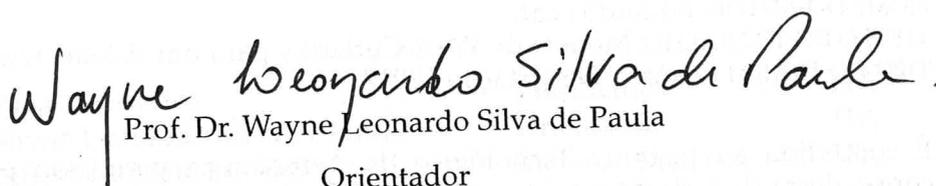


Dissertação apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Física Nuclear.

Eduardo Scafi

MODELO DE WICK-CUTKOSKY PARA UM SISTEMA FERMIÔNICO

Dissertação aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:


Prof. Dr. Wayne Leonardo Silva de Paula

Orientador

Prof. Pedro Teixeira Lácava

Pró-Reitor de Pós-Graduação

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP - Brasil
2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Divisão de Informação e Documentação

Scafi, Eduardo

Modelo de Wick-Cutkosky para um sistema fermiônico / Eduardo Scafi.
São José dos Campos, 2017.
73f.

Dissertação de Mestrado – Curso de Física. Área de Física Nuclear – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2017. Orientador: Prof. Dr. Wayne Leonardo Silva de Paula.

1. Bethe-Salpeter. 2. Minkowski. 3. Férmions. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Título.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SCAFI, Eduardo. **Modelo de Wick-Cutkosky para um sistema fermiônico**. 2017.73f.
Dissertação de Mestrado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Eduardo Scafi

TÍTULO DO TRABALHO: Modelo de Wick-Cutkosky para um sistema fermiônico.

TIPO DO TRABALHO/ANO: Dissertação / 2017

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta dissertação e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação pode ser reproduzida sem a autorização do autor.

Eduardo Scafi
Av. Cidade Jardim, 679
12.233-066 – São José dos Campos–SP

MODELO DE WICK-CUTKOSKY PARA UM SISTEMA FERMIÔNICO

Eduardo Scafi

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Tobias Frederico	Presidente	-	ITA
Prof. Dr. Wayne Leonardo Silva de Paula	Orientador	-	ITA
Prof. Dr. Rubens de Melo Marinho Jr.	Membro Interno	-	ITA
Prof. Dr. Odilon Lourenço da Silva Filho	Membro Externo	-	UFRJ

À minha família e amigos por motiva-
rem sempre a seguir em frente.

Agradecimentos

À minha família pelo apoio incondicional. Meus colegas e amigos pela motivação e apoio. Ao professor Dr. Wayne de Paula pela ótima orientação e paciência. E a todos que já contribuíram em algum momento na minha formação. À CAPES pelo apoio financeiro.

“Physics is not about how the world is, it is about what we can say about the world”
— NIELS BOHR

Resumo

Nessa dissertação foi estudado o estado ligado de dois férmions no limite de máxima energia de ligação, que interagem pela troca de uma partícula vetorial com ou sem massa. Para descrever o sistema, resolvemos a equação de Bethe-Salpeter (SALPETER; BETHE, 1951) diretamente no espaço físico. Foi adotada uma aproximação “tipo escada” para o kernel, que abrange infinitas interações, uma vez que resolvemos uma equação integral. A fim de facilitar o tratamento analítico dos pólos presentes no kernel relativístico, utiliza-se a representação integral perturbativa de Nakanishi (NAKANISHI, 1971b) para representar a amplitude de Bethe-Salpeter, que é caracterizada por uma função peso e um denominador que depende dos momentos dos propagadores externos. Foi realizada a projeção na frente de luz (DIRAC, 1949), que permite simplificar a estrutura da equação de Bethe-Salpeter. Foi feito o cálculo de autovalores para a equação integral com a utilização de um fator de forma que fornece uma estrutura para o vértice de interação. Além disso, analisou-se a validação da conjectura da unicidade (NAKANISHI, 1971a), que consiste na premissa da função peso como única. Essa análise acontece no modelo de Wick-Cutkosky (WICK, 1954)(CUTKOSKY, 1954) para o sistema fermiônico. Por fim, mostramos que aplicar a transformação de Stieltjes no sistema fermiônico, para alguns valores discretos, é equivalente a utilizar o método da unicidade. Isso foi feito a partir da comparação dos kernels das equações integrais obtidas por ambos os métodos.

Abstract

In this dissertation we studied the bound state of two fermions at the limit of maximum binding energy, which interact by the exchange of a vector particle with or without mass (Wick-Cutkosky). To describe the system, we solve the Bethe-Salpeter equation (SALPETER; BETHE, 1951) directly in the physical space. A ladder-like approximation was adopted for kernel, which encompasses infinite interactions, since we solve an integral equation. In order to facilitate the analytical treatment of the poles present in the relativistic kernel, we use the perturbative integral representation of Nakanishi (NAKANISHI, 1971b) to represent the Bethe-Salpeter amplitude, which is characterized by a weight function and a denominator that depends on the moments of the external propagators. Light-front projection (DIRAC, 1949) was used to simplify the structure of the Bethe-Salpeter equation. We calculated the eigenvalues for the integral equation using a form factor that provides a structure for the vertex of interaction. In addition, the validity of the uniqueness conjecture (NAKANISHI, 1971a), which consists of the premise of a unique weight function, was analyzed. This analysis takes place in the Wick-Cutkosky model (WICK, 1954)(CUTKOSKY, 1954) for the fermionic system. Finally, we show that applying the Stieltjes transformation in the fermionic system, for some discrete values, is equivalent to using the uniqueness method. This was done by comparing the kernels of the integral equations obtained by both methods.

Lista de Figuras

FIGURA 2.1 – Representação gráfica do kernel	19
FIGURA 2.2 – Diagrama da função de Green de 4 pontos	20
FIGURA 3.1 – Representação diagramática da equação de Bethe-Salpeter.	27
FIGURA 4.1 – Gráfico dos autovalores em função do número de polinômios na base estabelecida, com energia de ligação igual a $2m$, $\Lambda = 2m$ e $\mu = 0$	62
FIGURA 4.2 – Autovalores para o estado ligado de dois férmions em função da massa da partícula mediadora μ , com energia de ligação igual a $2m$ e fator de forma $\Lambda=2m$. Lado esquerdo: Constante de acoplamento g^2 . Lado direito: Constante de acoplamento reescalada α	63
FIGURA 4.3 – Gráfico dos autovalores em função da massa da partícula mediadora (normalizada pelo fator de forma), com energia de ligação igual a $2m$	63
FIGURA 4.4 – Gráfico dos autovalores em função do fator Λ , com energia de ligação igual a $2m$ e $\mu = 0$	64

Lista de Tabelas

- TABELA 3.1 – Tabela de autovalores para o estado ligado bosônico, com massa da partícula de interação $\mu = 0.15$, para diferentes energias de ligação. A coluna 2 refere-se ao autovalor da equação (3.34) e a coluna 3 ao obtido em (KARMANOV; CARBONELL, 2006); $N_\gamma = 4, N_z = 4$. . . 35
- TABELA 3.2 – Tabela de autovalores para o estado ligado bosônico, com massa da partícula de interação $\mu = 0.50$, para diferentes energias de ligação. A coluna 2 refere-se ao autovalor da equação 3.34 e a coluna 3 ao obtido em (KARMANOV; CARBONELL, 2006); $N_\gamma = 4, N_z = 4$ 36
- TABELA 4.1 – Tabela dos autovalores em função do número de polinômios na base estabelecida, com energia de ligação igual a $2m$, $\Lambda = 2m$ e $\mu = 0$ 62
- TABELA 4.2 – Tabela dos autovalores em função do fator Λ , com energia de ligação igual a $2m$ e $\mu = 0$ 63

Lista de Abreviaturas e Siglas

BS	Bethe-Salpeter
NIPR	Representação integral Perturbativa de Nakanishi
QFT	Teoria Quântica de Campos
QCD	Cromodinâmica Quântica

Lista de Símbolos

g	Constante de acoplamento
m	Massa da partícula
μ	Massa da partícula de interação
M	Massa do estado ligado

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Objetivo	15
1.2	Motivação	16
1.3	Organização do trabalho	17
2	EQUAÇÃO DE BETHE-SALPETER E REPRESENTAÇÃO DE NAKANISHI . . .	18
2.1	Introdução	18
2.2	Funções de Green	19
2.3	Equação de Bethe-Salpeter	20
2.4	Representação Integral de Nakanishi	22
2.5	Unicidade	23
2.6	Variáveis da frente de luz	24
3	ESTADO LIGADO DE BÓSONS NO ESPAÇO DE MINKOWSKI	26
3.1	Introdução	26
3.2	Equação de Bethe-Salpeter para bósons	26
3.3	Resultados	34
3.3.1	Método numérico	34
3.3.2	Autovalores da equação completa	35
3.4	Modelo de Wick-Cutkosky ($\mu = 0$)	36
3.4.1	Autovalores da equação no modelo de Wick-Cutkosky com unicidade	40
4	ESTADO LIGADO DE FÉRMIONS NO ESPAÇO DE MINKOWSKI	43
4.1	Introdução	43
4.2	Sistema fermiônico com fator de forma	44

4.2.1	Integração quadridimensional	51
4.2.2	Projeção na frente de luz	54
4.3	Equação da unicidade do sistema com máxima energia de ligação ($B = 2m$)	58
4.3.1	Autovalores da equação completa no limite de máxima energia de ligação	61
4.4	Sistema sem fator de forma ($\Lambda \rightarrow \infty$)	64
4.5	Equação da unicidade para vértice pontual	65
4.6	Transformação de Stieltjes para o sistema fermiônico	67
5	CONCLUSÃO	71
5.1	Conclusão	71
	REFERÊNCIAS	72

1 Introdução

1.1 Objetivo

Esse trabalho tem por objetivo estudar o estado ligado de dois férmions, trocando um bóson vetorial, no espaço de Minkowski, a partir da equação de Bethe-Salpeter (BS) (SALPETER; BETHE, 1951). Devido aos pólos presentes em seu kernel relativístico, essa equação integral possui difícil análise e obtenção de valores numéricos. Dentre as alternativas para contornar esse problema, está a representação integral perturbativa de Nakanishi (NIPR), que descreve o sistema em termos de uma representação paramétrica caracterizada por uma função peso e um denominador que depende dos momentos dos propagadores externos. Além desse recurso, a utilização da projeção na frente de luz através de suas variáveis permite uma simplificação na equação integral resultante. Como o cálculo do estado ligado de dois bósons possui um desenvolvimento que se assemelha ao utilizado no sistema fermiônico, faremos uma revisão da solução da equação de Bethe-Salpeter para o estado bosônico, discutindo em particular o modelo de Wick-Cutkosky para bósons e, posteriormente, férmions.

Sendo a equação de BS descrita em termos da função peso de Nakanishi, pode-se utilizar a conjectura da unicidade, que reescreve a equação integral em um formato mais compacto, diminuindo a complexidade do cálculo de observáveis do sistema. Em trabalhos anteriores (PAULA *et al.*, 2016)(CARBONELL; KARMANOV, 2010) percebeu-se que o cálculo de autovalores torna-se numericamente mais difícil para valores altos de energia de ligação. Dessa forma, visando analisar esse problema, investigamos o limite de energia máxima para o estado ligado, que desacopla as equações do sistema e permite a utilização da unicidade de forma mais simples. Além da unicidade, foi aplicada a transformação de Stieltjes à equação do sistema fermiônico.

Dessa forma, esse trabalho procura validar a conjectura da unicidade para o sistema fermiônico, além de calcular os autovalores do sistema no modelo de Wick-Cutkosky, comparando ainda o kernel das equações quando aplicadas a unicidade e transformação de Stieltjes.

1.2 Motivação

A utilização da rotação de Wick (WICK, 1954)(CUTKOSKY, 1954) é o principal método de solução da equação de Bethe-Salpeter, que promove, a partir dela, trabalhar no espaço Euclidiano, no qual os propagadores não possuem pólos. Esse método tem bastante sucesso no cálculo dos autovalores, que não são afetados pela rotação de Wick, porém, o cálculo de autofunções desse sistema são restritas ao espaço Euclidiano, tornando a rotação de Wick uma alternativa ineficiente para o cálculo de diversos observáveis no espaço de Minkowski.

Uma alternativa no cálculo da equação de BS é a representação integral perturbativa de Nakanishi (NIPR)(NAKANISHI, 1971b), que foi utilizada para resolver a equação de Bethe-Salpeter pela primeira vez por Kusaka e Williams (KUSAKA; WILLIAMS, 1995), entretanto, com problemas no cálculo de resultados numéricos. Em (KARMANOV; CARBONELL, 2006), a representação de Nakanishi foi utilizada em conjunto com as variáveis da frente de luz, que permitiram o cálculo dos autovalores a partir da utilização de um regularizador. Contudo, (FREDERICO *et al.*, 2012) foram os primeiros a utilizar a unicidade baseados na conjectura da função peso de Nakanishi como única. Por fim, (PAULA *et al.*, 2016) trabalhou as singularidades presentes na equação e eliminou a necessidade de um regularizador no cálculo numérico. Esse trabalho visa dar continuidade a essa análise.

Diversos trabalhos procuram fazer a chamada “inversão” da equação de Bethe-Salpeter do espaço Euclidiano para o espaço relativístico (CARBONELL *et al.*, 2017b), recurso que seria de extrema importância para a Cromodinâmica Quântica (QCD), que tem seu principal método de solução definido no espaço Euclidiano (QCD na rede) (CAN *et al.*, 2015)(BICUDO *et al.*, 2015). Sendo assim, a utilização da representação integral de Nakanishi e a dinâmica relativística das variáveis de frente de luz, permitem uma melhor manipulação da equação de BS e provém uma solução de fácil investigação em suas propriedades probabilísticas (FREDERICO *et al.*, 2014). A unicidade procura diminuir o custo computacional do cálculo de observáveis do sistema, diminuindo o número de integrações presentes na equação. Utilizando o fator de forma presente em (CARBONELL; KARMANOV, 2010), que fornece uma estrutura para o vértice em termos de um fator Λ , podemos investigar o comportamento do cálculo no limite de $\Lambda \rightarrow \infty$ e para valores finitos de Λ . Estudamos ainda o limite de energia máxima para o estado ligado, analisando assim a convergência dos autovalores para esse sistema limite.

Por fim, elucidada a validação da conjectura da unicidade para o estado ligado de dois férmions, é feita uma comparação com a transformação de Stieltjes, que a partir de trabalhos recentes (CARBONELL *et al.*, 2017a) permite que a equação integral descrita em termos da função peso de Nakanishi seja simplificada em uma estrutura semelhante à

unicidade. Essas comparações e conclusões permitirão conhecer a eficácia dos métodos descritos no cálculo de autovalores de um estado ligado de duas partículas fermiônicas no espaço de Minkowski.

1.3 Organização do trabalho

O capítulo 2 consiste em uma explicação acerca dos conceitos necessários para o entendimento do cálculo dos estado ligados, além de conter discussões sobre as vantagens da utilização de uma dinâmica relativística específica, os problemas presentes em utilizar a rotação de Wick e a dedução da equação de Bethe-Salpeter quando aproximamos a função de Green de 4 pontos para próximo aos pólos existentes nos propagadores. O capítulo 3 descreve o cálculo do estado ligado de dois bósons trocando partículas escalares e mostra a aplicação do modelo de Wick-Cutkosky nesse sistema.

O capítulo 4 acompanha o cálculo do estado ligado de dois férmions trocando uma partícula vetorial com massa. A seção 4.2 contém o desenvolvimento da equação de Bethe-Salpeter com o fator de forma em sua estrutura. A próxima seção trata do limite de energia máxima, onde a equação se desacopla. Em seguida toma-se o limite sem fator de forma ($\Lambda \rightarrow \infty$), onde aplicamos a conjectura da unicidade. Na seção 4.6 utilizamos a transformação de Stieltjes na equação completa sem fator de forma (seção 4.4), a fim de comparar com a equação resultante da unicidade. A seção 4.7 discute essa comparação.

O capítulo 5 fornece os autovalores do estado ligado de dois bósons, a partir do método de expansão em uma base de polinômios de Laguerre e Gegenbauer. Os autovalores são calculados para a equação completa e para a equação com unicidade no modelo de Wick-Cutkosky. O capítulo 6 trata-se dos autovalores do sistema fermiônico, seja da equação completa com fator de forma, sem fator de forma no modelo de Wick-Cutkosky e da unicidade no modelo de Wick-Cutkosky.

2 Equação de Bethe-Salpeter e Representação de Nakanishi

2.1 Introdução

A Equação de Bethe-Salpeter é uma equação integral homogênea utilizada no estudo de estados ligados, que possui singularidades na sua representação dos momentos presentes nos propagadores das partículas. Descrita por (SALPETER; BETHE, 1951), possui em seu kernel a representação de infinitas interações pela troca de partículas. Utilizaremos a aproximação 'tipo escada' para o kernel, que são os termos dominantes na interação. Em particular é importante ressaltar o cálculo realizado por (GIGANTE *et al.*, 2017), onde é mostrado que as contribuições provenientes dos termos cruzados no kernel são pequenas em relação à aquelas devido aos termos "tipo escada". Além do estado ligado de duas partículas, a equação de BS pode ser utilizada para mais corpos, elevando consideravelmente o nível de complexidade do cálculo, como descrito em (YDREFORS *et al.*, 2017). Apesar dessa dissertação tratar do estado ligado somente no estado fundamental, diversos outros trabalhos analisam estados excitados pela equação de BS (GUTIERREZ *et al.*, 2016)(PIMENTEL; PAULA, 2016).

