

Dissertação apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Dinâmica Não-Linear e Sistemas Complexos.

Dalton Nunes Oliveira

O PAPEL DA HELICIDADE EM UM DÍNAMO MAGNETOHIDRODINÂMICO

Dissertação aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:



Prof. Dr. Eric Luiz Rempel

Orientador

Prof. Dr. Luiz Carlos Sandoval Góes
Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP - Brasil
2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Divisão de Informação e Documentação

Oliveira, Dalton Nunes

O papel da helicidade em um dínamo magnetohidrodinâmico / Dalton Nunes Oliveira.
São José dos Campos, 2017.
77f.

Dissertação de Mestrado – Curso de Física. Área de Dinâmica Não-Linear e Sistemas Complexos
– Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2017. Orientador: Prof. Dr. Erico Luiz Rempel.

1. Helicidade cinética. 2. Dínamo. 3. Magnetohidrodinâmica. 4. Física. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Título.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

OLIVEIRA, Dalton Nunes. **O papel da helicidade em um dínamo magnetohidrodinâmico**. 2017. 77f. Dissertação de Mestrado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Dalton Nunes Oliveira

TÍTULO DO TRABALHO: O papel da helicidade em um dínamo magnetohidrodinâmico.

TIPO DO TRABALHO/ANO: Dissertação / 2017

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta dissertação e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação pode ser reproduzida sem a autorização do autor.

Dalton Nunes Oliveira

Dalton Nunes Oliveira

Av. Cidade Jardim, 679

12.233-066 – São José dos Campos–SP

O PAPEL DA HELICIDADE EM UM DÍNAMO MAGNETOHIDRODINÂMICO

Dalton Nunes Oliveira

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr.	Gilberto Petraconi Filho	Presidente	-	ITA
Prof. Dr.	Erico Luiz Rempel	Orientador	-	ITA
Prof ^a . Dr ^a .	Maisa de Oliveira Terra	Membro interno	-	ITA
Prof. Dr.	Reinaldo Roberto Rosa	Membro externo	-	INPE

Dedico este trabalho à minha família.

Agradecimentos

Aos meus pais, Raimundo Ivan e Mariselma Albarado, que sempre estiveram ao meu lado mesmo diante de todas as dificuldades enfrentadas, mas sempre me fortalecendo e acreditando em mim. Aos meus irmãos, Douglas e Iriane, e toda a minha família por todo o suporte, ajuda e incentivo.

A minha querida namorada Shirlene, por todo o apoio, companheirismo, por sempre estar ao meu lado em todos os momentos, sempre me amparando quando necessário, obrigado pelas palavras de incentivos e por sempre acreditar em mim.

Agradeço ao professor Dr. Erico Luiz Rempel a orientação dada, pelo conhecimento transmitido, por toda a paciência e dedicação para a realização deste trabalho.

Agradeço aos professores do ITA pela significativa contribuição e pelo conhecimento transmitido.

Agradeço aos colegas do grupo de pesquisa, Suzana, Danilo, pela contribuição e correções deste trabalho e aos meus amigos, Francis e Tiago pelas contribuições feitas para o desenvolvimento deste trabalho sempre dispostos a ajudar, em especial ao Tiago pelas discussões sobre física, matemática e por inúmeras ajuda ao longo deste trabalho.

Ao meu orientador da graduação professor Dr. Charles Rocha da Silva.

A todos os colegas da pós-graduação, em especial aos amigos Madson, Heitor, Geanderson, Ivana, Tiago, Gabriella, Francisco.

A todos os moradores de casa, Aline, Madson, Heitor, pela amizade estabelecida e por vários momentos de descontração.

A secretaria do departamento de matemática Bruna, por estar sempre disposta a ajudar.

Agradeço o Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) pelo suporte e oportunidade oferecido.

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

*"If I have seen farther than others,
it is because I stood on the shoulders of giants."*

— SIR ISAAC NEWTON

Resumo

Esta dissertação investiga o papel da helicidade cinética para o modelo de dínamo α^2 através de simulações tridimensionais das equações de magnetohidrodinâmica (MHD). Isso foi feito a partir da variação do parâmetro de helicidade cinética dentro do intervalo $[0, 1]$ comparando as séries temporais de campo médio e de entropia, bem como os espectros de energia. Observa-se que a helicidade cinética influi na organização do sistema e no estabelecimento da ação do dínamo. Valores mais altos de helicidade levam rapidamente ao dínamo e também a um aumento da intensidade do campo magnético. Também verificou-se que o aumento da helicidade cinética leva à transferência inversa de energia para números de onda menores indicando que a helicidade cinética tem um papel determinante no estabelecimento e evolução do dínamo MHD.

Abstract

This dissertation is devoted to investigate the role of kinetic helicity in the α^2 dynamo model through 3D simulations of the magnetohydrodynamics (MHD) equations. We have varied the kinetic helicity parameter within the interval $[0, 1]$ and compared the time series and energy spectra thereby obtained. The results show that the kinetic helicity has a considerable influence on the system organization and the establishment of the dynamo. Higher helicity values lead to more intense magnetic fields. We also observed that an increase of helicity leads to an inverse energy transfer to lower wavenumbers indicating that the kinetic helicity has a key role in both establishment and evolution of the dynamo in MHD models.

Lista de Figuras

- FIGURA 1.1 – Diagrama do ciclo solar. Na parte superior, observa-se o diagrama com variações periódicas das manchas solares. As estruturas em forma de asas de borboleta (da esquerda para a direita) mostram a migração de manchas solares em direção ao equador. A parte inferior mostra um histograma com o número diário de manchas solares em função do tempo. (<https://solarscience.msfc.nasa.gov/images/bfly.gif>) 18
- FIGURA 1.2 – Ilustração dos processos de conversão do campo poloidal e toroidal. (a) Campo poloidal inicial; (b) e (c) efeito Ω : geração do campo toroidal devido á rotação diferencial; (d) e (e) efeito α : movimentos turbulentos em campos toroidais criam campos poloidais; (f) um novo campo poloidal é gerado; (g) a primeira metade do ciclo magnético é completa gerando um novo campo poloidal; (h) início do mecanismo de B-L; (i) campos das regiões bipolares; (j) um campo poloidal final é gerado (g) (SANCHEZ *et al.*, 2014). 21
- FIGURA 1.3 – Ilustração do efeito α . As linhas de campo toroidal são torcidas devido ao movimento convectivo turbulento helicoidal. O campo toroidal converte-se em um campo poloidal, com as setas indicando os movimentos do fluido. As linhas de campo elevadas e torcidas representam as linhas de campo magnético (PRIEST, 2014). 22
- FIGURA 1.4 – Representação do modelo de dínamo de Parker. (a) As linhas de campo magnético são esticadas através da rotação diferencial, o campo toroidal é gerado, tem-se o efeito Ω . (b) Devido ao movimento turbulento as linhas de campo toroidal são torcidas. (c) Através do movimento turbulento vários loops magnéticos são produzidos (efeito α), gerando campo magnético de grande escala (PRIEST, 2014). 22

- FIGURA 1.5 – Mecanismo de regeneração dos campos poloidais e toroidais. No lado esquerdo da figura tem-se o dínamo conhecido como $\alpha - \Omega$ e no lado direito o dínamo α^2 (BRANDENBURG; SUBRAMANIAN, 2005). 23
- FIGURA 2.1 – Ilustração do movimento aleatório do campo de velocidade $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, variando na pequena escala de comprimento l e o campo magnético médio variando na escala global L . A média é definida sobre a esfera S_a , de raio a onde $l \ll a \ll L$ (MOFFATT, 1978). 32
- FIGURA 2.2 – Geração do campo magnético toroidal através da rotação diferencial (BISKAMP, 2005). 37
- FIGURA 2.3 – Pontos do domínio computacional. 38
- FIGURA 2.4 – (a) Séries temporais para as energias magnéticas com resolução numérica 64^3 pontos na malha (linha preta) e 128^3 (linha vermelha); (b) séries temporais para as energias cinéticas para as mesmas resoluções que (a). 42
- FIGURA 3.1 – Série temporal para energia magnética \mathbf{B}_{rms} (linha vermelha) e energia cinética \mathbf{u}_{rms} (linha preta), através de simulações de dínamo MHD. Tém-se a amplificação de um campo magnético fraco (semente), através da conversão da energia cinética em energia magnética, com helicidade cinética $\sigma = 0.95$ 44
- FIGURA 3.2 – Diagrama de bifurcação mostrando a variação das médias das energias cinética (círculos pretos) e magnéticas (triângulos vermelhos) em função da helicidade cinética σ 45
- FIGURA 3.3 – Multiestabilidade no diagrama de bifurcação para a energia magnética em função de σ 45
- FIGURA 3.4 – Componentes do campo magnético, B_x, B_y, B_z , no tempo $t = 10^2$, para $\sigma = 0.95$. Pode-se observar flutuações de baixa amplitude formando-se nas respectivas direções. 46
- FIGURA 3.5 – Componentes do campo magnético, B_x, B_y, B_z , no tempo $t = 10^3$, para $\sigma = 0.95$. Observa-se na simulação que para a direção B_x tem-se um campo magnético exibindo flutuações de pequena escala. Para as componentes B_y, B_z tem-se uma robusta estrutura coerente de grande escala. 47
- FIGURA 3.6 – Componentes do campo de velocidade, u_x, u_y, u_z , no tempo $t = 10^3$, para $\sigma = 0.95$ 47

FIGURA 3.7 – Componentes do campo magnético no tempo $t = 10^5$	48
FIGURA 3.8 – Componentes do campo de velocidade no tempo $t = 10^5$	48
FIGURA 3.9 – Série temporal para energia magnética \mathbf{B}_{rms} (linha vermelha) e energia cinética u_{rms} (linha preta), através de simulações de dínamo MHD.	48
FIGURA 3.10 – Componentes do campo magnético, no tempo $t = 10^5$	49
FIGURA 3.11 – Componentes do campo de velocidade, no tempo $t = 10^5$, para $\sigma = 0.215$	49
FIGURA 3.12 – Linhas de campo magnético.	50
FIGURA 3.13 – Série temporal para energia magnética \mathbf{B}_{rms} (linha vermelha) e energia cinética u_{rms} (linha preta), através de simulações de dínamo MHD.	50
FIGURA 3.14 – Evolução espaço-tempo da média de $\langle B_x \rangle$ no plano xy	51
FIGURA 3.15 – Evolução espaço-tempo da média de $\langle B_y \rangle$ no plano yz	51
FIGURA 3.16 – Série temporal obtida a partir da média de $\langle B_x \rangle$ no plano xy , no ponto $z = 0$	52
FIGURA 3.17 – Série temporal obtida a partir da média de $\langle B_y \rangle$ no plano yz , no ponto $x = 0$	52
FIGURA 3.18 – Componentes B_x, B_y, B_z , no tempo $t = 10^5$	53
FIGURA 3.19 – Componentes u_x, u_y, u_z , no tempo $t = 10^5$	53
FIGURA 3.20 – Linhas de campo magnético.	54
FIGURA 3.21 – Série temporal para energia magnética \mathbf{B}_{rms} (linha vermelha) e energia cinética \mathbf{u}_{rms} (linha preta).	54
FIGURA 3.22 – Evolução espaço-tempo da média de $\langle B_x \rangle$ no plano xy	55
FIGURA 3.23 – Ampliação da evolução espaço-tempo da média de $\langle B_x \rangle$ no plano xy	55
FIGURA 3.24 – Evolução espaço-tempo da média $\langle B_y \rangle$ no plano yz	55
FIGURA 3.25 – Séries temporais obtidas a partir de $\langle B_y \rangle$ nos planos xy e yz	56
FIGURA 3.26 – Componentes B_x, B_y, B_z do campo magnético no tempo $t = 10^5$, para $\sigma = 1$	57
FIGURA 3.27 – Componentes u_x, u_y, u_z do campo de velocidades no tempo $t = 10^5$, para $\sigma = 1$	57
FIGURA 3.28 – Série temporal da entropia espectral para $\sigma = 0.215$, obtida a partir da média $\langle B_y \rangle$ no plano xy	60

