é possível detectar ondas gravitacionais caso elas sejam produzidas a partir de fontes materiais altamente anisotrópicas que tenham velocidades relativísticas.

2.7 Efeito da passagem da onda gravitacional

A deformação que uma onda gravitacional produz quando incide perpendicularmente sobre o plano de uma circunferência, onde estão dispostas partículas livres, pode ser visto na Fig. 2.1 para 4 instantes de tempo de um ciclo.

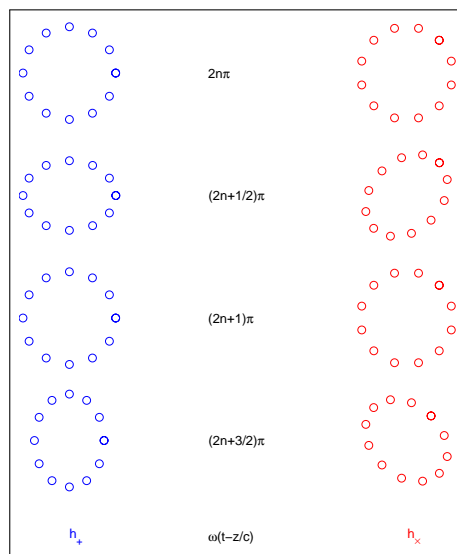


FIGURA 2.1 – Distorção de uma circunferência de partículas livres devido a forças de maré induzidas pela passagem de uma onda gravitacional com polarização h_+ ou h_x

Assim como ondas eletromagnéticas aceleram cargas quando passam por uma região contendo cargas livres, ondas gravitacionais produzem forças de maré acelerando massas durante a sua passagem. Entretanto, no caso de ondas gravitacionais, devido ao princípio da equivalência, essas acelerações são relativas e não podem ser sentidas localmente mas somente entre dois pontos.

O efeito da perturbação transitória sobre a métrica pode ser sentido como força de maré entre pares de massas ou ao longo de um corpo extenso. Essa força relativa F , no caso de uma onda gravitacional com polarização positiva incidindo perpendicularmente à linha que liga duas massas m a uma distância $2L$, está relacionada com a perturbação da métrica de acordo com a equação

$$F = \frac{1}{2}mL \frac{\partial^2 h_+}{\partial t^2}. \quad (2.51)$$

De um modo mais geral a deformação

$$h = \sqrt{h_+^2 + h_\times^2} \quad (2.52)$$

é uma amplitude adimensional que pode ser medida por detectores de ondas gravitacionais.

Entretanto, uma quantidade mais útil que dá uma melhor indicação da sensibilidade do detector, a sensibilidade espectral da deformação, em unidades de $1/\sqrt{\text{Hz}}$ é usada. Esta quantidade leva em consideração a banda de frequência observada onde o sinal está presente (OHANIAN; RUFFINI, 2013).

3 Detectores de Ondas

Gravitacionais

Após a publicação de Einstein em 1916 sobre as equações que descrevem a teoria da relatividade geral, houve um extenso debate sobre a existência de OGs e a forma de sua detecção. O próprio autor da teoria teve suas dúvidas sobre a forma que radiação gravitacional ocorria, se transportava energia ou não e a possibilidade de sua detecção. Estas dúvidas persistiram por muito tempo (CERVANTES-COTA *et al.*, 2016).

Na conferência “*Chapel hill conference*” em 1957 o físico norte americano Richard Feynman abordou a questão sobre o transporte de energia por OGs de forma pragmática, através de uma experiência de pensamento. Feynman imaginou um detector formado por dois anéis deslizando em pouquíssimo atrito sobre uma haste rígida, quando a onda gravitacional passar sobre o conjunto, as forças atômicas manterão o comprimento da haste fixo após a alteração do espaço-tempo, porém a distância entre os anéis oscilará e além disso, esfregarão na haste dissipando energia em forma de calor (PRESKILL; THORNE, 1995).

No início da década de 1960 Joseph Weber, físico da universidade de Maryland, foi pioneiro em estudos sobre detecção de OGs. Ele e seus alunos construíram o primeiro de-

detector de OGs, consistindo de uma massa cilíndrica com frequência ressonante de 1660Hz, e o sinal detectado seria amplificado por dispositivos suficientemente sensíveis feitos de material piezoelétrico atados na superfície do equipamento (BLAIR, 2005) (GLASS, 2016).

Em 1962 foi publicado um artigo de dois cientistas soviéticos, Gertsenshtein e Pustovoit, que fizeram críticas à antena de Weber, afirmando que cristais piezoelétricos não tinha um correto poder de absorção e de que alguns fatores não foram levados em consideração no cálculo feito por Weber, e como OGs interagem muito fracamente com a matéria esta não seria a forma mais efetiva de detecção. Então, em contrapartida, eles propuseram um modelo de detecção usando interferômetros de Michelson, que apresentaria maior ganho quanto à sensibilidade do que interações eletromecânicas. Porém, na medida em que nem a frequência, nem a polarização e nem a direção de propagação da onda é conhecida, faz-se necessário o uso de vários interferômetros e a observação da correlação entre eles para assim localizar as OGs (GERTSENSHTEIN; PUSTOVOIT, 1962).

Neste capítulo serão apresentados os modelos de detectores, tanto os de massa ressonante quando os inteferométricos.

3.1 Detectores de massa ressonante

Detectores do tipo massa ressonante são construídos com materiais caracterizados por suas propriedades acústicas de alta sensibilidade para que a interação com OGs de determinadas frequências e amplitudes (e direção em alguns tipos de detectores) possam excitar seus modos normais de vibração. Essas vibrações são captadas por transdutores que transformam sinais mecânicos em sinais elétricos (SAULSON, 1998). Estes detectores podem ser esféricos ou cilíndricos.

3.1.1 Transdutores

Transdutores são dispositivos que transformam vibrações mecânicas em sinais elétricos.

Estes podem ser categorizados como (PAULA, 2013):

- **Transdutores passivos:** Não possuem fonte de energia externa, como no caso dos materiais piezoelétricos: utilizados nos primeiros detectores; ou capacitivos: mais modernos, possuindo um acoplamento eletromecânico (AGUIAR, 2011) (L.; ZHAO, 2000);
- **Transdutores ativos ou paramétricos:** Para seu funcionamento precisam de fonte de energia externa. Este transdutores tem a capacidade de converter sinais mecânicos da antena em sinais elétricos em altas frequência, na faixa do microondas (PAULA, 2013) (L.; ZHAO, 2000).

3.1.2 Características de Detectores de Massa Ressonante

Detectores de massa ressonante são contruídos com materiais que possuem a mesma frequência de vibração das ondas gravitacionais que pretendem detectar para que ocorra acoplamento entre a OG e a antena, de forma que sua amplitude da vibração da antena seja aumentada e detectável por transdutores. Essas antenas são construídas com materiais de alto fator de qualidade mecânica Q , da ordem de 10^6 , este fator é definido como:

$$Q_m = \omega_m \tau_m \tag{3.1}$$

Sendo ω_m a frequência de ressonância e τ_m o tempo de decaimento das oscilações no

modo m (CESAR, 2002).

Estas antenas são suspensas por um cuidadoso sistema de amortecimento que evita ao máximo vibrações indesejáveis na mesma frequência natural da massa ressonante.

A tabela 3.1 apresenta alguns materiais com os quais antenas ressonantes são construídas e suas características.

Material	ρ (g cm ⁻³)	v_s (km s ⁻¹)	Q	ρv_s^3 (10 ¹³ kg s ⁻³)	$Q\rho v_s^3$ (10 ²⁰ kg s ⁻³)
Aluminium 6061	2.7	5.1	5×10^6	36	18
Aluminium 5056	2.7	5.1	7×10^7	36	250
Niobium	8.57	3.4	2.3×10^8	34	800
Silicon	2.33	8.5	2×10^9	140	2.8×10^4
Sapphire	3.98	9.4	3×10^9	330	10^5
Lead	11.36	1.1		1.5	
Tungsten	18.8	4.3		150	
Copper(94)/Al(6)	8.0	4.6	2×10^7	77.8	155

FIGURA 3.1 – (L.; ZHAO, 2000) Materiais e suas características

Como as OGs possuem amplitudes baixíssimas, são necessários determinados eventos astrofísicos para que possam produzir ondas capazes de serem detectáveis e mesmo nessas condições, essas amplitudes são da ordem de $\approx 10^{-20}m$ além disso tanto a frequência quanto a amplitude da onda precisam estar na banda de detecção do detector.

3.1.3 Detectores de Tipo Barra

O primeiro detector de ondas gravitacionais foi construído por Joseph Weber, era em formato de barra unidimensional e seu funcionamento era em temperatura ambiente. Sensores piezoelétricos eram ligados à sua superfície afim de transpor vibrações mecânicas em pulsos elétricos (CERVANTES-COTA *et al.*, 2016).

Para evidenciar consistentemente a detecção de sinal gravitacional, Joseph Weber operou dois detectores a 1000 km de distância, para que a certeza da detecção fosse apresen-

tada simultaneamente nos dois aparelhos.

Ele buscou coincidências entre sinais apresentados pelos detectores (WEBER, 1969).



FIGURA 3.2 – Histórica fotografia de Joseph Webber e seu detector do tipo barra ressonante.

3.1.4 Detectores Esféricos

Visando melhor eficiência de um detector esférico, Merkowitz e Johnson (MERKOWITZ; JOHNSON, 1997) desenvolveram um método conhecido como arranjo IT (icosaedro truncado), para a distribuição de 6 transdutores responsáveis por monitorar os 5 modos quadrupolares da esfera. Este método possui vantagens tais como a simplificação das equações de movimento, cálculo da direção da fonte astrofísica da onda gravitacional no céu e facilita a interpretação do sinal. Essa técnica foi desenvolvida para o detector TIGA (do inglês *Truncated Icosahedral Gravitational Wave Antenna*) e é também aplicada ao detector Mário Schenberg (FRAJUCA *et al.*, 2005) (JOHNSON; MERKOWITZ, 1993).

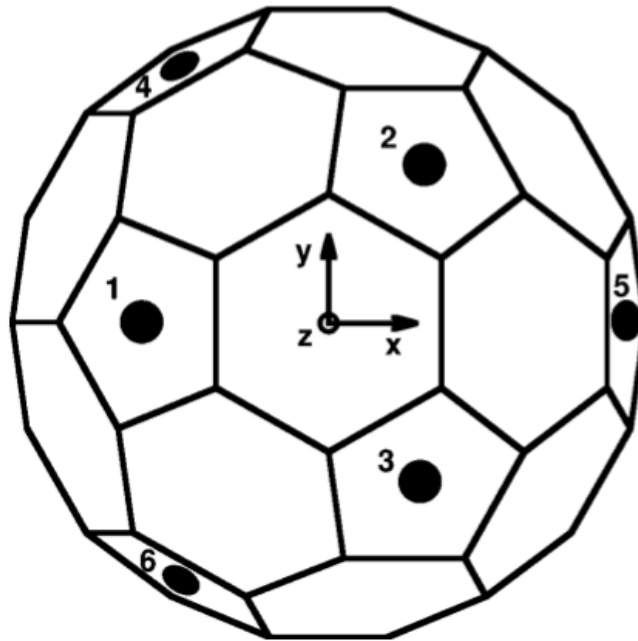


FIGURA 3.3 – (MERKOWITZ; JOHNSON, 1997) Modelo icosaedro truncado para localização dos transdutores.

A figura 3.3 representa o modelo de IT nas três dimensões, onde os transdutores ressonantes são distribuídos em torno de uma esfera. A simetria encontrada no arranjo IT pode ser notada nos padrões de construção da matriz modelo \mathbf{B} , cujas linhas são os harmônicos esféricos reais dos ângulos de posicionamento de cada um dos transdutores. Os vetores são ortogonais entre si e possuem a mesma magnitude, $\sqrt{\frac{3}{2\pi}}$, como mostra a seguinte equação (JOHNSON; MERKOWITZ, 1993):

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \frac{3}{2\pi}\mathbf{I} \quad (3.2)$$

Como termos cruzados em produtos de vetores ortogonais são nulos, isso implica que cada modo da esfera pode ser analisado isoladamente sem interferência. Estes modos da esfera podem ser usados para encontrarmos amplitudes de ondas gravitacionais (JOHNSON; MERKOWITZ, 1993).

A figura 3.4 mostra a localização dos 6 transdutores no detector Mário Schenberg,

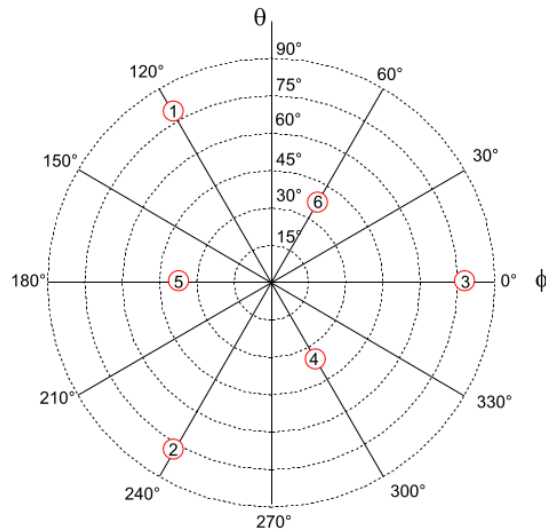


FIGURA 3.4 – (COSTA *et al.*, 2003) Localização dos transdutores do detector Mário Schenberg seguindo o modelo IT

seguinto o modelo IT em coordenadas esféricas.

3.1.5 Ruídos

Ruídos são sinais indesejáveis registrados e que não trazem informações de interesse na pesquisa e dificultam à detecção do sinal da onda gravitacional. Uma série de estratégias são aplicadas para que estes ruídos sejam minimizados. Para melhor estudo, eles podem ser classificados em ruídos internos, aqueles intrínsecos ao próprio detector, e ruídos externos, produzidos por fontes fora do detector. (ANDRADE, 2006)

3.1.6 Ruídos Internos

São aqueles inerentes ao sistema de detecção, não podendo ser eliminados, mas sim minimizados.

- **Ruído Térmico** : Este tipo de ruído é considerado o que mais limita a sensibilidade

da antena e é caracterizado por ser gaussiano e estacionário, podendo ser minimizado diminuindo-se a temperatura da antena (ANDRADE, 2006). Os principais ruídos de temperatura que afetam a antena são:

Térmico de suspensão da antena: Este ruído é causado pelas forças do movimento Browniano ocorridas no sistema de suspensão da antena;

Térmico a antena: Está relacionado com dissipação da energia interna da antena causada pela agitação térmica da estrutura cristalina (ANDRADE, 2006) (COSTA, 2006).

- **Ruído de refrigeração:** São ruídos de baixa frequência causados pelo borbulhamento produzido na mistura de He^3 e He^4 em contato com o equipamento durante o processo de criogênia da antena (ANDRADE, 2006);
- **Ruído de “back-action”:** Quando transdutores são acoplados à antena ocorre interações entre campos elétrico da esfera metálica e do transdutor. A força de reação aplicada à antena é chamada back-action, fazendo com que exista variação na amplitude das oscilações (CESAR, 2002).