Um método utilizado no tratamento de estados ligado de duas partículas é a projeção da equação de BS no plano nulo, ou seja, a utilização das variáveis na frente de luz. Essa dinâmica diminui a complexidade da equação integral, além de permitir a fácil integração no quadrimomento, como visto em (KARMANOV; CARBONELL, 2006). Outro recurso a ser esclarecido nesse capítulo é a representação Integral perturbativa de Nakanishi (NIPR), que assim como a rotação de Wick, resolve o problema referente as singularidades no kernel. Entretanto, a NIPR permite continuar no espaço de Minkowski, ao reescrever a amplitude de BS em termos de uma função peso de Nakanishi, diferente da rotação de Wick que "desloca" a equação para o espaço Euclidiano. Ao fim do capítulo, foi descrito o conceito de unicidade que baseia-se na conjectura da função peso de Nakanishi como única e permite que simplifiquemos de forma significativa a equação integral.

O passo inicial para o entendimento da solução da equação de BS no espaço de Minkowski está no estudo das funções de Green de 4 pontos, que quando aproximadas ao limite próximo aos pólos dos propagadores, fornece a equação de BS.

2.2 Funções de Green

Sendo a equação de Green de 4 pontos definida por:

$$G(x_1, x_2; y_1, y_2) = \langle 0 | T \{ \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \phi_1^\dagger(y_1) \phi_2^\dagger(y_2) \} | 0 \rangle \quad (2.1)$$

É possível reescrever a função de Green de 4 pontos em uma soma de termos, sendo eles os propagadores livres das duas partículas e os termos correspondentes à soma infinita dos possíveis diagramas de Feynman, redutíveis e irreduzíveis. Dessa forma:

$$G(x_1, x_2; y_1, y_2) = G_0(x_1, x_2; y_1, y_2) + \int d^4 z_1 d^4 z_2 d^4 z'_1 d^4 z'_2 \times \\ \times G_0(x_1, x_2; y_1, y_2) I(z_1, z_2; z'_1, z'_2) G(z'_1, z'_2; y_1, y_2) \quad (2.2)$$

"I" representa uma infinita série de diagramas irreduzíveis, que contribuem no kernel da equação integral.

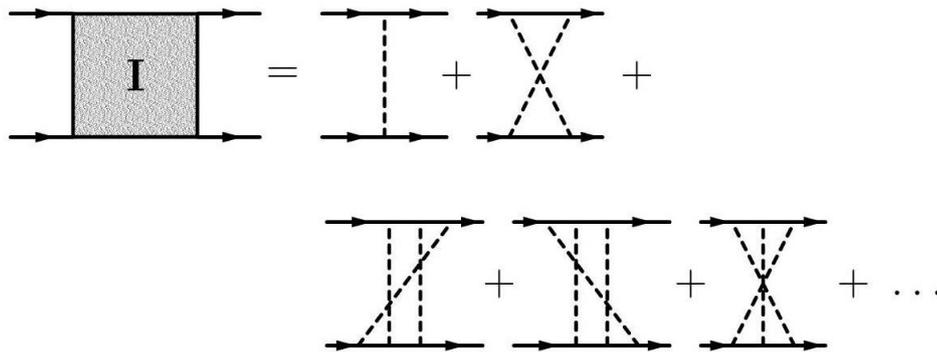


FIGURA 2.1 – Representação gráfica do kernel

G_0 é o propagador livre das duas partículas não interagentes, que pode ser escrito da seguinte forma:

$$G_0(x_1, x_2; y_1, y_2) = \Delta_1(x_1 - y_1) \Delta_2(x_2 - y_2) \quad (2.3)$$

onde:

$$\Delta_i(x_i - y_i) = \langle 0 | T \{ \phi_1(x_i) \phi_2^+(y_i) \} | 0 \rangle \quad (2.4)$$

A equação 2.2 pode ser escrita na sua forma compacta:

$$G = G_0 + G_0 I G \quad (2.5)$$

Representada da seguinte forma:

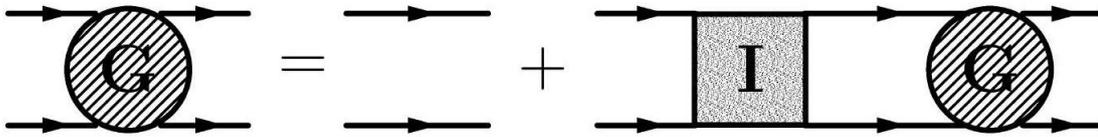


FIGURA 2.2 – Diagrama da função de Green de 4 pontos

2.3 Equação de Bethe-Salpeter

A amplitude de Bethe-Salpeter é definida considerando um estado $|P_B, \beta\rangle$ que representa um estado ligado de dois corpos:

$$\Phi(x_1, x_2; P_B, \beta) = \langle 0 | T \{ \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \} | P_B, \beta \rangle \quad (2.6)$$

onde P_B e o quadrimomento do estado ligado, com $P_B^2 = M^2$.

Aplicando uma translação no estado:

$$\Phi(x_1 + a, x_2 + a; P_B, \beta) = e^{-i P_B \cdot a} \Phi(x_1, x_2; P_B, \beta) \quad (2.7)$$

Sendo assim, a amplitude de BS pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2; P_B, \beta) &= \langle 0 | T \{ \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \} | P_B, \beta \rangle = \\ &= \theta(x^0) \langle 0 | e^{i\hat{p} \cdot x} \phi_1(\eta_2 x) \phi_2(-\eta_1 x) e^{-i\hat{p} \cdot x} | P_B, \beta \rangle + \theta(-x^0) \langle 0 | e^{i\hat{p} \cdot x} \phi_2(-\eta_1 x) \phi_1(\eta_2 x) e^{-i\hat{p} \cdot x} | P_B, \beta \rangle = \\ &= \theta(x^0) e^{-iP_B \cdot x} \langle 0 | \phi_1(\eta_2 x) \phi_1(-\eta_1 x) | P_B, \beta \rangle + \theta(-x^0) e^{-iP_B \cdot x} \langle 0 | \phi_2(-\eta_1 x) \phi_1(\eta_2 x) | P_B, \beta \rangle = \\ &= \frac{e^{-iP_B \cdot x}}{(2\pi)^{3/2}} \phi(x; P_B, \beta) \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde definimos a amplitude de BS reduzida:

$$\varphi(x; p_B, \beta) = (2\pi)^{3/2} \langle 0 | T \{ \phi_1(\eta_2 x) \phi_2(-\eta_1 x) \} | P_B, \beta \rangle \quad (2.9)$$

A fim de obter a equação integral homogênea, consideramos a função de Green de 4 pontos em coordenadas espaciais, na seguinte restrição: $x_1^0, x_2^0 > y_1^0, y_2^0$, logo:

$$G(x_1, x_2; y_1, y_2) = \theta[\min(x_1^0, x_2^0) - \max(y_1^0, y_2^0)] \langle 0 | T[\phi_1(x_1) \phi_2(x_2)] T\{\phi_1^\dagger(y_1) \phi_2^\dagger(y_2)\} | 0 \rangle \quad (2.10)$$

Introduzindo a resolução da unidade, sendo $|n\rangle$ um estado de Fock para n partículas:

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = 1 \quad (2.11)$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2; y_1, y_2) &= \langle 0 | T\{\phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \phi_1^\dagger(y_1) \phi_2^\dagger(y_2)\} | 0 \rangle = \\ &= \theta[\min(x_1^0, x_2^0) - \max(y_1^0, y_2^0)] \langle 0 | T\{\phi_1(x_1) \phi_2(x_2)\} | n \rangle \langle n | T\{\phi_1^\dagger(y_1) \phi_2^\dagger(y_2)\} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.12)$$

Assumindo somente um estado ligado, devemos definir $|n\rangle \rightarrow |P_B, \beta\rangle$, onde indica um conjunto de números quânticos e $P_B \equiv \omega_B = \sqrt{m_B^2 + \vec{p}^2}$, $|\vec{p}|$ um quadrimomento.

Sendo assim:

$$\begin{aligned} G_B(x_1, x_2; y_1, y_2) &= \int \frac{d^3 p}{2\omega_B (2\pi)^3} \\ &\langle 0 | T\{\phi_1(x_1) \phi_2(x_2)\} | P_B, \beta \rangle \langle \beta, P_B | T\{\phi_1^\dagger(y_1) \phi_2^\dagger(y_2)\} | 0 \rangle \theta[\min(x_1^0, x_2^0) - \max(y_1^0, y_2^0)] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Aplicando então a amplitude de BS reduzida a equação, torna-se:

$$\begin{aligned} G_B(x_1, x_2; y_1, y_2) &= \int \frac{d^3 P_B}{2\omega_B (2\pi)^3} \varphi(x; P_B, \beta) \bar{\varphi}(y; P_B, \beta) e^{-i\omega_B(X_0 - Y_0)} e^{i\vec{p}(\vec{X} - \vec{Y})} \times \\ &\times \theta[\min(x_1^0, x_2^0) - \max(y_1^0, y_2^0)] \end{aligned} \quad (2.14)$$

O argumento da função de θ pode ser escrito:

$$\begin{aligned}\theta[\min(x_1^0, x_2^0) - \max(y_1^0 - y_2^0)] &= \theta[\min(X_0 + \eta_2 x_0, X_0 - \eta_1 x_0) - \max(Y_0 + \eta_2 y_0, Y_0 - \eta_1 y_0)] \\ &= \theta[X_0 - Y_0 + f(x_0, y_0)]\end{aligned}\quad (2.15)$$

onde: $f(x_0, y_0) = -\frac{1}{2}|x_0| - \frac{1}{2}|y_0| + \frac{1}{2}(\eta_2 - \eta_1)(x_0 - y_0)$ e utilizando a relação:

$$\theta(z) = \frac{i}{2\pi} \int \frac{e^{-itz}}{t + i\epsilon} dz \quad (2.16)$$

Através do teorema de resíduos, quando identificamos os pólos presentes na equação, chegamos a seguinte forma:

$$G_B(x, y, X, -Y) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p \varphi(x; P_B, \beta) \bar{\varphi}(y; P_B, \beta) \frac{e^{-iP(X-Y)}}{2\omega_B(P_0 - \omega_B + i\epsilon)} e^{-i(P_0 - \omega_B)f(x_0, y_0)} \quad (2.17)$$

Aplicando a transformada de Fourier (ZAOUI, 1971), chega-se as seguintes conclusões:

$$\varphi(k; P_B, \beta) \bar{\varphi}(q; P_B, \beta) = [\Delta(\eta_1 P + k) \Delta(\eta_2 P - k)] \int \frac{d^4 q'}{(2\pi)^4} I(k, q'; P) \varphi(q'; P_B, \beta) \bar{\varphi}(q'; P_B, \beta) \quad (2.18)$$

onde ambos os lados foram multiplicados por $(P_0 - \omega_B + i\epsilon)$;

De forma geral, chega-se a equação integral da amplitude de BS no seguinte formato:

$$\phi(k; P_B, \beta) = \Delta_1(\eta_1 p + k) \Delta_2(\eta_2 p + k) \int \frac{d^4 q'}{(2\pi)^4} I(k, q'; p) \phi(q'; P_B, \beta) \quad (2.19)$$

2.4 Representação Integral de Nakanishi

Dentre as opções no cálculo de autovalores para a equação de BS está a rotação de Wick e Representação Integral de Nakanishi. A rotação de Wick permite escrever a equação de BS no espaço Euclidiano, entretanto, a sua utilização, apesar de útil no cálculo de autovalores, que são os mesmo tanto espaço ee Minkowski quanto no Euclidiano, não se mostra uma boa alternativa quando necessário o cálculo das autofunções. Isso se deve ao fato de que o problema de inversão das autofunções de

um espaço para o outro ainda estar em aberto. Existem diversos trabalhos recentes que discutem alternativas pra isso (CARBONELL *et al.*, 2017b), pois um procedimento sistemático que fizesse a inversão entre os espaços seria extremamente útil, uma vez que o principal método para solução da Cromodinâmica Quântica (QCD), a Cromodinâmica na rede, é descrito no espaço Euclidiano.

Em particular, nesse trabalho utilizaremos a função peso de Nakanishi (NAKANISHI, 1971a) para resolver a equação de Bethe-Salpeter. A representação integral de Nakanishi consiste em reescrever a amplitude de Bethe-Salpeter como uma integral descrita em termos de uma função peso e de um denominador que é função dos momentos externos.

$$\phi_i(k, p) = \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^{\infty} \frac{d\gamma' g_i(\gamma', z')}{[k^2 + p \cdot kz' + \frac{M^2}{4} - m^2 - \gamma' + i\epsilon]^3} \quad (2.20)$$

2.5 Unicidade

A unicidade é uma conjectura sugerida por Nakanishi (NAKANISHI, 1971a), que permite reescrever a equação integral eliminando uma integral. Esse artifício simplifica o cálculo de autovalores para o estado ligado e já foi utilizado anteriormente para estado ligado de dois bósons (FREDERICO *et al.*, 2014). Nesse trabalho, repetiremos o processo do cálculo de autovalores para bósons, utilizando unicidade e faremos o processo em semelhante para o estado ligado de dois férmions.

Sendo assim, a conjectura da unicidade afirma que se podemos escrever uma equação integral da seguinte forma

$$\int_0^{+\infty} \frac{g(\gamma'', z) d\gamma''}{(\gamma'' + \gamma + m^2 z^2 (1 - z^2) \kappa^2)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{d\gamma''}{(\gamma'' + \gamma + m^2 z^2 + (1 - z^2) \kappa^2)^2} \times \\ \times \int_0^1 dv M_{ij}(\gamma'', z; \gamma', z', v) g(\gamma'', z'), \quad (2.21)$$

logo, podemos escrever a função peso como

$$g(\gamma'', z) = \int_0^1 dv M_{ij}(\gamma'', z; \gamma', z', v) g(\gamma'', z'). \quad (2.22)$$

Esse resultado é equivalente a dizer que a função peso de Nakanishi é única para a descrição de um particular sistema físico. Esse resultado foi demonstrado por Na-

kanishi no limite perturbativo. Porém, como estamos lidando com um problema não perturbativo (estado ligado), trataremos a unicidade da função peso de Nakanishi como uma conjectura.

2.6 Variáveis da frente de luz

É possível construir diferentes formas de dinâmicas relativísticas a partir da descrição do estado inicial em qualquer superfície do espaço-tempo, como demonstrado por Dirac (DIRAC, 1949). A evolução da dinâmica de um sistema relativístico corresponde ao sistema “seguir” uma trajetória através de hipersuperfícies.

Nessa dissertação, utilizaremos uma posição e momento definidas no plano nulo, onde um “boost” na direção z não altera o plano. Adotando $c = 1$, as “novas” coordenadas estabelecidas seguem as seguintes definições.

Um ponto no espaço-tempo de quatro dimensões é definido como (x^0, x^1, x^2, x^3) , onde x^0 é a coordenada temporal. Adotando $c = 1$, as coordenadas no plano nulo, chamadas de variáveis na frente de luz, são definidas como:

$$x^+ = x^0 + x^3 \quad (2.23)$$

$$x^- = x^0 - x^3 \quad (2.24)$$

$$\vec{x}_\perp = x^1 \vec{i} + x^2 \vec{j} \quad (2.25)$$

e

$$k^+ = k^0 + k^3 \quad (2.26)$$

$$k^- = k^0 - k^3 \quad (2.27)$$

$$\vec{k}_\perp = (k^1, k^2) \quad (2.28)$$

O produto escalar entre coordenadas de frente de luz é dado por:

$$k^\mu x_\mu = \frac{1}{2}(k^+ x^- + k^- x^+) - \vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp \quad (2.29)$$

No espaço de Minkowski existe a relação entre massa e energia da partícula livre:

$$p^\mu p_\mu = p^2 = M^2 \quad (2.30)$$

ou seja, podemos chegar as seguintes conclusões:

$$k^2 = k^-k^+ - k_{\perp}^2 \quad (2.31)$$

$$p \cdot k = \frac{M}{2}(k^- + k^+) \quad (2.32)$$

Uma das principais vantagens dessa representação consiste no fato da dinâmica permanecer inalterada quando fazemos um "boost", ou seja, o plano nulo é invariante pela transformação de Lorentz.

3 Estado ligado de Bósons no espaço de Minkowski

3.1 Introdução

A fim de ilustrar o método de solução da equação de Bethe-Salpeter no espaço de Minkowski a partir da representação de Nakanishi, neste capítulo faremos uma revisão do cálculo do estado ligado de dois bósons interagindo entre si pela troca de uma partícula escalar (KUSAKA *et al.*, 1997; KARMANOV; CARBONELL, 2006; FREDERICO *et al.*, 2014; PAIVA, 2014). Consideraremos o kernel de interação na aproximação “tipo escada”. Ao fim da primeira seção teremos a equação completa do estado ligado dos bósons, onde serão calculados autovalores para diferentes massas da partícula escalar de interação (esses valores estão presentes nas tabelas 3.1 e 3.2). Na seção 3.4, adotaremos o modelo de Wick-Cutkosky, onde a massa da partícula interagente é zero e aplicaremos a conjectura da unicidade na equação integral. Esse recurso visa simplificar a equação de BS quando descrita pela representação de Nakanishi. Compararemos as soluções da equação completa e a equação obtida a partir da aplicação da conjectura de unicidade da função peso de Nakanishi. Sendo assim, o cálculo do estado ligado de dois bósons interagentes servirá como ilustração dos métodos que serão utilizados para o cálculo do estado ligado de dois férmions com máxima energia de ligação no espaço de Minkowski, que ainda não foi explorado na literatura.

3.2 Equação de Bethe-Salpeter para bósons

Consideraremos duas partículas escalares com momentos k_1 e k_2 e massa $m_1 = m_2 = m$, interagindo pela troca de um bóson escalar de massa μ formando um estado ligado de massa M e momento p ($p^2 = M^2$). Fazendo a seguinte transformação de variáveis, podemos escrever

$$p = k_1 + k_2,$$

$$k = \frac{(k_1 - k_2)}{2},$$

$$k' = \frac{(k'_1 - k'_2)}{2},$$

onde k' é o momento que está sendo integrado no loop.