FIGURA 3.29 –Série temporal da entropia espectral para $\sigma = 0.215$, obtida a partir da média de $\langle B_y \rangle$ no plano yz	61
FIGURA 3.30 –Série temporal da entropia espectral para $\sigma = 0.95$, obtida a partir da média de $\langle B_y \rangle$ no plano xy	61
FIGURA 3.31 –Série temporal da entropia espectral para $\sigma = 0.95$, obtida a partir da média de $\langle B_y \rangle$ no plano xy	62
FIGURA 3.32 –Série temporal da entropia espectral para $\sigma = 0.95$, obtida a partir média de $\langle B_y \rangle$ no plano yz	62
FIGURA 3.33 –Espectro de energia cinética (linha preta), para $t = 10^5$, para $\sigma = 0$	64
FIGURA 3.34 –Espectro de energia cinética (linha preta) e magnética (linha vermelha) para $t = 10^5$, para $\sigma = 0.215$	64
FIGURA 3.35 –Espectro de energia cinética (linha preta) e magnética (linha vermelha) para $t = 10^5$, para $\sigma = 0.95$	65
FIGURA 3.36 –Espectro de energia cinética (linha preta) e magnética (linha vermelha) para $t = 10^5$, para $\sigma = 1$	65

Lista de Abreviaturas e Siglas

B-L	Babcock-Leighton
MHD	Magnetohidrodinâmica
R_m	Reynolds Magnético
FEM	Força Eletromotriz
CFL	Constante de Courant-Friedrich-Lewy
MPI	Message Passage Interface

Lista de Símbolos

v	Velocidade
ω	Vorticidade
α	Efeito alfa
Ω	Efeito ômega
\mathbf{B}	Campo magnético
\mathbf{E}	Campo elétrico
∇	Nabla
μ_0	Permeabilidade magnética no vácuo
\mathbf{J}	Densidade de corrente elétrica
ε_0	Constante dielétrica
ρ	Densidade de carga
η	Difusividade magnética
∇p	Gradiente de pressão
V	Volume
ν	Viscosidade cinemática
$\hat{\mathbf{n}}$	Vetor unitário
c	Velocidade da luz
ε_{ijk}	Símbolo de permutação (tensor de Levi-Civita)
δ_{ij}	Tensor delta de Kronecker
β	Efeito beta
γ	Efeito gamma
\mathbf{f}	Função forçante
\mathbf{A}	Potencial vetor magnético
k	Número de onda
σ	Parâmetro de controle (helicidade cinética)
g	Aceleração gravitacional

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Mecanismos para a Geração de Campos Magnéticos	19
1.2	Dínamo $\alpha - \Omega$	21
1.3	Dínamo α^2	23
1.4	Motivação, objetivo e estrutura da Dissertação	23
2	MODELO DE DÍNAMO DE CAMPO MÉDIO	25
2.1	Teoria do Dínamo	25
2.2	Equações da Magnetohidrodinâmica (MHD)	26
2.2.1	Equação de Indução	27
2.2.2	Equação de Momento	28
2.2.3	Equação de Continuidade	30
2.3	Teoria de Campo Médio	31
2.3.1	Modelo de Campo Médio para o Dínamo α^2	35
2.4	Modelo Numérico	37
2.4.1	O Código PENCIL	37
2.4.2	Malha	38
2.4.3	Condições Iniciais e de Contorno	40
2.4.4	O Modelo Numérico de Dínamo α^2	40
2.5	Resolução Numérica	41
3	RESULTADOS E DISCUSSÃO	43
3.1	Início da Ação do Dínamo	43
3.2	Estrutura do Campo Magnético em Função da Helicidade Cinética	47

3.2.1	Helicidade cinética para $\sigma = 0$	47
3.2.2	Helicidade cinética para $\sigma = 0.215$	48
3.2.3	Helicidade cinética para $\sigma = 0.95$	52
3.2.4	Helicidade cinética para $\sigma = 1$	57
3.3	Complexidade Espaço-Temporal	58
3.3.1	Informação, Entropia e Dimensão	58
3.4	Transferência Inversa de Energia	63
4	CONCLUSÃO	66
	REFERÊNCIAS	68
	APÊNDICE A – DEDUÇÃO DA FUNÇÃO FORÇANTE	72

1 Introdução

Estrelas, planetas e galáxias mostram a evidência de campos magnéticos de grande escala. Em galáxias, campos magnéticos são importantes, por permitirem que as partículas sejam aceleradas e aprisionadas, influenciando a dinâmica da formação estelar. Na cosmologia os campos magnéticos são importantes porque, se os campos magnéticos galácticos não originaram-se na era moderna estes poderiam ser resquícios do universo primitivo, trazendo informações acerca do período do universo primordial (FIELD *et al.*, 1999).

Durante a fase de expansão do universo os campos magnéticos afetaram uma série de processos relevantes que ocorreram no universo primordial, impactando sua própria geometria. Ainda hoje desconhece-se sobre a origem dos campos magnéticos observados em galáxias e aglomerados de galáxias. Alguns mecanismos baseados na teoria Magnetohidrodinâmica (MHD) têm sido propostos para explicar a amplificação de campos magnéticos fracos (campos sementes). Esses mecanismos ficaram conhecidos como dínamo galáctico e baseiam-se na conversão de energia cinética em energia magnética. Entretanto, mesmo se tais argumentos e teorias forem eficazes para explicar a amplificação dos campos sementes a origem de tais campos sementes ainda tem de ser identificada (GRASSO; RUBINSTEIN, 2001).

O Sol exhibe uma impressionante variedade de fenômenos que estão amplamente relacionados com o campo magnético. A teoria do dínamo solar explica a evolução do campo magnético observado no Sol e como ele muda durante o curso de um ciclo solar. A observação do campo magnético do Sol advém de observações da fotosfera¹ e regiões acima dela. O principal diagnóstico do campo magnético de grande escala é através da observação de manchas solares (OSSENDRIJVER, 2003). Manchas solares são regiões escuras localizadas na superfície do Sol com menor temperatura do que a média local. Apresentam intensa concentração de campo magnético, irradiando menos energia, o que ocorre devido ao campo magnético local inibir o fluxo de calor convectivo do interior do Sol. Compreender o comportamento das manchas solares é importante para o estudo do dínamo solar, visando um melhor entendimento da atividade magnética solar (HOYT *et al.*, 1997).

O ciclo solar ou ciclo solar de Schwabe, descreve oscilações da atividade magnética

¹Camada visível da atmosfera solar.

solar com variações de ciclos de onze anos (BRANDENBURG, 2008). As características do ciclo solar são as mudanças com o decorrer do tempo no número de manchas solares vistas na superfície do Sol e caracterizam-se, por períodos de atividades mínima e máxima. No período de atividade mínima o campo magnético é majoritariamente dipolar, enquanto que no período de máximo, o campo é principalmente toroidal (ERASO, 2009). Porém, devido ao arranjo de polaridade inverter em cada ciclo sucessivo, tem-se um ciclo solar com um período total de 22 anos. A cada 11 anos, o campo toroidal tem a polaridade invertida e a cada 22 anos, ele recupera a polaridade original. Este fenômeno pode ser representado através do diagrama de borboleta do ciclo solar (Figura 1.1) (CHARBONNEAU, 2010).

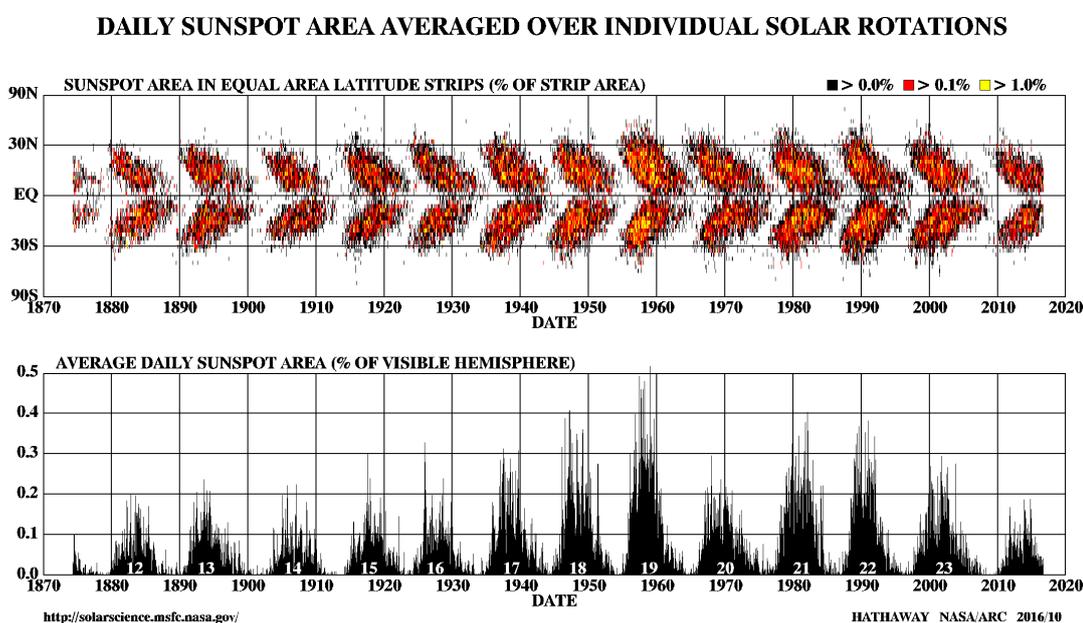


FIGURA 1.1 – Diagrama do ciclo solar. Na parte superior, observa-se o diagrama com variações periódicas das manchas solares. As estruturas em forma de asas de borboleta (da esquerda para a direita) mostram a migração de manchas solares em direção ao equador. A parte inferior mostra um histograma com o número diário de manchas solares em função do tempo.