3.1.7 Ruídos Externos

- **Ruídos Sísmicos:** Produzidos aleatoriamente pelo ambiente terrestre ou pela ação humana, fazem vibrar as estruturas do laboratório. Para a atenuação deste ruído faz-se necessário um cuidadoso sistema de suspensão da antena. Este ruído tem o

espectro (COSTA, 2006):

$$x(f) = \begin{cases} 10^{-7} & \text{para } f \text{ de } 1 \text{ a } \frac{1}{2} \cdot 10Hz, \\ \frac{10^{-5}}{f^2} & \text{para } f > 10Hz. \end{cases} \quad (3.3)$$

- **Ruídos Acústicos:** São ruídos oriundos de fontes sonoras externas ao detector, como trovões, vozes, etc. Para minimizá-lo faz-se necessário alto vácuo ao redor da antena. (ANDRADE, 2006)
- **Ruídos Eletromagnéticos:** São ruídos provenientes de ondas eletromagnéticas tais como redes de telecomunicações, indução eletromagnética de equipamentos eletrônicos do próprio laboratório. (ANDRADE, 2006)
- **Ruídos de Raios Cósmicos:** Os raios cósmicos são compostos por partículas energéticas vindas do espaço sideral que ao atingirem uma massa ressonante metálica pode excitar seus modos vibracionais em sua frequência de ressonância (COSTA *et al.*, 2014).

Detectores de massa ressonante encontram-se em funcionamento em baixas temperaturas, aproximadamente $1K$, quando eles são atingidos por raios cósmicos há um aquecimento local causando expansão térmica na antena, desta forma causando oscilações que ultrapassam as oscilações térmicas naturais do ambiente e sendo detectadas pelos transdutores do detector de ondas gravitacionais (COSTA *et al.*, 2014) (PEREIRA, 2014).

Existe um sistema de detecção de raios cósmicos instalados nas vizinhanças do detector de ondas gravitacionais para que essas partículas energéticas sejam registradas independente dos sinais detectados pela massa ressonante (PEREIRA, 2014).

3.1.8 Detector de Ondas Gravitacionais Mário Schenberg

Mário Schenberg é um detector de ondas gravitacionais do tipo massa ressonante esférica de 1150kg e com 65cm de diâmetro, de cobre (94%) e alumínio(6%), possuindo a cobertura de banda de $3,0$ até $3,4\text{kHz}$. Este detector é suspenso por um conjunto de massas e molas a fim de filtrar as vibrações sísmicas próximas da frequência da onda gravitacional detectável ($3,2\text{kHz}$). Para monitorar as vibrações da antena, ela possui 9 transdutores paramétrico com frequência de ressonância de $3,2\text{kHz}$. O conjunto é colocado em uma câmara criogênica a uma temperatura de 4K e alto vácuo (TURANO, 2012)(AGUIAR *et al.*, 2002).

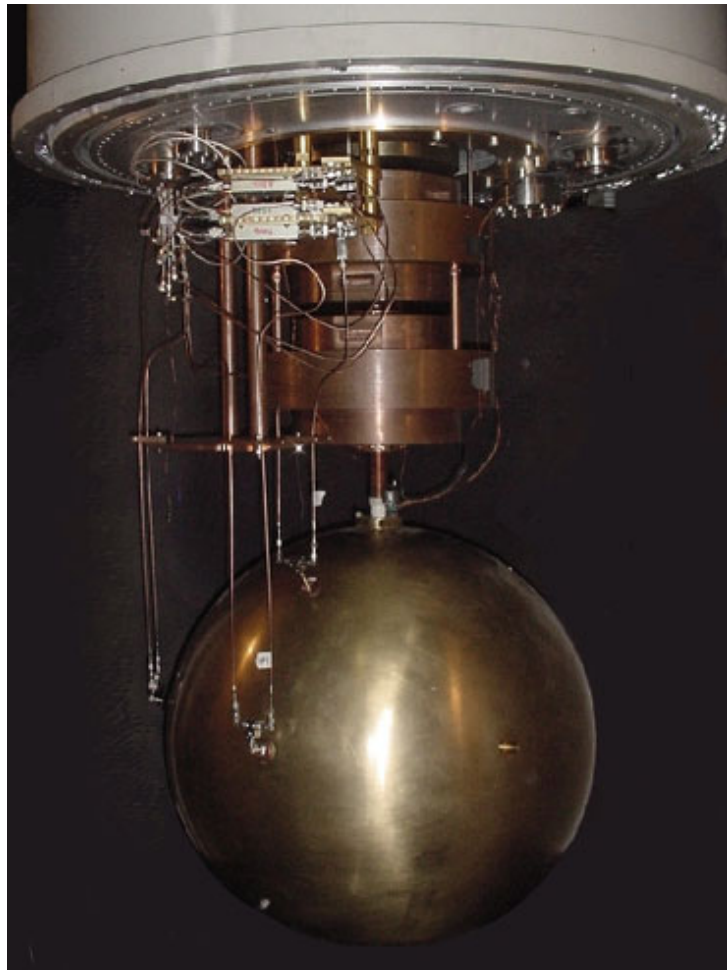


FIGURA 3.5 – (INPE, 2017) Detector de ondas gravitacionais Mário Schenberg

A Figura 3.5 mostra o detector de ondas gravitacionais Mário Schenberg.

Depois de montado e em funcionamento, a antena esférica permite que sejam detectadas ondas gravitacionais geradas pelos seguintes eventos (AGUIAR *et al.*, 2005) (AGUIAR *et al.*, 2002):

- Instabilidade hidrodinâmica de estrelas de nêutron;
- Colápsio de núcleo de supernova;
- *Starquakes* (terremotos) e oscilações no *modo f* em estrelas de nêutrons induzido por uma queda de matéria num sistema binário;
- Excitação do primeiro modo normal quadrupolar de um buraco negro de 3,8 massas solares;
- Coalescência de estrelas de nêutron ou buraco negro de 1,9 massas solares.

3.2 Detectores Interferométricos

Similar ao interferômetro de Michelson e Morley, detectores interferométricos utilizam um laser que entra contato com um divisor de feixes, onde metade do feixe original é transmitido e a outra metade é refletida perpendicularmente, um em relação ao outro.

Cada feixe viaja distâncias diferentes em seus caminhos até seus respectivos espelhos, que os refletem de volta ao divisor e os recombina, causando um padrão de interferência captado por um fotodetector.

Este tipo de detector baseia-se no fato de que quando as ondas gravitacionais se propagam, através do detector, elas produzem pequenas variações na distância de cada braço do detector, mudando o padrão de interferência do sinal que será analisado.

3.2.1 Funcionamento de Detectores Interferométricos

Com a onda gravitacional viajando perpendicular ao plano dos braços do detector, na forma de como a onda se comporta um dos braços vai diminuir de tamanho e o outro vai aumentar, simultaneamente.

A precisão do detector interferométrico está diretamente ligada à distância que a luz percorre em cada braço.

A deformação h é obtida dividindo-se a variação dos comprimentos dos dois braços do detector pelo comprimento do caminho óptico de um dos braços

$$h_{rms} = \frac{\Delta L_{rms}}{L_{opt}}. \quad (3.4)$$

Para aumentar a precisão do detector, espelhos “extras” foram posicionados em cada braço para que a luz possa ser refletida num zig-zag e assim aumentando o caminho óptico percorrido, processo esse denominado “linhas de atraso”, como mostrado na figura 3.6.

Com a passagem da onda gravitacional, as distâncias entre as massas com espelho são alteradas.

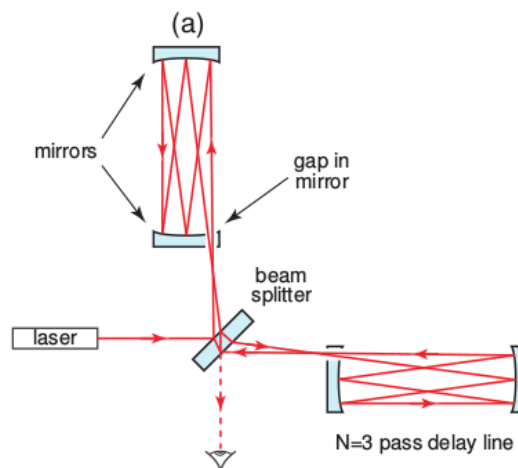


FIGURA 3.6 – (PITKIN *et al.*, 2011) Esquema de funcionamento detector interferométrico

3.2.2 LIGO

Observatório de Ondas Gravitacionais por Interferometria Laser, sigla LIGO em inglês, é um observatório formado por dois detectores interferométricos localizado nos Estados Unidos, LIGO Hanford no estado de Washington e o LIGO Livingston em Louisiana. Separados por 3002km de distância, foram responsáveis pela primeira detecção de OGs.

Devido a sensibilidades destes detectores, a separação é fundamental para que haja a comprovação da passagem da OG, pois muitos ruídos podem ser confundido individualmente com o sinal gravitacional, tais como ruídos sísmicos, acústicos, e outras pequenas vibrações causadas pelo homem e natureza. Os dados de cada detector são analisados e comparados, para que haja a comprovação do evento. A OG detectada em um, necessariamente terá que ser detectada no outro.

Os detectores LIGO começaram a serem construídos no início dos anos 1990 e entraram em funcionamento entre 2002 e 2010. Neste período realizaram-se seis corridas científicas. Em 2015, após uma pausa para atualizações, entrou em funcionamento uma nova versão, denominada Advanced LIGO.

O observatório Advanced LIGO foi responsável pela primeira detecção de ondas gravitacionais da história, o sinal GW150914, que apresentou características de uma coalescência entre dois buracos negros de aproximadamente 36 e 29 massas solares (ABBOTT *et al.*, 2016b).

Em seguida, esses observatórios gêmeos detectaram outras três coalescências de buracos negros com diferentes massas solares, as GW170814, GW140104, GW151226 e GW170608 (ABBOTT *et al.*, 2017a) (ABBOTT *et al.*, 2017b) (ABBOTT *et al.*, 2016a) (COLLABORATION *et al.*, 2017).

No dia 17 de Agosto de 2017, juntamente com o observatório VIRGO, em PISA, na Itália, detectaram a primeira coalescência de estrelas de nêutrons (ABBOTT *et al.*, 2017).

3.2.3 Curva de sensibilidade do LIGO e do Schenberg

A figura 3.7 mostra a curva de sensibilidade dos detectores LIGO, a sua atualização Advanced LIGO e o detector nacional Mário Schenberg, com os respectivos eventos os quais estes podem detectar com a amplitude e a banda de frequência, comparando-os entre si.

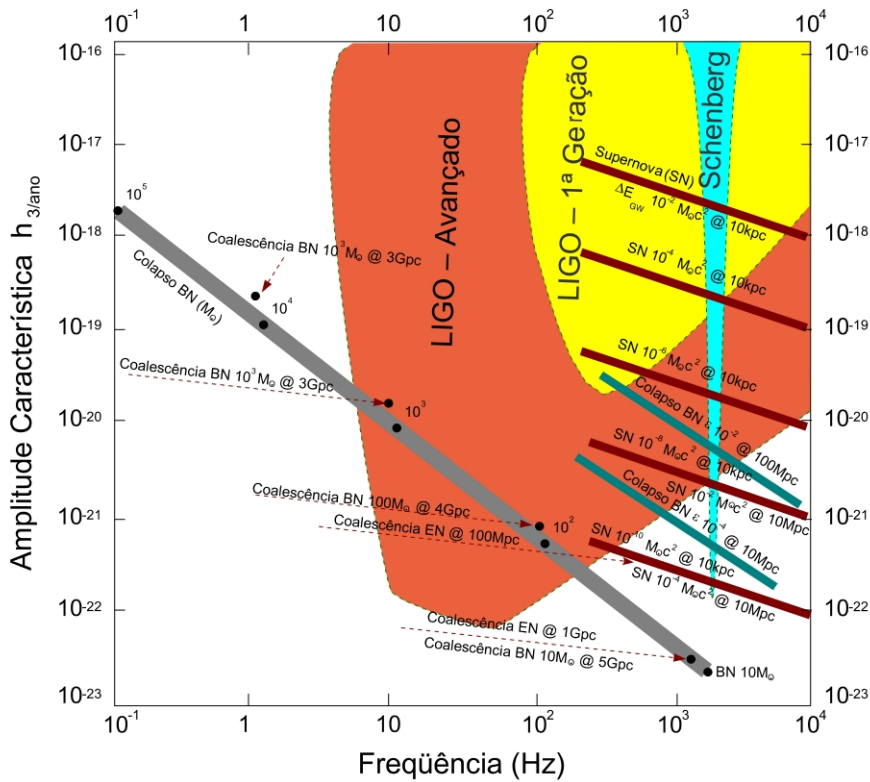


FIGURA 3.7 – (CESAR, 2006) Curva de sensibilidade.

3.2.4 VIRGO

Virgo é um detector interferométrico localizado na cidade de Pisa na Itália, que junto com os detectores LIGOs detectaram a fusão de duas estrelas de nêutrons e através de uma espécie de triangularização conseguiram localizá-la no espaço para que outros observatórios também pudessem analisar o fenômeno.



FIGURA 3.8 – (1.0, 2017) Detector interferométrico VIRGO, localizado em PISA na Itália.

3.2.5 LISA

O detector interferométrico LISA (sigla em inglês de Laser Interferometer Space Antenna) é um projeto para o futuro detector fora da Terra, sensível o suficiente para observar ondas gravitacionais com frequências impossíveis de serem detectadas da Terra, além de antecipar eventos em semanas e até meses antes da ocorrência, permitindo enviar coordenadas da localização para que outros tipos de observatórios, como os de raio X e eletromagnéticos, possam observar e estudar esses eventos (DANZMANN; TEAM, 1996).

Este detector usará três braços e seis espaçonaves (duas em cada vértice), formando um triângulo numa órbita heliocêntrica. Como a figura a seguir:

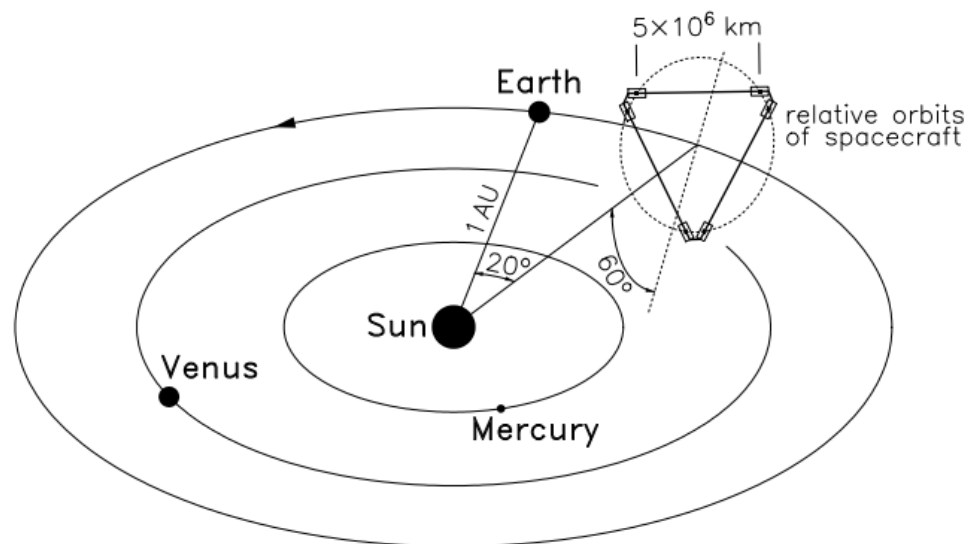


FIGURA 3.9 – (DANZMANN; TEAM, 1996) Esquema de localização do futuro detector LISA com suas dimensões.