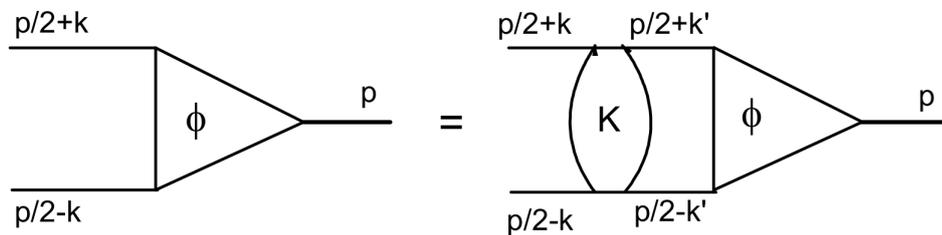


FIGURA 3.1 – Representação diagramática da equação de Bethe-Salpeter.

A figura 3.1 representa a equação de Bethe-Salpeter para o estado ligado de dois bósons. O lado esquerdo da figura representa a amplitude de BS ($\Phi(k, p)$). Note que essa é uma equação integral e, por isso, possui em seu kernel uma classe de infinitos diagramas de Feynman, possibilitando acessar aspectos não perturbativos do sistema físico de interesse. Sendo assim, a equação de BS na aproximação de escada é escrita da seguinte forma

$$\Phi(k, p) = \frac{i}{[(p/2 + k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{i(-ig)^2}{(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon} \Phi(k', p) \frac{i}{[(p/2 - k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \quad (3.1)$$

A representação de Nakanishi pode ser usada para descrever qualquer diagrama de Feynman e, conseqüentemente, uma soma finita deles. A ideia original de (KUSAKA; WILLIAMS, 1995) foi estender o trabalho de Nakanishi para descrever a amplitude de BS, que necessita de infinitos diagramas. Seguindo essa proposta, utilizaremos a representação integral de Nakanishi (equação 2.20) na descrição da amplitude de BS. Dessa forma

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^{\infty} d\gamma' \frac{g(\gamma', z')}{[k^2 + p \cdot kz' + \frac{M^2}{4} - m^2 - \gamma' + i\epsilon]^3} = \frac{i}{[(\frac{p}{2} + k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \frac{(-ig)^2}{[(\frac{p}{2} - k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \\
 & \times \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-1}^1 dz' \int_0^{\infty} d\gamma' \frac{g(\gamma', z')}{(-\gamma' - m^2 + \frac{M^2}{4} + k'^2 + p \cdot k'z' + i\epsilon)^3}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Inicialmente, devemos resolver a integral quadridimensional. Para isso definiremos a integral I como

$$I = \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon} \frac{1}{(-\gamma' - m^2 + \frac{M^2}{4} + k'^2 + p \cdot k'z' + i\epsilon)^3}. \tag{3.3}$$

Utilizaremos a parametrização de Feynman para reescrever o produto de frações em um único termo. Dessa forma

$$n \int_0^1 dv \frac{v^{n-1}}{(A + v(B - A))^{n+1}} = \frac{1}{AB^n}, \tag{3.4}$$

onde I torna-se

$$I = \int \frac{3 d^4 k'}{(2\pi)^4} \int_0^1 dv \frac{v^2}{[k^2 - 2k \cdot k' + k'^2 - \mu^2 + i\epsilon + v(-\gamma' - m^2 + \frac{M^2}{4} + p \cdot k'z' + 2k \cdot k' - k^2 + \mu^2)]^4} \tag{3.5}$$

A fim de simplificar o entendimento dos cálculos, definimos:

$$\begin{aligned}
 C &= k^2 - 2kk' + k'^2 - \mu^2 + i\epsilon + v(-\gamma' - m^2 + \frac{M^2}{4} + p \cdot k'z' + 2kk' - k^2 + \mu^2) \\
 &= \left[k' + \left(\frac{vz'p - 2k + 2vk}{2} \right) \right]^2 - \left(\frac{vz'p - 2k + 2vk}{2} \right)^2 + k^2 - \mu^2 - v\gamma' - vm^2 + \frac{vM^2}{4} - k^2v \\
 &+ v\mu^2 + i\epsilon
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Sendo assim, a integral I pode ser reescrita como

$$I = \int_0^1 \frac{3v^2 dv}{(2\pi)^4} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 k'}{(q^2 + b + i\epsilon)^4} \right], \tag{3.7}$$

onde

$$q = k' + \left(\frac{vz'p - 2k + 2vk}{2} \right),$$

$$b = -\left(\frac{vz'p - 2k + 2vk}{2} \right)^2 + k^2 - \mu^2 - v\gamma' - vm^2 + \frac{vM^2}{4} - k^2v + v\mu^2.$$

A forma escolhida para reescrever a integral é útil quando tem por objetivo utilizar a seguinte relação:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4k'}{(q^2 + b + i\epsilon)^n} = i\pi^2 \frac{1}{n-1} \frac{1}{n-2} \frac{1}{b^{n-2}} \quad (3.8)$$

Sendo assim, podemos escrever:

$$I = \int_0^1 \frac{3v^2 dv}{(2\pi)^4} \frac{i\pi^2}{6} \frac{1}{[-(vz'p - 2k + 2vk)^2/4 + k^2 - \mu^2 - v\gamma' - vm^2 \frac{vM^2}{4} - k^2v + v\mu^2 + i\epsilon]^2} \quad (3.9)$$

O passo seguinte será a utilização das variáveis na frente de luz, discutidas no capítulo anterior. Elas descrevem os produtos escalares dos momentos como

$$k^2 = k^-k^+ - k_\perp^2,$$

$$p \cdot k = \frac{M}{2}(k^- + k^+).$$

Serão aplicadas as seguintes definições de variáveis

$$k_\perp^2 = \gamma \quad (3.10)$$

$$k^+ = -\frac{zM}{2} \quad (3.11)$$

Buscando o completo entendimento dos passos matemáticos decorridos no trabalho, foram separados os termos da equação em três principais, onde será feita a substituição separadamente das variáveis de frente de luz.

Sendo assim, primeiro trataremos do primeiro termo, definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{i}{(p/2 + k)^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 &= \frac{2}{Mk^-(1-z) + \frac{M}{2}(1-z) - \frac{2}{M}(\gamma + m^2) + i\epsilon} i
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

O segundo termo:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{(-ig)^2}{(p/2 - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 &= \frac{2}{Mk^-(1+z) + \frac{M}{2}(1+z) - \frac{2}{M}(\gamma + m^2) + i\epsilon} (-ig)^2
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

E por fim, o terceiro termo:

$$I_3 = \frac{1}{-(vz'p - 2k - 2vk)^2/4 + k^2 - \mu^2 - v\gamma' - vm^2 + v\frac{M^2}{4} - kv^2 + v\mu^2 + i\epsilon}$$

Novamente, a fim de facilitar a compreensão, foram definidos os termos A e B, que possuem a seguinte forma

$$A = -\left(\frac{vz'p - 2k(1-v)}{2}\right)^2 \tag{3.14}$$

$$B = k^2 - \mu^2 - v\gamma' - vk^2 - k^2v + v\mu^2 \tag{3.15}$$

onde A pode ser manipulado até atingir a seguinte configuração

$$\begin{aligned}
 A &= -\left(\frac{vz'p}{2} - k(1-v)\right)^2 \\
 &= k^-\left(\frac{z'M}{2}(1-v) + \frac{Mz}{2}(1-v)^2\right) - \frac{v^2z'^2p^2}{4} - \frac{M^2}{4}z'zv(1-v) + \gamma(1-v)^2
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

e com B acontece um processo semelhante

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{Mz}{2}k^- - \gamma - \mu^2 - v\gamma' - v\kappa^2 + \frac{Mvzk^-}{2} + v\gamma + v\mu^2 \\
 &= -k^- \frac{Mz}{2}(1-v) - (1-v)(\mu^2 + \gamma) - v(\gamma' + \kappa^2)
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Agora será feita a soma dos termos A e B. Definiremos

$$A + B = \xi_1 k^- + \xi_0, \tag{3.18}$$

onde ξ_0 não depende de k^- . Assim

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= \left(\frac{z'M}{2}v(1-v) + \frac{Mz}{2}(1-v)^2\right) - \left(\frac{Mz}{2}(1-v)\right) \\
 &= \frac{M}{2}(1-v)(vz' - vz) \\
 \xi_1 &= k_D^+
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

e

$$\begin{aligned}
 \xi_0 &= -\frac{v^2z'^2p^2}{4} - \frac{M^2}{4}z'zv(1-v) + \gamma(1-v)^2 - (1-v)(\mu^2 + \gamma) - v(\gamma' + \kappa^2) \\
 &= (1-v)\left(-\frac{M^2}{4}z'zv + \gamma(1-v) - \mu^2 - \gamma\right) + v\left(-\gamma' - \kappa^2 - \frac{vz'^2M^2}{4}\right) \\
 \xi_0 &= l_D.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Logo, podemos representar I_3 como

$$I_3 = \frac{1}{(k_D^+ k^- + l_D + i\epsilon)^2}, \tag{3.21}$$

onde

$$\begin{aligned}
 k_D^+ &= (1-v)\frac{M}{2}v(z' - z) \\
 l_D &= (1-v)\left(-\frac{M^2}{4}z'zv + \gamma(1-v) - \mu^2 - \gamma\right) + v\left(-\gamma' - \kappa^2 - \frac{vz'^2M^2}{4}\right).
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Após essa manipulação, podemos reescrever a integral I como

$$I = \int_0^1 dv \frac{i\pi^2}{2(2\pi)^4} \frac{v^2}{(k_D^+ k^- + l_D + i\epsilon)^2}. \quad (3.23)$$

Escrevendo a equação de BS completa (3.2), teremos

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \frac{g(\gamma', z')}{[k^-(-\frac{Mz}{2} + \frac{Mz'}{2}) - \gamma - \frac{z'M^2z}{4} - \gamma' - \kappa^2 + i\epsilon]^3} = \frac{2}{M^2(1-z)} \frac{1}{(1+z)} \frac{i\pi^2}{(2\pi)^4} \times \\ & \times \frac{i}{(k^- - k_d^- + i\epsilon)} \frac{(-ig)^2}{(k^- - k_u^- + i\epsilon)} \int_{-1}^1 dz' \int_0^\infty d\gamma' g(\gamma', z') \int_0^1 dv \frac{v^2}{(k_D^+ k^- + l_D + i\epsilon)^2}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde definimos as seguintes variáveis

$$\begin{aligned} k_u^- &= \frac{M}{2} - \frac{2}{M} \frac{(\gamma + m^2)}{(1+z)} \\ k_d^- &= -\frac{M}{2} + \frac{2}{M} \frac{(\gamma + m^2)}{(1-z)} \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde: $-1 < z < 1$;

O próximo passo é fazer a projeção na frente de luz, que pode ser realizada integrando a amplitude de BS na variável k^- (FREDERICO; PAULI, 2001)

$$\psi(k, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^-}{2\pi} \Phi(k, p). \quad (3.26)$$

Inicialmente faremos a integral do lado esquerdo (L.H.S.) da equação (3.24.)

$$L.H.S. = \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \frac{g(\gamma', z')}{[k^-(-\frac{Mz}{2} + \frac{Mz'}{2}) - \gamma - \frac{z'M^2z}{4} - \gamma' - \kappa^2 + i\epsilon]^3} \quad (3.27)$$

Essa integral foi discutida no trabalho (CHANG *et al.*, 1973) e o resultado obtido foi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^-}{2\pi} \frac{1}{(xk^- - y + i\epsilon)^3} = -\frac{i\delta(x)}{2y^2}. \quad (3.28)$$

Assim,

$$L.H.S. = \frac{-i}{M} \int_0^{+\infty} \frac{g(\gamma', z) d\gamma'}{(\gamma' + \gamma + m^2 z^2 + (1 - z^2)\kappa^2)^2} \quad (3.29)$$

Note que para lado direito da equação (3.24), os pólos k_u^- e k_d^- estão localizados respectivamente acima e abaixo do eixo real. Ao passo que, a localização do terceiro pólo depende do sinal de k_D^+ . Assim, para realizar a integração em Cauchy, deveremos considerar os dois possíveis sinais de k_D^+ , que se traduzem na relação entre z e z' .

- $z' > z \rightarrow k_D^+ > 0$

Para essa condição, deve-se fechar o contorno por cima no plano complexo (ARFKEN, 2007).

$$\oint_c \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz = f(z_0) 2\pi i \quad (3.30)$$

Nesse caso, a contribuição para essa integral é devido ao pólo localizado em k_u^- .

Sendo assim

$$\begin{aligned} R.H.S. &= \int_0^1 \frac{v^2 dv}{2\pi} \int_4^{M^2} (i)^2 (-ig)^2 \pi^2 dz' \times \\ &\times \int_0^{+\infty} d\gamma' \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\pi i}{(1-z)(1-z')} \frac{1}{k_u^- - k_d^-} \frac{1}{(k_D^+ k_u^- + l_D)^2} g(\gamma', z') \end{aligned} \quad (3.31)$$

- $z > z' \rightarrow k_D^+ < 0$

Nesse caso o contorno é fechado por baixo no plano complexo, logo o pólo se encontra em k_d^- :

$$\begin{aligned} R.H.S. &= \int_0^1 dv \frac{v^2}{2\pi} \int_4^{M^2} dz' (i)^2 (-ig)^2 \pi^2 \\ &\times \int_0^{+\infty} d\gamma' \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{(1-z)(1-z')} (-\pi i) \frac{1}{k_d^- - k_u^-} \frac{1}{(k_D^+ k_d^- + l_D)^2} g(\gamma', z) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Assim

$$\begin{aligned}
 R.H.S. &= g^2 \int_0^1 dv 2\pi^2 \frac{v^2}{M^2} \int_{-1}^1 \frac{dz'}{(2\pi)^4} \int_0^{+\infty} d\gamma' \frac{g(\gamma', z')}{(1-z)(1-z')} \times \\
 &\times \left[\theta(z' - z) \left(\frac{2\pi i}{k_u^- - k_d^-} \frac{1}{(k_D^+ k_u^- + l_D)^2} \right) + \theta(z - z') \left(\frac{-2\pi i}{k_d^- - k_u^-} \frac{1}{(k_D^+ k_d^- + l_D)^2} \right) \right] \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

Substituindo os valores de k_u^-, k_d^- e k_D^+ , a equação fica

$$\int_0^\infty d\gamma' \frac{g(\gamma', z)}{(\gamma' + \gamma + m^2 z^2 + (1-z^2)\kappa^2)^2} = \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz' V(\gamma, z; \gamma', z') g(\gamma', z') \quad (3.34)$$

com:

$$V(\gamma, z; \gamma', z') = W(\gamma, z; \gamma', z') \theta(z' - z) + W(\gamma, -z; \gamma', -z') \theta(z - z') \quad (3.35)$$

onde:

$$W(\gamma, z, \gamma', z') = \frac{g^2(1-z)^2}{32\pi^2[\gamma + z^2 m^2 + (1-z)^2 \kappa^2]} \int_0^1 \frac{v^2 dv}{D^2} \quad (3.36)$$

sendo:

$$\begin{aligned}
 D &= v(1-v)(1-z')\gamma + v(1-z)\gamma' + v(1-z)(1-z')[1 + z(1-v) + vz']\kappa^2 \\
 &+ v[(1-v)(1-z')z^2 + vz'^2(1-z)]m^2 + (1-v)(1-z)\mu^2 \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

3.3 Resultados

3.3.1 Método numérico

Resolveremos a equação integral utilizando o método de expansão em uma base de polinômios de Gegenbauer ($C_m^{5/2}(z)$) e Laguerre ($L_n(a\gamma)$). A função peso de Nakanishi decomposta nessa base é

$$g_i(\gamma, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}^i G_m(z) L_n(\gamma), \quad (3.38)$$

onde as funções dos polinômios são

$$\begin{aligned} G_m(z) &= 4(1-z^2)\Gamma(5/2)\sqrt{\frac{(m+5/2)(m)!}{(\pi\Gamma(m+5))}}C_m^{5/2}(z), \\ \mathcal{L}_n(\gamma) &= \sqrt{a}L_n(a\gamma)e^{-a\gamma/2}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

As relações de ortogonalidade dos polinômios são

$$\int_{-1}^{+1} dz G_l^{\lambda_i}(z) G_n^{\lambda_i}(z) = \delta_{ln} \quad (3.40)$$

$$\int_0^{\infty} d\gamma L_j(\gamma) L_l(\gamma) = a \int_0^{\infty} d\gamma e^{-a\gamma} \mathcal{L}_j(a\gamma) \mathcal{L}_l(a\gamma) = \delta_{jl} \quad (3.41)$$

3.3.2 Autovalores da equação completa

Aplicando o método de expansão em base, resolvemos a equação de Bethe-Salpeter para o estado ligado de dois bósons interagindo pela troca de um escalar massivo com aproximação “tipo escada” (Eq. 3.34).

Calculamos os autovalores (g^2) para diferentes energias de ligação (B) para dois valores de massa da partícula trocada ($\mu = 0.15$ e $\mu = 0.50$). Verificamos que sistemas mais ligados possuem a constante de acoplamento mais alta. Aumentando a massa da partícula de interação, para uma energia de ligação fixa, obtivemos constantes de acoplamento mais altas. Na tabela (3.1) e (3.2), comparamos os autovalores obtidos pela solução da equação (3.34) com os obtidos em (KARMANOV; CARBONELL, 2006), no qual foi utilizado o método de spiline. A concordância dos resultados reafirma a validade da utilização da representação de Nakanishi para amplitude de BS.

TABELA 3.1 – Tabela de autovalores para o estado ligado bosônico, com massa da partícula de interação $\mu = 0.15$, para diferentes energias de ligação. A coluna 2 refere-se ao autovalor da equação (3.34) e a coluna 3 ao obtido em (KARMANOV; CARBONELL, 2006); $N_\gamma = 4, N_z = 4$

$\mu = 0.15$	g^2	g_K^2
B/m = 0.01	28.04	28,73
B/m = 0.10	72.28	72,23
B/m = 0.20	105.6	105,6
B/m = 0.50	181.5	181,5
B/m = 1.00	267.2	267,1

TABELA 3.2 – Tabela de autovalores para o estado ligado bosônico, com massa da partícula de interação $\mu = 0.50$, para diferentes energias de ligação. A coluna 2 refere-se ao autovalor da equação 3.34 e a coluna 3 ao obtido em (KARMANOV; CARBONELL, 2006); $N_\gamma = 4, N_z = 4$

$\mu = 0.50$	g^2	g_K^2
B/m = 0.01	69.35	72.38
B/m = 0.10	125.5	125.6
B/m = 0.20	163.4	163.4
B/m = 0.50	246.4	246.4
B/m = 1.00	337.5	337.4

3.4 Modelo de Wick-Cutkosky ($\mu = 0$)

Um caso limite no tratamento do estado ligado de dois bósons é quando a massa da partícula interagente vai a zero. Esse caso foi estudado (WICK, 1954), onde foi possível um tratamento analítico para resolver a equação de Bethe-Salpeter. Nessa seção, discutiremos esse modelo utilizando a representação integral de Nakanishi e a conjectura da unicidade. É importante ressaltar que em (FREDERICO *et al.*, 2014), foi discutido a equação integral com unicidade de um sistema bosônico com massa μ diferente de zero.