(<http://solarscience.msfc.nasa.gov/images/bfly.gif>.)

Os fenômenos descritos a respeito do campo magnético do Sol indicam que no interior deve operar algum processo físico induzindo um campo magnético de grande escala. Costuma-se descrever esse processo por meio da transformação da energia cinética associada aos movimentos convectivos e à rotação diferencial do fluido em energia magnética. Tal processo é conhecido como dínamo (ERASO, 2009).

Para a produção de dínamos, um dos ingredientes essenciais é a helicidade cinética dos movimentos turbulentos do fluido, o que matematicamente é expresso através do produto

escalar da velocidade com a vorticidade

$$H_k = \langle \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle, \quad (1.1)$$

onde \mathbf{v} é a velocidade do fluido, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ é a vorticidade e os colchetes denotam a média do volume. A helicidade cinética conduz o dínamo, levando à geração de campos magnéticos helicoidais, fornecendo uma informação quantitativa a respeito da torção das linhas de campo magnético. A presença de vorticidade é uma condição necessária para se ter helicidade cinética, gerando dessa forma o efeito α , um efeito importante para a compreensão de campos magnéticos de grande escala (GRAHAM *et al.*, 2012). O efeito α é o fator-chave responsável pela contribuição de flutuações de pequena escala para dínamos de grande escala (FRICK *et al.*, 2006), e será descrito posteriormente neste trabalho.

Outra quantidade física importante para a compreensão de dínamos é a helicidade magnética, uma medida de torção e ligação de linhas de campo magnético que é uma ferramenta unificadora para o entendimento da evolução de campos de grande escala. Para compreender sua importância têm-se duas de suas propriedades básicas: (I) a helicidade magnética é uma quantidade conservativa; (II) a energia magnética associada a uma quantidade fixa de helicidade magnética é minimizada quando o sistema relaxa esta estrutura helicoidal para a maior escala disponível. (BLACKMAN, 2014),

Para uma melhor compreensão a respeito do dínamo, alguns mecanismos para a geração de campos magnéticos são descritos na próxima seção.

1.1 Mecanismos para a Geração de Campos Magnéticos

Biermann (1950) propôs um mecanismo para explicar a origem de correntes a partir de condição inicial nula, de modo que um processo auto-sustentável do dínamo dá-se através do movimento de um fluido altamente condutor através de um campo magnético fraco (campo semente), gerando corrente elétrica. Sendo um processo auto-sustentado, a energia elétrica produz um campo magnético que interage com o fluido em movimento, criando um campo magnético secundário. Este processo de dínamo auto-sustentável ficou conhecido como bateria de Biermann, sendo uma tentativa de elucidar a origem de campos magnéticos sementes (DUARTE, 2012).

Parker (1955) descreveu o processo de conversão da energia cinética em energia magnética como resultado de um processo chamado de *dínamo hidromagnético*. Ele foi um dos primeiros a compreender o mecanismo de dínamo denominado de efeito $\alpha - \Omega$ (alfa-ômega), tendo proposto que o movimento do fluido no interior do Sol poderia atuar como

um processo de dínamo se este movimento consistir de rotação diferencial (efeito Ω) com a combinação de movimentos helicoidais turbulentos, (efeito α). O efeito Ω transforma um campo magnético poloidal em um campo toroidal, enquanto o efeito α leva à formação de pequenos *loops* de campo magnético toroidal, criando a partir deles uma componente poloidal (PARKER, 1955).

Babcock (1961) - Leighton (1969) desenvolveram um modelo no qual considera-se a variação da configuração do campo magnético do Sol e testou a validade de seu modelo em uma série de fenômenos solares, segundo o qual o campo dipolar pode ser o resultado do decaimento dos pares de manchas solares (BABCOCK, 1961; ERASO, 2009).

O processo para explicar o modelo de Babcock-Leighton (B-L) pode ser separado em duas componentes: o campo magnético toroidal (azimutal), associado com as manchas solares e o campo poloidal (meridional), representado pelo campo polar (SANCHEZ *et al.*, 2014). O campo poloidal é envolto por uma rotação diferencial, produzindo um campo toroidal (HUGHES *et al.*, 2007). Os elementos chave para explicar o modelo envolvem advecção através da circulação meridional de campos magnéticos poloidais da superfície para baixo na zona de convecção, onde ambos são cortados pela rotação diferencial. O campo toroidal criado sobe devido ao empuxo magnético, produzindo manchas solares na superfície (NARAIN *et al.*, 2006). A Figura 1.2 exemplifica três processos responsáveis pelo ciclo solar (efeito Ω , efeito α , mecanismo de B-L). **(a)** Representa o campo poloidal inicial; **(b)** e **(c)** mostram a geração do campo toroidal devido a rotação diferencial, conhecido como efeito Ω ; **(d)** e **(e)** representam movimentos turbulentos em campos toroidais, criando campos poloidais secundários, (efeito α); **(f)** um novo campo poloidal é gerado de grande escala; **(g)** completa a primeira metade do ciclo magnético, gerando um novo campo poloidal, com polaridade oposta à inicial; **(h)** mostra o início do mecanismo de B-L, onde os tubos de fluxo toroidal flutuam para a superfície, formando manchas solares; **(i)** representa os campos das regiões bipolares reconectando-se entre si; **(j)** mostra o fluxo poloidal onde sofre advecção devido à circulação meridional nos pólos, um campo poloidal final é gerado **(g)** (SANCHEZ *et al.*, 2014).

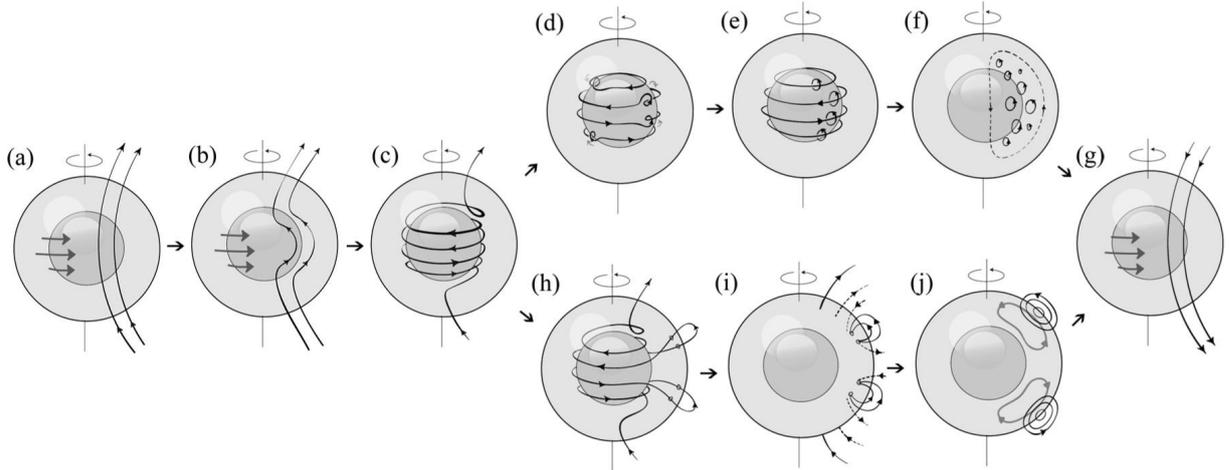


FIGURA 1.2 – Ilustração dos processos de conversão do campo poloidal e toroidal. **(a)** Campo poloidal inicial; **(b)** e **(c)** efeito Ω : geração do campo toroidal devido á rotação diferencial; **(d)** e **(e)** efeito α : movimentos turbulentos em campos toroidais criam campos poloidais; **(f)** um novo campo poloidal é gerado; **(g)** a primeira metade do ciclo magnético é completa gerando um novo campo poloidal; **(h)** início do mecanismo de B-L; **(i)** campos das regiões bipolares; **(j)** um campo poloidal final é gerado **(g)** (SANCHEZ *et al.*, 2014).

1.2 Dínamo $\alpha - \Omega$

Por sua composição gasosa, o Sol gira como um corpo não-rígido, ou seja, sua velocidade angular varia de acordo com a latitude, sendo que no equador sua velocidade de rotação é máxima e nos polos é mínima (GAURAT *et al.*, 2015). Nos anos 50, sabia-se que, devido à rotação diferencial e à condição de congelamento do plasma, um campo poloidal inicial poderia dar origem às linhas de campos toroidais (efeito Ω). O que era pouco compreendido, no entanto, era o processo inverso, ou seja, a regeneração de linhas de campos poloidais a partir das linhas toroidais (efeito α). No caso do efeito Ω , a condição de congelamento do plasma faz com que a rotação diferencial do Sol estique as linhas de campo magnético poloidais ao longo do equador solar, e desta forma, contribuindo para a formação de linhas de campo toroidal. Por sua vez, movimentos helicoidais torcem o campo toroidal, gerando um novo componente do campo poloidal (efeito α) (Figuras 1.3, 1.4) (CHAGAS, 2010).

Pode-se resumir em dois elementos básicos para a formação dos efeitos α e Ω :

- (i) Efeito Ω - Através da rotação diferencial de um campo poloidal inicial tem-se o efeito Ω , originando o campo toroidal.
- (ii) Efeito α - Através do movimento helicoidal turbulento do campo toroidal a componente do campo poloidal é regenerada, originando o efeito α .

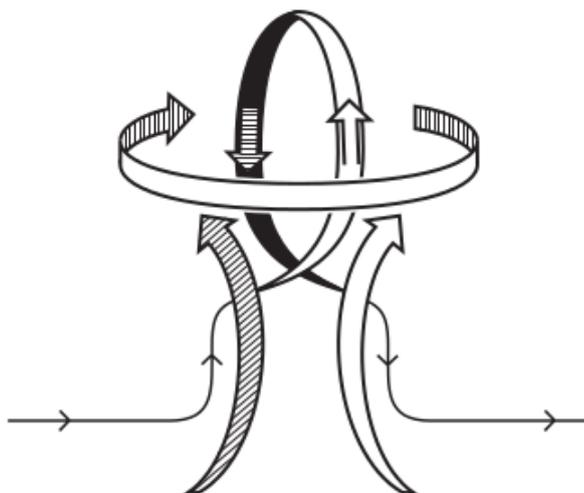


FIGURA 1.3 – Ilustração do efeito α . As linhas de campo toroidal são torcidas devido ao movimento convectivo turbulento helicoidal. O campo toroidal converte-se em um campo poloidal, com as setas indicando os movimentos do fluido. As linhas de campo elevadas e torcidas representam as linhas de campo magnético (PRIEST, 2014).