4 Sistema Binário

Neste capítulo é feito o cálculo simplificado de um sistema binário formado por um buraco negro de $3M_{\odot}$ e uma estrela de nêutrons de $1,4M_{\odot}$ (BN-EN) até a coalescência, desprezando a força de maré e a rotação do buraco negro em torno do seu próprio eixo.

A figura a seguir é uma representação de um sistema binário formado por um BN-EN similar ao sistema estudado neste capítulo.

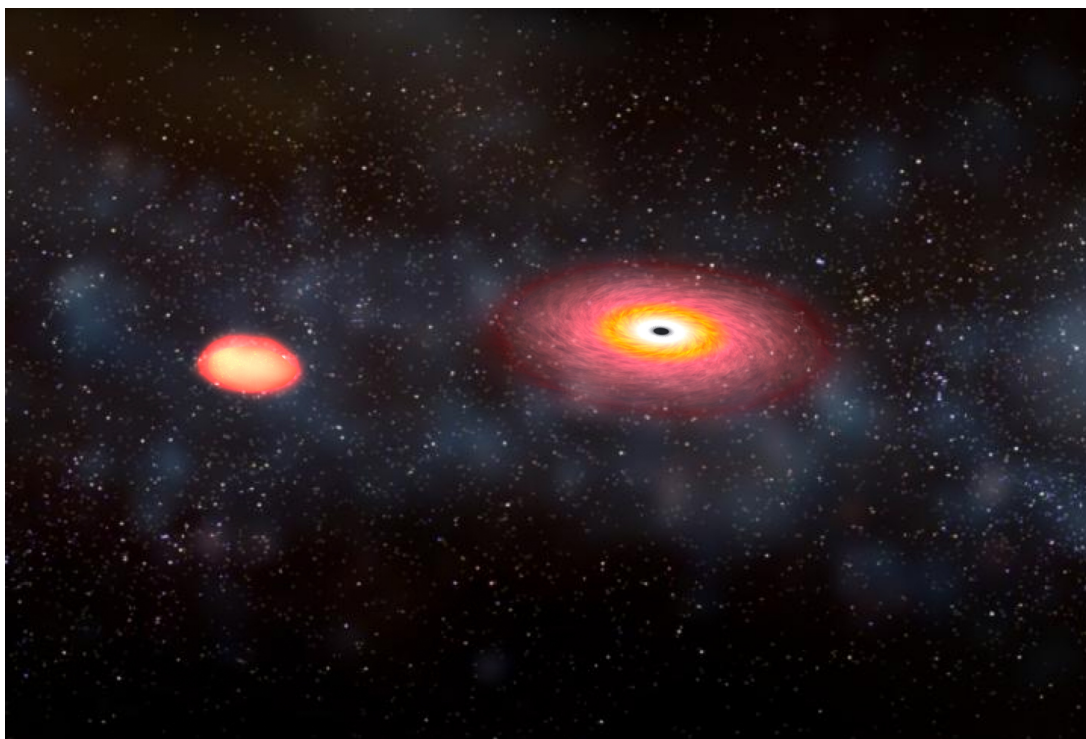


FIGURA 4.1 – (Dana Berry/NASA, 2017) Simulação de um sistema binário envolvendo uma estrela de nêutron e um buraco negro.

4.1 Estrelas de Nêutrons e Buracos Negros

A estrela desenvolve uma série de conchas sobrepostas que se tornam semelhantes a uma cebola, onde elementos mais pesados se acumulam nas camadas mais internas. O núcleo interno dessas estrelas pode entrar em colapso quando os processos de fusão nuclear se tornam insuficientes para compensar a gravidade: esta é a causa de todos os tipos de supernova.

Nas estrelas, é o equilíbrio hidrostático que mantém constante o volume e o diâmetro estelar, uma vez que a expansão dada pela energia de fusão é contrária à gravidade que tende a implodí-la. Quando uma estrela massiva sintetiza um núcleo de ferro com uma massa maior que o limite de Chandrasekhar, nem a pressão dos elétrons degenerados é capaz de se opor à força da gravidade e ela entra em colapso, dando origem a uma estrela de nêutrons ou buraco negro.

4.1.1 Formação do Sistema Binário BN-EN

Existe um limite crítico, aproximadamente $3M_{\odot}$ de massa, para que uma estrela de nêutrons não colapse ainda mais devido a pressão gravitacional que age sobre a matéria neutrônica. Se a massa da estrela for superior a esse limite, ela não suportará a pressão e continuará implodindo até formar um objeto extremamente compacto, de densidade infinita curvando completamente o espaço-tempo ao seu redor. Este objeto é o buraco negro.

A região limite onde toda a informação, até mesmo a luz, não poderá voltar ao seu observador externo é chamada de horizonte de eventos (MILONE *et al.*, 2003). A figura 4.2 demonstra esquematicamente a formação de buracos negros e estrelas de nêutrons como

foi explicado anteriormente.

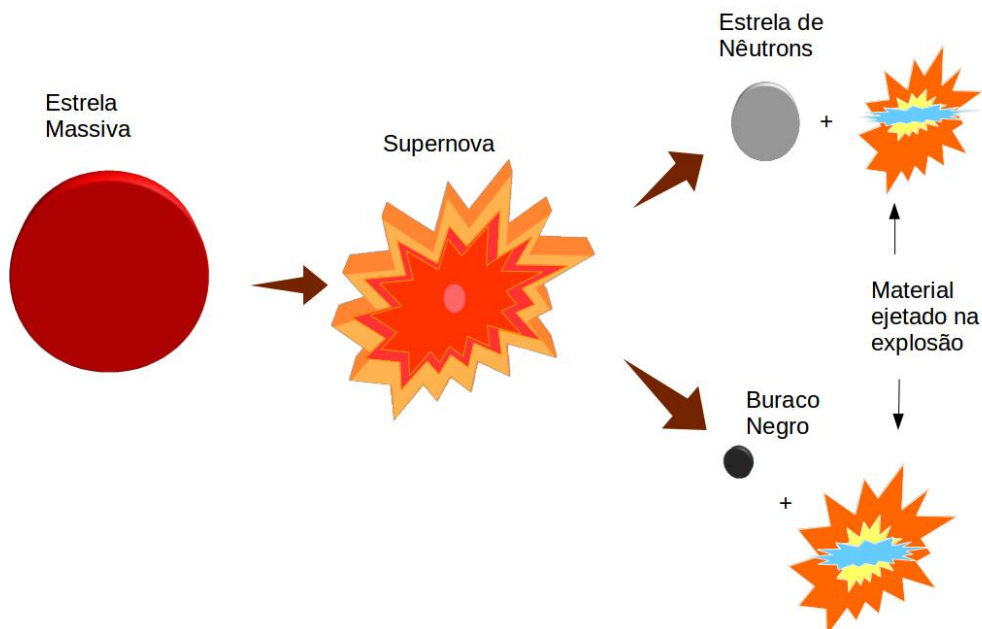


FIGURA 4.2 – Formação de estrela de nêutrons e buraco negro.

Explosões assimétricas de supernovas formadas por um sistema binário de estrelas massivas, com massa maiores que $8M_{\odot}$, podem ser responsáveis pelo nascimento de objetos compactos secundários como sistemas binários formados por BN-EN (LEE *et al.*, 2010). Inspiração de BN-EN foram observados através de pulsos de raios-X emitidos pela própria estrela de nêutrons envolvida (FOX *et al.*, 2005). Até a escrita desta tese, ainda não foram detectadas OGs geradas pela coalescência desses objetos.

As OGs emitidas por BN-EN são muito importantes para a análise desses eventos, pois oferecem informações sobre o raio de separação, energia emitida e massas envolvidas. Além disso, os detectores de OGs, como ocorre no caso do detector Mário Schenberg, e os detectores interferométricos em conjunto, podem localizar a direção do evento no céu, fornecendo esta informação para que outros observatórios possam apontar nesta direção, criando assim uma nova ferramenta para explorar a matéria nuclear de alta densidade

que é totalmente independente dos estudos feitos por experimentos nucleares conhecidos (SHIBATA; TANIGUCHI, 2011).

4.1.2 Determinação da Taxa de Eventos por Ano

A taxa de eventos envolvendo BN-EN só pode ser calculada indiretamente, através de um limite superior encontrado por dados fornecidos em explosões de raios gamas, (GRB-*Gamma ray burst* em inglês) e considerando que todo material do processo foi produzido nas coalescências (LI *et al.*, 2017).

Os detectores de OG buscam por vários tipos de sinais possíveis. Aqui nos concentramos em sinais de coalescências binárias compactas, como fusões de BN-EN. Estas são fontes promissoras para detecção de OG, mas ainda não foram observadas.

Fizemos um estudo bibliográfico sobre a taxa de ocorrência dentro de um determinado raio de distância em todas as direções, uma vez que o detector Mário Schenberg, devido a sua simetria, é omnidirecional.

A taxa de coalescências de BN-EN é incerta e só pode ser calculada indiretamente. Por exemplo: limites superiores são fornecidos pela observação de GRB (do inglês *Gamma-ray Burst*), assumindo que todos os GRBs estão ligados aos sistemas BN-EN (NAKAR, 2007) e pelo pressuposto de que todo o material do processo foi produzido na coalescência (BAUSWEIN *et al.*, 2014).

Para este trabalho, adotamos as estimativas de (LI *et al.*, 2017) e (ABBOTT *et al.*, 2016c) que predizem que a densidade da taxa tem um limite superior de $3,6 \times 10^{-6} Mpc^{-3} yr^{-1}$, assumindo uma população de sistemas binários de $1,4M_{\odot} + 5M_{\odot}$ com spin isotropicamente distribuídos. O limite superior da taxa diminui para buracos negros com massas maiores.

As taxas de detecção esperadas para outras fontes transitórias são menores e/ou menos confiáveis.

Não foi encontrado estudo similar para o detector Mário Schenberg, porém, usando essas pesquisas como base, pode-se concluir que existe consistência na formação de sistemas binários de BN-EN envolvendo $1,4M_{\odot}$ e $3M_{\odot}$ os quais produzam ondas gravitacionais detectáveis.

Para as OGs serem detectadas precisamos que suas amplitudes sejam compatíveis com a sensibilidade do detector. Essas amplitudes são inversamente proporcionais à distância de acordo com a equação:

$$h = 4,1 \times 10^{-22} \left(\frac{\mu}{M_{\odot}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{100Mpc}{d}\right) \left(\frac{100Hz}{f_c}\right)^{\frac{1}{6}} \quad (4.1)$$

Onde M é a massa total do sistema e μ a massa reduzida, $\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$, f_c é a frequência característica, $f_c = \frac{1}{2\pi\tau}$, que depende do tempo τ durante o qual ocorre o evento, M_{\odot} é uma massa solar e d a distância até a fonte (CESAR, 2006).

Conforme a curva de sensibilidade do detector Mário Schenberg mostrada na Figura 3.7, sinais gravitacionais com amplitude de até $h \sim 10^{-22}$ poderiam ser detectados na frequência nominal da antena.

Neste caso poderia ser produzido um sinal em ondas gravitacionais cuja amplitude característica seja $h \sim 10^{-22}$ a distâncias da ordem de 0,1 Gpc. Nesse volume a taxa de eventos seria $\sim 3,6 \text{ ano}^{-1}$ o que colocaria as coalescências de BN-EN de $1,4M_{\odot} + 3M_{\odot}$ como promissora fonte de ondas gravitacionais para o detector brasileiro Mário Schenberg.

4.2 Cálculo da Coalescência

Considerando-se um sistema binário formado por uma estrela de nêutron, de massa M_1 , e um buraco negro estelar, de massa M_2 , girando em órbitas circulares em torno do centro de massa do sistema e aplicando-se a lei de Kepler:

$$\mu\omega^2 r = \frac{GM_1M_2}{r^2}. \quad (4.2)$$

No qual ω é a velocidade angular, G é a constante gravitacional universal, μ é a massa reduzida definida como $\mu = (M_1M_2)/(M_1 + M_2)$ e r a distância entre os centros de massa de cada corpo. Como mostrado na Fig.(4.3):

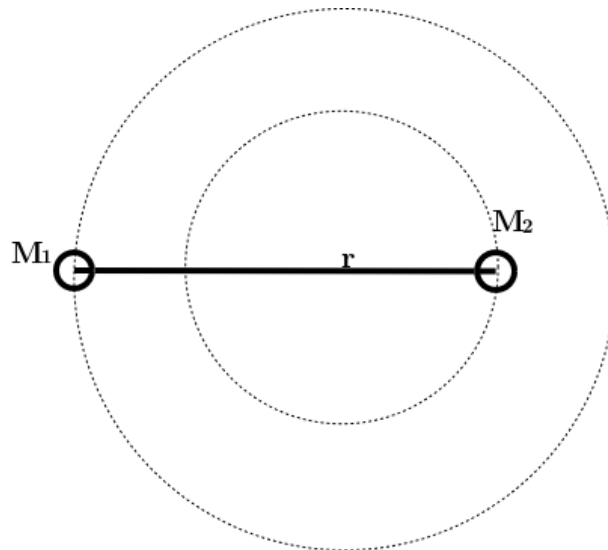


FIGURA 4.3 – Representação do sistema binário girando em torno do centro de massa.

Reescrevendo a Eq.(4.2) em função de r :

$$r = \left(\frac{GM_1M_2}{\mu} \right)^{\frac{1}{3}} \omega^{-\frac{2}{3}}. \quad (4.3)$$

A energia total deste sistema é dada pela soma da energia cinética e com a energia

potencial, como segue:

$$E = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 - \frac{GM_1 M_2}{r} \quad (4.4)$$

Escrevendo a Eq.(4.3) na Eq.(4.4):

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \right) \omega^2 \frac{G^{\frac{2}{3}} (M_1 + M_2)^{\frac{2}{3}}}{\omega^{\frac{4}{3}}} - \frac{GM_1 M_2 \omega^{\frac{2}{3}}}{G^{\frac{1}{3}} (M_1 + M_2)^{\frac{1}{3}}} \quad (4.5)$$

simplificando a (4.5):

$$E = -\frac{1}{2} G^{\frac{2}{3}} \left(\frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^{\frac{1}{3}}} \right) \omega^{\frac{2}{3}} \quad (4.6)$$

Um quadrupolo giratório formado por duas massas em órbita esférica girando em torno de um centro de massa em comum emite energia E_{og} na seguinte taxa:

$$\frac{dE_{og}}{dt} = -\frac{32G}{5c^2} \left(\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \right)^2 r^4 \omega^6 \quad (4.7)$$

A dedução dessa equação encontra-se na referência (OHANIAN; RUFFINI, 2013) ¹.

Onde c é a velocidade da luz. Quando as massas desse sistema em sua órbita giram de 180°, o momento de quadrupolo se repete, conseqüentemente, a frequência da onda gravitacional gerada é 2ω .