Dessa forma, teremos ao fim da seção as equações que descrevem o estado ligado de dois bósons interagentes no modelo de Wick-Cutkosky, com e sem a conjectura da unicidade. Serão obtidos os autovalores dessas equações integrais e compararemos os resultados.

A equação (3.34) assumindo o modelo de Wick-Cutkosky é

$$\int_0^{+\infty} \frac{g(\gamma', z) d\gamma'}{(\gamma' + \gamma + m^2 z^2 + (1 - z^2)\kappa^2)^2} = \int_0^{+\infty} d\gamma' \int_{-1}^1 dz' V(\gamma, z; \gamma', z') g(\gamma', z'), \quad (3.42)$$

com

$$\begin{aligned}
 V(\gamma, z; \gamma', z') &= \frac{g^2 m^2}{8\pi^2} \frac{1}{[\gamma + m^2 z^2 + (1 - z^2)\kappa^2]} \frac{1}{[\gamma' + m^2 z'^2 + (1 - z'^2)\kappa^2]} \times \\
 &\times \frac{\theta(z - z')}{[\gamma + \gamma' \frac{(1-z)}{1-z'}] + z^2 m^2 + (1 - z^2)\kappa^2} \frac{(1 - z)}{(1 - z')} + [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z'].
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Procurando utilizar a unicidade, conjectura elucidada no capítulo anterior (equação 2.21 e 2.22), aplicamos a parametrização de Feynman, procurando reescrever as duas frações da equação como uma só

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{[\gamma + m^2 z^2 + (1 - z^2)\kappa^2]} \frac{1}{[\gamma + \gamma' \frac{(1-z)}{1-z'}] + z^2 m^2 + (1 - z^2)\kappa^2} = \\
 &\int_0^1 dv \frac{1}{[\gamma + m^2 z^2 + (1 - z^2)\kappa^2 + v(\gamma' \frac{(1-z)}{1-z'})]^2}.
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Sendo assim, a equação fica

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{+\infty} \frac{g(\gamma', z) d\gamma'}{(\gamma' + \gamma + m^2 z^2 (1 - z^2)\kappa^2)^2} = \int_0^{+\infty} d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz' \frac{g^2 m^2}{8\pi^2} \frac{(1 - z)}{(1 - z')} \times \\
 &\times \int_0^1 dv \frac{g(\gamma', z')}{[\gamma + m^2 z^2 + (1 - z^2)\kappa^2 + v\gamma' \frac{(1-z)}{1-z'}]^2} \frac{\theta(z - z')}{\gamma' + z'^2 m^2 + (1 - z'^2)\kappa^2} + [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z']
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Outro artifício matemático relevante é o uso da delta de Dirac na integração. Isso permite com que escrevamos o seguinte:

$$\int_0^{\infty} d\gamma'' \frac{\delta(\gamma'' - \frac{v\gamma'(1-z)}{1-z'})}{[\gamma'' + \gamma + m^2 z^2 + (1 - z^2)\kappa^2]^2} = \frac{1}{[\gamma + m^2 z^2 + (1 - z^2)\kappa^2 + v\gamma' \frac{(1-z)}{1-z'}]^2} \tag{3.46}$$

Dessa forma, reescrevemos a equação integral como

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \frac{g(\gamma'', z) d\gamma''}{[\gamma'' + \gamma + m^2 z^2 + (1 - z^2)\kappa^2]^2} = \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz' \frac{g^2 m^2}{8\pi^2} \int_0^1 dv \frac{(1 - z)}{(1 - z')} \times \\
 & \times \int_0^\infty d\gamma'' \frac{\delta(\gamma'' - \frac{v\gamma'(1-z)}{(1-z')})}{[\gamma'' + \gamma + m^2 z^2 + (1 - z^2)\kappa^2]^2} \frac{g(\gamma', z') \theta(z - z')}{\gamma' + z'^2 m^2 + (1 - z'^2)\kappa^2} + [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z']
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

logo:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \frac{g(\gamma'', z) d\gamma''}{[\gamma'' + \gamma + m^2 z^2 + (1 - z^2)\kappa^2]^2} = \int_0^\infty \frac{d\gamma''}{[\gamma'' + \gamma + m^2 z^2 + (1 - z^2)\kappa^2]^2} \times \\
 & \times \frac{g^2 m^2}{8\pi^2} \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz' K(\gamma'', z; \gamma', z') g(\gamma', z') + [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z']
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Aplicando a unicidade:

$$g(\gamma'', z) = \frac{g^2 m^2}{8\pi^2} \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz' K(\gamma'', z; \gamma', z') g(\gamma', z') + [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z'] \tag{3.49}$$

com:

$$K(\gamma'', z; \gamma', z') = \int_0^1 dv \frac{\delta(\gamma'' - \frac{v\gamma'(1-z)}{(1-z')})}{[\gamma' + m^2 z'^2 + (1 - z'^2)\kappa^2]} \frac{(1 - z)}{(1 - z')} \theta(z - z') \tag{3.50}$$

Note que a equação (3.49) não possui integrais no lado esquerdo, o que deve facilitar a solução numérica. Essa é a equação BS para o modelo de Wick-Cutkosky bosônico com unicidade, que resolveremos numericamente na próxima seção.

Por outro lado, podemos simplificar ainda mais essa equação utilizando um Ansatz particular para a função peso de Nakanishi. Dessa forma, aplicando a mudança de variável $\gamma''' = v\gamma' \frac{(1-z)}{1-z'}$, temos

$$\begin{aligned}
 g(\gamma'', z) &= \frac{g^2 m^2}{8\pi^2} \int_0^\infty d\gamma''' \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^1 \frac{dv}{v} \frac{(1 - z')}{(1 - z)} \frac{\theta(z - z') \delta(\gamma'' - \gamma''')}{[\frac{\gamma'''(1-z')}{v(1-z)} + z'^2 m^2 + (1 - z'^2)\kappa^2]} \times \\
 & \times g\left(\frac{\gamma'''(1-z')}{v(1-z)}, z'\right) \frac{(1 - z)}{(1 - z')} + [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z'],
 \end{aligned}$$

(3.52)

integrando em γ''' , obtemos

$$g(\gamma'', z) = \frac{g^2 m^2}{8\pi^2} \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^1 \frac{dv}{v} \frac{\theta(z-z') g\left(\frac{\gamma''(1-z')}{v(1-z)}, z'\right)}{\left[\frac{\gamma''(1-z')}{v(1-z)} + z'^2 m^2 + (1-z'^2) \kappa^2\right]} + [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z']. \quad (3.53)$$

Aplicando o Ansatz sugerido em (KARMANOV; CARBONELL, 2006) $g(\gamma'', z) = \delta(\gamma'') f(z)$ e integrando em γ'' , temos

$$\begin{aligned} \int d\gamma'' \delta(\gamma'') f(z) &= \int d\gamma'' \frac{g^2 m^2}{8\pi^2} \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^1 \frac{dv}{v} \delta\left(\frac{\gamma''(1-z')}{v(1-z)}\right) \times \\ &\times \frac{\theta(z-z') f(z')}{\left[\frac{\gamma''(1-z')}{v(1-z)} + z'^2 m^2 + (1-z'^2)\right]} + [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z']. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Fazendo outra mudança de variável $\gamma = \frac{\gamma''(1-z')}{v(1-z)}$, podemos escrever

$$f(z) = \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^1 dv \frac{(1-z)}{(1-z')} \frac{g^2 m^2}{8\pi^2} \frac{\theta(z-z') f(z')}{m^2 - \frac{M^2}{4}(1-z'^2)} + [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z'] \quad (3.56)$$

De forma geral, a solução fica

$$f(z) = \frac{g^2}{32\pi^2} \int_{-1}^{+1} dz' \bar{V}(z, z') f(z') \quad (3.57)$$

com

$$\begin{aligned} \bar{V}(z, z') &= \frac{1}{m^2 - \frac{1}{4}(1-z'^2)M^2} \times \\ &\times \begin{cases} \frac{(1-z)}{(1-z')}, & \text{se } -1 < z' < z < 1 \\ \frac{(1+z)}{(1+z')}, & \text{se } -1 < z < z' < 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.58)$$

que é uma equação integral de uma única variável. Isso foi possível pela escolha adequada do Ansatz $g(z, \gamma) = \delta(\gamma)f(z)$. Na próxima seção mostraremos uma maneira alternativa de resolver a equação de BS utilizando a conjectura da unicidade da função peso de Nakanishi.

3.4.1 Autovalores da equação no modelo de Wick-Cutkosky com unicidade

É necessário uma análise prévia da solução do modelo de Wick-Cutkosky, pois existe uma função delta presente no kernel da equação (3.49), que potencialmente dificultaria a utilização do método numérico estabelecido para a solução da equação completa. A equação resultante do modelo de Wick-Cutkosky para bósons é

$$g(\gamma'', z) = \frac{g^2}{32\pi^2} \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz' W(\gamma'', z; \gamma', z') g(\gamma', z') + [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z'] \quad (3.59)$$

com:

$$W(\gamma'', z; \gamma', z') = \int_0^1 dv \frac{\theta(z - z') \delta(\gamma'' - \frac{v\gamma'(1-z)}{(1-z')}) (1-z)}{[\gamma' + m^2 z'^2 + (1-z'^2)\kappa^2] (1-z')} \quad (3.60)$$

Foi feita a mudança de variável γ'' para γ . Aplicando a base estabelecida

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}^i G_m(z) L_n(\gamma) &= \frac{g^2}{32\pi^2} \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz' W(\gamma, z; \gamma', z') \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}^i G_m(z') L_n(\gamma') \\ &+ [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z'] \end{aligned} \quad (3.61)$$

Acrescentando integrais em γ e z em ambos os lados da equação, além de funções de Laguerre e Gegenbauer, teremos:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}^i \int_0^\infty d\gamma \int_{-1}^{+1} dz G_{m'}(z) G_m(z) L_{n'}(\gamma) L_n(\gamma) &= \frac{g^2}{32\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}^i \times \\ \times \int_0^\infty d\gamma \int_{-1}^{+1} dz \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz' W(\gamma, z; \gamma', z') G_{m'}(z) G_m(z') L_{n'}(\gamma) L_n(\gamma') &+ [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z'] \end{aligned} \quad (3.62)$$

utilizando as relações de ortogonalidade:

$$\begin{aligned}
 A_{m'n'}^i &= \frac{g^2}{32\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}^i \int_{-1}^{+1} dz \int_0^{\infty} d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz' G_{m'}(z) G_m(z') L_n(\gamma') \int_0^{\infty} d\gamma L_{n'}(\gamma) W(\gamma, z; \gamma', z') \\
 &+ [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z']
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

Integrando em γ :

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\infty} d\gamma L_{n'}(\gamma) W(\gamma, z; \gamma', z') = \\
 &= \int_0^1 dv \frac{(1-z)}{(1-z')} \frac{\theta(z-z')}{[\gamma' + m^2 z'^2 + (1-z'^2)\kappa^2]} \int_0^{\infty} d\gamma L_{n'}(\gamma) \delta\left(\gamma - \frac{v\gamma'(1-z)}{(1-z')}\right) \\
 &= \int_0^1 dv \frac{(1-z)}{(1-z')} \frac{\theta(z-z')}{[\gamma' + m^2 z'^2 + (1-z'^2)\kappa^2]} L_{n'}\left(\frac{v\gamma'(1-z)}{(1-z')}\right) \\
 &= \int_0^1 dv \frac{(1-z)}{(1-z')} \frac{\theta(z-z')}{[\gamma' + m^2 z'^2 + (1-z'^2)\kappa^2]} L_{n'}(\bar{\gamma})
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\bar{\gamma} = \frac{v\gamma'(1-z)}{(1-z')} \tag{3.65}$$

Sendo assim:

$$\begin{aligned}
 A_{m'n'}^i &= \frac{g^2}{32\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}^i \int_0^{\infty} d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^1 dv \bar{W}(\gamma, z; \gamma', z') G_{m'}(z) G_m(z') L_n(\gamma') L_{n'}(\bar{\gamma}) \\
 &+ [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z']
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

onde:

$$\bar{W}(\gamma, z; \gamma', z') = \frac{(1-z)}{(1-z')} \frac{\theta(z-z')}{[\gamma' + m^2 z'^2 + (1-z'^2)\kappa^2]}. \tag{3.67}$$

Assim a equação resultante não possui mais uma delta de Dirac em seu kernel e pode ser integrada numericamente.

Calculamos os autovalores (g^2) com energia de ligação ($B=0.50$ m) para o estado ligado de dois bósons interagindo pela troca de uma partícula escalar no modelo de Wick-Cutkosky. Para a equação de BS completa (3.42), utilizando uma base com seis

polinômios de Gegenbauer e seis polinômios de Laguerre, obtivemos a constante de acoplamento g^2 de 170,4. Por outro lado, com essa mesma base, resolvemos a equação de BS com unicidade e obtivemos a constante de acoplamento g^2 de 170,6. Isso sugere que a conjectura da unicidade pode ser utilizada para esse sistema.

4 Estado ligado de Férmions no espaço de Minkowski

4.1 Introdução

A rotação de Wick (WICK, 1954) foi durante muito tempo a principal alternativa para resolver o problema da presença de pólos nos propagadores relativísticos na equação de BS no espaço de Minkowski. Em estudos recentes, a representação integral de Nakanishi permitiu resolver a equação de BS no espaço físico e vem sendo cada vez mais utilizada (FREDERICO *et al.*, 2014). A solução da equação de BS no espaço de Minkowski proporciona que sejam calculados observáveis relacionados a estrutura dos hádrons, o que não é possível a partir de soluções no espaço Euclidiano.

Nesse capítulo resolveremos a equação de Bethe-Salpeter, que descreve o estado ligado de dois férmions, adotando a estrutura do vértice presente em (CARBONELL; KARMANOV, 2010), que introduz uma escala Λ . A interação entre as partículas será pela troca de um bóson vetorial com massa, adotando o limite de máxima energia de ligação para o estado ligado. Será ainda discutida a convergência dos autovalores da equação integral quando adotados valores elevados de Λ . A conjectura da unicidade será aplicada no sistema com Λ finito e para o limite $\Lambda \rightarrow \infty$. Mostraremos que nesse limite (vértice pontual) esse modelo é instável. Além da máxima energia de ligação para o sistema, a unicidade será explorada adotando o modelo de Wick-Cutkosky, onde a massa do bóson interagente é nula. Ainda nesse capítulo, trataremos da transformação de Stieltjes para o sistema fermiônico, onde faremos uma comparação desse método com a conjectura da unicidade. Na solução da equação de BS para férmions também foi utilizada a projeção na frente de luz.

A decomposição da amplitude de BS em uma base ortogonal, escrita em termos das matrizes de Dirac, fornece um acoplamento da equação de BS em termos de dezesseis coeficientes dependentes dos momentos das partículas do sistema. Estamos interessados em estudar o limite de máxima energia de ligação desse sistema ($B=2m$). Nesse caso, mostraremos que o sistema de equações desacopla e resolveremos apenas para a

função peso de Nakanishi g_1 .

4.2 Sistema fermiônico com fator de forma

A amplitude de Bethe-Salpeter é descrita em termos pela equação (2.19), onde p e k estão relacionados aos momentos das partículas (k_1 e k_2).

$$p = k_1 + k_2; \quad (4.1)$$

$$k = \frac{(k_1 - k_2)}{2}; \quad (4.2)$$

$$k' = \frac{(k'_1 - k'_2)}{2}. \quad (4.3)$$

Sendo assim a equação de BS é descrita no seguinte formato

$$\Phi(k, p) = S(k_1) \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \Gamma_1 K(k, k') \Gamma_2 S(-k_2), \quad (4.4)$$

onde S 's representam os propagadores das partículas e Γ as estruturas dos vértices no diagrama (figura 3.1). O propagador fermiônico é:

$$S(k'_\alpha) = \frac{i(k'_\alpha + m)}{k'^2_\alpha - m^2 + i\epsilon}. \quad (4.5)$$

O acoplamento depende do tipo de bóson que está sendo trocado

- $\Gamma_\alpha = ig$ (escalar);
- $\Gamma_\alpha = -g\gamma_5$ (pseudoescalar);
- $\Gamma_\alpha = ig\gamma^\mu$ (vetor).

Para descrever uma estrutura no vértice de interação, é introduzido um fator de forma (CARBONELL; KARMANOV, 2010), tal que

$$g \rightarrow g F(k - k'),$$

com

$$F(k - k') = \frac{\mu^2 - \Lambda^2}{(k - k')^2 - \Lambda^2 + i\epsilon}. \quad (4.6)$$

O propagador do bóson escalar trocado é descrito por

$$K = \frac{1}{(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon'}, \quad (4.7)$$

onde μ é a massa do bóson trocado.