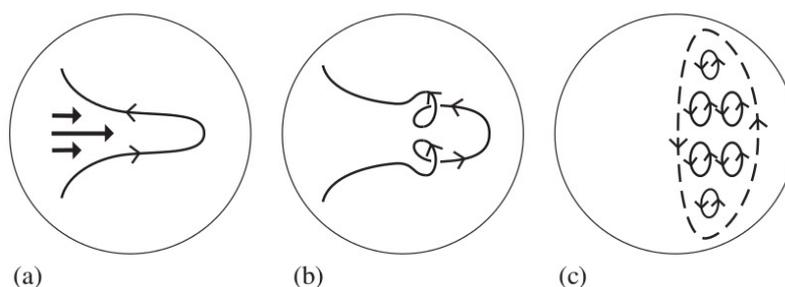


FIGURA 1.4 – Representação do modelo de dínamo de Parker. (a) As linhas de campo magnético são esticadas através da rotação diferencial, o campo toroidal é gerado, tem-se o efeito Ω . (b) Devido ao movimento turbulento as linhas de campo toroidal são torcidas. (c) Através do movimento turbulento vários loops magnéticos são produzidos (efeito α), gerando campo magnético de grande escala (PRIEST, 2014).

Em geral, os dínamos $\alpha - \Omega$ possuem oscilações com padrões de campo magnético propagando-se ao longo de linhas com Ω constante. Refere-se ao padrão de propagação de um dínamo $\alpha - \Omega$ como uma onda de dínamo (PARKER, 1955; YOSHIMURA, 1975).

Joseph Larmor considerava que corpos astrofísicos possuem campos magnéticos causados por um processo de dínamo auto-excitado (LARMOR, 1919). Vale notar que o teorema anti-dínamo de Cowling afirma que *um campo magnético axissimétrico constante não pode ser mantido através da ação do dínamo*, excluindo geometrias simples para campos magnéticos gerados pelo processo de dínamo (COWLING, 1934).

1.3 Dínamo α^2

Vários autores modelam o campo magnético de grande escala de corpos astrofísicos utilizando a teoria $\alpha - \Omega$ (MOFFATT, 1978; BRANDENBURG; SUBRAMANIAN, 2005; PRIEST, 2014). Esta teoria tem sido bem sucedida em reproduzir o comportamento cíclico da atividade solar. Não obstante, os dínamos sem rotação diferencial (cisalhamento) também podem gerar campos de grande escala, gerando assim o efeito α^2 (BLACKMAN *et al.*, 2002). O efeito α^2 é capaz de regenerar ambos os componentes de linhas de campos poloidais e toroidais (Figura 1.5) (BRANDENBURG; SUBRAMANIAN, 2005; PRIEST, 2014).

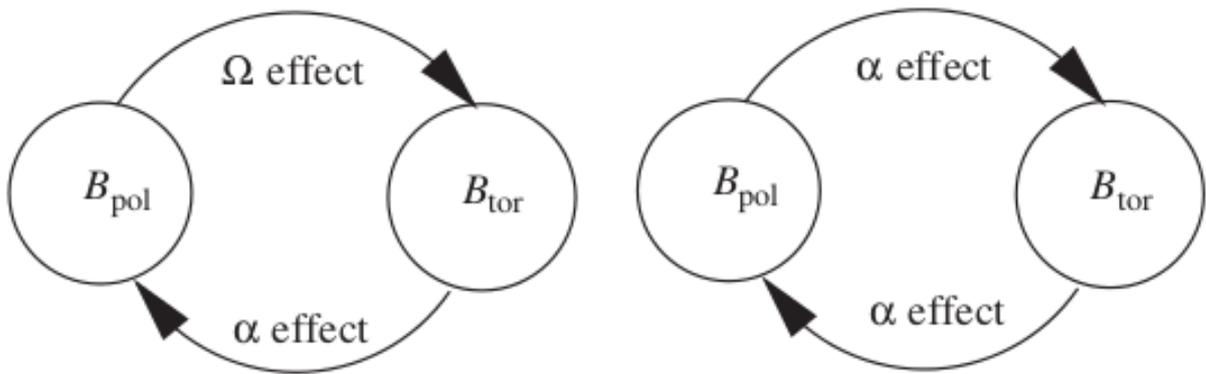


FIGURA 1.5 – Mecanismo de regeneração dos campos poloidais e toroidais. No lado esquerdo da figura tem-se o dínamo conhecido como $\alpha - \Omega$ e no lado direito o dínamo α^2 (BRANDENBURG; SUBRAMANIAN, 2005).

Os avanços na teoria do dínamo são relativamente recentes devido à natureza do assunto ser difícil, porém houve um progresso neste campo de pesquisa devido aos avanços das simulações numéricas durante os últimos anos. Um tratamento detalhado a respeito de dínamos pode ser encontrado no artigo de BRANDENBURG; SUBRAMANIAN (2005), onde os temas atuais de dínamos e seus desenvolvimentos históricos foram tratados de forma rigorosa e bastante clara.

1.4 Motivação, objetivo e estrutura da Dissertação

A teoria do dínamo foi desenvolvida a partir da abordagem do estudo do campo médio, baseando-se na aproximação de duas escalas, que sugere que o campo magnético consiste em um campo de grande escala e nas flutuações de pequena escala. Como comentado anteriormente, o efeito α pode levar à geração de campo magnético de grande escala e tem sido a principal quantidade de interesse para a geração do campo médio na teoria do dínamo.

A motivação desta dissertação de mestrado consiste em investigar a importância da

helicidade cinética para a produção de dínamos de grande escala, onde a mesma desempenha papel fundamental para a geração de campos magnéticos e para a ação do dínamo por sua relação com o efeito α . Para isso usou-se um modelo de dínamo α^2 . Ao longo deste trabalho variou-se a helicidade cinética para mostrar a evolução do campo magnético em função deste importante parâmetro. O principal objetivo é entender a ação do dínamo em grande escala tendo como parâmetro a helicidade cinética na ausência de rotação diferencial.

Esta Dissertação de Mestrado está estruturada da seguinte forma: o capítulo 2 trata sobre o modelo de dínamo de campo médio, assim como o modelo numérico. O capítulo 3 apresenta os resultados obtidos incluindo uma discussão a respeito dos mesmos. O diagrama de bifurcação variando a helicidade cinética é apresentado. O capítulo 4 apresenta a conclusão.

2 Modelo de Dínamo de Campo Médio

2.1 Teoria do Dínamo

A principal ideia da teoria do dínamo é que um campo magnético pode ser amplificado através de um processo de auto-sustentação. Campos magnéticos existem através do processo de magnetização permanente ou através de correntes elétricas em movimento. No primeiro caso, tem-se um campo magnético estacionário, porém a estacionaridade é uma característica raramente observada em corpos astrofísicos. Portanto isso leva a acreditar que os movimentos de partículas carregadas são os principais responsáveis por campos de corpos astrofísicos, abrindo, dessa maneira, a porta para o problema da geração e sustentação dessas correntes e dos campos magnéticos induzidos por elas (BRANDENBURG; SUBRAMANIAN, 2005).

Ernst Werner Von Siemens (1816-1892) em 1866 propôs a ideia de que uma matéria condutora pode transportar correntes elétricas quando colocada em movimento, amplificando, dessa forma, os campos pré-existentes. Esse mecanismo proposto é a origem da chamada teoria do dínamo: a definição de dínamo consiste, então, em um processo que converte energia cinética em energia magnética. Para descrever esse processo de conversão de energia faz-se uso da chamada equação de indução demonstrada na próxima seção (DEL SORDO, 2011).

O restante do capítulo é dedicado a descrever a formulação matemática para processos de dínamo no regime magnetohidrodinâmico, e as ferramentas computacionais básicas que são necessárias para uma compreensão adequada dos campos magnéticos em corpos astrofísicos.

2.2 Equações da Magnetohidrodinâmica (MHD)

Estrelas, planetas e galáxias, entre outros corpos astrofísicos, apresentam gás parcialmente ou totalmente ionizado (conhecido como plasma) e transportam correntes elétricas, gerando campos magnéticos. O emprego das equações de Maxwell da teoria eletromagnética com as equações da dinâmica de fluidos (hidrodinâmica) descreve os fenômenos de plasma de um ponto de vista conhecido como teoria Magnetohidrodinâmica (MHD). A abordagem do estudo da MHD teve início com Hannes Alfvén, que utilizou o termo pela primeira vez em 1942. A teoria MHD é o modelo matemático que estuda as interações de baixas frequências entre fluidos eletricamente condutores em um campo magnético. Nos gases ionizados densos, a frequência de colisão é suficientemente elevada para que exista uma ampla faixa de frequências, de modo que seja válida a lei de Ohm na sua forma simples. Geram-se campos elétricos em virtude de movimentos do fluido que provocam um fluxo de corrente. O movimento mecânico do sistema pode, então, ser descrito em termos de um único fluido condutor com as variáveis hidrodinâmicas usuais - densidade, temperatura e velocidade (JACKSON, 1962).

A teoria MHD descreve o movimento de um fluido eletricamente condutor que está imerso em um campo magnético. Assim, a evolução de um fluido MHD é descrita por um conjunto de equações composto por:

- (a) Equação de estado (Termodinâmica);
- (b) Equação dos campos eletromagnéticos (Eletrodinâmica);
- (c) Equação de Navier-Stokes (Hidrodinâmica).

Reunindo as equações fundamentais de Maxwell, expressas pelas leis de Ampère-Maxwell, lei de Faraday, lei de Ohm generalizada, lei de Gauss elétrica e lei de Gauss magnética (ausência de monopolos magnéticos), têm-se o conjunto de equações em sua forma diferencial. Em unidades SI, as equações de Maxwell apresentam a seguinte forma:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0, \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.5)$$

onde \mathbf{B} é o campo magnético, \mathbf{E} o campo elétrico, \mathbf{J} a densidade de corrente elétrica, μ_0 é a permeabilidade magnética no vácuo, ε_0 a constante dielétrica, ρ a densidade de carga, $\sigma(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ é a corrente induzida. O termo de corrente de deslocamento na lei de Ampère-Maxwell Eq. (2.1) pode ser desprezada se a velocidade do plasma é muito menor que a velocidade da luz ($V \ll c$).

2.2.1 Equação de Indução

Substituindo a Eq. (2.3) em (2.1) e aplicando o rotacional ($\nabla \times$), obtém-se

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sigma (\nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.6)$$

onde o primeiro termo do lado direito é dado pela Eq. (2.2). Aplicando a seguinte identidade vetorial na Eq. (2.6)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{a} - \nabla^2 \mathbf{a},$$

obtém-se

$$\nabla \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{B})}_0 - \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \sigma \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right). \quad (2.7)$$

Reescrevendo a Eq. (2.7) tem-se

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \nabla^2 \mathbf{B} = 0, \quad (2.8)$$

onde $\eta = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$ é a difusividade magnética. Chegou-se a expressão Eq. (2.9) conhecida como equação de indução. É a equação fundamental que governa a geração e comportamento dos campos magnéticos

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (2.9)$$

O primeiro termo do lado direito da Eq. (2.9) está ligado ao movimento convectivo do fluido, sendo que o segundo termo, representa o termo difusivo da equação.