Substituindo o valor de r , Eq.(4.3), em (4.7) obtemos a expressão para a perda de

¹Página 60 do livro *Gravitational and Spacetime*, autor Hans C. Ohanian

energia através de ondas gravitacionais em função da frequência angular:

$$\frac{dE_{og}}{dt} = -\frac{32G^{\frac{7}{3}}}{5c^5} \frac{(M_1 M_2)^2}{(M_1 + M_2)^{\frac{2}{3}}} \omega^{\frac{10}{3}} = C_2 \omega^{\frac{10}{3}} \quad (4.8)$$

A constante C_2 foi introduzida para simplificar a expressão, de modo que:

$$C_2 = -\frac{32G^{\frac{7}{3}}}{5c^5} \frac{(M_1 M_2)^2}{(M_1 + M_2)^{\frac{2}{3}}} \quad (4.9)$$

Quando o sistema em órbita circular perde energia em forma de ondas gravitacionais os corpos vão se aproximando até a última órbita estável em que a lei de Kepler ainda seja válida.

A derivada temporal da perda de energia por ondas gravitacionais pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{dE_{og}}{dt} = \frac{dE}{d\omega} \frac{d\omega}{dt} \quad (4.10)$$

Derivando a Eq.(4.6) com relação à frequência angular, temos:

$$\frac{dE}{d\omega} = \frac{2}{3} C_1 \omega^{-\frac{1}{3}} \quad (4.11)$$

Onde

$$C_1 = -\frac{1}{2} G^{\frac{2}{3}} \frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^{\frac{1}{3}}} \quad (4.12)$$

Substituindo a Eq.(4.8) e Eq.(4.11) na Eq.(4.10):

$$C_2 \omega^{\frac{10}{3}} = C_1 \frac{2}{3} \omega^{-\frac{1}{3}} \frac{d\omega}{dt} \quad (4.13)$$

Ou ainda

$$\frac{C_2}{C_1} \frac{3}{2} dt = \frac{d\omega}{\omega^{\frac{11}{3}}}. \quad (4.14)$$

Integrando ambos os lados da equação, temos:

$$\int_{-t}^0 \frac{C_2}{C_1} \frac{3}{2} dt = \int_{\omega}^{\omega_c} \frac{d\omega}{\omega^{\frac{11}{3}}}, \quad (4.15)$$

No qual ω_c é a frequência angular da última órbita estável. Resolvendo a integral acima temos

$$\omega = 5^{\frac{3}{8}} \omega_c \left(\frac{c^5 (M_1 + M_2)^{\frac{1}{3}}}{5c^5 (M_1 + M_2)^{\frac{1}{3}} - 256 M_1 t \omega_c^{\frac{8}{3}} G^{\frac{5}{3}} M_2} \right)^{\frac{3}{8}} \quad (4.16)$$

Esta é a frequência de oscilação da onda gravitacional.

Como já foi dito antes, a figura 3.7 mostra que para uma OG seja detectada, além da frequência, precisa-se da amplitude do seu sinal. Como pode ser observado pela Eq.(4.1), a amplitude do sinal gravitacional varia com a distância.

Supondo um sistema binário formado por um BN-EN, cuja a frequência angular seja dada pela Eq.(4.16), esteja localizada no aglomerado de Virgem, que é o conjunto de galáxias mais próximas da Terra, a uma distância de 18Mpc, ele gera um sinal gravitacional cuja forma é apresentada na figura a seguir:

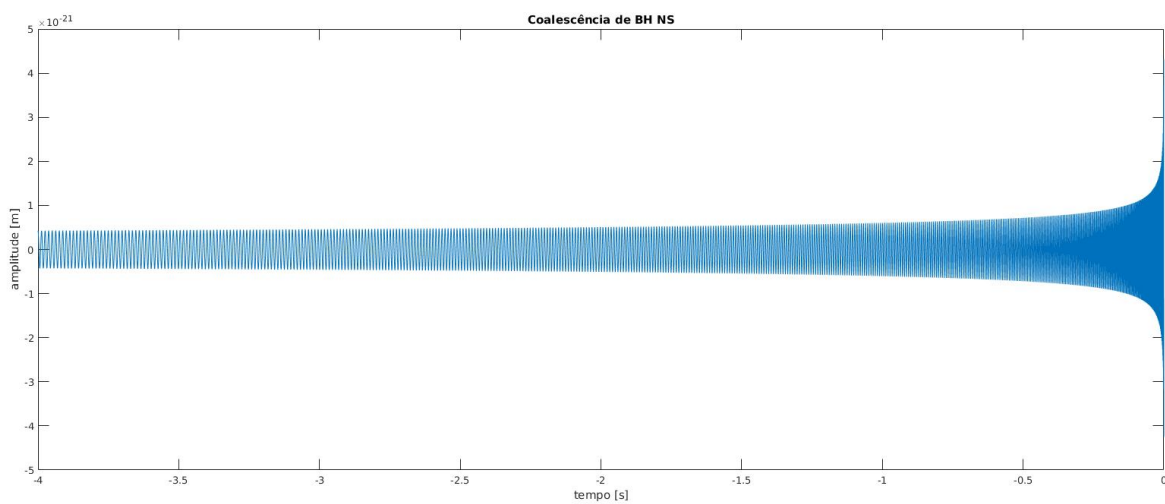


FIGURA 4.4 – A forma de uma onda gravitacional gerada por uma estrela de nêutron e um buraco negro.

5 Análise de Dados em Detectores Esféricos

5.1 Modelo Matemático

Como já mencionado anteriormente, o detector de OGs Mário Schenberg, foi construído inicialmente com a ideia de se realizar o monitoramento de suas oscilações mecânicas por meio de transdutores paramétrico acoplados na sua superfície.

Do ponto de vista matemático, Merkowitz e Johnson propuseram um modelo no qual se relacionam os dados de saída de seis transdutores acoplados á superfície do detector, decompondo-os sob os modos quadripolares da esfera (canais dos modos), o que permite a reconstrução dos parâmetros que caracterizam a onda gravitacional incidente.

Contudo, este modelo pode ser de difícil aplicabilidade, já que cinco ou mais transdutores devem encontrar-se em funcionamento simultâneo.

Portanto, dando sequência deste trabalho, é apresentada uma proposta que permite a análise dos dados de saída de cada transdutor de forma independente.

Neste sentido, na próxima seção é apresentada nossa proposta para análise de dados de um detector esférico que, basicamente, descreve a interação de um único transdutor

acoplado à superfície esférica.

Calculamos desta forma a função de transferência, para construirmos na sequência um filtro digital tipo *matched* para procurar a assinatura do sinal gravitacional em meio ao ruído natural do detector.

5.1.1 Função de Transferência

Quando tratados de forma independente, cada transdutor acoplado sob a superfície do detector pode ser modelado como um sistema de três massas e três molas, como o mostrado na figura a seguir:

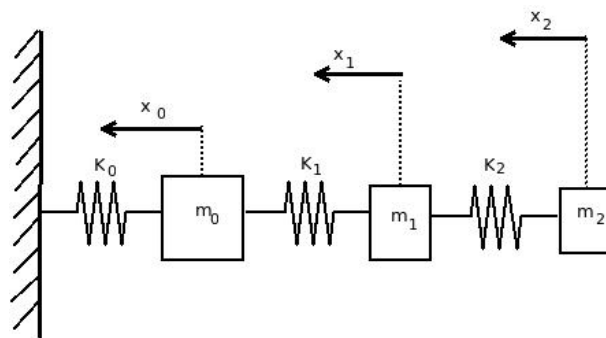


FIGURA 5.1 – Representação do modelo matemático que descreve o sistema acoplado do transdutor

Na Figura 5.1, a massa m_0 representa a massa efetiva da antena que interage com o transdutor, as m_1 e m_2 , representam respectivamente as massas dos transdutores primário e secundário. Os termos de x_0 , x_1 e x_2 representam as distâncias da mola até o centro de massa de cada transdutor.

Esse modelo de transdutor possui dois modos vibracionais posicionados de forma que a amplitude do sinal possa ser aumentada. Para que seja possível este modelo, a seguinte

relação entre massas devem existir (LENZI, 2006).

$$\mu = \frac{m_1}{m_0} = \frac{m_2}{m_1} \quad (5.1)$$

No qual μ é constante. Para transdutores com mais modos vibracionais, esta relação também é válida.

A amplificação do sinal gravitacional na saída dos transdutores é cuidadosamente ajustada para que as frequências naturais dos transdutores primários e secundários, que é a relação entre constante elástica e massa, sejam as mais próximas possíveis das frequências dos modos quadripolares da esfera (ω_0) de forma que (LENZI, 2006):

$$\frac{k_0}{m_0} = \frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2} = \omega_0^2 \quad (5.2)$$

Para o detector Mário Schenberg, os valores das frequências dos modos quadripolares da esfera, são degenerados com valor aproximado de 3,19 kHz (FRAJUCA *et al.*, 2007).

Tomando o modelo representado na figura 5.1, a energia cinética total é dada por:

$$T(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m_0\dot{x}_0^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \quad (5.3)$$

E a energia potencial total do sistema em termos da massa de cada transdutor e a frequência de ressonância ω_o , como definido em (5.2):

$$V(x) = \frac{1}{2}m_0\omega_0^2x_0^2 + \frac{1}{2}m_1\omega_0^2(x_1 - x_0)^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_0^2(x_2 - x_1)^2. \quad (5.4)$$

A Lagrangiana, que é definida por

$$L(x, \dot{x}, t) = T(x, \dot{x}, t) - V(x) \quad (5.5)$$

resulta em

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_0^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}m_0\omega_0^2x_0^2 - \frac{1}{2}m_1\omega_0^2(x_1 - x_0)^2 - \frac{1}{2}m_2\omega_0^2(x_2 - x_1)^2 \quad (5.6)$$

As equações de movimento são dadas por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = Q_j. \quad (5.7)$$

No caso, Q_j são forças generalizadas. Calculando a equação de movimento para os índices de $j = 1, 2$ e 3 , dividindo tudo pela massa efetiva m_0 e usando as relações da equação (5.1), as equações de movimento tomam a forma:

$$\ddot{x}_0 + x_0\omega_0^2(\mu + 1) - \mu\omega_0^2x_1 = \frac{F_0(t)}{m_0} \quad (5.8)$$

$$\mu\ddot{x}_1 - \mu x_0\omega_0^2 + x_1\omega_0^2(\mu + \mu^2) - x_2\omega_0^2\mu^2 = \frac{F_1(t)}{m_0} \quad (5.9)$$

$$\mu^2\ddot{x}_2 - \mu^2\omega_0^2x_1 + \mu^2\omega_0^2x_2 = \frac{F_2(t)}{m_0} \quad (5.10)$$

Onde $F_o(t)$, $F_1(t)$ e $F_2(t)$ são as forças externas aplicadas ao sistema e responsáveis pelas oscilações.

Podemos escrever este sistema de equações em formato matricial, como segue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_0(t) \\ \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\mu + 1)\omega_0^2 & -\mu\omega_0^2 & 0 \\ -\mu\omega_0^2 & (\mu + \mu^2)\omega_0^2 & -\mu^2\omega_0^2 \\ 0 & -\mu^2\omega_0^2 & \mu^2\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_0(t)}{m_0} \\ \frac{F_1(t)}{m_0} \\ \frac{F_3(t)}{m_0} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Ou na forma reduzida, para simplificar a visualização:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \xi\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (5.12)$$

onde cada termo é:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu^2 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}_0(t) \\ \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

$$\xi = \begin{pmatrix} (\mu + 1)\omega_0^2 & -\mu\omega_0^2 & 0 \\ -\mu\omega_0^2 & (\mu + \mu^2)\omega_0^2 & -\mu^2\omega_0^2 \\ 0 & -\mu^2\omega_0^2 & \mu^2\omega_0^2 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} \frac{F_0(t)}{m_0} \\ \frac{F_1(t)}{m_0} \\ \frac{F_3(t)}{m_0} \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

Tendo a forma matricial, fica fácil calcular a função de transferência do conjunto de massas e molas, representado aqui pela saída x_0 , x_1 e x_2 do sistema.

Com este intuito, escrevemos a Eq.(5.12) em termos de coordenadas normalizadas. Para tal, basta realizar a seguinte transformação de coordenadas no sistema:

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}\mathbf{y} \quad (5.18)$$

Onde \mathbf{N} é a matriz de normalização:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Com facilidade pode-se demonstrar que $\mathbf{MNM} = \mathbf{I}$. Assim a equação (5.12) toma a forma:

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{W}\mathbf{y} = \mathbf{NF} \quad (5.20)$$

onde $\mathbf{W} = \mathbf{N}\xi\mathbf{N}$ é dada por:

$$\mathbf{W} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} \mu + 1 & -\sqrt{\mu} & 0 \\ -\sqrt{\mu} & \mu + 1 & -\sqrt{\mu} \\ 0 & -\sqrt{\mu} & 1 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

\mathbf{W} é diagonalizável pela transformação:

$$\mathbf{D} = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{W} \mathbf{U} \quad (5.22)$$

Assim, \mathbf{U} é uma matriz coluna cujas componentes são os auto-valores do sistema e \mathbf{U}^\dagger é sua adjunta. \mathbf{D} é a matriz diagonal de auto-vetores do sistema. Como este problema admite apenas soluções reais e positivas para os valores das frequências, e para isso a matriz de autovetores \mathbf{U} precisa ser hermitiana, $\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{I}$.

Normalizando \mathbf{W} , as frequências angulares características do sistema são:

$$\omega_+^2 = \lambda_1 \omega_0^2 \quad (5.23)$$

$$\omega_{ref}^2 = \lambda_2 \omega_0^2 \quad (5.24)$$

$$\omega_-^2 = \lambda_3 \omega_0^2 \quad (5.25)$$

Onde λ_1 , λ_2 e λ_3 são autovalores. Para que o sistema matricial adquira a forma canônica, faz-se necessário;

$$\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{U}\eta(\mathbf{t}) \quad (5.26)$$

Escrevendo (5.26) em (5.20), multiplicando ambos os lados da equação por \mathbf{U}^\dagger e usando as propriedades do produto hermitiano, tem-se:

$$\mathbf{I}\ddot{\eta} + \mathbf{D}\eta(\mathbf{t}) = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{N}\mathbf{F}(\mathbf{t}) \quad (5.27)$$

Para resolver (5.27) pode-se mudar o sistema para o domínio da frequência através do método de transformada de Fourier. Assim, o sistema adquire a forma:

$$(-\omega^2 \mathbf{I} + \mathbf{D})\tilde{\eta}(\omega) = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{N}\tilde{\mathbf{F}}(\omega) \quad (5.28)$$

Para facilitar a visualização do sistema, definindo a matriz como:

$$\mathbf{G}^{-1} = -\mathbf{I}\omega^2 + \mathbf{D} \quad (5.29)$$

Retornando as coordenadas iniciais do sistema

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}\mathbf{U}\eta \quad (5.30)$$

Então como solução no domínio da frequência para as equações:

$$\tilde{\mathbf{x}}(\omega) = \mathbf{N}\mathbf{U}\mathbf{G}\mathbf{U}^\dagger\tilde{\mathbf{F}}(\omega) \quad (5.31)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{N}\mathbf{U}\mathbf{G}\mathbf{U}^\dagger\mathbf{N} \quad (5.32)$$

A função de transferência para cada componente do transdutor e de sua devida massa efetiva é dada pela equação (5.32).