Substituindo os propagadores e acoplamentos na equação

$$\Phi(k, p) = \frac{i(m + \frac{p}{2} + \not{k})}{(\frac{p}{2} + k)^2 - m^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \Phi(k', p) \frac{(ig^2)F^2(k - k')}{(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon} \frac{i(m - \frac{p}{2} + \not{k})}{(\frac{p}{2} - k)^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (4.8)$$

Essa é a equação de Bethe-Salpeter para dois férmions trocando bósons escalares com massa μ . Será agora determinada uma base adequada para o cálculo, que permita a simplificação da equação. Assumiremos então a base para a amplitude como (CARBONELL; KARMANOV, 2010)

$$\Phi(k, p) = S_1\phi_1 + S_2\phi_2 + S_3\phi_3 + S_4\phi_4, \quad (4.9)$$

onde

$$\begin{aligned} S_1 &= \gamma_5; \\ S_2 &= \frac{\not{p}}{M}\gamma_5; \\ S_3 &= \frac{k \cdot p}{M^3}\not{p}\gamma_5 - \frac{1}{M}\not{k}\gamma_5; \\ S_4 &= \frac{i}{M^2}\sigma_{\mu\nu}p_\mu k_\nu \gamma_5. \end{aligned}$$

onde

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu). \quad (4.10)$$

Essa base é ortogonal. A seguir apresentaremos o cálculo de alguns traços como ilustração:

$$Tr(S_2 \cdot S_1) = Tr\left(\frac{p^\mu}{M}\gamma^\mu\gamma^5\gamma^5\right) = \frac{p^\mu}{M}Tr(\gamma_\mu) = 0 \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}
 Tr(S_3 \cdot S_2) &= Tr\left[\left(\frac{k \cdot p}{M^3} \not{p} \gamma^5 - \frac{1}{M} k \gamma^5\right) \left(\frac{\not{p}}{M} \gamma^5\right)\right] = \frac{k \cdot p}{M^4} Tr[\not{p} \gamma^5 \not{p} \gamma^5] - \frac{1}{M^2} Tr[k \gamma^5 \not{p} \gamma^5] = \\
 &= -\frac{k \cdot p}{M^4} Tr[\not{p} \not{p}] + \frac{1}{M^2} Tr[k \not{p}] = -\frac{k \cdot p}{M^4} 4p^2 + \frac{1}{M^2} 4k \cdot p = 0
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$Tr(S_3 \cdot S_1) = Tr\left[\left(\frac{k \cdot p}{M^3} \not{p} \gamma^5 - \frac{1}{M} k \gamma^5\right) \gamma^5\right] = \frac{k \cdot p}{M^3} Tr(\not{p}) - \frac{1}{M} Tr(k) = 0 \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
 Tr(S_4 \cdot S_2) &= Tr\left[\frac{i}{M^2} \sigma_{\mu\nu} p_\mu k_\nu \gamma^5 \frac{\not{p}}{M} \gamma^5\right] = -\frac{i}{M^3} p_\mu k_\nu Tr[\sigma_{\mu\nu} \not{p}] = \\
 &= \frac{i}{M^3} p_\mu k_\nu Tr[\gamma_\mu \gamma_\nu \not{p}] - \frac{i}{M^3} p_\mu k_\nu Tr[\gamma_\nu \gamma_\mu \not{p}] = 0
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Ao substituírmos a descrição da amplitude de BS na equação (4.8), utilizando a base estabelecida, o tratamento do lado esquerdo (L.H.S.) segue pela multiplicação por S_a (elemento da base) e aplicação do traço

$$\begin{aligned}
 Tr[S_a \cdot L.H.S.] &= Tr\left[S_a \sum_{i=1}^4 S_i \phi_i\right], \\
 &= Tr\left[\sum_{i=1}^4 (S_a S_i) \phi_i\right], \\
 &= \sum_{i=1}^4 \phi_i Tr[S_a S_i], \\
 &= \sum_{i=1}^4 \phi_i \delta_{ai} N_i, \\
 Tr[S_a \cdot L.H.S.] &= N_a \phi_a,
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

onde

$$N_a = Tr[S_a^2]. \tag{4.16}$$

Faremos a mesma manipulação no lado direito da equação (R.H.S.), aplicando o traço e multiplicando por um elemento da base. É importante notar que o cálculo do traço é afetado somente pelos termos que contém matrizes de Dirac. Dessa forma, sendo o R.H.S. descrito como

$$\begin{aligned}
 R.H.S. &= \frac{i}{(\frac{p}{2} + k)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(\frac{p}{2} - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{(-ig^2)F^2(k - k')}{(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon} \times \\
 &\times \left(m + \frac{\not{p}}{2} + \not{k}\right) \left(m - \frac{\not{p}}{2} + \not{k}\right) \phi(k', p).
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Definiremos A como a junção dos termos presentes no R.H.S. relevantes na aplicação do traço,

$$A = \left(m + \frac{\not{p}}{2} + \not{k}\right) \left(m - \frac{\not{p}}{2} + \not{k}\right) \phi(k', p). \tag{4.19}$$

Multiplicando A por S_a e tirando o traço, teremos

$$\begin{aligned}
 Tr[S_a \cdot A] &= Tr\left[S_a \left(m + \frac{\not{p}}{2} + \not{k}\right) \left(m - \frac{\not{p}}{2} + \not{k}\right) \sum_{a'=1}^4 S_{a'} \phi_{a'}\right], \\
 &= Tr\left[\left(m + \frac{\not{p}}{2} + \not{k}\right) \left(m - \frac{\not{p}}{2} + \not{k}\right) \sum_{a'=1}^4 (S_a S_{a'}) \phi_{a'}\right], \\
 &= Tr\left[\left(m + \frac{\not{p}}{2} + \not{k}\right) \left(m - \frac{\not{p}}{2} + \not{k}\right) S_a S_a\right] \sum_{a'=1}^4 \phi_{a'}, \\
 &= \sum_{a'=1}^4 c_{aa'} \phi_{a'} N_a,
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

onde

$$c_{aa'} \cdot N_a = Tr\left[\left(m + \frac{\not{p}}{2} + \not{k}\right) \left(m - \frac{\not{p}}{2} + \not{k}\right) S_a S_{a'}\right]. \tag{4.21}$$

Substituindo as conclusões das equações (4.15) e (4.20) na equação de Bethe-Salpeter (Eq. 4.8), teremos

$$\begin{aligned} \phi_a(k, p) &= \frac{i}{(\frac{p}{2} + k)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(\frac{p}{2} - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{(-ig^2)F^2(k - k')}{(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon} \times \\ &\times \sum_{a'=1}^4 c_{aa'}(k, k', p) \phi_{a'}(k', p), \end{aligned} \quad (4.22)$$

que é um conjunto de equações integrais acopladas pelos coeficientes $c_{aa'}$, que são descritos como

$$c_{aa'} = \frac{1}{N_a} \text{Tr} \left[S_a \left(\frac{\not{p}}{2} + \not{k} + m \right) \Gamma_1 S_{a'} \bar{\Gamma}_2 \left(\frac{\not{p}}{2} - \not{k} - m \right) \right]. \quad (4.23)$$

A diferença no tratamento do acoplamento vetorial e escalar está na estrutura do vértice. Embora esse trabalho tenha por objetivo estudar o acoplamento vetorial, o cálculo se iniciou pelo acoplamento escalar. A correspondência entre os coeficientes $c_{aa'}$ do caso escalar e vetorial foi obtida em (CARBONELL; KARMANOV, 2010) e será discutida a seguir.

Para o acoplamento escalar, como ilustração, temos:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{1}{\text{Tr}[S_1]^2} \text{Tr} \left[S_1 \left(\frac{\not{p}}{2} + \not{k} + m \right) S_1 \left(\frac{\not{p}}{2} - \not{k} - m \right) \right] = \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\gamma_5 \left(\frac{\not{p}}{2} + \not{k} + m \right) \gamma_5 \left(\frac{\not{p}}{2} - \not{k} - m \right) \right] = \\ &= \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\gamma_5 \frac{M^2}{4} \gamma_5 \right] - \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\gamma_5 4k \cdot p \gamma_5 \right] + \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\gamma_5 4k \cdot p \gamma_5 \right] - \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\gamma_5 k^2 \gamma_5 \right] + 4 \frac{m^2}{4} \\ &= m^2 + \frac{M^2}{4} - k^2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} c_{12} &= \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\gamma_5 \left(\frac{\not{p}}{2} + \not{k} + m \right) \frac{1}{M} \not{p} \gamma_5 \left(\frac{\not{p}}{2} - \not{k} - m \right) \right] \\ &= -\frac{1}{4} \text{Tr} \left[\gamma_5 \left(\frac{\not{p}}{2} - \not{k} \right) \frac{1}{M} \not{p} \gamma_5 m \right] + \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\gamma_5 m \frac{1}{M} \not{p} \gamma_5 \left(\frac{\not{p}}{2} - \not{k} \right) \right] \\ &= mM \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} c_{13} &= \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\gamma_5 \left(\frac{\not{p}}{2} + \not{k} + m \right) \left(\frac{k \cdot p}{M^3} \not{p} \gamma_5 - \frac{1}{M} \not{k} \gamma_5 \right) \left(\frac{\not{p}}{2} - \not{k} - m \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{k \cdot p}{M^3} m \text{Tr} \left[\left(\frac{\not{p}}{2} + \not{k} \right) \not{p} \right] - \frac{m}{M} \text{Tr} \left[\left(\frac{\not{p}}{2} + \not{k} \right) \not{k} \right] \right] \\ &= \frac{k \cdot p}{2} \frac{m}{M} + (k \cdot p)^2 \frac{m}{M^3} - \frac{k \cdot p}{2} \frac{m}{M} - k^2 \frac{m}{M} = k^2 M^2 \frac{m}{M^3} - k^2 \frac{m}{M} = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned}
 c_{14} &= \frac{1}{4} \text{Tr}[\gamma_5(\not{p} + \not{k} + m) \frac{i}{M^2} \sigma_{\mu\nu} p'_\mu k'_\nu \gamma_5(\not{p} - \not{k} - m)] \\
 &= \frac{1}{4} \left[\frac{i}{M^2} p'_\mu k'_\nu \text{Tr}[\gamma_5(\not{p} + \not{k}) \sigma_{\mu\nu} \gamma_5(\not{p} - \not{k})] - \frac{i}{M^2} p'_\mu k'_\nu m^2 \text{Tr}[\gamma_5 \sigma_{\mu\nu} \gamma_5] \right] \\
 &= -\frac{1}{M^2} [(p.k)(p.k') - M^2(k.k')] \tag{4.27}
 \end{aligned}$$

A relação entre os coeficientes $c_{aa'}$ do acoplamento escalar para o acoplamento vetorial segue a seguinte relação:

$$c_{aa'}^V = \xi_{aa'} c_{aa'}^S \tag{4.28}$$

onde:

$$\xi_{aa'} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

ou seja, os coeficientes que possuem índice a=1 no acoplamento vetorial são:

$$c_{11} = 4 \left[m^2 + \frac{1}{4} M^2 - k^2 \right] \tag{4.30}$$

$$c_{12} = -2mM \tag{4.31}$$

$$c_{13} = c_{14} = 0 \tag{4.32}$$

Sendo assim, a equação de Bethe-Salpeter para a componente 1 é

$$\begin{aligned}
 \phi_1(k, p) &= \frac{g^2}{[(\frac{p}{2} + k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \frac{i}{[(\frac{p}{2} - k)^2 - m^2 + i\epsilon]} (\mu^2 - \Lambda^2)^2 [c_{11}\phi_1 + c_{12}\phi_2] \times \\
 &\times \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k - k')^2 - \Lambda^2 + i\epsilon]^2} \frac{1}{(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon} \tag{4.33}
 \end{aligned}$$

Utilizando a representação de Nakanishi descrita no capítulo (2.4.1)

$$\phi_i(k, p) = \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty \frac{d\gamma' g_i(\gamma', z')}{[k^2 + p.kz' + \frac{M^2}{4} - m^2 - \gamma' + i\epsilon]^3} \tag{4.34}$$

reescrevemos a equação de BS como

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^{\infty} d\gamma' \frac{g_1(\gamma', z')}{[k^2 + p \cdot kz' + \frac{M^2}{4} - m^2 - \gamma' + i\epsilon]^3} = \frac{g^2}{[(\frac{p}{2} + k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \times \\
 & \times \frac{i}{[(\frac{p}{2} - k)^2 - m^2 + i\epsilon]} (\mu^2 - \Lambda^2)^2 \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k - k')^2 - \Lambda^2 + i\epsilon]^2} \frac{1}{(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon} \times \\
 & \times \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^{\infty} d\gamma' \frac{[c_{11}g_1(\gamma', z') + c_{12}g_2(\gamma', z')]}{[k'^2 + p \cdot k' z' + \frac{M^2}{4} - m^2 - \gamma' + i\epsilon]^3}. \tag{4.35}
 \end{aligned}$$

Substituindo $\kappa^2 = m^2 - \frac{M^2}{4}$, teremos o lado esquerdo da equação (L.H.S),

$$L.H.S. = \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^{\infty} d\gamma' \frac{g_1(\gamma', z')}{[k^2 + p \cdot kz' - \kappa^2 - \gamma' + i\epsilon]^3}. \tag{4.36}$$

Sendo $\Phi(k, p)$ a amplitude de Bethe-Salpeter descrita em termos da base estabelecida como $\Phi(k, p) = \sum \phi_i S_i$, onde ϕ_i é uma amplitude, definimos uma projeção dessa amplitude na frente de luz

$$\psi_i(\gamma, z) = \int \frac{dk^-}{2\pi} \phi_i(k, p), \tag{4.37}$$

onde se pode escrever os produtos escalares, utilizando as variáveis de frente de luz e as definições de variáveis descritas para o sistema bosônico, como

$$\begin{aligned}
 k^2 &= \frac{-Mz}{2} k^- - \gamma, \\
 k \cdot p &= \frac{M}{2} (k^- - \frac{Mz}{2}). \tag{4.38}
 \end{aligned}$$

Sendo assim, a projeção na frente de luz do L.H.S. é

$$L.H.S. = \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^{\infty} d\gamma' \int \frac{dk^-}{2\pi} \frac{g_1(\gamma', z')}{[k^- (-\frac{Mz}{2} + \frac{Mz'}{2}) - \gamma - \frac{z'M^2z}{4} - \gamma' - \kappa^2 + i\epsilon]^3}. \tag{4.39}$$

Utilizando a relação (CHANG *et al.*, 1973)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^-}{2\pi} \frac{1}{(xk^- - y + i\epsilon)^3} = -\frac{i\delta(x)}{2y^2}, \tag{4.40}$$

a equação se torna

$$L.H.S. = -\frac{i}{2} \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^{\infty} d\gamma' g_1(\gamma', z') \frac{\delta(-\frac{Mz}{2} + \frac{Mz'}{2})}{(\gamma + \frac{z'M^2z}{4} + \gamma' + \kappa^2)^2}. \quad (4.41)$$

Reescrevendo a função delta como $\delta(\frac{Mz'}{2} - \frac{Mz}{2}) = 2\frac{\delta(z'-z)}{M}$, o L.H.S. fica

$$L.H.S. = -\frac{i}{M} \int_0^{\infty} d\gamma' \frac{g_1(\gamma', z)}{[\gamma + \gamma' + m^2z^2 + (1-z^2)\kappa^2]^2}. \quad (4.42)$$

4.2.1 Integração quadridimensional

Faremos agora no lado direito da equação (4.35) (R.H.S.) a integração do quadrimomento. Para isso, definimos

$$A = \frac{1}{(k-k')^2 - \mu^2 + i\epsilon} \frac{1}{[(k-k')^2 - \Lambda^2 + i\epsilon]^2} \frac{1}{[k'^2 + p.k'z' + \frac{M^2}{4} - m^2 - \gamma' + i\epsilon]^3}, \quad (4.43)$$

onde podemos utilizar a parametrização de Feynman para simplificá-la. Seja a parametrização de três frações representada por

$$\frac{1}{X^m Y^n Z^l} = \frac{\Gamma(m+n+l)}{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(l)} \int_0^1 dv \int_0^1 d\alpha \frac{v^{m-1} \alpha^{n-1} (1-\alpha-v)^{l-1} \theta(1-v-\alpha)}{[Xv + Y\alpha + Z(1-\alpha-v)]^{m+n+l}}, \quad (4.44)$$

podemos identificar as variáveis X, Y e Z em A

$$\begin{aligned} X &= k'^2 + z'p.k' - \gamma' - \kappa^2 + i\epsilon; \\ Y &= (k-k')^2 - \Lambda^2 + i\epsilon; \\ Z &= (k-k')^2 - \mu^2 + i\epsilon. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Dessa forma, A será reescrito como

$$A = 60 \int_0^1 dv \int_0^1 d\alpha \frac{v^2 \alpha \theta(1-v-\alpha)}{[v(k'^2 + z'p.k' - \gamma' - \kappa^2) + \alpha(\mu^2 - \Lambda^2) + (1-v)[(k-k')^2 - \mu^2] + i\epsilon]^6}. \quad (4.46)$$

Substituindo na equação (4.35), obtemos

$$\begin{aligned}
 R.H.S. &= \frac{g^2(\mu^2 - \Lambda^2)^2}{[(\frac{p}{2} + k)^2 - m^2 + i\epsilon] [(\frac{p}{2} - k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{-1}^{+1} dz' \int d\gamma' \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \\
 &60 \int_0^1 dv \int_0^1 d\alpha \frac{v^2 \alpha \theta(1 - v - \alpha) [c_{11} g_1(\gamma', z') + c_{12} g_2(\gamma', z')]}{[v(k'^2 + z'p \cdot k' - \gamma' - \kappa^2) + \alpha(\mu^2 - \Lambda^2) + (1 - v)[(k - k')^2 - \mu^2] + i\epsilon]^6}.
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Para resolver a integral quadrimensional, é conveniente definir

$$B = \int \frac{d^4k'}{[v(k'^2 + z'p \cdot k' - \gamma' - \kappa^2) + \alpha(\mu^2 - \Lambda^2) + (1 - v)[(k - k')^2 - \mu^2] + i\epsilon]^6}. \tag{4.48}$$