A partir da Eq. (2.9) pode-se analisar dimensionalmente para uma melhor compreensão do significado físico. Considerando t e l como unidades de tempo e comprimento, têm-se:

$$\left[\frac{B}{t} \right] \simeq \left[\frac{vB}{l} \right] + \left[\frac{\eta B}{l^2} \right]. \quad (2.10)$$

Como visto anteriormente obteve-se os termos de convecção e difusão na equação de indução 2.9, a razão entre os termos $\frac{v}{l}$ e $\frac{\eta}{l^2}$ é conhecida como número de Reynolds magnético:

$$R_m = \frac{vl}{\eta}. \quad (2.11)$$

Considerando o caso em que $R_m \ll 1$, o segundo termo à direita na equação de indução Eq. (2.9), domina sobre o primeiro, logo a evolução do campo magnético é governada pela equação de difusão,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (2.12)$$

Agora considerou-se o caso em que $R_m \gg 1$, a evolução do campo magnético é governada pelo primeiro termo da Eq. (2.9), $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, que é conhecido como termo indutivo. Reescrevendo este termo, pode-se ter uma visão mais clara do mesmo, considerando $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, tem-se:

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (2.13)$$

Analisando os termos da Eq. (2.13), tem-se que o primeiro termo tem efeito advectivo, o segundo termo estica ou alonga as linhas de campo magnético, podendo até mesmo amplificá-lo exponencialmente a uma taxa que depende do gradiente local do campo de velocidades, o terceiro termo tem efeito compressivo (ERASO, 2009).

2.2.2 Equação de Momento

A segunda lei de Newton para um elemento de fluido pode ser expressa

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (2.14)$$

onde ρ é a densidade de massa (massa por unidade de volume), $d\mathbf{v}$ é a taxa de variação da velocidade do fluido e \mathbf{F} é a força que atua sobre o elemento de fluido $\delta\mathbf{V}$.

Considerando um volume fechado e as forças que atuam sobre um elemento de fluido $\delta\mathbf{V}$ com densidade de massa ρ $\delta\mathbf{V}$ obteve-se a equação de momento em MHD de forma simplificada (heurística). Considere uma partícula de carga q_j movendo-se com velocidade \mathbf{v}_j através de um campo eletromagnético \mathbf{E} , \mathbf{B} sujeita à força de Lorentz

$$\mathbf{F} = q_j \left(\mathbf{E} + \mathbf{v}_j \times \frac{\mathbf{B}}{c} \right), \quad (2.15)$$

a força que age sobre o fluido é a soma das forças que atuam sobre partículas individuais $\delta q \mathbf{E} + \delta \mathbf{J} \times \mathbf{B}/c$, onde δq é a carga total e $\delta \mathbf{J}$ a corrente elétrica. Devido à quase-neutralidade das cargas, onde a densidade de cargas positivas e negativas são praticamente iguais, apenas a parte magnética da força de Lorentz Eq. (2.15) contribui,

$$\delta \mathbf{V} \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (2.16)$$

com $\delta \mathbf{J} = \mathbf{j} \delta \mathbf{V}$, onde \mathbf{j} é a densidade de corrente.

Condidere-se o movimento que resulta quando uma distribuição não uniforme de pressão acelera um elemento de fluido de densidade ρ . A força líquida que atua sobre um volume é dada pela integral de pressão sobre uma superfície $d\mathbf{S}$ que delimita o volume

$$\mathbf{F} = - \oint p d\mathbf{S}. \quad (2.17)$$

O sinal negativo da Eq. (2.17) indica que a força atua na direção oposta à normal orientada para fora do elemento de superfície $d\mathbf{S}$. A integral de superfície da pressão sobre $d\mathbf{S}$ pode ser transformada em uma integral de volume do gradiente de pressão dentro de $\delta \mathbf{V}$ através da relação vetorial (teorema da divergência) (BISKAMP, 2003)

$$- \oint p d\mathbf{S} = - \int \nabla p \delta \mathbf{V} = -\delta \mathbf{V} \nabla p, \quad (2.18)$$

onde ∇p é o gradiente de pressão.

A força gravitacional pode ser expressa como

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{g}, \quad (2.19)$$

onde \mathbf{g} é a aceleração gravitacional e pode ser escrita em termos do potencial gravitacional ϕ_g

$$\mathbf{F} = -\nabla \phi_g. \quad (2.20)$$

A força viscosa é semelhante à força de pressão Eq. (2.18), onde a viscosidade atua sobre a superfície do elemento de volume,

$$\oint \sigma^\mu \cdot d\mathbf{S} = \delta \mathbf{V} \nabla \cdot \sigma^\mu, \quad (2.21)$$

onde $\sigma^{(\mu)} = \left\{ \sigma_{ij}^{(\mu)} \right\}$ é o tensor viscoso de stress,

$$\sigma_{ij}^{(\mu)} = \mu \left[(\partial_i v_j + \partial_j v_i) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v} \right], \quad (2.22)$$

a viscosidade μ é assumida como constante. Utiliza-se a viscosidade cinemática $\nu = \frac{\mu}{\rho}$. O primeiro termo do lado direito da Eq (2.22) é chamado de tensor de tensão ou tensor de deformação

$$w_{ij} = \partial_i v_j + \partial_j v_i. \quad (2.23)$$

Ao somar essas contribuições da força, obtêm-se a equação de momento, ou equação de movimento,

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \rho (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g} + \mu \left(\nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} \right). \quad (2.24)$$

A equação de momento (2.24) representa a segunda lei de Newton. O lado esquerdo da Eq. (2.24) é a aceleração de um volume unitário do plasma multiplicado pela sua massa, os termos no lado direito representam a força que atua nesse volume devido ao gradiente de pressão (termo $-\nabla p$), à força de Lorentz, força da gravidade e a viscosidade (BISKAMP, 2003).

2.2.3 Equação de Continuidade

A conservação de massa leva à equação de continuidade para a densidade de massa. Para expressar tal equação, considere-se um volume fechado V limitado através de uma superfície fixa S contendo um fluido com densidade de massa ρ , onde a massa total contida é

$$M = \int \rho dV. \quad (2.25)$$

A derivada de M em relação a t é dada por

$$\frac{dM}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (2.26)$$

A massa que flui através de um elemento de superfície $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} dS$ é $\rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\hat{\mathbf{n}}$ representa o vetor unitário apontando para fora do elemento. A integral de $\rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$ é igual

a $-dM/dt$:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.27)$$

A Eq. (2.27) representa que a variação de massa dentro de V é igual à massa que entra ou sai da superfície.

Aplicando o teorema de Gauss ou teorema da divergência, tem-se que:

$$\oint_S \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) dV, \quad (2.28)$$

de modo que

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] dV = 0. \quad (2.29)$$

A Eq. (2.29) deve ser válida para todos os volumes possíveis. Portanto, se o integrando for nulo, obtém-se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}). \quad (2.30)$$

A Eq. (2.30) é chamada de *equação de continuidade*. Ela expressa a *conservação de massa* no referencial Euleriano (BISKAMP, 2003).

2.3 Teoria de Campo Médio

As deduções mostradas nesta seção foram extraídas (MOFFATT, 1978; KRAUSE; RÄDLER, 1980; DAL PINO, 2000). Durante a descrição desta seção, admite-se que o movimento alatório seja caracterizado por uma escala de comprimento l , o qual é pequeno se comparado com a escala global L de variação das quantidades médias (Figura 2.1).

Uma compreensão apropriada para o processo de dínamo pode ser obtida com a teoria de campo médio (MOFFATT, 1978; KRAUSE; RÄDLER, 1980). A ideia fundamental sobre a qual se baseia essa teoria é a abordagem das duas escalas, que consiste em uma decomposição das variáveis de campo em partes médias e flutuantes. Feita a decomposição, substitui-se os campos na equação de indução (2.9).

Definimos o operador de média como:

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v} \rangle + \mathbf{v}' \text{ e } \mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{B}'. \quad (2.31)$$

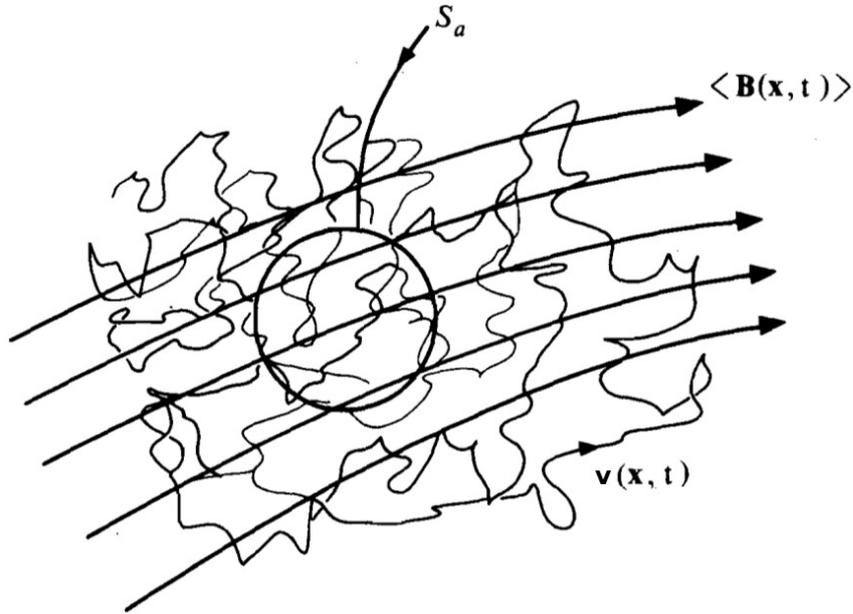


FIGURA 2.1 – Ilustração do movimento aleatório do campo de velocidade $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, variando na pequena escala de comprimento l e o campo magnético médio variando na escala global L . A média é definida sobre a esfera S_a , de raio a onde $l \ll a \ll L$ (MOFFATT, 1978).