Este problema foi resolvido numericamente usando o programa Matlab (MATLAB, 2017). Os parâmetros e os valores calculados são:

TABELA 5.1 – Parâmetros medidos e calculados do detector Mário Schenberg

Massa da antena	$M_{antena} = 1147,48 \text{ kg}$
Massa efetiva	$m_0 = 574,70 \text{ kg}$
Massa do transdutor primário	$m_1 = 0,10712 \text{ kg}$
Massa do transdutor secundário	$m_2 = 0,00001 \text{ kg}$
Frequência natural da esfera	$\omega_0 = 2\pi \times (3206,3) \text{ rad/s}$
Frequência característica +	$\omega_+ = 2\pi \times (3184,4) \text{ rad/s}$
Frequência característica -	$\omega_- = 2\pi \times (3206,4) \text{ rad/s}$
Frequência característica ref.	$\omega_{ref} = 2\pi \times (3228) \text{ rad/s}$

Esta é uma proposta alternativa para o cálculo da função de transferência do detector de onda gravitacionais Mário Schenberg (LENZI, 2006).

5.2 Método para Análise de Sinal

Como já foi dito no capítulo 3, um grande desafio na detectação de sinais gravitacionais são os ruídos presentes nele. No qual, parte desses ruídos podem ser minimizados mecanicamente pelo aparato tecnológico do detector e a outra parte precisa ser dissociada do sinal útil por meio de filtros digitais.

O objetivo deste capítulo é a construção de um filtro digital para busca do sinal gravitacional específico, apresentado no capítulo 4.

5.2.1 Filtro

Considere que $f(t)$ seja a função de entrada que contém os dados crus, ou seja, é definida como a soma do sinal útil $m(t)$ e ruídos $n(t)$, no qual tanto o sinal quanto os ruídos são resultados de processos aleatórios em função de t

$$f(t) = m(t) + n(t). \quad (5.33)$$

Esta é a função de entrada em um sistema \mathcal{K} que funciona como o filtro responsável pelo processo de extração do sinal útil $m(t)$ do ruído como está esquematizado na Fig. (5.2).

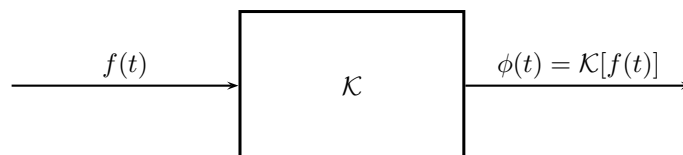


FIGURA 5.2 – Representação esquemática do sistema

Após passar por operações matemática de \mathcal{K} , a função resultante é chamada de função de saída, $\phi(t)$.

O processo de filtragem com o menor erro possível depende da escolha do operador \mathcal{K} . Na sua forma mais simples, quando entra no sistema \mathcal{K} o sinal $m(t)$ temos na saída

$$\mu(t) = \mathcal{K}[m(t)]. \quad (5.34)$$

Em nosso caso, não estamos interessados no sistema \mathcal{K} que recupera o sinal original, pois, ele já é conhecido. Desta forma, o que desejamos é obter um filtro \mathcal{K} tal que indique a presença ou não do sinal $m(t)$ nos dados. Assim temos que procurar por um filtro tal que nos indique se

$$\phi(t) = \mu(t) + \nu(t) \quad (5.35)$$

ou se estamos na presença somente de ruído

$$\phi(t) = \nu(t). \quad (5.36)$$

$\mu(t)$ e $\nu(t)$ que são respectivamente o resultado da passagem do sinal e do ruído por \mathcal{K} , ou seja, o resultante da saída do filtro.

No domínio da frequência, a operação do sistema \mathcal{K} sobre os dados é dada pelo produto da função de transferência $K(w)$ deste filtro pela transformada de Fourier do sinal

$$\tilde{\mu}(w) = K(w)M(w) \quad (5.37)$$

No domínio do tempo $\mu(t)$ é dado pela transformada inversa de Fourier

$$\mu(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} K(\omega) M(\omega) d\omega. \quad (5.38)$$

A intensidade média do ruído na saída do filtro $K(\omega)$ é dado por (WAINSTEIN; ZUBAKOV, 1962)

$$\overline{\nu^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 S_n(\omega) d\omega \quad (5.39)$$

O termo S_n é a densidade espectral de potência do ruído, definida pela transformada de Fourier da função de auto-correlação do ruído $\nu(t)$. Essa densidade espectral pode ser obtido através de dados experimentais do equipamento ou modelagem computacional (COSTA, 2006).

A razão entre o sinal e o ruído, ρ , num determinado instante t_0 é definida por (WAINSTEIN; ZUBAKOV, 1962)

$$\rho = \frac{\mu^2(t_0)}{\overline{\nu^2}}. \quad (5.40)$$

Substituindo as equações Eq.(5.38) e Eq.(5.39) em Eq.(5.40), tem-se

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \frac{|\int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) M(\omega) d(\omega)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 S_n(\omega) d\omega}. \quad (5.41)$$

O objetivo do filtro é maximizar essa razão sinal-ruído, Eq.(5.41).

Usando a desigualdade de Schwarz

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t_0} K(\omega) M(\omega) d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\kappa(\omega)|^2 S_n(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|M(\omega)|^2}{S_n(\omega)} d\omega \quad (5.42)$$

temos que

$$\rho \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|M(\omega)|^2}{S_n(\omega)} d\omega, \quad (5.43)$$

em outras palavras, isto dá um limite superior para ρ . Então se usarmos

$$K(\omega) = c e^{(-i\omega t_0)} \frac{M^*(\omega)}{S_n(\omega)}, \quad (5.44)$$

onde a constante arbitrária c é responsável pela calibração do filtro (WAINSTEIN; ZUBAKOV, 1962). Desta forma teremos obtido a função de transferência do filtro que maximiza a razão sinal-ruído.

5.3 Densidade Espectral de Ruídos

A densidade espectral de ruído, S_n , para o detector Mário Schenberg, foi calculada usando a função ‘pwelch’ do *software* Matlab (MATLAB, 2017). Esta função é responsável por estimar a densidade espectral de potência de um sinal de entrada. Neste caso, foi usado um sinal de ruído térmico construído por Cesar Costa, disponível em (CESAR, 2006).

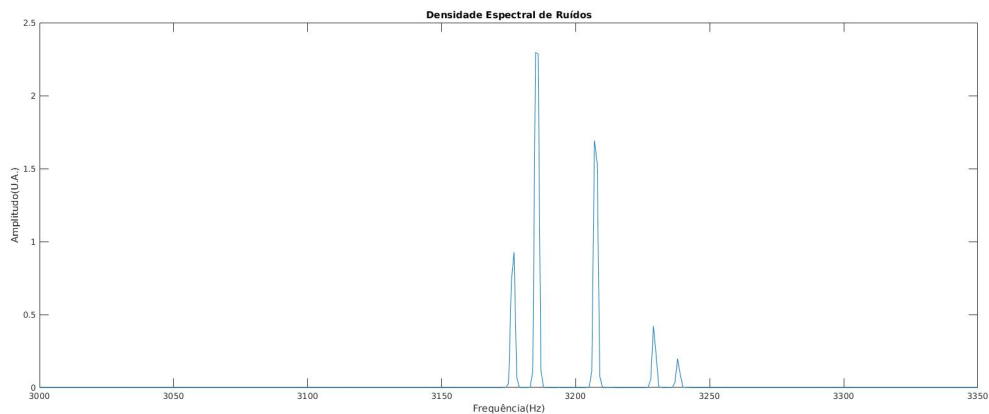


FIGURA 5.3 – Densidade espectral de ruído simulada para o detector de ondas gravitacionais Mário Schenberg.

Na Fig. (5.3), podem ser observados 5 picos que são referentes aos modos normais de vibração do detector usando o modelo de transdutores independentes. Esta análise é importante para a definição da banda de detecção da antena, visto que apenas OGs que estiverem nestas mesmas frequências da antena ressonante serão detectadas.

O gráfico foi construído usando o programa SchenbergFilter.m (veja apêndice), onde todos os dados foram simulados.

5.4 O Sinal na Saída da Antena

O filtro construído neste trabalho funciona como a busca de um sinal já estabelecido e imerso em ruídos, de forma que primeiramente, seguindo o modelo de transdutores independentes usado nesta tese, procura-se saber como este sinal interage com a massa efetiva da antena/transdutor. Usando o programa 'SchenbergFilter.m' e a função de transferência que foi deduzida de forma analítica neste capítulo, verificamos a resposta na saída após a interação deste com o detector.

A Fig. (5.4) mostra o sinal de saída no domínio do tempo e o mesmo no domínio da

frequência.

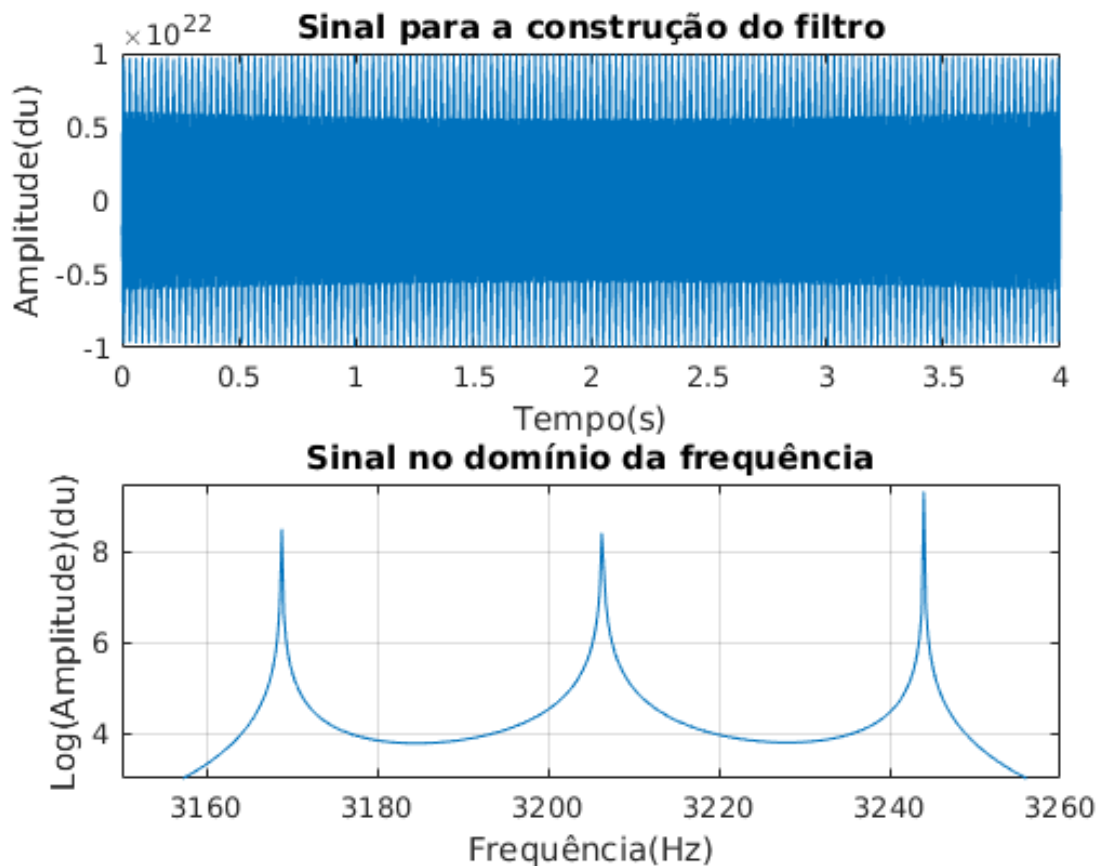


FIGURA 5.4 – A figura acima representa o sinal simulado de um dos transdutores com a passagem do sinal gravitacional idêntico ao apresentado no capítulo 4 deste trabalho e a figura abaixo o espectro de frequência do sinal.

Para um sinal de 4s foi usada uma taxa de amostragem de 16384 Hz, para que não houvesse perda significativa de informação.

Para funções reais a transformada de Fourier apresenta a simetria

$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt = F^*(\omega) \quad (5.45)$$

A propriedade de simetria da Eq.(5.45) nos permite com certos cuidados, ignorar as frequências negativas, por trazerem informações redundantes, da seguinte forma, traba-

lhando com a função

$$F_p(\omega) = F(\omega)[1 + \text{sign}(f)], \quad (5.46)$$

onde F_p é a função que só possui o espectro com frequências positivas e $\text{sign}(f)$ é dada por

$$\text{sign}(f) = \begin{cases} 1, & f > 0 \\ 0, & f = 0 \\ -1, & f < 0 \end{cases} \quad (5.47)$$

5.5 Filtro Digital

Com a determinação da densidade espectral de ruídos, S_n , e do sinal que desejamos encontrar no domínio da frequência, $M(\omega)$, a equação que descreve o filtro pode ser construída de acordo com a Eq. (5.44). Para isto, foi usado o programa 'MatchedFilter.m' que encontra-se no apêndice deste trabalho.

Os gráficos 5.5 e 5.6 são os do filtro casado *matched filter* no domínio do tempo, obtido para o caso particular do sinal emitido pelo sistema binário BHNS apresentado no capítulo 4.

Estes filtros foram usados para encontrar estes mesmos padrões numa amostra.

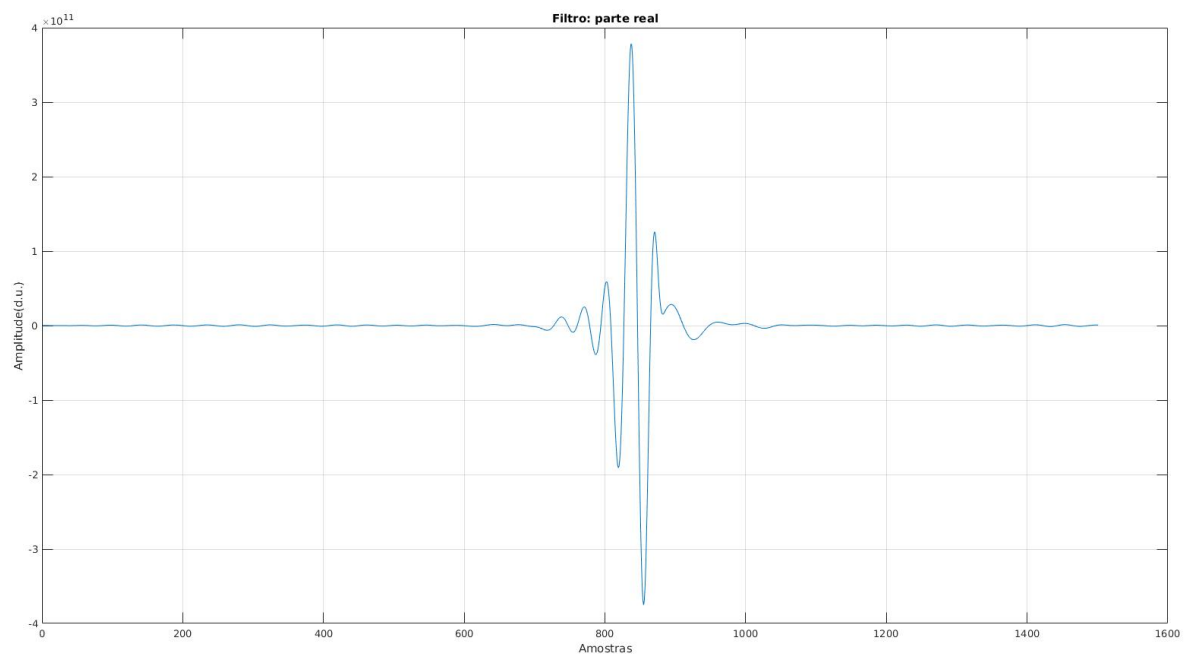


FIGURA 5.5 – Parte real do filtro.