Agrupando os termos proporcionais à k' , temos

$$\begin{aligned}
 B &= \int d^4k' \times \\
 &\frac{1}{[(k' - (1 - v)k - z'v\frac{p}{2})^2 - ((1 - v)k - z'v\frac{p}{2})^2 - v(\gamma' + \kappa^2) + \alpha(\mu^2 - \Lambda^2) + (1 - v)(k^2 - \mu^2) + i\epsilon]^6}.
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Fazendo uma mudança de variável

$$Q = k' - (1 - v)k + z'v\frac{p}{2}; \tag{4.50}$$

$$b = -[(1 - v)k - z'v\frac{p}{2}]^2 - v(\gamma' + \kappa^2) + \alpha(\mu^2 - \Lambda^2) + (1 - v)(k^2 - \mu^2); \tag{4.51}$$

podemos resolver a integral (4.49) usando a seguinte relação

$$\int \frac{d^4Q}{(Q^2 + b + i\epsilon)^n} = i\pi^2 \frac{1}{n-1} \frac{1}{n-2} \frac{1}{b^{n-2}}, \tag{4.52}$$

ou seja,

$$B = \frac{i\pi^2}{20} \frac{1}{[-[(1 - v)k - z'v\frac{p}{2}]^2 - v(\gamma' + \kappa^2) + \alpha(\mu^2 - \Lambda^2) + (1 - v)(k^2 - \mu^2) + i\epsilon]^4}. \tag{4.53}$$

Substituindo a solução da integral do quadrimento no R.H.S. (Eq. 4.47), temos

$$\begin{aligned}
 R.H.S. &= \frac{g^2(\mu^2 - \Lambda^2)^2}{[(\frac{p}{2} + k)^2 - m^2 + i\epsilon][(\frac{p}{2} - k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \frac{i}{\int_{-1}^{+1} dz' \int d\gamma'} \times \\
 \times \frac{3i\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dv \int_0^{1-v} \frac{d\alpha v^2 \alpha [c_{11}g_1(\gamma', z') + c_{12}g_2(\gamma', z')]}{[-[(1-v)k - z'v\frac{p}{2}]^2 - v(\gamma' + \kappa^2) + \alpha(\mu^2 - \Lambda^2) + (1-v)(k^2 - \mu^2) + i\epsilon]^4}.
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Novamente, definiremos C procurando integrar a equação no parâmetro α

$$C = 3i\pi^2 \int_0^1 dv \int_0^{1-v} \frac{d\alpha v^2 \alpha}{[-[(1-v)k - z'v\frac{p}{2}]^2 - v(\gamma' + \kappa^2) + \alpha(\mu^2 - \Lambda^2) + (1-v)(k^2 - \mu^2) + i\epsilon]^4}. \tag{4.55}$$

Substituiremos as variáveis da frente de luz, descritas no capítulo (2.4.2), definidas como

$$\begin{aligned}
 k^2 &= -\frac{Mz}{2}k^- - \gamma, \\
 k \cdot p &= \frac{M}{2} \left(k^- - \frac{Mz}{2} \right),
 \end{aligned}$$

para que C seja descrito em termos de

$$C = 3i\pi^2 \int_0^1 dv \int_0^{1-v} \frac{d\alpha v^2 \alpha}{[G(v, k, \gamma'; \kappa^2, \mu^2) + \alpha(\mu^2 - \Lambda^2) + i\epsilon]^4}, \tag{4.56}$$

com

$$G(v, k, z, \gamma'; \kappa^2, \mu^2) = M k^- k_D^+ + l_D \tag{4.57}$$

e

$$k_D^+ = v(1-v)\frac{1}{2}(z' - z), \tag{4.58}$$

$$l_D = -v(1-v)\left(\gamma + zz'\frac{M^2}{4} - z'^2\frac{M^2}{4}\right) - v(\gamma' + z'^2m^2 + (1-z'^2)\kappa^2) - (1-v)\mu^2. \tag{4.59}$$

Após a integração no parâmetro α , temos

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{i\pi^2}{2} \int_0^1 dv v^2(1-v)^2 \times \\
 &\times \left[\frac{3G(v, k, z, \gamma'; \kappa^2, \mu^2) + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)}{[G(v, k, z, \gamma'; \kappa^2, \mu^2) + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2) + i\epsilon]^3 [G(v, k, z, \gamma'; \kappa^2, \mu^2) + i\epsilon]^2} \right] \quad (4.60)
 \end{aligned}$$

Sendo assim, podemos projetar a equação de BS na frente de luz, integrando em dk^- . Dessa forma, o R.H.S. da equação fica

$$\begin{aligned}
 R.H.S. &= \frac{-4g^2}{(2\pi)^4} \frac{\pi^2}{2M^2} (\mu^2 - \Lambda^2)^2 \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \int_0^1 dv v^2(1-v)^2 \int \frac{dk^-}{2\pi} \times \\
 &\times \frac{1}{[(1-z)k^- + (1-z)\frac{M}{2} - \frac{2}{M}(\gamma + m^2) + i\epsilon] [(1+z)k^- - (1+z)\frac{M}{2} + \frac{2}{M}(\gamma + m^2) - i\epsilon]} \times \\
 &\times \frac{1}{M^5} \left[\frac{3(M k_D^+ k^- + l_D) + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)}{[k_D^+ k^- + \frac{l_D + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)}{M} + i\epsilon]^3 [k_D^+ k^- + \frac{l_D}{M} + i\epsilon]^2} \right] \quad (4.61)
 \end{aligned}$$

Para resolvermos essa equação integral, iremos utilizar o método de Cauchy. Para isso, é importante verificar a potência em k^- (n) no numerador, pois para fecharmos o contorno da integração no plano complexo é necessário que o integrando não divirja.

No caso de interesse desse trabalho, os coeficientes c_{11} e c_{12} possuem potências de até um em k^- . Assim, ambos os termos não possuem contribuição singular para $k_D^+ = 0$. Sendo assim, faremos a análise para $k_D^+ > 0$ e $k_D^+ < 0$, nas quais a integração de Cauchy pode ser realizada.

4.2.2 Projeção na frente de luz

Para projetar na frente de luz devemos efetuar uma integração no plano complexo. Os termos de interesse desse trabalho podem ser escritos como:

$$\begin{aligned}
 R_n &= \int \frac{dk^-}{2\pi} \frac{(k^-)^n}{[(1-z)k^- + (1-z)\frac{M}{2} - \frac{2}{M}(\gamma + m^2) + i\epsilon] [(1+z)k^- - (1+z)\frac{M}{2} + \frac{2}{M}(\gamma + m^2) - i\epsilon]} \times \\
 &\times \frac{1}{[k_D^+ k^- + \frac{l_D + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)}{M} + i\epsilon]^3 [k_D^+ k^- + \frac{l_D}{M} + i\epsilon]^2}, \quad (4.62)
 \end{aligned}$$

onde a potência de k^- possui valores de 0 e 1. Definindo as variáveis

$$k_u^- = \frac{M}{2} - \frac{2}{M(1+z)}(\gamma + m^2) \quad (4.63)$$

$$k_d = -\frac{M}{2} + \frac{2}{M(1-z)}(\gamma + m^2), \quad (4.64)$$

Podemos reescrever R como

$$\begin{aligned} R_n &= \int \frac{dk^-}{2\pi} \frac{(k^-)^n}{[(1-z)k^- + (1-z)k_u^- + i\epsilon][(1+z)k^- - (1+z)k_d^- - i\epsilon]} \times \\ &\times \frac{1}{[k_D^+ k^- + \frac{l_D + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)}{M} + i\epsilon]^3 [k_D^+ k^- + \frac{l_D}{M} + i\epsilon]^2}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Para os valores de n estabelecidos, podemos “fechar” um arco no plano complexo e utilizar do teorema da integral de Cauchy para resolver a integração (ARFKEN, 2007). Para a condição de $k_D^+ > 0$, o resíduo está no polo k_u^- , dessa forma, a integração acontece no plano superior no espaço complexo. Sendo assim:

- $k_D^+ > 0$

$$R_n^+ = i\theta(k_D^+) \frac{M(k_u^-)^n}{4[\gamma + z^2 m^2 + (1-z^2)\kappa^2]} \frac{1}{[k_D^+ k_u^- + \frac{l_D + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)}{M} + i\epsilon]^3 [k_D^+ k_u^- + \frac{l_D}{M} + i\epsilon]^2} \quad (4.66)$$

onde:

$$\begin{aligned} k_D^+ k_u^- + \frac{l_D}{M} &= \left[v(1-v) \frac{M}{2} (z' - z) \left[\frac{M}{2} - \frac{2}{M(1+z)} (\gamma + m^2) \right] - v(1-v) \left[\gamma + \frac{z' M^2}{4} (z - z') \right] \right. \\ &\quad \left. - v \left[\gamma' + z'^2 m^2 + (1-z'^2)\kappa \right] - (1-v)\mu^2 \right] \frac{1}{M} \\ &= -\frac{1}{(1+z)} D(\gamma, z, \gamma', z', v) \frac{1}{M} \end{aligned} \quad (4.67)$$

com

$$\begin{aligned} D(\gamma, z, \gamma', z', v) &= v(1-v)(z' - z) \left[\gamma + z^2 m^2 + (1-z^2)\kappa^2 + (1+z)(z' + z)(\kappa^2 - m^2) \right] \\ &\quad + v(1-v)(1+z)\gamma + v(1+z) \left[\gamma' + z'^2 m^2 + (1-z'^2)\kappa^2 \right] + (1-v)(1+z)\mu^2 \end{aligned} \quad (4.68)$$

Dessa forma, a integração para $k_D^+ > 0$ tem solução igual a

$$R_n^+ = -i\theta(k_D^+)(1+z)^5\theta(1+z)\frac{M(k_u^-)^n}{4[\gamma+z^2m^2+(1-z^2)\kappa^2]}\frac{1}{\left[\frac{D(\gamma,z,\gamma',z',v)}{M}-\frac{(1-v)(1+z)(\mu^2-\Lambda^2)}{M}-i\epsilon(1+z)\right]^3\left[\frac{D(\gamma,z,\gamma',z',v)}{M}+i\epsilon(1+z)\right]^2}. \quad (4.69)$$

De maneira análoga, para $k_D^+ < 0$, o resíduo está no pólo em k_d^- , sendo assim, a integração por Cauchy é feita no plano inferior no espaço complexo. Dessa forma,

- $k_D^+ < 0$

$$R = i\theta(-k_D^+)\frac{M(k_d^-)^n}{4[\gamma+z^2m^2+(1-z^2)\kappa^2]}\frac{1}{[k_D^+k_d^-+\frac{l_D+(1-v)(\mu^2-\Lambda^2)}{M}+i\epsilon]^3[k_D^+k_d^-+\frac{l_D}{M}+i\epsilon]^2} \quad (4.70)$$

com:

$$\begin{aligned} k_D^+k_d^- + \frac{l_D}{M} &= \left(-v(1-v)\frac{M}{2}(z'-z)\left[\frac{M}{2}-\frac{2}{M(1-z)}(\gamma+m^2)\right]-v(1-v)\left[\gamma+\frac{z'M^2}{4}(z-z')\right]\right) \\ &\quad - v\left[\gamma'+z'^2m^2+(1-z'^2)\kappa^2\right] - (1-v)\mu^2 \Big) \frac{1}{M} \\ &= -\frac{1}{(1-z)}D(\gamma,-z,\gamma',-z',v)\frac{1}{M}, \end{aligned} \quad (4.71)$$

onde

$$\begin{aligned} D(\gamma,-z,\gamma',-z',v) &= v(1-v)(z-z')\left[\gamma+z^2m^2+(1-z^2)\kappa^2-(1-z)(z'+z)(\kappa^2-m^2)\right] \\ + v(1-v)(1-z)\gamma &+ v(1-z)[\gamma'+z'^2m^2+(1-z'^2)\kappa^2] + (1-v)(1-z)\mu^2. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Sendo assim, a integração para $k_D^+ < 0$ tem solução como

$$R_n^- = -i\theta(-k_D^+)(1-z)^5\theta(1-z)\frac{M(k_d^-)^n}{4[\gamma + z^2m^2 + (1-z^2)\kappa^2]} \frac{1}{\left[\frac{D(\gamma, -z, \gamma', -z', v)}{M} - \frac{(1-v)(1-z)(\mu^2 - \Lambda^2)}{M} - i\epsilon(1-z)\right]^3 \left[\frac{D(\gamma, -z, \gamma', -z', v)}{M} + i\epsilon(1-z)\right]^2}. \quad (4.73)$$

A solução para a integração da projeção na frente de luz (R) é descrita como

$$R_n = \frac{1}{4[\gamma + z^2m^2 + (1-z^2)\kappa^2]} \times \frac{-i\theta(k_D^+)(1+z)^5\theta(1+z)M^6(k_u^-)^n}{[D(\gamma, z, \gamma', z', v) - (1-v)(1+z)(\mu^2 - \Lambda^2) - i\epsilon(1+z)]^3 [D(\gamma, z, \gamma', z', v) + i\epsilon(1+z)]^2} + [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z']. \quad (4.74)$$

A partir dos resultados obtidos da integração quadridimensional e pela projeção na frente de luz, podemos escrever a equação (4.35), como

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty d\gamma' \frac{g_1(\gamma', z)}{[\gamma + \gamma' + m^2z^2 + (1-z^2)\kappa^2]^2} = \\ & = \frac{g^2}{32\pi^2}(\mu^2 - \Lambda^2)^2 \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \int_0^1 dv v^2(1-v)^2 \frac{1}{[\gamma + z^2m^2 + (1-z^2)\kappa^2]} \times \\ & \times \left[\theta(k_D^+) \frac{[3(M k_D^+ k_u^- + l_D) + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)]}{[k_D^+ k_u^- + l_D + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2) + i\epsilon]^3 [k_D^+ k_u^- + l_D + i\epsilon]^2} \right] \times \\ & \times \left[4 g_1(\gamma', z') \frac{1}{(1+z)} (\gamma + m^2 + \frac{M^2}{4}(1+z)^2) + g_2(\gamma', z') M m \right] + [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z'], \end{aligned} \quad (4.75)$$

que é uma equação integral que depende das autofunções peso de Nakanishi g_1 e g_2 . Para obter os autovalores e autofunções que descrevem o estado ligado fermiônico para uma dada energia de ligação B , devemos resolver simultaneamente um sistema de 4 equações integrais acopladas (Eq. 4.22) em termos das funções peso de Nakanishi g_1, g_2, g_3 e g_4 . Isso foi feito por (CARBONELL; KARMANOV, 2010), cuja estabilidade da solução numérica foi condicionada à utilização de uma função auxiliar. Posteriormente,

em (PAULA *et al.*, 2016) foi mostrado que a dificuldade de resolver esse sistema não era um problema numérico, como sugerido por (CARBONELL; KARMANOV, 2010), mas que há singularidades relacionadas a altas potências de k^- em alguns coeficientes $c_{aa'}$. Em (PAULA *et al.*, 2016) essas singularidades foram tratadas adequadamente e o sistema foi resolvido sem a utilização de funções auxiliares. Uma dificuldade em resolver esse sistema acoplado ocorre no limite de máxima energia de ligação, pois alguns termos do kernel divergem. Na próxima seção iremos discutir esse limite em mais detalhes.

4.3 Equação da unicidade do sistema com máxima energia de ligação ($B = 2m$)

Nessa seção iremos descrever um estado ligado com máxima energia de ligação ($B = 2m$). Esse limite é obtido quando a massa do estado ligado é nula ($M=0$). Nesse caso, a equação para $g_1(\gamma, z)$ é desacoplada. Esse resultado é bastante útil, pois os termos do kernel divergentes não aparecem na equação para g_1 , o que possibilita encontrarmos soluções para a equação de BS nesse limite. Dessa forma, obteremos nessa seção a equação de BS correspondente, para a função peso de Nakanishi g_1

No limite de máxima energia de ligação, a Eq. (4.75) é

$$\int_0^\infty d\gamma' \frac{g_1(\gamma', z)}{(\gamma' + \gamma + m^2)^2} = \frac{(\mu^2 - \Lambda^2)^2}{8\pi^2} g^2 \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^1 dv v^2 (1-v)^2 g_1(\gamma', z') \times$$

$$\times \left[\frac{\theta(k_D^+)}{(1+z)} \frac{[3D_2(\gamma, z; \gamma', z', v) + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)]}{[D_2(\gamma, z; \gamma', z', v) + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)]^3 [D_2(\gamma, z; \gamma', z', v)]^2} + [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z'] \right], \quad (4.76)$$

com

$$D_2(\gamma, z; \gamma', z', v) =$$

$$-\frac{v}{(1+z)} [m^2 + m^2 v z + m^2 z' (1-v) + (1-v)(1+z')\gamma + (1+z)\gamma' + (1-v)(1+z)\mu^2]. \quad (4.77)$$

Essa equação integral foi resolvida numericamente utilizando o método de expansão em base para diferentes fatores de forma(Λ). Os autovalores g^2 estão listados na Tabela 4.2. Por outro lado, essa equação integral pode ser simplificada analiticamente antes de

utilizarmos o método numérico. A ideia é utilizar convenientemente a parametrização de Feynman e propriedades da delta de Dirac para reescrever a equação integral de forma a utilizar a conjectura da unicidade da função peso de Nakanishi. No fim da seção, obteremos uma equação com uma integral a menos, o que, a princípio, simplifica o cálculo numérico.