A decomposição de (2.31) faz sentido desde que $\langle \mathbf{v}' \rangle = \langle \mathbf{B}' \rangle = 0$. A (2.31) pode ser interpretada fisicamente da seguinte maneira. A velocidade e os campos magnéticos caracterizam-se por uma componente que varia lentamente, $\langle \mathbf{v} \rangle$ e $\langle \mathbf{B} \rangle$ variam na característica de campos de grande escala L , além das partes que flutuam rapidamente, $\langle \mathbf{v}' \rangle$ e $\langle \mathbf{B}' \rangle$, que variam na escala muito menor. As médias do volume são calculadas em uma escala intermediária a tal que

$$l \ll a \ll L, \quad (2.32)$$

onde define-se o operador média de uma determinada quantidade localizada dentro de uma esfera de raio intermediário a . Sendo assim, o operador média de $\psi(\mathbf{x}, t)$ é definido como:

$$\langle \psi(\mathbf{x}, t) \rangle_a = \frac{3}{4\pi a^3} \int_{|\xi| < a} \psi(\mathbf{x} + \xi, t) d^3\xi. \quad (2.33)$$

Nota-se que o tempo t permanece constante na média espacial. Pode-se igualmente usar escalas de tempo em vez das escalas espaciais para definir escalas intermediária τ . Se T é a escala de tempo de variação de campos globais, ou seja, descreve como o sistema evolui como um todo (por exemplo, o ciclo de 11 anos do campo magnético solar), então τ tem que ser muito menor que a escala de tempo T , e muito maior do que o tempo que o fluido leva para atravessar uma única célula convectiva. Se \mathbf{v}' é a velocidade convectiva,

então a escala de tempo é dada por l/v' . Logo,

$$\frac{l}{v'} \ll \tau \ll T, \quad (2.34)$$

define-se a média no tempo como

$$\langle \psi(\mathbf{x}, t) \rangle_\tau = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \psi(\mathbf{x}, t + t') dt', \quad (2.35)$$

onde t tem sentido somente em uma escala de tempo T global. Assumindo então que

$$\langle \psi(\mathbf{x}, t) \rangle_a = \langle \psi(\mathbf{x}, t) \rangle_\tau, \quad (2.36)$$

obtem-se o valor de cada função ψ , calculando a média sobre um conjunto de sistemas (hipótese ergódica), em um processo ergódico, supõe-se que as médias no tempo são iguais às médias no espaço. O operador média será denotada por $\langle \rangle$ ou por uma barra ($\bar{}$), ambos possuem o mesmo significado.

Desvios da média são flutuações periódicas e podem ser denotadas por “linhas”:

$$\psi'(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}, t) - \bar{\psi}(\mathbf{x}, t), \quad (2.37)$$

de forma que

$$\langle \psi' \rangle = 0, \quad (2.38)$$

ou seja, as médias das flutuações são nulas.

Usando a Eq. (2.37), escreve-se a Equação de indução (2.9) como:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{B}} + \mathbf{B}') \right\rangle = \left\langle \nabla \times [(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') \times (\bar{\mathbf{B}} + \mathbf{B}')] + \eta \nabla^2 (\bar{\mathbf{B}} + \mathbf{B}') \right\rangle. \quad (2.39)$$

Como as médias das flutuações são nulas devido a (2.38), supondo que $\langle df/dt \rangle = d\langle f \rangle/dt = d\langle 0 \rangle/dt = 0$, ou seja, a média da derivada é igual à derivada da média, e a Eq. (2.39) fica

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = \nabla \times (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}} + \langle \mathbf{v}' \times \mathbf{B}' \rangle) + \eta \nabla^2 \bar{\mathbf{B}}. \quad (2.40)$$

Observa-se que na Eq. 2.40 aparece um termo associado a um produto de flutuações ($\langle \mathbf{v}' \times \mathbf{B}' \rangle$). Este termo é conhecido como força eletromotriz média (FEM). A FEM é importante, pois é a contribuição dos movimentos em pequena escala em relação às

grandes escalas, e é representado como

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{v}' \times \mathbf{B}' \rangle. \quad (2.41)$$

Calcula-se a força eletromotriz por meio de um modelo estatístico de convecção. Primeiro, obtém-se uma equação de evolução para \mathbf{B}' . Demonstra-se isso subtraindo (2.40) de (2.39). Através dessa substituição obtém-se

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} = \nabla \times [\bar{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}' + \mathbf{v}' \times \bar{\mathbf{B}}] + \eta \nabla^2 \mathbf{B}' + \nabla \times [\mathbf{v}' \times \mathbf{B}' - \langle \mathbf{v}' \times \mathbf{B}' \rangle]. \quad (2.42)$$

Considera-se uma aproximação em que o campo de flutuação magnético é muito menor que a média, ou seja, $\mathbf{B}' \ll \bar{\mathbf{B}}$, então os dois últimos termos da Eq. (2.42) são desprezíveis em relação a $\mathbf{v}' \times \bar{\mathbf{B}}$. Escreve-se a Eq. (2.42) na seguinte forma

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 - \nabla \times (\bar{\mathbf{v}} \times) \right] \mathbf{B}' = \nabla \times (\mathbf{v}' \times \bar{\mathbf{B}}). \quad (2.43)$$

De forma que se tiver $\bar{\mathbf{v}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$, podemos obter \mathbf{B}' para qualquer campo de velocidade flutuante \mathbf{v}' .

O termo do lado direito da Eq. (2.43) atua como um termo fonte gerando o campo flutuante \mathbf{B}' . Se suposermos que o campo flutuante é estacionário, então a linearidade da Eq. (2.43) garante que os campos \mathbf{B}' e $\bar{\mathbf{B}}$ estejam linearmente relacionados. A FEM $\langle \mathbf{v}' \times \mathbf{B}' \rangle$ e $\bar{\mathbf{B}}$ são relacionados linearmente. Usa-se o fato de que se $g(\mathbf{x})$ depende linearmente do valor local de $f(\mathbf{x})$, onde $g(\mathbf{x})$ é um campo arbitrário e $f(\mathbf{x})$ representa qualquer coordenada espacial, a forma mais geral da dependência é:

$$g = \alpha f + \beta_k \partial_k f + \gamma_{kl} \partial_k \partial_l f + \dots, \quad (2.44)$$

onde $g = \langle \mathbf{v}' \times \mathbf{B}' \rangle$ e $f = \bar{\mathbf{B}}$ são vetores, logo α é um tensor de segunda ordem, β um de terceira ordem e γ de quarta ordem. Fazendo $f = \bar{\mathbf{B}}$ e expressando adequadamente as ordens dos tensores, a Eq. (2.44) passa a ser escrita como

$$\langle \mathbf{v}' \times \mathbf{B}' \rangle_i = \alpha_{ij} \bar{\mathbf{B}}_j + \beta_{ijk} \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_j}{\partial x_k} + \gamma_{ijkl} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{B}}_j}{\partial x_k \partial x_l} + \dots,$$

ou

$$\langle \mathbf{v}' \times \mathbf{B}' \rangle_i = \alpha_{ij} \bar{\mathbf{B}}_j + \beta_{ijk} \partial_k \bar{\mathbf{B}}_j + \gamma_{ijkl} \partial_k \partial_l \bar{\mathbf{B}}_j + \dots \quad (2.45)$$

Se \mathbf{v}' for isotrópico, α e β devem ser:

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}. \quad (2.46)$$

$$\beta_{ijk} = -\beta \varepsilon_{ijk}, \quad (2.47)$$

onde ε_{ijk} é o símbolo de permutação (tensor de Levi-Civita):

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j, j = k \text{ ou } k = i \\ +1 & \text{se } (i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\} \\ -1 & \text{se } (i, j, k) \in \{(1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3)\} \end{cases}$$

e δ_{ij} é o tensor delta de Kronecker, Substituindo os tensores (2.46) e (2.47) em (2.45), tem-se que

$$\langle \mathbf{v}' \times \mathbf{B}' \rangle = \alpha \bar{\mathbf{B}} - \beta \nabla \times \bar{\mathbf{B}} + \dots \quad (2.48)$$

O termo $\alpha \bar{\mathbf{B}}$ da Eq. (2.48) descreve o efeito α , onde α é um pseudo-escalar $\alpha \rightarrow -\alpha$ para $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$, e β é um escalar. Outros efeitos, tais como, o efeito γ que é um termo advectivo conhecido como bombeamento magnético e β que é o tensor de difusidade magnética (ERASO, 2009), não foram considerados neste trabalho.

2.3.1 Modelo de Campo Médio para o Dínamo α^2

Na seção 1.3 estudou-se como o efeito α^2 é capaz de regenerar tanto o campo poloidal e o campo toroidal. Pode-se encontrar soluções para a equação de indução para o modelo de dínamo α^2 a partir de sistemas onde a rotação diferencial (cisalhamento) não atua em grande escala. O mecanismo de funcionamento deste tipo de dínamo é devido movimentos turbulentos. Esse modelo é chamado de dínamo α^2 .

Para obter o modelo matemático de dínamo α^2 combina-se a Eq. (2.48) com a Eq.(2.40), tem-se

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = \nabla \times (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}) + \eta \nabla^2 \bar{\mathbf{B}} + \nabla \times (\alpha \bar{\mathbf{B}} - \beta \nabla \times \bar{\mathbf{B}}), \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = \nabla \times (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}) + \nabla \times \alpha \bar{\mathbf{B}} + \eta \nabla^2 \bar{\mathbf{B}} - \beta \left(\underbrace{\nabla \nabla \cdot \bar{\mathbf{B}}}_0 - \nabla^2 \bar{\mathbf{B}} \right). \quad (2.50)$$

A equação do campo médio agora assume a seguinte forma

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = \nabla \times (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}) + \nabla \times \alpha \bar{\mathbf{B}} + (\eta + \beta) \nabla^2 \bar{\mathbf{B}}. \quad (2.51)$$

Como $\eta \ll \beta$ costuma-se deixar apenas o coeficiente de difusão turbulenta β (BISKAMP, 2005).

Escrevendo a Eq. (2.51) em coordenadas cilíndricas (r, ϕ e z), tem-se a seguinte forma

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{r} \mathbf{v}_p \cdot \nabla r \mathbf{A} = \alpha \bar{\mathbf{B}}_\phi + \eta_t \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) \mathbf{A}, \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_\phi}{\partial t} + r \mathbf{v}_p \cdot \nabla \frac{1}{r} \bar{\mathbf{B}}_\phi = r \bar{\mathbf{B}}_p \cdot \nabla \Omega + \hat{\mathbf{e}}_\phi \cdot (\nabla \times \alpha \bar{\mathbf{B}}_p) + \eta_t \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) \bar{\mathbf{B}}_\phi, \quad (2.53)$$

com

$$\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{B}}_p + \hat{\mathbf{e}}_\phi \bar{\mathbf{B}}_\phi, \quad \bar{\mathbf{B}}_p = \nabla \times \mathbf{A} \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_p + r \Omega \hat{\mathbf{e}}_\phi.$$

Se o efeito α for nulo, tem-se apenas advecção e difusão na Eq. (2.52) e portanto, o campo magnético poloidal tende a zero. A Eq. (2.53) possui apenas os termos de advecção e difusão e, portanto, o campo magnético toroidal também tende a zero. Assim para a produção de dínamo o efeito α deve ser não-nulo. Na Eq. (2.53), o termo $r \bar{\mathbf{B}}_p \cdot \nabla \Omega$ é o efeito Ω , o qual utiliza o campo magnético poloidal $\bar{\mathbf{B}}_p$ para alimentar o campo magnético toroidal $\bar{\mathbf{B}}_\phi$, ou seja, a rotação diferencial atua esticando o campo magnético poloidal criando o campo magnético toroidal (Figura 2.2). O termo $\nabla \times \alpha \bar{\mathbf{B}}_p \simeq \alpha \mathbf{J}$ é o efeito α , o qual corresponde a um movimento de torção das linhas de campo toroidal. Pode-se notar que o efeito α é crucial para a geração de campo magnético médio, sendo responsável por regenerar ambos os componentes de campo poloidal e toroidal, gerando dessa forma o efeito α^2 (BISKAMP, 2005).