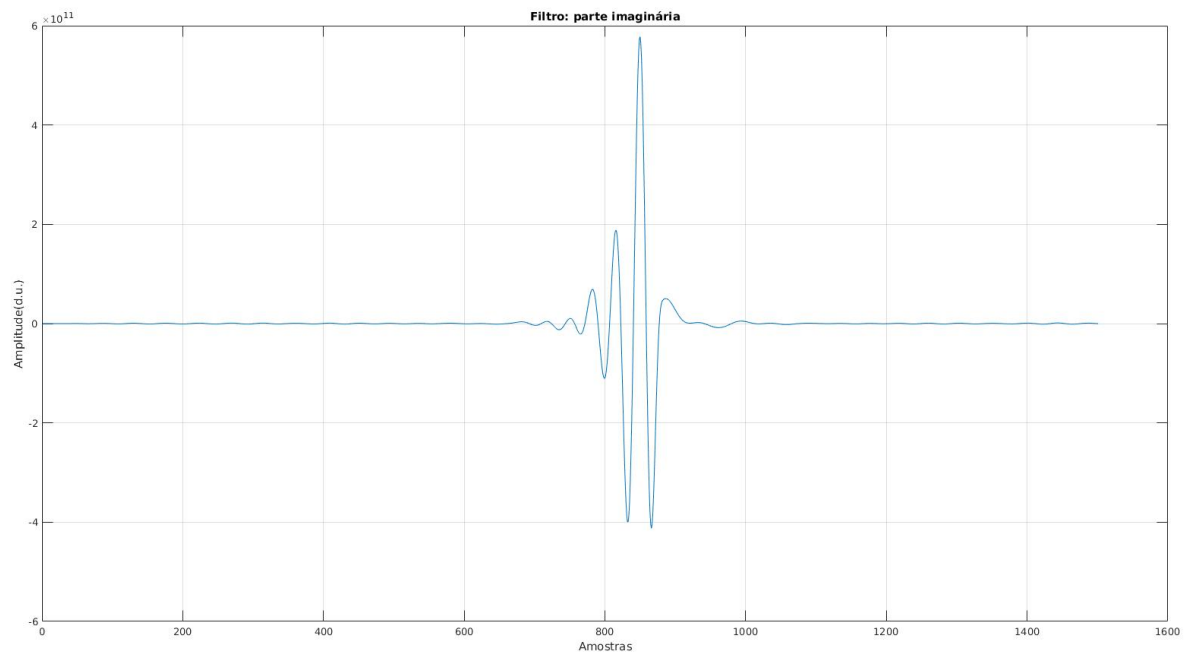


FIGURA 5.6 – Parte imaginária do filtro.

Para averiguar o funcionamento deste filtro, imergimos o sinal gravitacional para o qual o filtro foi construído em ruídos térmicos simulados, como mostra a figura a seguir,

com o sinal em vermelho e os ruídos em azul, para melhor visualização. E logo abaixo, na segunda figura, pode ser observado que o filtro encontrou o sinal imerso mostrando eficácia.

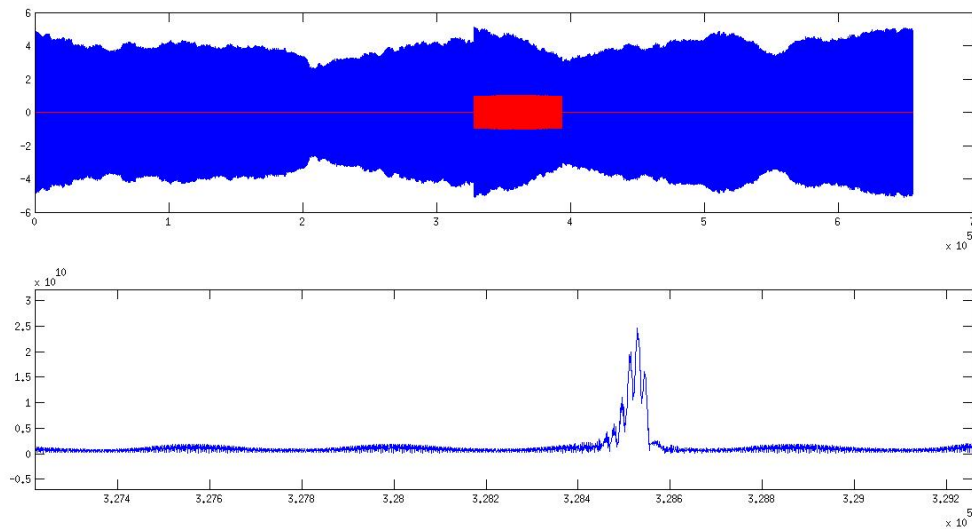


FIGURA 5.7 – Sinal imerso em ruídos e o sinal filtrado.

Convém mencionar que as unidades no eixo y dos gráficos estão em unidades arbitrárias, isto é, estão a menos de uma constante multiplicativa obtida experimentalmente. No gráfico inferior observamos um certo atraso do sinal filtrado com o correspondente sinal crú. Este é o atraso do filtro que também pode ser obtido experimentalmente.

6 Conclusão

Partindo de conceitos já conhecidos da teoria da relatividade geral sobre ondas gravitacionais, este trabalho se inicia com as deduções e a interação das OGs sobre a matéria e o espaço tempo.

No capítulo seguinte, foi apresentada uma breve revisão bibliográfica sobre os aparatos experimentais construídos para a detecção de OGs, com ênfase no detector nacional Mário Schenberg, pois é o objeto principal desta tese.

A seguir, fizemos um estudo sobre a possível detecção de uma fonte promissora de OGs, a coalescência de uma estrela de nêutrons e um buraco negro, ainda não detectada até o momento de escrita desta tese.

Mostramos através de pesquisas realizadas com dados observáveis a probabilidade no limite superior da taxa de 3,6 eventos por ano de coalescência entre BN-EN, com respectivamente 1,4 e 3 massas solares, capazes de gerar OG na banda de frequência do detector Mário Schenberg.

Fizemos um cálculo simplificado do sinal gerado por este sistema binário até o momento da colisão.

Obtivemos o gráfico da forma do sinal gravitacional gerado e explicamos a importância da detecção das OGs geradas por este evento astrofísico.

Com a apresentação da teoria, das formas de detecção e a forma do sinal gerado por um binário EN-BN no capítulo 5, calculamos a função que descreve a massa que efetivamente interage com cada um dos seis transdutores acoplados à antena usando o modelo de transdutores independentes, a fim de encontrar a função de transferência do sistema. Para a construção do gráfico da densidade espectral de ruídos, aplicamos o programa que simula ruídos para a entrada do detector Mário Schenberg e usamos a rotina *pwelch* nos dados de saída.

O gráfico da densidade espectral de ruídos apresenta 5 picos que representam os modos normais de vibração da esfera ressonante, fundamental para sabermos a frequência dos sinais que a antena pode detectar.

Construímos um filtro para o sinal específico apresentado no capítulo 4 e para testá-lo, imergimos o sinal em ruídos simulando um evento real.

Com sucesso, conseguimos separar o sinal de coalescência, comprovando a eficiência do filtro.

Referências

1.0, T. V. collaboration/CCO. *Virgo detector*. 2017. Disponível em: <https://www.ligo.caltech.edu/image/ligo20170927b>. Acesso em: 19 Novembro 2017.

ABBOTT, B.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T.; ACERNESE *et al.* Gw170104, observation of a 50 solar mass binary black hole coalescence at redshift 0.2. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 118, p. 221101, Jun 2017.

ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT; OTHERS. Gw170814, a three-detector observation of gravitational waves from a binary black hole coalescence. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 119, p. 141101, Oct 2017.

ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T. D.; ABERNATHY *et al.* Gw151226, observation of gravitational waves from a 22-solar-mass binary black hole coalescence. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 116, p. 241103, Jun 2016.

ABBOTT, B. P. *et al.* Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 116, p. 061102, Feb 2016.

ABBOTT, B. P. *et al.* Upper limits on the rates of binary neutron star and neutron star black hole mergers from advanced ligo first observing run. **Astrophys. J.**, v. 832, n. 2, p. L21, 2016.

ABBOTT, B. P. *et al.* Gw170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 119, p. 161101, 10 2017. ISSN 0031-9007.

AGUIAR, O. D. The past, present and future of the resonant-mass gravitational wave detectors. **Res. Astron. Astrophys.**, v. 11, p. 1–42, 2011.

AGUIAR, O. D. *et al.* The gravitational wave detector "mário schenberg": Status of the project. **Brazilian Journal of Physics**, v. 32, n. 4, p. 866, 2002.

AGUIAR, O. D. *et al.* The brazilian gravitational wave detector mário schenberg: progress and plans. **Classical and Quantum Gravity**, v. 22, n. 10, p. S209, 2005.

ANDRADE, L. A. **Desenvolvimento de osciladores em 10GHz de ultrabaixo ruído de fase e análise de seus desempenhos nos transdutores paramétricos**

do detector de ondas gravitacionais Mário Schenberg. Tese (Doutorado) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2006.

BAUSWEIN, A.; STERGIOULAS, N.; JANKA, H.-T. Revealing the high-density equation of state through binary neutron star mergers. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 90, p. 023002, Jul 2014.

BLAIR, D. G. **The detection of gravitational waves.** [S.l.]: Cambridge University Press, 2005. 43 p. (Dover books on physics and mathematical physics).

CERVANTES-COTA, J.; GALINDO-URIBARRI, S.; SMOOT, G. A brief history of gravitational waves. **Universe**, v. 2, p. 22, sep 2016.

CESAR, C. A. C. **Modelagem matemática do comportamento mecânico do detector de ondas gravitacionais 'Mário Schenberg'.** 2002.

CESAR, C. A. C. **Simulação da resposta do detector Mário Schenberg a ondas gravitacionais oriundas de fontes astrofísicas.** Tese (Doutorado) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2006.

COLLABORATION, T. L. S.; COLLABORATION the V.; ABBOTT, B.; ABBOTT, R.; ABBOTT; AL. et. Gw170608: Observation of a 19-solar-mass binary black hole coalescence. **ArXiv**, nov 2017.

COSTA, C. A.; AGUIAR, O. D.; MAGALHAES, N. S. The Mário Schenberg gravitational wave detector: A mathematical model for its quadrupolar oscillations. **Submitted to: Phys. Rev. D**, 2003.

COSTA, C. D. S.; FAUTH, A.; PEREIRA, L.; AGUIAR, O. The cosmic ray veto system of the Mário Schenberg gravitational wave detector. **Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment**, v. 752, p. 65 – 70, 2014. ISSN 0168-9002.

COSTA, K. M. F. da. **Análise de dados do detector de ondas gravitacionais ALLEGRO: verificação de assinatura de sistemas de mini-buracos negros.** 2006.

Dana Berry/NASA. **In a flash NASA Helps Solve 35-year-old Cosmic mystery.** 2017. Disponível em:
https://www.nasa.gov/mission_pages/swift/bursts/short_burst_oct5.html.

DANZMANN, K.; TEAM the LISA study. Lisa: laser interferometer space antenna for gravitational wave measurements. **Classical and Quantum Gravity**, v. 13, n. 11A, p. A247, 1996.

FOX, D.; FRAIL, D. A.; PRICE, P. A.; KULKARNI, R. *et al.* The afterglow of grb 050709 and the nature of the short-hard -ray bursts. v. 437, p. 845–850, 10 2005.

FRAJUÇA, C.; BORTOLI, F.; MAGALHAES, N. Resonant transducers for spherical gravitational wave detectors. v. 35, 12 2005.

FRAJUÇA, C.; FÁBIO; BORTOLI, F.; AES, N. M.; JR., R. de M. M. Análise de sinais gravitacionais usando transformada q. v. 8, p. 36, 03 2007.

- GERTSENSHTEIN, M. E.; PUSTOVOIT, V. I. On the detection of low frequency gravitational waves. **Sov. Phys. JETP**, v. 16, p. 433, 1962.
- GLASS, E. Gravitational radiation observations. **Canadian Journal of Physics**, v. 94, n. 12, p. 1251–1252, 2016.
- INPE. **Detector de Ondas Gravitacionais Mário Schenberg**. 2017. Disponível em: http://www.inpe.br/noticias/noticia.php?Cod_Noticia=808. Acesso em: 19 Novembro 2017.
- JOHNSON, W. W.; MERKOWITZ, S. M. Truncated icosahedral gravitational wave antenna. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 70, p. 2367–2370, Apr 1993.
- L., B. D. G. U.; ZHAO, C. Detection of gravitational waves. **Reports on Progress in Physics**, v. 63, n. 1, p. 1317–1427, 2000.
- LEE, W. H.; RUIZ, E. R.; VEN, G. van de. Short gamma-ray bursts from dynamically assembled compact binaries in globular clusters: Pathways, rates, hydrodynamics and cosmological setting. **The Astrophysical Journal**, v. 720, n. 1, p. 953, 2010.
- LENZI, C. H. **Proposta para análise de dados de detectores de ondas gravitacionais esféricos utilizando um modelo de transdutores independentes**. 2006.
- LI, X.; HU, Y.-M.; JIN, Z.-P.; FAN, Y.-Z.; WEI, D.-M. Neutron star-black hole coalescence rate inferred from macronova observations. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 844, n. 2, p. L22, 2017.
- MATLAB. **Release (R2017a)**. Natick, Massachusetts, United States: The MathWorks Inc., 2017.
- MERKOWITZ, S. M.; JOHNSON, W. W. Techniques for detecting gravitational waves with a spherical antenna. **TPHYSICAL REVIEW D**, v. 56, n. 12, p. 7513, 1997.
- MILONE, A. C.; WUENSCHÉ, C. A.; HUGO, V. C.; OTHERS. **Introdução à Astromia e Astrofísica**. Inpe-7177-pud/38. [S.l.]: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2003.
- NAKAR, E. Short-hard gamma-ray bursts. **Phys. Rept.**, v. 442, p. 166–236, 2007.
- OHANIAN, H. C.; RUFFINI, R. **Gravitation and Spacetime**. 3. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013.
- PAULA, L. A. N. de. **Otimização do Sistema de Transdução Paramétrica do Detector de Ondas Gravitacionais Mário Schenberg**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2013.
- PEREIRA, L. A. S. **Estudo da interação de raios cósmicos com a antena gravitacional Mário Schenberg**. Tese (Doutorado) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2014.
- PITKIN, M.; REID, S.; ROWAN, S.; HOUGH, J. Gravitational wave detection by interferometry (ground and space). **Living Reviews in Relativity**, v. 14, n. 1, p. 5, Jul 2011.

- PRESKILL, J.; THORNE, K. S. **Foreword to Feynman Lectures on Gravitation**. 1995. Disponível em:
<<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.147.9838>>.
- SAULSON, P. R. Physics of gravitational wave detection: Resonant and interferometric detectors. **eConf**, C9808031, p. 05, 1998. [,113(1998)].
- SHIBATA, M.; TANIGUCHI, K. Coalescence of black hole-neutron star binaries. **Living Reviews in Relativity**, v. 14, n. 1, p. 6, Aug 2011.
- TAYLOR, J. H. Binary pulsars and relativistic gravity. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 66, p. 711–719, Jul 1994.
- TURANO, S. S. **O detector de ondas gravitacionais Mário Schenberg: uma antena esférica criogênica com transdutores paramétricos de cavidade fechada**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2012.
- WAINSTEIN, L.; ZUBAKOV, V. **Extraction of signals from noise**. [S.l.]: Prentice-Hall, 1962. 3-4 p. (Dover books on physics and mathematical physics).
- WEBER, J. Evidence for discovery of gravitational radiation. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 22, p. 1320–1324, Jun 1969.