Utilizando a parametrização de Feynman, podemos reescrever

$$\begin{aligned} & \frac{1}{[D_2(\gamma, z; \gamma', z', v) + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)]^3} \frac{1}{[D_2(\gamma, z; \gamma', z', v)]^2} = \\ & = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(3)\Gamma(2)} \int_0^1 d\xi \frac{\xi^2(1-\xi)}{[D_2(\gamma, z; \gamma', z', v) + \xi(1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)]^5}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

O objetivo é separar os termos proporcionais à γ . Determinando

$$\alpha_1 = -v(1-v) \frac{(1+z')}{(1+z)} \quad (4.79)$$

e

$$\alpha_0 = -\frac{v}{(1+z)} (m^2 + m^2 v z + m^2 z' (1-v) + (1+z)\gamma' + (1-v)(1+z)\mu^2), \quad (4.80)$$

podemos representar

$$D_2(\gamma, z; \gamma', z', v) = \alpha_0 + \alpha_1 \gamma. \quad (4.81)$$

Sendo assim, podemos definir

$$I = \frac{3\alpha_0 + 3\alpha_1 \gamma + (1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)}{[\alpha_0 + \alpha_1 \gamma + \xi(1-v)(\mu^2 - \Lambda^2)]^5}. \quad (4.82)$$

Também é necessário definir

$$\alpha_2 = \frac{3\alpha_0}{\alpha_1^5} + \frac{(1-v)}{\alpha_1^5} (\mu^2 - \Lambda^2) \quad (4.83)$$

e

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_0}{\alpha_1} + \frac{\xi(1-v)}{\alpha_1} (\mu^2 - \Lambda^2), \quad (4.84)$$

dessa forma podemos escrever I

$$I = \frac{\alpha_2}{(\alpha_3 + \gamma)^5} + \frac{3}{\alpha_1^4} \frac{\gamma}{(\alpha_3 + \gamma)^5}. \quad (4.85)$$

Aplicando a manipulação

$$\frac{\gamma}{(\alpha_3 + \gamma)^5} = \frac{1}{(\alpha_3 + \gamma)^4} - \frac{\alpha_3}{(\alpha_3 + \gamma)^5}, \quad (4.86)$$

podemos chegar a

$$I = \frac{\alpha_2}{(\alpha_3 + \gamma)^5} + \frac{3}{\alpha_1^4} \frac{1}{(\alpha_3 + \gamma)^4} - \frac{3}{\alpha_1^4} \frac{\alpha_3}{(\alpha_3 + \gamma)^5}. \quad (4.87)$$

Definindo ainda

$$\alpha_5 = \alpha_2 - \frac{3\alpha_3}{\alpha_1^4} \quad (4.88)$$

e

$$\alpha_4 = \frac{3}{\alpha_1^4} \quad (4.89)$$

chegamos a final conclusão

$$I = \frac{\alpha_4}{(\alpha_3 + \gamma)^4} + \frac{\alpha_5}{(\alpha_3 + \gamma)^5}. \quad (4.90)$$

Analisando as propriedades da função delta, percebemos que é possível representar a fração presente na equação das seguintes formas, dependendo da potência do denominador. Sendo assim

$$\frac{1}{(\gamma + \alpha)^2} = \int_0^\infty d\gamma'' \frac{\delta(\gamma'' - \alpha + m^2)}{(\gamma'' + \gamma + m^2)^2}, \quad (4.91)$$

pode ser derivada em α e resulta em

$$\frac{2}{(\gamma + \alpha)^3} = \int_0^\infty d\gamma'' \frac{\delta'(\gamma'' - \alpha + m^2)}{(\gamma'' + \gamma + m^2)^2}. \quad (4.92)$$

Percebe-se que a cada derivada feita na função delta, a potência do denominador da fração aumenta. Dessa forma, chegamos as relações que podem são úteis na equação

de I

$$\frac{6}{(\gamma + \alpha)^4} = \int_0^\infty d\gamma'' \frac{\delta''(\gamma'' - \alpha + m^2)}{(\gamma'' + \gamma + m^2)^2} \quad (4.93)$$

e

$$\frac{24}{(\gamma + \alpha)^5} = \int_0^\infty d\gamma'' \frac{\delta'''(\gamma'' - \alpha + m^2)}{(\gamma'' + \gamma + m^2)^2}. \quad (4.94)$$

A partir dessas relações reescrevemos I

$$I = \int_0^\infty d\gamma'' \frac{1}{(\gamma'' + \gamma + m^2)^2} \left[\alpha_4 \frac{\delta''(\gamma'' - \alpha_3 + m^2)}{6} + \alpha_5 \frac{\delta'''(\gamma'' - \alpha_3 + m^2)}{24} \right]. \quad (4.95)$$

Devido as alterações feitas em I, é possível a utilização da conjectura da unicidade definida na seção 2.5 (Eq. 2.21 e 2.22), onde agora a equação de BS se torna

$$g_1(\gamma'', z) = 3 \frac{(\mu^2 - \Lambda^2)^2}{2\pi^2} g^2 \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^1 dv v^2 (1-v)^2 g_1(\gamma', z') \frac{1}{(1+z)} \times \\ \left[\theta(k_D^+) \int_0^1 d\xi \xi^2 (1-\xi) \left(\frac{4}{6} \delta'(\gamma'' - \alpha_3 + m^2) + \frac{\alpha_5}{24} \delta'''(\gamma'' - \alpha_3 + m^2) \right) \right] + [z \rightarrow -z, z' \rightarrow -z']. \quad (4.96)$$

Dessa forma, obtivemos uma equação sem integral no L.H.S. O próximo passo é achar os autovalores numericamente, o que faremos em uma continuação desse trabalho.

4.3.1 Autovalores da equação completa no limite de máxima energia de ligação

Nessa seção apresentaremos os resultados dos autovalores g^2 para a equação de BS completa no limite de máxima energia de ligação (Eq. 4.76). Utilizamos o método de expansão em base descrito no capítulo 3.

Inicialmente, estudaremos a convergência da solução em termos da base utilizada, onde (Nz) é o número de polinômios de Gegenbauer e $N\gamma$ o número de polinômios de Laguerre. A figura 4.1 mostra que aumentando a base tem-se uma variação no autovalor, porém a partir de $Nz=N\gamma=6$, os autovalores convergem. Na tabela 4.1 estão

listados os valores correspondentes à figura 4.1.

TABELA 4.1 – Tabela dos autovalores em função do número de polinômios na base estabelecida, com energia de ligação igual a $2m$, $\Lambda = 2m$ e $\mu = 0$

N_z, N_γ	4	16	36	64	100	144	196	256	324	400
g^2	73,15	69,73	68,67	68,36	68,21	68,14	68,09	68,06	68,03	68,02

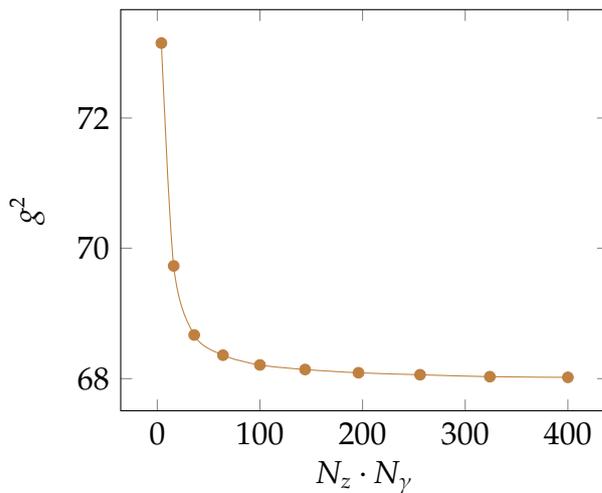


FIGURA 4.1 – Gráfico dos autovalores em função do número de polinômios na base estabelecida, com energia de ligação igual a $2m$, $\Lambda = 2m$ e $\mu = 0$

Podemos estudar como a constante de acoplamento g^2 varia com a massa da partícula mediadora para um valor fixo do fator de forma Λ . Observando o lado esquerdo da figura 4.2, verifica-se que, aparentemente, há duas regiões delimitadas por $\mu = \Lambda$. Isso ocorre pois no kernel da Eq. (4.76) há o fator $g^2(\mu^2 - \Lambda^2)^2$. Assim, para $\mu = \Lambda$ o kernel se anula e, conseqüentemente, o autovalor torna-se infinito. Uma maneira de contornar essa singularidade aparente é definir uma constante de acoplamento reescalada $\alpha = \frac{g^2}{4\pi}(1 - \frac{\mu^2}{\Lambda^2})^2$. No lado direito da figura 4.2 é representada a variação de α com $\frac{\mu}{\Lambda}$. Note que esse gráfico mostra que não há singularidade para esse novo autovalor e seu comportamento é de um crescimento monotônico.

É interessante estudar a solução numérica da Eq. (4.76) em função do fator de forma Λ . Ao aumentar Λ , o alcance da interação de vértice torna-se menor e, no limite de Λ infinito, teríamos um vértice pontual. Fizemos esse cálculo no limite de Wick-Cutkosky ($\mu = 0$) e, observando a tabela 4.3 (e figura 4.4) encontramos uma aparente convergência para os autovalores. Isso poderia indicar que o limite de vértice pontual desse modelo é bem comportado. Porém, na próxima seção mostraremos analiticamente que isso não é verdade.

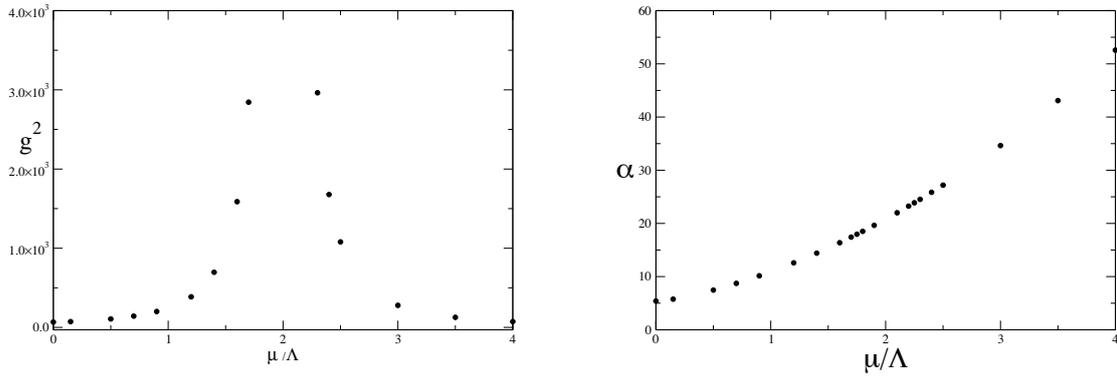


FIGURA 4.2 – Autovalores para o estado ligado de dois férmions em função da massa da partícula mediadora μ , com energia de ligação igual a $2m$ e fator de forma $\Lambda=2m$. Lado esquerdo: Constante de acoplamento g^2 . Lado direito: Constante de acoplamento reescalada α .

Para conciliar esses resultados contraditórios, resolvemos a Eq. 4.84 apenas variando um parâmetro β , que entra no método do cálculo numérico. A tabela 4.3 (e figura 4.4) mostra que para dois valores distintos de β os autovalores convergem para valores distintos. Isso sugere que a aparente convergência está condicionada ao método numérico e, por isso, não podemos afirmar que a solução da Eq. (4.76) no limite de vértice pontual é bem definida.

TABELA 4.2 – Tabela dos autovalores em função do fator Λ , com energia de ligação igual a $2m$ e $\mu = 0$

	Λ	2	3	4	10	20	30	50	70	100	200	350	500
$\beta = 1$	g^2	68,02	48,45	39,52	24,59	19,63	17,83	16,23	15,51	14,99	14,50	14,36	14,31
$\beta = 12$	g^2	68,0	48,47	39,58	24,57	19,79	18,40	17,48	17,17	16,99	16,85	16,82	16,80

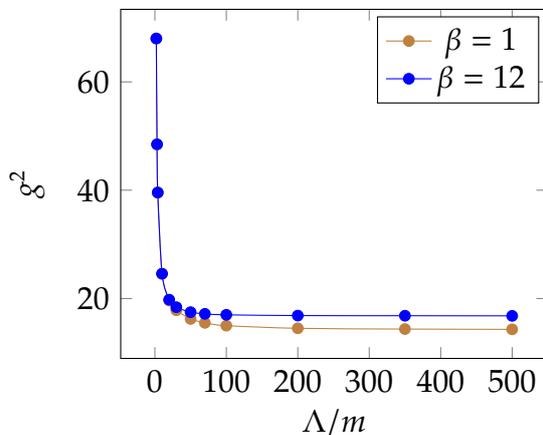


FIGURA 4.3 – Gráfico dos autovalores em função da massa da partícula mediadora (normalizada pelo fator de forma), com energia de ligação igual a $2m$

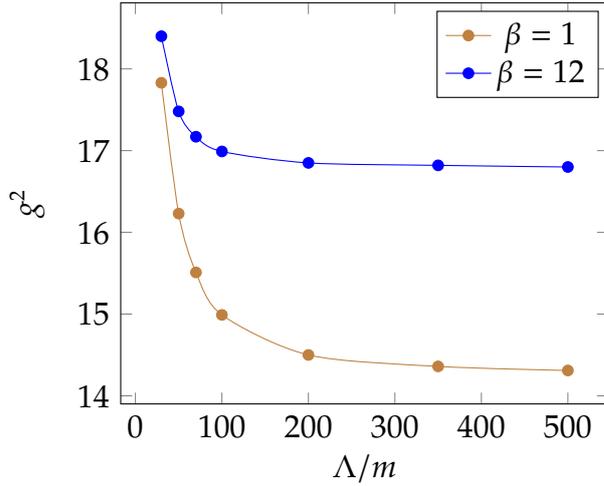


FIGURA 4.4 – Gráfico dos autovalores em função do fator Λ , com energia de ligação igual a $2m$ e $\mu = 0$

A próxima seção tratará da equação de BS para dois férmions no limite de máxima energia de ligação e modelo de Wick-Cutkosky, adotando o limite de vértice pontual, a fim de verificar a presença de divergências no kernel da equação integral.

4.4 Sistema sem fator de forma ($\Lambda \rightarrow \infty$)

Como discutido na seção anterior, iremos investigar como esse modelo se comporta se o vértice de interação não possuir estrutura. Para isso, tomaremos o limite de Λ infinito na Eq. (4.76). Assim, podemos escrever

$$\int_0^\infty d\gamma' \frac{g_1(\gamma', z)}{[\gamma + \gamma' + m^2]^2} = \frac{g^2}{8\pi^2} \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' \int_0^1 \frac{dv}{(1-v)^2} \frac{(1+z)}{(1+z')^2} \left[\frac{\theta(k_D^+) g_1(\gamma', z')}{[\gamma + m^2 + \Gamma]^2} \right] + [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z'] \quad (4.97)$$

e

$$\int_0^\infty d\gamma' \frac{g_1(\gamma', z)}{[\gamma + \gamma' + m^2]^2} = \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^\infty d\gamma' V(\gamma, z; \gamma', z', v) g_1(\gamma', z'), \quad (4.98)$$

onde

$$V(\gamma, z; \gamma', z', v) = W(\gamma, z; \gamma', z', v) \theta(k_D^+) + W(\gamma, -z; \gamma', -z', v) \theta(-k_D^+), \quad (4.99)$$

sendo

$$W(\gamma, z; \gamma', z', v) = \frac{g^2}{8\pi^2} \frac{(1+z)}{(1+z')^2} \int_0^1 \frac{dv}{(1-v)^2} \frac{1}{[\gamma + m^2 + \Gamma]^2} \quad (4.100)$$

com

$$\Gamma = \frac{(1+z)}{(1+z')} \frac{v m^2 + \gamma'}{(1-v)}, \quad (4.101)$$

que é a equação de BS do estado ligado fermiônico com vértice pontual no limite de máxima energia de ligação.

4.5 Equação da unicidade para vértice pontual

Nessa seção estudaremos analiticamente o limite de vértice pontual. Para isso, iremos utilizar a parametrização de Feynman e propriedades da delta de Dirac para reescrever o kernel de tal forma que possamos aplicar a conjectura da unicidade. Inicialmente, vamos manipular o R.H.S. da equação (4.98)

$$R.H.S. = \frac{g^2}{8\pi^2} \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz' \frac{(1+z)}{(1+z')^2} \int_0^1 \frac{dv}{(1-v)^2} \frac{\theta(k_D^+) g_1(\gamma', z')}{[\gamma + m^2 + \Gamma]^2} + [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z']. \quad (4.102)$$

Introduzindo a delta de Dirac para modificar o denominador, temos

$$R.H.S. = \frac{g^2}{8\pi^2} \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz' \frac{(1+z)}{(1+z')^2} \int_0^1 \frac{dv}{(1-v)^2} \theta(k_D^+) g_1(\gamma', z') \int_0^\infty d\gamma'' \frac{\delta(\gamma'' - \Gamma)}{[\gamma + m^2 + \gamma'']^2} + [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z']. \quad (4.103)$$

Dessa forma, a Eq. (4.98) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\gamma'' \frac{g_1(\gamma'', z)}{[\gamma'' + \gamma + m^2]^2} &= \int_0^\infty d\gamma'' \frac{1}{[\gamma'' + \gamma + m^2]^2} \frac{g^2}{8\pi^2} \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz' \times \\ &\times \frac{(1+z)}{(1+z')^2} \int_0^1 \frac{dv}{(1-v)^2} \theta(k_D^+) g_1(\gamma', z') \delta(\gamma'' - \Gamma) + [z \rightarrow -z; z' \rightarrow -z']. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Utilizando a conjectura da unicidade, obtemos

$$g_1(\gamma'', z) = \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz' V(\gamma'', z; \gamma', z', v) g_1(\gamma', z'), \quad (4.105)$$

sendo

$$V(\gamma'', z; \gamma', z', v) = W(\gamma'', z; \gamma', z', v)\theta(k_D^+) + W(\gamma'', -z; \gamma', -z', v)\theta(-k_D^+) \quad (4.106)$$

e

$$W(\gamma'', z; \gamma', z', v) = \frac{g^2}{8\pi^2} \frac{(1+z)}{(1+z')^2} \int_0^1 dv \frac{1}{(1-v)^2} \delta(\gamma'' - \Gamma). \quad (4.107)$$

Usando a seguinte propriedade da delta de Dirac

$$\delta[F(v)] = \sum_i \frac{\delta(v - v_i)}{\left| \frac{dF}{dv} \right|_{v=v_i}}, \quad (4.108)$$

temos

$$W(\gamma'', z; \gamma', z', v) = \frac{g^2}{8\pi^2} \frac{(1+z)^2 (\gamma' + m^2)}{(1+z') (m^2(1+z) + \gamma''(1+z'))^2} \int_0^1 dv \frac{1}{(1-v)^2} \delta(v - v_1), \quad (4.109)$$

onde

$$v_1 = \frac{-\gamma' + \gamma'' - z\gamma' + \gamma''z'}{\gamma'' + m^2z + m^2 + \gamma''z'}. \quad (4.110)$$

Integrando a delta, obtemos

$$W(\gamma'', z; \gamma', z') = \frac{g^2}{8\pi^2} \frac{1}{(1+z') (\gamma' + m^2)'}. \quad (4.111)$$

ou seja,

$$g_1(\gamma'', z) = \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^{+1} dz' V(\gamma'', z; \gamma', z') g_1(\gamma', z'), \quad (4.112)$$

com

$$V(\gamma'', z; \gamma', z') = W(\gamma'', z; \gamma', z')\theta(k_D^+) + W(\gamma'', -z; \gamma', -z')\theta(-k_D^+), \quad (4.113)$$

onde

$$W(\gamma'', z; \gamma', z') = \frac{g^2}{8\pi^2} \frac{1}{(1+z')(\gamma' + m^2)}. \quad (4.114)$$

Essa é a equação com unicidade para o estado ligado de dois férmions no modelo de Wick-Cutkosky ($\mu = 0$), com máxima energia de ligação ($B=2m$) e utilizando o vértice de interação pontual ($\Lambda \rightarrow \infty$)

Note que o kernel da equação integral não possui dependência na variável γ'' . Assim, a função peso de Nakanishi não pode depender da variável γ'' . Dessa forma, a função peso de Nakanishi deve ser escrita como $g_1(\gamma'', z) = cf(z)$, onde c é uma constante. Substituindo essa forma funcional na Eq. 4.112 vemos que há uma divergência logarítmica em γ'' . Esse resultado mostra que o limite de vértice pontual para esse modelo não é bem definido.