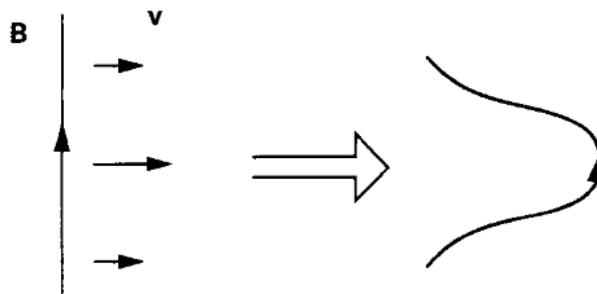


FIGURA 2.2 – Geração do campo magnético toroidal através da rotação diferencial (BISKAMP, 2005).

2.4 Modelo Numérico

Diversos processos em plasmas astrofísicos têm sido investigados através da teoria MHD (RUDIGER; HOLLERBACH, 2004; GOEDBLOED; POEDTS, 2004). Um dos tópicos de interesse é o estudo da geração e evolução de campos magnéticos nesses plasmas, contudo as equações de MHD são não-lineares e suas soluções são obtidas através de soluções numéricas.

A aplicação da teoria MHD em diversas áreas da astrofísica tem fornecido excelentes resultados e ajudado a elucidar sobre importantes fenômenos. Pode-se por exemplo, realizar experimentos numéricos onde se testa teorias vigentes sobre processos astrofísicos. Também pode-se usar as simulações MHD para interpretar dados observacionais. A escolha do método numérico utilizado na obtenção das equações MHD depende da natureza do fenômeno físico a ser estudado. Por exemplo, no caso de um fluido turbulento é necessário que o método escolhido seja de alta precisão e baixa difusão numérica. Um esquema numérico que não atende esses quesitos produz resultados que podem não ser confiáveis para reproduzir as características de interesse da turbulência. Nesta seção apresenta-se os principais aspectos da metodologia numérica utilizada nesta dissertação.

2.4.1 O Código PENCIL

Desenvolvido especialmente para o estudo de turbulência em plasmas astrofísicos, o PENCIL é um código que resolve as equações MHD por meio de métodos de diferenças finitas de alta ordem para derivadas espaciais. Para obter a máxima precisão as derivadas espaciais são aproximadas por um polinômio de sexta ordem e a marcha no tempo é feita pelo método Runge-Kutta de alta ordem. O código está disponibilizado ao público em geral, [http : //pencil-code.nordita.org/](http://pencil-code.nordita.org/) , e é constantemente melhorado por considerável rede de colaboradores. O PENCIL já foi usado em vários estudos de dínamo MHD. Podemos citar por exemplo,

- CATTANEO; HUGHES (1996) - nos estudos da saturação do efeito α no regime não-linear,
- BRANDENBURG (2001) - em investigações sobre a transferência inversa de energia no efeito α ,
- REMPEL *et al.* (2009) - na avaliação de um novo tipo de intermitência do dínamo com forçante ABC.

O PENCIL é escrito em FORTRAN90 e pode ser compilado para rodar em série ou em paralelo. A paralelização é feita utilizando-se a biblioteca MPI (*Message Passage Interface*) com o domínio particionado na direção z e/ou y de acordo com o número de processadores escolhido. O código é altamente modular, permitindo a escolha do tipo de domínio e de qual termos vão ser considerados nas equações MHD que regem a evolução do sistema.

2.4.2 Malha

O domínio usado nas simulações MHD deste trabalho consiste em um cubo com lados $L_x = L_y = L_z = 2\pi$, como mostrado na Figura 2.3. O domínio é discretizado em uma malha cartesiana uniforme em todas as direções. Nas simulações usou-se 64^3 pontos o que deu um espaçamento de malha $\Delta x = 2\pi/64 = 0.098$.

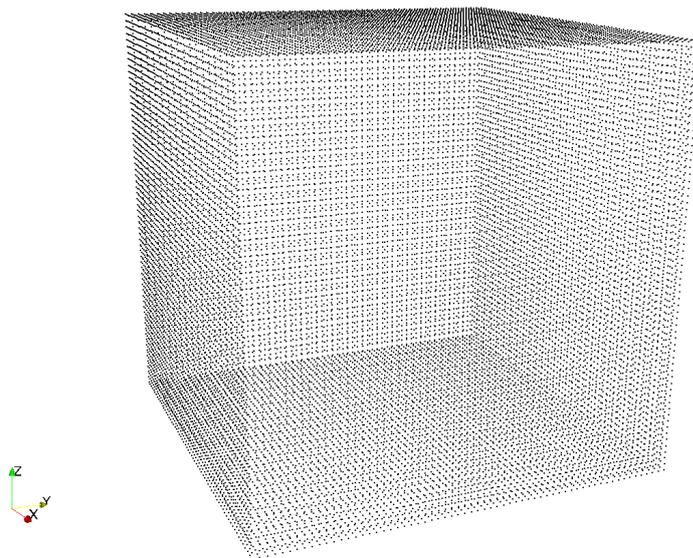


FIGURA 2.3 – Pontos do domínio computacional.

2.4.2.1 Discretização Espacial e Marcha no Tempo

As equações MHD são resolvidas pelo PENCIL por meio de métodos de diferenças finitas. Primeiramente, as derivadas espaciais são aproximadas por um operador de ponto. No caso das derivadas espaciais de primeira ordem, o operador é

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \approx \delta_x = \frac{1}{60\Delta x} [& -()_{p-3,q,r} + 9()_{p-2,q,r} - 45()_{p-1,q,r} \\ & + 45()_{p+1,q,r} - 9()_{p+2,q,r} + ()_{p+3,q,r}], \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \approx \delta_y = \frac{1}{60\Delta y} [& -()_{p,q-3,r} + 9()_{p,q-2,r} - 45()_{p,q-1,r} \\ & + 45()_{p,q+1,r} - 9()_{p,q+2,r} + ()_{p,q+3,r}], \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \approx \delta_z = \frac{1}{60\Delta x} [& -()_{p,q,r-3} + 9()_{p,q,r-2} - 45()_{p,q,r-1} \\ & + 45()_{p,q,r+1} - 9()_{p,q,r+2} + ()_{p,q,r+3}], \end{aligned} \quad (2.56)$$

As equações de diferenças ordinárias obtidas da aplicação do operador de ponto, Eqs (2.61)-(2.65), são então avançadas no tempo pelo método Runge Kutta de terceira ordem,

$$\varphi^{(n+1)} = \varphi^n + \frac{1}{6}(r_1 + 4r_2 + r_3) \quad (2.57)$$

com

$$\begin{aligned} r_1 &= F(\varphi_n, t_n), \\ r_2 &= F(\varphi_n + r_1 \frac{\Delta t}{2}, t_n + \frac{\Delta t}{2}), \\ r_3 &= F(\varphi_n - r_1 \Delta t + 2r_2 \Delta t, t_n + \Delta t), \end{aligned}$$

onde $F(\varphi, t)$ é o lado direito da equação de diferenças obtida para uma variável φ ,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(\varphi, t), \quad (2.58)$$

e $\varphi^n \equiv \varphi(t_n)$. Onde o passo no tempo é dado por

$$\Delta t = \text{CFL} \frac{\Delta x}{|v|},$$

onde, CFL é a constante de Courant-Friedrich-Lewy, mantida em CFL = 0.4, com passo de tempo variável.

2.4.3 Condições Iniciais e de Contorno

Inicialmente, $\ln(\rho)$ e a velocidade do plasma são nulos. O potencial vetor magnético inicial é modelado por um ruído com distribuição gaussiana com média zero e desvio padrão igual a 10^{-3} que age como um campo semente. Nesta dissertação empregou-se condições de contorno periódicas. Essas condições assumem que o valor da variável no ponto final da malha em uma dada direção é igual ao valor da variável no ponto inicial da malha nessa direção. Por exemplo, no caso 1D isso implica que

$$\varphi_{i=0} = \varphi_{i=Nx}, \quad (2.59)$$

e

$$\varphi_{i=-1} = \varphi_{i=Nx-1}. \quad (2.60)$$

Assim, as condições periódicas assumem que os lados opostos do domínio espacial são uma continuação um do outro. As condições de contorno periódica são amplamente usadas em estudos de dínamos (BRANDENBURG, 2001; REMPEL *et al.*, 2016).

2.4.4 O Modelo Numérico de Dínamo α^2

O modelo utilizado neste trabalho é o protótipo do modelo de dínamo α^2 usado por BRANDENBURG (2001), onde um gás compressível isotérmico é considerado, com velocidade do som constante c_s , viscosidade dinâmica constante μ , difusividade magnética constante η e permeabilidade magnética constante μ_0 . O conjunto de equações MHD compressíveis a seguir é resolvido através do **PENCIL CODE**

$$\partial_t \ln \rho + \mathbf{v} \cdot \nabla \ln \rho + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.61)$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p / \rho + \mathbf{J} \times \mathbf{B} / \rho + (\mu / \rho) (\nabla^2 \mathbf{v} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} / 3) + \mathbf{f}, \quad (2.62)$$

$$\partial_t \mathbf{A} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \mu_0 \mathbf{J}, \quad (2.63)$$

a Eq. (2.61) é a equação de continuidade, a Eq. (2.62) é a equação de momento, a Eq. (2.63) é a equação de indução, onde ρ é a densidade, \mathbf{v} é a velocidade do fluido, \mathbf{A} é o potencial vetor magnético, $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} / \mu$ é a densidade de corrente, p é a pressão, \mathbf{f} é um forçante externo e a partir de uma equação de estado para um gás ideal e isotérmico, $\nabla p / \rho = c_s^2 \nabla \ln \rho$, onde $c_s^2 = \gamma p / \rho$ é assumido como constante. As unidades não dimensionais são adotadas definindo $k_1 = c_s = \rho_0 = 1$, onde $\rho = \langle \rho \rangle$ é a média espacial de ρ e k_1 é o menor número de onda na caixa, que tem lados $L = 2\pi$ e condições de contorno periódicas. Assim, a unidade de tempo é $(c_s k_1)^{-1}$, o espaço é medido k_1^{-1} , \mathbf{v} em unidades de c_s , \mathbf{B} em unidades de $(\mu_0 \rho_0)^{1/2} c_s$, ρ em unidades de ρ_0 e a unidade de viscosidade

$\nu \equiv \mu/\rho$ e a difusidade magnética η é c_s/k_1 .