Apêndice A - Códigos

A.1 SchenbergFilter.m

```
%*****
% Programa que constroi um filtro tipo Matched para a analise de dados de
% um unico transdutor acoplado a antena esferica Mario Schenberg, com base
% em sinais simulados...
%*****

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Programa que gera dados de ondas gravitacionais saindo do segundo transdutor
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all

close all

%*****
% PRIMEIRA ETAPA: VAMOS DEFINIR OS PARAMETROS DA ANTENA ESF'ERICA M'ario
% SCHENBERG E OS PARAMETROS DE FUNCAO DE TRANSFERENCIA:
%*****

%*****
% Dados dos parametros fisicos do detector Mario Schenberg...
%*****

Mesf=1147.85;           % Massa da antena esferica (ou a massa efetiva!!!).
Rs=0.3239;             % Raio da esfera
MR2= 0.00001;         % Massa do segundo ressonador.
MR1= sqrt(Mesf.*MR2); % Massa do primeiro ressonador.
F0= 3206.3;           %Valor da frequencia da esfera.
w0=2.*pi.*F0;
alpha = 2.86238579;
rho = 8077.518230;    %densidade da esfera
chi = 0.601;          %fator chi
Mef = 5/6*Mesf*chi;

%*****
```

```

% Parametros da funcao de transferencia:
%*****

j=sqrt(-1);

a=sqrt(MR1./Mef);

b=sqrt(MR2./MR1)*alpha;

x=(6*pi*a^2*b^2 + 9*b^3)/(9*b^2);

y=(6*pi*a^2*b^2 - 6*pi*b^2 - 4*pi^2*a^2)/(9*b^2);

z=-4*a.^2./(9*b);

s1= -8.*x.^3 + 36.*x.*y -108.*z;

s2= 12.*y.^3-3.*x.^2.*y^2-54.*x.*y.*z+81.*z.^2+12.*z.*x.^3;

s3= (s1 + 12.*sqrt(s2)).^(1./3);

d1= real((1./6).*(s3.^2 - 12.*y + 4.*x.^2 - 2.*x.*s3)./s3);

d2= real((1./6).*(-s3.^2.*exp(-pi.*j./3) + (12.*y - 4.*x.^2 ).*exp(pi.*j./3)- 2.*x.*s3)./s3);

d3= real((1./6).*(-s3.^2.*exp(pi.*j./3) + (12.*y - 4.*x.^2 ).*exp(-pi.*j./3)- 2.*x.*s3)./s3);

d = [d1, d2, d3];          %(Montando uma tabela com os valores dos d's)

um = [1, 1, 1];

c = (3*b.*d.^2 + 3*b^2.*d - um.*2*pi*b)/(2*pi*a);    %(Montando uma tabela com os valores dos c's)

n = 1./((c.^2 + d.^2).*3/(2*pi) + 1).^(1./2);    %(Montando uma tabela com os valores dos n's)

lambda = -3/(2*pi)*b.*d + 1;          %(Montando uma tabela com os valores dos lambda's)

Fc = sqrt(F0.^2.*lambda);          % As frequencias caracteristicas
wc = 2.*pi.*Fc;

Fn = Fc(1);          % Frequencia do modo menos
wn = wc(1);

Fp = Fc(2);          % Frequencia de modo mais
wp = wc(2);

Fr = Fc(3);          % Frequencia de referencia
wr = wc(3);

%*****

```



```

ruidof = fft(randn(1, length(Hanttil)).*Hanttil*10-5);

ruidot = ifft(ruidof);

%plot(f1, Hanttil)

%*****
%TERCEIRA ETAPA: A funcao de transferencia:
%*** IMPORTANTE
%*****
% Funcao degrau: esta ira definir minha funcao de tranferencia e minha
% densidade espectral positivamente, pois tem a seguinte caracteristica:
%
%           1,   f > 0
% Heaviside(w+wr).*f(w)  1/2, f = 0
%
%           0,   f < 0
% Essa teoria encontra-se em detalhe no livro de Whalen pagina 71, secao
% 3.1. Multiplicando entao nossa funcao de transferencia ou nossa densidade
% espectral por Heaviside, elas se anularam quando w for menor que 0. Porem
% sera multiplicada por um fator 2 quando w for maior doque 0.
%*****

wr = 3206.3*2*pi;
Heaviside = (1+sign(w+wr));
Heaviside1 = (1+sign(w1+wr));

%*****
%TERCEIRA ETAPA: TRATANDO OS DADOS DO SINAL
%*****

%*****
% Aqui estamos simplismente abrindo os dados que queremos que sejam lidos,
% no caso estes dados sao sinais devolvidos pelos transdutores.
%*****

load SEM_RUIDO/Dados_30-01-2018-30_60_teste
Q = Q2;

%fdados = fopen('sinalog.dat','r');

%*****
% Subrotina que le os dados do arquivo de dados.
%*****

%[Q3 cont] = ledados(fdados);
%fclose ( fdados );
%mw = fft(Q3(:,2));

```

```

%plot(f, log10(abs(mw).^2))

%sss
%*****
% Aqui estamos demodulando o sinal segundo a formula: Zdem = exp(-i*wr*t),
% e definindo-o positivamente:
%*****

ms = transpose(Q(:,2))/max(Q(:,2));%.*transpose(hanning(length(Q(:,2))))/max(Q(:,2)); %nomeando o sinal
mw = fft(Q(:,2));

% A figura que precisamos
plot(t, ms)

mdem = (ms.*exp(-i.*(wr).*t)); %Demodulando segundo a formula

mdemtil = (fft(mdem)); %Transformada de fourier
plot(f, mdemtil)

mdemtil = (mdemtil.*Heaviside); %Definindo positivamente
%plot(f, mdemtil)
mdem = (ifft(mdemtil)); %voltando ao dominio do tempo

%*****
%Como e o nosso m?
%*****

figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(t,real(ms)*10^22), xlabel('Tempo(s)'), grid on, ylabel('Amplitude(du)'), ...
    title('Sinal para a construcao do filtro')
subplot(2, 1, 2)
plot(f, log10(abs(mw*10^22).^2)), grid on, xlabel('Frequencia(Hz)'), ...
    ylabel('Log(Amplitude)(du)'), title ('Sinal no dominio da frequencia')
    axis([3150 3260 3 9.5])

%*****
%QUARTA ETAPA: TRATANDO OS DADOS DE RUIDOS
%*****

%*****
% Para a construcao de nosso filtro precisamos determinar a densidade
% espectral Sn. Como nao temos ela analiticamente, trabalharemos com dados
% de ruidos gerados, pelo programa do Cesar Costa.
%*****

```



```

%*****
% Aqui estamos simplismente abrindo os dados que queremos que sejam lidos,
% no caso estes dados sao ruidos de um dos transdutores.
%*****

fdados = fopen('ruído.dat','r');

%*****
% Subrotina que le os dados do arquivo de dados.
%*****

[Q cont] = ledados(fdados);
fclose ( fdados );

%*****
% Aqui estamos demodulando o ruído segundo a formula: Zdem = exp(-i*wr*t),
% e definindo-o positivamente:
%*****

ns = transpose(Q(:,2));           %nomeando o ruído
%Snt = pwelch(ns);
%plot(Snt)

ndem = ns .*exp(-i.*wr.*t); clear ns      %demodulando

ndemtil = fftshift(fft(ndem));           %transformada de fourier

ndemtil = ndemtil.*Heaviside;           %se comentar aqui, desc. 1 e 2

ndem = ifft((ndemtil)); %clear ndemtil   %voltando ao dominio do tempo

%*****
% QUINTA ETAPA: TRATANDO OS DADOS QUE SERAO FILTRADOS
%*****

%*****
% Aqui estamos abrindo os dados que futuramente serao filtrados
%*****

fdados = fopen('ruídomsinal.dat','r');

%*****
% Subrotina que le os dados do arquivo de dados.
%*****

[Q cont] = ledados(fdados);
fclose ( fdados );

```

```

%*****
% Aqui estamos demodulando os dados segundo a formula: Zdem = exp(-i*wr*t),
% e definindo-os positivamente:
%*****

dados = transpose(Q(:,2));
%nomeando o ruido
Snr = pwelch(dados);

%figure(2)
%plot(Snr*10^(3))
%axis([3100 3300 0 2.5])

ms = [zeros(1, 5*length(ms)) ms zeros(1, 4*length(ms))];
dados = ruidot + real(ms);

figure(15)
plot(real(dados), hold on
plot(real(ms), 'r')

dadosdem = dados .*exp(-i.*(wr).*t1); clear ns
% %demodulando segundo a formula acima

dadosdemtil = fftshift(fft(dadosdem));
%transformada de fourier

dadosdemtil = dadosdemtil.*Heaviside1;
%Definindo positivamente

dadosdem = ifft(dadosdemtil); clear ndemtil
%voltando ao dominio do tempo

%*****
% SEXTA ETAPA: DEFININDO UM INTERVALO DE FREQUENCIAS
%*****

%*****
% Temos que a taxa de amostragem de nossos dados e de 16384 Hz. Sabe-se que
% nao nos interessa valores que estejam muito fora do intervalo demarcado
% pelos picos externos, pois os dados que se encontram fora deste intervalo
% nao nos fornecem informacoes referentes a sinais. Portanto, podemos
% definir nossa frequencias Nyquist por volta de F = 256 Hz. Sendo assim o
% sinal m deve ser decimado para esta frequencia de amostragem. E para
% satisfazer o teorema da amostragem vamos construir um filtro passa baixas
% de oitava ordem com frequencia de corte F/2.
%*****

Fct = 256/2;

```

```
%*****
% Diminui o efeito das alias, e define o nosso sinal no intervalo em -128Hz
% e 128Hz.
%*****

[b a] = butter(8, Fct/(F/2));

%Aqui e o passa baixa do sinal
mdem = filter ( b, a, mdem);

%Aqui eu quis fazer o passa baixa dos dados que serao filtrados
dadosdem = filter(b, a, dadosdem);

%Aqui eu quis fazer um passa baixa no ruído!!!
ndem = filter (b, a, ndem);
% plot(t, ndem)

%*****
% SETIMA ETAPA: DECIMANDO O SINAL:
%*****

%*****
%Agora vamos reamostrar os dados, pegando apenas 1 a cada 64 dados.
%*****

mdem = mdem([1 : 4 : length(mdem)]);

dadosdem = dadosdem([1 : 4 : length(dadosdem)]);

%*****
%Colocando os zeros para a construcao do Filtro Matched.
%*****

mdem =[ mdem zeros(1, length(mdem)) ];
N = length( mdem );

%*****
%OITAVA ETAPA: REAMOSTRAGEM DOS DADOS:
%*****

%*****
% Marcando unidade de tempo e frequencia para a reamostragem dos dados
%*****

T = 2*T;          % Multiplicamos por 2 devido termos dobrado o array de m.

dT = 1/4096;     % Novo periodo de amostragem

F = 1/dT;        % Nova taxa de amostragem
```

```

dF = 1/T;      % Nova resolucao em frequencia

%*****
% Definindo os intervalos de tempo e frequencia
%*****

t = (0:N-1)*dT;

f = -F/2 : dF : F/2-dF;

w = 2*pi*f;

%*****
% Obtencao do sinal no dominio da frequencia de acordo com esta nova taxa
% de amostragem.
%*****

M = (fft( mdem ));

%figure ( 2 )
% subplot(2,1,1)
% plot( t, real( mdem ) ), grid on, title('sinal com passa baixa no tempo')
% subplot(2,1,2)
% plot(f, (log10(abs(M))), title('sinal com passa baixa na frequencia'))

%*****
%NONA ETAPA: A DENSIDADE ESPECTRAL:
%*****

Sn = pwelch(ndem, 32768); % Calculando a densidade espectral.

Sn = transpose(Sn); % evita conflitos dimensionais

%Sn = fftshift(Sn); % Para ativar este deixe ativada a linha 232

%*****
% Tendo agora a densidade espectral Sn e o M podemos calcular a funcao de
% transferencia de nosso filtro digital. Ela e dada por: k = conj(M)/Sn.
% Abaixo estamos chamando a function MatchedFilterC que faz estes calculos.
%*****

[bbfilter D] = MatchedFilterC( M, Sn );

%*****
% PORTANTO, TENDO MONTADO O FILTRO E TENDO TRATADO OS DADOS, PODEMOS FILTRA-LO.
%*****

```

```

fd = mdem(1:length(mdem)/2);

%smr = ruidot +

mphi = filter(bbfilter, 1, dados);

figure(5)
    subplot(2, 1, 1)
    plot(real(dados)), hold on
    plot(real(ms), 'r')
    subplot(2, 1, 2)
    plot(abs(mphi))

```

A.2 MatchedFilter.m

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Subrotina que constroi o filtro Matched
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [b, D] = MatchedFilter(M, Sn)

B = conj(M)./Sn;

b = ifft(B);

b = fftshift( b );

b = b(15500:17000);

figure(3)
plot( real(b)), xlabel('Amostras'), ylabel('Amplitude(d.u.)'), grid on
title('Filtro: parte real')

figure(4)
plot( imag(b)), xlabel('Amostras'), , ylabel('Amplitude(d.u.)'), grid on
title('Filtro: parte imaginaria')

D = 0;

length(b)

return

```

A.3 SimuladadosIvana

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Programa que gera dados de ondas gravitacionais saindo do segundo transdutor
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all

close all

%*****
% PRIMEIRA ETAPA: VAMOS DEFINIR OS PARAMETROS DA ANTENA ESFERICA M\ 'ario SCHENBERG E OS
% PARAMETROS DE FUNCAO DE TRANSFERENCIA:
%*****

%*****
% Dados dos parametros fisicos do detector Mario Schenberg...
%*****

Mef=1149.529696;          % Massa da antena esferica (ou a massa efetiva!!!).

Rs=0.388031;            % Raio da esfera e 4k.

MR2= 0.01;              % Massa do segundo ressonador.

MR1= sqrt(Mef.*MR2);    %Massa do primeiro ressonador.

FO= 3173.4;             %Valor da frequencia da esfera.
w0=2.*pi.*FO;

alpha = 2.86238579;

rho = 8077.518230;      %densidade da esfera

chi = 0.601;           %fator chi

%Mef = 5/6*Mef*chi;
%*****
% Parametros da funcao de transferencia: %pagina 69
%*****

j=sqrt(-1);

a=sqrt(MR1./Mef);

b=sqrt(MR2./MR1); %ok

%x=(6*pi*a^2*b^2 + 9*b^3)/(9*b^2); % era pra ser o alfa