4.6 Transformação de Stieltjes para o sistema fermiônico

Um método promissor para inverter uma equação integral é a utilização da transformação de Stieltjes (CARBONELL *et al.*, 2017a). Dada a expressão

$$G(x) = \int_0^\infty \frac{F(y)}{(y+x)^2} dy, \quad (4.115)$$

a transformação de Stieltjes estabelece que é possível escrever o kernel em termos de uma integral no plano complexo, tal que

$$F(y) = \frac{y}{2\pi} \int_\gamma G(y\omega) d\omega, \quad (4.116)$$

onde podemos representar ω como

$$\omega = e^{i\phi} \Rightarrow d\omega = ie^{i\phi} d\phi. \quad (4.117)$$

Dessa forma, teremos

$$F(y) = \frac{y}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi e^{i\phi} G(ye^{i\phi}). \quad (4.118)$$

De forma análoga, podemos aplicar a transformação na seguinte expressão

$$f(\gamma'') = \int_0^{\infty} d\gamma' L(\gamma, \gamma') g(\gamma') = \int_0^{\infty} d\gamma' \frac{1}{(\gamma' + \gamma'' + b)^2} g(\gamma'). \quad (4.119)$$

Definindo $\gamma'' + b = \gamma$ teremos

$$f(\gamma - b) = \int_0^{\infty} d\gamma' \frac{g(\gamma')}{(\gamma' + \gamma)^2}, \quad (4.120)$$

novamente, representando $\bar{f}(\gamma) = f(\gamma - b)$, obtemos

$$\bar{f}(\gamma) = \int_0^{\infty} d\gamma' \frac{g(\gamma')}{(\gamma' + \gamma)^2}. \quad (4.121)$$

Aplicando enfim a transformação de Stieltjes

$$g(\gamma) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi e^{i\phi} \bar{f}(\gamma e^{i\phi}), \quad (4.122)$$

por fim

$$g(\gamma) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi e^{i\phi} f(\gamma e^{i\phi} - b). \quad (4.123)$$

Utilizaremos, a partir dessa análise, a aplicação da transformação de Stieltjes na equação de estado ligado completa (Eq. 4.76). Sabemos que a solução do lado esquerdo da equação projetada na frente de luz é

$$\psi_{LF}(\gamma, z) = \frac{-i}{M} \int_0^{\infty} \frac{g(\gamma', z) d\gamma'}{[\gamma' + \gamma + z^2 m^2 + (1 - z^2) \kappa^2]^2}. \quad (4.124)$$

Escrevendo

$$\bar{g}(\gamma', z) = \frac{-i}{M} g(\gamma', z), \quad (4.125)$$

logo

$$\psi_{LF}(\gamma, z) = \int_0^{\infty} \frac{\bar{g}(\gamma', z)}{[\gamma' + \gamma + z^2 m^2 + (1 - z^2)\kappa^2]^2}. \quad (4.126)$$

Aplicando a transformação de Stieltjes

$$\bar{g}(\gamma, z) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi e^{i\phi} \psi_{LF}(\gamma e^{i\phi} - m^2 z^2 - (1 - z^2)\kappa^2), \quad (4.127)$$

portanto

$$g(\gamma, z) = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{M}{-i} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi e^{i\phi} \psi_{LF}(\gamma e^{i\phi} - m^2 z^2 - (1 - z^2)\kappa^2). \quad (4.128)$$

A equação completa é escrita na seguinte forma (equação 4.76)

$$\int_0^{\infty} \frac{g(\gamma', z) d\gamma'}{[\gamma' + \gamma + z^2 m^2 + (1 - z^2)\kappa^2]^2} = \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^{\infty} d\gamma' V(\gamma, z; \gamma', z', v) g(\gamma', z'), \quad (4.129)$$

onde

$$V(\gamma, z; \gamma', z') = W(\gamma, z; \gamma', z') \theta(k_D^+) + W(\gamma, -z; \gamma', -z') \theta(-k_D^+). \quad (4.130)$$

Podemos representar a equação completa da seguinte maneira

$$\hat{L}g = \hat{V}g \Rightarrow g = \hat{L}^{-1} \hat{V}g, \quad (4.131)$$

ou seja,

$$g(\gamma, z) = \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^{\infty} d\gamma' N(\gamma, z; \gamma', z', v) g(\gamma', z') \quad (4.132)$$

com

$$N(\gamma, z; \gamma', z', v) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi e^{i\phi} V(\gamma e^{i\phi} - m^2 z^2 - (1 - z^2)\kappa^2, z; \gamma', z'). \quad (4.133)$$

Essa é a equação do estado ligado de férmions utilizando a transformação de Stieltjes. Basta somente substituir no kernel original γ por $\gamma e^{i\phi} - m^2 z^2 - (1 - z^2)\kappa^2$ para termos

a expressão de forma explícita. É necessário observar que a equação que descreve o estado ligado de férmions nesse trabalho analisa o limite em que $M \rightarrow 0$. Dessa forma

$$N(\gamma, z; \gamma', z', v) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi e^{i\phi} V(\gamma e^{i\phi} - m^2, z; \gamma', z'). \quad (4.134)$$

Essa equação, obtida a partir da transformação de Stieltjes será comparado com o kernel resultante do cálculo do estado ligado de férmions utilizando a conjectura de unicidade, sendo esse kernel, presente na equação (4.118), descrito como

$$V(\gamma'', z; \gamma', z') = W(\gamma'', z; \gamma', z')\theta(k_D^+) + W(\gamma'', -z; \gamma', -z')\theta(-k_D^+), \quad (4.135)$$

com

$$W(\gamma'', z; \gamma', z') = \frac{g^2}{8\pi^2} \frac{1}{(1+z')(\gamma' + m^2)}. \quad (4.136)$$

Definindo valores para os parâmetros presentes no kernel resultante do cálculo utilizando unicidade e para o kernel obtido a partir da transformação de Stieltjes, podemos verificar a eficácia dessa transformação.

Ao utilizarmos a transformação de Stieltjes na equação do estado ligado de férmions, a comparação será feita ao substituirmos no kernel da equação completa a conclusão estabelecida na equação (4.134). Dessa forma, selecionando uma das condições da equação (4.98) ($k_D^+ > 0$), teremos

$$N(\gamma, z; \gamma', z') = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi e^{i\phi} \frac{g^2}{8\pi^2} \frac{1}{(\gamma' + m^2)[\gamma e^{i\phi} + \gamma'(1+z)]}. \quad (4.137)$$

Essa equação será comparada o kernel da equação com unicidade para estado ligado de férmions (4.112). Para o seguinte conjunto de valores

$$\gamma = 60 \quad \gamma' = 40 \quad z = 0.6 \quad z' = 0.7 \quad g = 50 \quad m = 1$$

os kernels W e N possuem

$$W(\gamma'', z; \gamma', z') = 0,454274 \quad N(\gamma, z; \gamma', z', v) = 0,454274. \quad (4.138)$$

Esse exemplo mostra que a utilização da transformação de Stieltjes pode ser uma alternativa à utilização da conjectura da unicidade da função peso de Nakanishi, que foi sugerido por (CARBONELL *et al.*, 2017a) no caso de estados ligados bosônicos.

5 Conclusão

5.1 Conclusão

Nessa dissertação, estudamos o estado ligado de dois férmions interagindo pela troca de um bóson vetorial com e sem massa (modelo de Wick-Cutkosky), com energia de ligação máxima e vértice de interação com fator de forma. Para isso, resolvemos a equação de Bethe-Salpeter (na aproximação de escada) no espaço de Minkowski utilizando a representação integral de Nakanishi para a amplitude de Bethe-Salpeter. Mostramos que no limite de máxima energia de ligação, o sistema de equações integrais que descreve o estado ligado fermiônico desacopla. Esse fato possibilita encontrar soluções finitas para a constante de acoplamento desse sistema. Discutimos a estabilidade dessa solução em termos da base escolhida para o cálculo numérico. Mostramos como a constante de acoplamento varia com a massa da partícula mediadora. Utilizando a conjectura de Unicidade, apresentamos uma nova equação integral que descreve o estado ligado de férmions.

Investigamos o limite desse sistema para o caso do vértice de interação tornar-se pontual. Nesse caso, utilizando a conjectura de Unicidade da função peso de Nakanishi, mostramos analiticamente que a equação integral diverge. Mostramos que esse resultado pode ser obtido analisando a solução numérica, uma vez que a convergência dos autovalores dependem dos parâmetros utilizados no método numérico. Ainda nesse limite, mostramos que, para um conjunto de valores para os parâmetros de integração, o Kernel obtido pela conjectura de Unicidade é o mesmo obtido utilizando a transformação de Stieltjes. Isso sugere que essa transformação pode ser muito útil para a solução da equação de BS no espaço de Minkowski.

Como continuação dessa dissertação, seria interessante calcular observáveis hadrônicos a partir da amplitude de Bethe-Salpeter. Uma aplicação natural é utilizar esse modelo para descrever o pión. Assim, com esse modelo, poderemos calcular sua constante de decaimento, fator de forma e distribuição de momento transversal dos seus constituintes.

Referências

- ARFKEN, H. W. G. **Mathematical Methods for Physicists**. [S.l.]: Elsevier Inc., 2007.
- BICUDO, P.; BINOSI, D.; CARDOSO, N.; OLIVEIRA, O.; SILVA, P. J. Lattice gluon propagator in renormalizable ξ gauges. **Phys. Rev.**, D92, n. 11, p. 114514, 2015.
- CAN, K. U.; ERKOL, G.; OKA, M.; TAKAHASHI, T. T. Look inside charmed-strange baryons from lattice QCD. **Phys. Rev.**, D92, n. 11, p. 114515, 2015.
- CARBONELL, J.; FREDERICO, T.; KARMANOV, V. A. Bound state equation for the Nakanishi weight function. **Phys. Lett.**, B769, p. 418–423, 2017.
- CARBONELL, J.; FREDERICO, T.; KARMANOV, V. A. Euclidean to Minkowski Bethe-Salpeter amplitude and observables. **Eur. Phys. J.**, C77, n. 1, p. 58, 2017.
- CARBONELL, J.; KARMANOV, V. A. Solving the Bethe-Salpeter equation for two fermions in Minkowski space. **The European Physical Journal A**, v. 46, n. 3, p. 387–397, dec 2010. ISSN 1434-6001.
- CHANG, S.-J.; ROOT, R. G.; YAN, T.-M. Quantum field theories in the infinite momentum frame. 1. Quantization of scalar and Dirac fields. **Phys. Rev.**, D7, p. 1133–1148, 1973.
- CUTKOSKY, R. E. Solutions of a Bethe-Salpeter equations. **Phys. Rev.**, v. 96, p. 1135–1141, 1954.
- DIRAC, P. A. M. Forms of Relativistic Dynamics. **Rev. Mod. Phys.**, v. 21, p. 392–399, 1949.
- FREDERICO, T.; PAULI, H.-C. Renormalization of an effective light cone QCD inspired theory for the pion and other mesons. **Phys. Rev.**, D64, p. 054007, 2001.
- FREDERICO, T.; SALMÈ, G.; VIVIANI, M. Two-body scattering states in minkowski space and the nakanishi integral representation onto the null plane. **Physical Review D: Particles and Fields**, v. 85, p. 33, 2012.
- FREDERICO, T.; SALMÈ, G.; VIVIANI, M. Quantitative studies of the homogeneous Bethe-Salpeter equation in Minkowski space. **Physical Review D**, v. 89, n. 1, p. 016010, jan 2014. ISSN 1550-7998.

- GIGANTE, V.; NOGUEIRA, J. H. A.; YDREFORS, E.; GUTIERREZ, C.; KARMANOV, V. A.; FREDERICO, T. Bound state structure and electromagnetic form factor beyond the ladder approximation. **Phys. Rev.**, D95, n. 5, p. 056012, 2017.
- GUTIERREZ, C.; GIGANTE, V.; FREDERICO, T.; SALMÈ, G.; VIVIANI, M.; TOMIO, L. Bethe-Salpeter bound-state structure in Minkowski space. **Phys. Lett.**, B759, p. 131–137, 2016.
- KARMANOV, V. A.; CARBONELL, J. Solving bethe-salpeter equation in minkowski space. **The European Physical Journal A**, v. 27, 2006.
- KUSAKA, K.; SIMPSON, K. M.; WILLIAMS, A. G. Solving the Bethe-Salpeter equation for bound states of scalar theories in Minkowski space. **Phys. Rev.**, D56, p. 5071–5085, 1997.
- KUSAKA, K.; WILLIAMS, A. G. Solving the Bethe-Salpeter equation for scalar theories in Minkowski space. **Phys. Rev.**, D51, p. 7026–7039, 1995.
- NAKANISHI, N. **Graph Theory and Feynman Integrals**. [S.l.]: Gordon and Breach, 1971.
- NAKANISHI, N. Integral representation for the forward scattering amplitude. **Phys. Rev.**, D4, p. 2571–2573, 1971.
- PAIVA, V. G. D. F. **Equação de bethe-salpeter em 2+1 dimensões para estado ligado de dois bósons no espaço de Minkowski**. Tese (Doutorado), 2014.
- PAULA, W. de; FREDERICO, T.; SALMÈ, G.; VIVIANI, M. Advances in solving the two-fermion homogeneous Bethe-Salpeter equation in Minkowski space. **Phys. Rev.**, D94, n. 7, p. 071901, 2016.
- PIMENTEL, R.; PAULA, W. de. Excited States of the Wick-Cutkosky Model with the Nakanishi Representation in the Light-Front Framework. **Few Body Syst.**, v. 57, n. 7, p. 491–496, 2016.
- SALPETER, E. E.; BETHE, H. A. A Relativistic equation for bound state problems. **Phys. Rev.**, v. 84, p. 1232–1242, 1951.
- WICK, G. C. Properties of bethe-salpeter wave functions. **Physical Review**, v. 96, 1954.
- YDREFORS, E.; NOGUEIRA, J. H. A.; GIGANTE, V.; FREDERICO, T.; KARMANOV, V. A. Three-body bound states with zero-range interaction in the Bethe-Salpeter approach. **Phys. Lett.**, B770, p. 131–137, 2017.
- ZAOUI, K. Lorentz Contraction of the Bethe-Salpeter Green's Function. v. 4, n. 6, 1971.

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO DM	2. DATA 25 de julho de 2017	3. DOCUMENTO Nº DCTA/ITA/DM 058/2017	4. Nº DE PÁGINAS 73
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: Modelo de Wick-Cutkosky para um sistema fermiônico			
6. AUTOR(ES): Eduardo Scafi			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: Bethe-Salpeter; Minkowski; Férmions			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Equação de Bethe-Salpeter; Férmions; Funções de Kernel; Espaço de Minkowski; Física de partículas; Física nuclear.			
10. APRESENTAÇÃO: <input checked="" type="checkbox"/> Nacional <input type="checkbox"/> Internacional ITA, São José dos Campos. Curso de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Física Nuclear. Orientador: Prof. Dr. Wayne Leonardo Silva de Paula. Defesa em 10/07/2017. Publicada em 2017			
11. RESUMO: Nessa dissertação foi estudado o estado ligado de dois férmions no limite de máxima energia de ligação, que interagem pela troca de uma partícula vetorial com ou sem massa. Para descrever o sistema, resolvemos a equação de Bethe-Salpeter (SALPETER; BETHE, 1951) diretamente no espaço físico. Foi adotada uma aproximação “tipo escada” para o kernel, que abrange infinitas interações, uma vez que resolvemos uma equação integral. A fim de facilitar o tratamento analítico dos pólos presentes no kernel relativístico, utiliza-se a representação integral perturbativa de Nakanishi (NAKANISHI, 1971b) para representar a amplitude de Bethe-Salpeter, que é caracterizada por uma função peso e um denominador que depende dos momentos dos propagadores externos. Foi realizada a projeção na frente de luz (DIRAC, 1949), que permite simplificar a estrutura da equação de Bethe-Salpeter. Foi feito o cálculo de autovalores para a equação integral com a utilização de um fator de forma que fornece uma estrutura para o vértice de interação. Além disso, analisou-se a validação da conjectura da unicidade (NAKANISHI, 1971a), que consiste na premissa da função peso como única. Essa análise acontece no modelo de Wick-Cutkosky (WICK, 1954)(CUTKOSKY, 1954) para o sistema fermiônico. Por fim, mostramos que aplicar a transformação de Stieltjes no sistema fermiônico, para alguns valores discretos, é equivalente a utilizar o método da unicidade. Isso foi feito a partir da comparação dos kernels das equações integrais obtidas por ambos os métodos.			
12. GRAU DE SIGILO: <input checked="" type="checkbox"/> OSTENSIVO <input type="checkbox"/> RESERVADO <input type="checkbox"/> SECRETO			