```

```

x = a^2./b + b; %alfa da tese

%y=(6*pi*a^2*b^2 - 6*pi*b^2 - 4*pi^2*a^2)/(9*b^2); %era pra ser o beta

y = a^2 -(a/b)^2 -1; %beta da tese

%z=-4*a.^2./(9*b); %isso era pra ser o gama

z = -(a^2)/b; % gama da tese

s1= -8.*x.^3 + 36.*x.*y -108.*z; %ok

s2= 12.*y.^3- (3.*(x.^2).*(y^2)) -54.*x.*y.*z+81.*z.^2+12.*z.*x.^3; %ok

s3= (s1 + 12.*sqrt(s2)).^(1./3); %ok

d1= real((1./6).*(s3.^2 - 12.*y + 4.*x.^2 - 2.*x.*s3)./s3);%ok

d2= real((1./6).*(-s3.^2.*exp(-pi.*j./3) + (12.*y - 4.*x.^2 ).*exp(pi.*j./3)- 2.*x.*s3)./s3); %ok

d3= real((1./6).*(-s3.^2.*exp(pi.*j./3) + (12.*y - 4.*x.^2 ).*exp(-pi.*j./3)- 2.*x.*s3)./s3); %ok

d = [d1, d2, d3];          %(Montando uma tabela com os valores dos d's)

um = [1, 1, 1];

%c = (3*b.*d.^2 + 3*b^2.*d - um.*2*pi*b)/(2*pi*a);
%(Montando uma tabela com os valores dos c's) %

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% c da tese, pag 69, equacao 4.19
c = b./a.*(d.^2 + b.*d.^2 -1);

%n = 1./((c.^2 + d.^2).*3/(2*pi) + 1).^(1./2);
%(Montando uma tabela com os valores dos n's) %%%????????? pi????
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% n da tese, eq 4.20

n = 1./((c.^2 + d.^2 +1).^(1./2));

lambda = -b.*d + 1;          %ok  %(Montando uma tabela com os valores dos lambda's) %%% ok, mas e o pi? (lambda = -bd +1)

Fc = sqrt(F0.^2.*lambda);    %ok % As Frequencia  caracteristicas

wc = 2.*pi.*Fc; %ok

Fn = Fc(1);          %ok          % Frequencia  do modo menos %acho que a do modo mais

wn = wc(1); %ok

Fp = Fc(2);          %ok

```

```

%                               % Frequencia de modo mais % frequencia de ref
wp = wc(2);

Fr = Fc(3);                       % Frequencia de referencia %frequencia do modo menos
wr = wc(3);

%*****
%SEGUNDA ETAPA: MARCANDO A UNIDADE DE TEMPO E FREQUECIA PARA A AMOSTRAGEM DOS DADOS SIMULADOS E DA
%FUNCAO DE TRANSFERENCIA
%*****

T = 4;                            % Tempo de amostragem dos dados

dT = 1/16384;                      % Periodo de amostragem (samoing time)

F = 1/dT;                          % Taxa de amostragem

dF = 1/T;                          % Minha resolucao em frequencia

%*****
% Definindo os intervalos de tempo e frequencia:
%*****

t = 0 : dT : T - dT;

f = - F/2 : dF : F/2 - dF;

w = 2*pi*f;

%*****
%TERCEIRA ETAPA: A FUNCAO DE TRANSFERENCIA:
%*****

% Hanttil = n(1).^2./(wn.^2 - w.^2).*(c(1)./sqrt(MR2) - ...
%   3*alpha*sqrt(MR1)*d(1)./(2*pi*sqrt(MR2*Mef))).*c(1)./sqrt(Mef) + n(2).^2./(wp.^2 - w.^2).*(c(2)./sqrt(MR2) - ...
%   3*alpha*sqrt(MR1)*d(2)./(2*pi*sqrt(MR2*Mef))).*c(2)./sqrt(Mef) + n(3).^2./(wr.^2 - w.^2).*(c(3)./sqrt(MR2) - ...
%   3*alpha*sqrt(MR1)*d(3)./(2*pi*sqrt(MR2*Mef))).*c(3)./sqrt(Mef);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% reconstruindo Hanttil%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Hanttil = n(1)^2./(wn.^2 - w.^2).*(1./sqrt(MR2) - d(1)./sqrt(MR1))*c(1)/sqrt(Mef)...
          +n(2)^2./(wp.^2 - w.^2).*(1./sqrt(MR2) - d(2)./sqrt(MR1))*c(2)/sqrt(Mef)...
          +n(3)^2./(wr.^2 - w.^2).*(1./sqrt(MR2) - d(3)./sqrt(MR1))*c(3)/sqrt(Mef);

%*****
%Definicao dos angulos que mostram a localizacao dos transdutores na superficie esferica
%*****

```



```
Theta = [(90 - 10.8123) (90 - 10.8123) (90 - 10.8123) ( 90 - 52.6226) ( 90 - 52.6226) ( 90 - 52.6226)].*pi./180;
```

```
Phi = [240 120 0 300 180 60].*pi/180;
```

```
%*****
```

```
%Os harmônicos reais para cada transdutor
```

```
%*****
```

```
% Para o transdutor 1
```

```
Ym1T1 = sqrt(15/(16*pi))*sin(Theta(1))^2*cos(2*Phi(1));
```

```
Ym2T1 = sqrt(15/(16*pi))*sin(Theta(1))^2*sin(2*Phi(1));
```

```
Ym3T1 = sqrt(15/(16*pi))*sin(2*Theta(1))*sin(Phi(1));
```

```
Ym4T1 = sqrt(15/(16*pi))*sin(2*Theta(1))*cos(Phi(1));
```

```
Ym5T1 = sqrt(15/(16*pi))*(3*cos(Theta(1))^2 - 1)/sqrt(3);
```

```
% Para o transdutor 2
```

```
Ym1T2 = sqrt(15/(16*pi))*sin(Theta(2))^2*cos(2*Phi(2));
```

```
Ym2T2 = sqrt(15/(16*pi))*sin(Theta(2))^2*sin(2*Phi(2));
```

```
Ym3T2 = sqrt(15/(16*pi))*sin(2*Theta(2))*sin(Phi(2));
```

```
Ym4T2 = sqrt(15/(16*pi))*sin(2*Theta(2))*cos(Phi(2));
```

```
Ym5T2 = sqrt(15/(16*pi))*(3*cos(Theta(2))^2 - 1)/sqrt(3);
```

```
% Para o transdutor 3
```

```
Ym1T3 = sqrt(15/(16*pi))*sin(Theta(3))^2*cos(2*Phi(3));
```

```
Ym2T3 = sqrt(15/(16*pi))*sin(Theta(3))^2*sin(2*Phi(3));
```

```
Ym3T3 = sqrt(15/(16*pi))*sin(2*Theta(3))*sin(Phi(3));
```

```
Ym4T3 = sqrt(15/(16*pi))*sin(2*Theta(3))*cos(Phi(3));
```

```
Ym5T3 = sqrt(15/(16*pi))*(3*cos(Theta(3))^2 - 1)/sqrt(3);
```

```
% Para o transdutor 4
```

```

Ym1T4 = sqrt(15/(16*pi))*sin(Theta(4))^2*cos(2*Phi(4));

Ym2T4 = sqrt(15/(16*pi))*sin(Theta(4))^2*sin(2*Phi(4));

Ym3T4 = sqrt(15/(16*pi))*sin(2*Theta(4))*sin(Phi(4));

Ym4T4 = sqrt(15/(16*pi))*sin(2*Theta(4))*cos(Phi(4));

Ym5T4 = sqrt(15/(16*pi))*(3*cos(Theta(4))^2 - 1)/sqrt(3);

% Para o transdutor 5

Ym1T5 = sqrt(15/(16*pi))*sin(Theta(5))^2*cos(2*Phi(5));

Ym2T5 = sqrt(15/(16*pi))*sin(Theta(5))^2*sin(2*Phi(5));

Ym3T5 = sqrt(15/(16*pi))*sin(2*Theta(5))*sin(Phi(5));

Ym4T5 = sqrt(15/(16*pi))*sin(2*Theta(5))*cos(Phi(5));

Ym5T5 = sqrt(15/(16*pi))*(3*cos(Theta(5))^2 - 1)/sqrt(3);

% Para o transdutor 6

Ym1T6 = sqrt(15/(16*pi))*sin(Theta(6))^2*cos(2*Phi(6));

Ym2T6 = sqrt(15/(16*pi))*sin(Theta(6))^2*sin(2*Phi(6));

Ym3T6 = sqrt(15/(16*pi))*sin(2*Theta(6))*sin(Phi(6));

Ym4T6 = sqrt(15/(16*pi))*sin(2*Theta(6))*cos(Phi(6));

Ym5T6 = sqrt(15/(16*pi))*(3*cos(Theta(6))^2 - 1)/sqrt(3);

%*****
%A matriz modelo
%*****

BT = [Ym1T1 Ym2T1 Ym3T1 Ym4T1 Ym5T1;
      Ym1T2 Ym2T2 Ym3T2 Ym4T2 Ym5T2;
      Ym1T3 Ym2T3 Ym3T3 Ym4T3 Ym5T3;
      Ym1T4 Ym2T4 Ym3T4 Ym4T4 Ym5T4;
      Ym1T5 Ym2T5 Ym3T5 Ym4T5 Ym5T5;
      Ym1T6 Ym2T6 Ym3T6 Ym4T6 Ym5T6];

B = transpose(BT);

```

```

%*****
%QUINTA ETAPA: A FORCA GRAVITACIONAL:
%*****

%*****
% Vamos escrever os termos quadripolares da onda gravitacional
%*****

% Calculo do sinal gerado por uma estrela de neutrons e um buraco negro

dist = (18*1e6)*(3.0857*1e16); %distancia ate o agloreado de virgo em metros
%w = 5^(3/8)*wc*((c^5*(M1+M2)^(1/3))/(5*c^5*(M)^(1/3) -256*M1*t*(wc^(8/3))*(G^(5/3)*M2))^(3/8) #frequencia orbital

wc =9348.299744522418; %calculado no programa bhnswtteste.wxm*
fc = 1487.828113845445; % frequencia caracteristica em Hz
G = 6.67408 * 1e-11; %m / kg s^2
c = 299792458.0; % em m/segundo
MS = 1.9891*1e30; %em kg
M1 = 3.0*MS; %massa do buraco negro
M2 = 1.4*MS;
mu = (M1*M2)/ (M1+M2);
M = M1+M2;
mi = M1*M2/(M1+M2); %Massa reduzida
Mc = ((M1*M2)^(3/5))/ (M1+M2)^(1/5); %massa chip

%Amplitude caracteristica
hc = 4*(10^(-21)) *(Mc/MS)^(5/6) * ((fc/100)^(-1/6))*(18.0/200)^(-1); % amplitude que chega nos detectores

N = floor(T*F); % numero de amostras

af = (-N/2 : N/2-1)*dF;
t = -4+(0:N-1)*dT;
w gw = 18696.59948904478 ./((1-7172.999552709926*t).^(3/8) %w gw = 2*w %programa bhntest
%Polarizacoes:
%sinal da amplitude polarizada somente em hm
hm = 4.*G.^(5/3).*(mu.*(M*w gw).^(2/3)).*cos(2*w gw.*t)./((c^4).*(dist)); %+ (4*1e-21) %amplitude da onda gravitacional
t_coal=4; %tempo de coalescencia
WT=5.^(3/8).*wc.*((c.^5.*(M1+M2).^(1/3))./(5.*c.^5.*(M1+M2).^(1/3)-256.*M2.*t_coal.*wc.^(8/3).*G.^(5/3).*M1)).^(3/8);
hx = 0;%sin(w0*t); %Polarizacao

%TT=linspace(0,10,65536);

figure(1)
plot(t,hm)
title('Coalescencia de BH NS')
xlabel('t [s]')
ylabel('hmais')

```

```

%return
%angulos de incidencia:
beta = 40*pi/180;

gamma = 20*pi/180;

h1 = hm*(1/2)*(1 + cos(beta)^2)*cos(2*gamma) + hx*cos(beta)*sin(2*gamma);

h2 = - hm*(1/2)*(1 + cos(beta)^2)*sin(2*gamma) + hx*cos(beta)*cos(2*gamma);

h3 = - hm*(1/2)*sin(2*beta)*sin(gamma) + hx*sin(beta)*cos(gamma);

h4 = hm*(1/2)*sin(2*beta)*cos(gamma) + hx*sin(beta)*sin(gamma);

h5 = hm*(1/2)*sqrt(3)*sin(beta)^2;

%*****
%Forca efetiva sentida por cada modo
%*****

Fef1 = -(1/2)*Mef*chi*Rs*w0^2*(fft(h1)*dT);

Fef2 = -(1/2)*Mef*chi*Rs*w0^2*(fft(h2)*dT);

Fef3 = -(1/2)*Mef*chi*Rs*w0^2*(fft(h3)*dT);

Fef4 = -(1/2)*Mef*chi*Rs*w0^2*(fft(h4)*dT);

Fef5 = -(1/2)*Mef*chi*Rs*w0^2*(fft(h5)*dT);

F = [Fef1;
     Fef2;
     Fef3;
     Fef4;
     Fef5];

%*****
%SEXTA ETAPA: CONSTRUINDO A SAIDA DE CADA TRANSDUTOR:
%*****

%*****
%Multiplicacao da matriz modelo transposta BT por Fef:
%*****

BTF = BT*F;

%*****

```

```
%Multiplicando BTF pela funcao Hantil:
%*****

Q21 = transpose(iff(Hanttil.*BTF(1,:))./dT);

Q22 = transpose(iff(Hanttil.*BTF(2,:))./dT);

Q23 = transpose(iff(Hanttil.*BTF(3,:))./dT);

Q24 = transpose(iff(Hanttil.*BTF(4,:))./dT);

Q25 = transpose(iff(Hanttil.*BTF(5,:))./dT);

Q26 = transpose(iff(Hanttil.*BTF(6,:))./dT);

%*****
%Plotando cada uma das saida
%*****

figure (2)
plot(t,Q21+100), hold on
plot(t,Q22+300), hold on
plot(t,Q23+500), hold on
plot(t,Q24+700), hold on
plot(t,Q25+900), hold on
plot(t,Q26+1100)
title('Amplitude dos Ressonadores R2')

Q2 = [Q21 Q22 Q23 Q24 Q25 Q26];
save dados Q2
```

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO DM	2. DATA 09 de abril de 2018	3. DOCUMENTO Nº DCTA/ITA/DM-019/2018	4. Nº DE PÁGINAS 101
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: Proposta de um Filtro Digital Para o Modelo de Transdutores Independentes no Detector Mário Schenberg			
6. AUTORA(ES): Ivana de Freitas Cunha			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELA AUTORA: Ondas Gravitacionais; Filtro; Sinal Gravitacional			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Filtro; Detecção; Sinal Gravitacional			
10. APRESENTAÇÃO: <input checked="" type="checkbox"/> Nacional <input type="checkbox"/> Internacional ITA, São José dos Campos. Curso de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Física Nuclear. Orientador: Prof.Dr. Rubens Marinho. Coorientador: Prof.Dr Vincenzo Liccardo. Defesa em 22/02/2018. Publicada em 09/04/2018.			
11. RESUMO: <p>Este trabalho propõe a simulação uma promissora fonte de sinal de onda gravitacional envolvendo um sistema binário de composto por um buraco negro, de $3M_{\odot}$, e uma estrela de nêutrons, de $1.4M_{\odot}$, que se aplica perfeitamente na banda de detecção da antena Mário Schenberg. Estimamos a quantidade de eventos que podem ocorrer por ano e fizemos um estudo sobre a interação desse sinal gravitacional com a antena através de uma função de transferência. Usando a função de transferência, calculamos a densidade espectral de ruídos e construímos um filtro capaz de detectar este sinal gravitacional.</p>			
12. GRAU DE SIGILO: <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <input checked="" type="checkbox"/> OSTENSIVO <input type="checkbox"/> RESERVADO <input type="checkbox"/> SECRETO </div>			