2.4.4.1 Função Forçante

A energia é injetada no sistema por meio de uma função de forçamento \mathbf{f} que é definida por (BRANDENBURG, 2001; REMPEL *et al.*, 2013)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left\{ N \mathbf{f}_{\mathbf{k}(t)} \exp [i \mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{x} + i \phi(t)] \right\}, \quad (2.64)$$

onde $\mathbf{k}(t) = (k_x, k_y, k_z)$ é um vetor de onda dependente do tempo e $\mathbf{x} = (x, y, z)$ é a posição. $\phi(t)$ com $|\phi| < \pi$ é uma fase aleatória. Em termos dimensionais, o fator de normalização é escolhido para ser $N = f_0 c_s (k c_s / \delta t)^{1/2}$, onde f_0 é um fator não-dimensional, $k = |\mathbf{k}|$, e δt é o comprimento do passo de integração no tempo. Concentrou-se no caso em que $|\mathbf{k}|$ esta ao redor $k_f = 5$ e um dentre 350 vetores são selecionados aleatoriamente a cada passo de tempo, com $4.5 < |\mathbf{k}| < 5.5$. O operador $\mathbf{f}_{\mathbf{k}}$ é dado por

$$\mathbf{f}_{\mathbf{k}} = \frac{i \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{e}) - \sigma |\mathbf{k}| (\mathbf{k} \times \mathbf{e})}{\sqrt{1 + \sigma^2 k^2} \sqrt{1 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e})^2 / k^2}}, \quad (2.65)$$

onde \mathbf{e} é um vetor arbitrário unitário necessário para gerar um vetor $\mathbf{k} \times \mathbf{e}$ que é perpendicular a \mathbf{k} . Tem-se que $|\mathbf{f}_{\mathbf{k}}|^2 = 1$, para $\sigma = 1$, e a densidade de helicidade cinética dessa função forçante satisfaz

$$\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = |\mathbf{k}| \mathbf{f}^2 > 0 \quad (\text{para } \sigma = 1) \quad (2.66)$$

que é uma condição importante para a produção de um dínamo de campo médio. A função forçante é delta-correlacionada no tempo, isto é, todos os pontos de \mathbf{f} estão correlacionados em qualquer instante de tempo, mas são diferentes no próximo passo.

2.5 Resolução Numérica

Optou-se por escolher simulações de baixa resolução numérica (64^3), devido ao tempo computacional. Comparou-se com simulações de alta resolução (128^3 pontos na malha) e observou-se que o mesmo comportamento é obtido para alta resolução se comparado com resolução mais baixa. A Figura 2.4 compara as séries temporais para as energias magnéticas (a) e cinéticas (b) com diferentes resoluções. A série temporal para o campo magnético exibe uma tendência de crescimento mais rápido para a resolução 64^3 , porém no intervalo de tempo em aproximadamente entre 400 e 1000 ambas crescem na mesma velocidade e convergem para um mesmo valor de saturação.

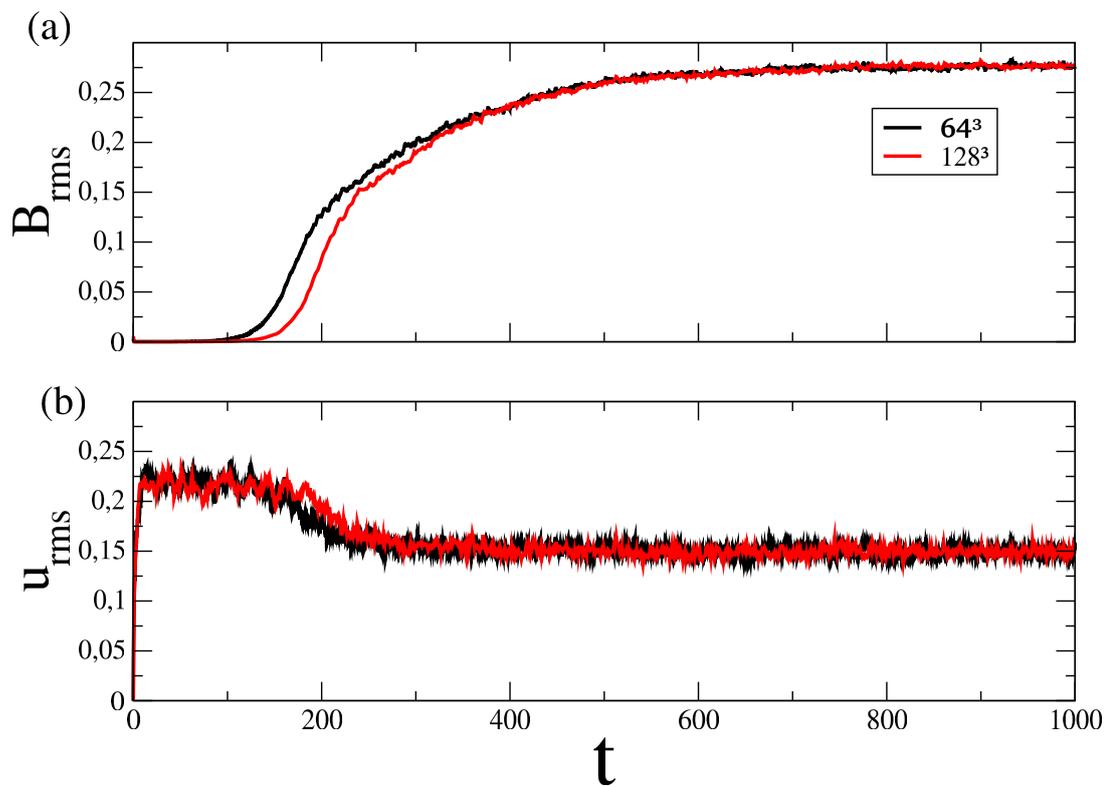


FIGURA 2.4 – (a) Séries temporais para as energias magnéticas com resolução numérica 64^3 pontos na malha (linha preta) e 128^3 (linha vermelha); (b) séries temporais para as energias cinéticas para as mesmas resoluções que (a).

3 Resultados e Discussão

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos através de simulações numéricas, utilizando o código PENCIL¹, para resolver as equações (2.61) a (2.65) por meio do método das diferenças finitas de sexta ordem no espaço e o Runge-Kutta de terceira ordem para a integração no tempo. São adotadas condições de contornos periódicas e uma caixa com lados $L = 2\pi$, com condições iniciais $\ln(\rho) = 0$ (densidade de flutuação), $\mathbf{u} = 0$ (campo de velocidade). Os parâmetros considerados nesta dissertação baseou-se em (BRANDENBURG, 2001; REMPEL *et al.*, 2013). Define-se os valores dos parâmetros de controle como $f_0 = 0.07$ (amplitude do forçante), fixou-se a difusividade magnética η e a viscosidade cinemática ν , $\eta = \nu = 0.005$, com o número de onda helicoidal periódica $k = 5$ fornecendo uma injeção de energia. Utilizou-se este valor de $k = 5$ em função da resolução numérica, o qual utilizou-se neste trabalho, observando dessa forma alguns fenômeno descrito posteriormente neste capítulo, variando o parâmetro σ que controla a helicidade cinética, com resolução numérica com 64^3 pontos na malha.

3.1 Início da Ação do Dínamo

A Figura 3.1 mostra a evolução temporal do campo magnético (linha vermelha) $\mathbf{B}_{rms} = \langle \mathbf{B}^2 \rangle^{1/2}$ e da energia cinética (linha preta) $\mathbf{u}_{rms} = \langle \mathbf{u}^2 \rangle^{1/2}$. Durante as primeiras unidades de tempo até $t \sim 120$, a energia magnética é muito fraca para impactar significativamente o campo de velocidade. Durante a fase cinemática, \mathbf{B}_{rms} aumenta exponencialmente, com uma taxa de crescimento $\gamma \sim 0.055$ obtida a partir da linha tracejada (linha azul). Depois de $t \sim 120$, a energia cinética \mathbf{u}_{rms} começa a decair devido à contribuição da força de Lorentz (segundo termo do lado direito da Eq. (2.24)). A seta indica o tempo em que termina a chamada fase cinemática do campo magnético, em que a energia magnética cresce exponencialmente. Observa-se que a energia cinética decai enquanto a energia magnética aumenta, até atingir seu valor de saturação, ou seja, um campo magnético fraco (semente) é amplificado devido à conversão da energia cinética em energia magnética, revelando a ação do dínamo.

¹<http://pencil-code.nordita.org/doc.php>.

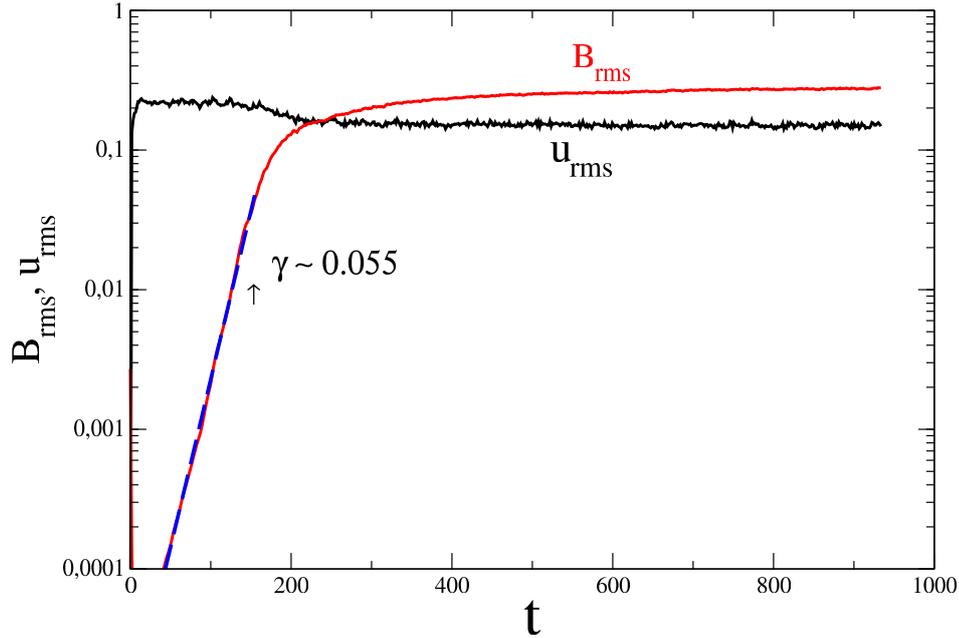


FIGURA 3.1 – Série temporal para energia magnética B_{rms} (linha vermelha) e energia cinética u_{rms} (linha preta), através de simulações de dínamo MHD. Tém-se a amplificação de um campo magnético fraco (semente), através da conversão da energia cinética em energia magnética, com helicidade cinética $\sigma = 0.95$.

O diagrama de bifurcação consiste em um gráfico que revela as mudanças qualitativas na estrutura do sistema, ao se variar um parâmetro de controle (ALLIGOOD *et al.*, 1996). A Figura 3.2 representa o diagrama de bifurcação em função da helicidade cinética (σ) para a média de tempo das energias cinética ($\langle E_k \rangle_t$, círculos pretos) e magnética ($\langle E_m \rangle_t$, triângulos vermelhos). Para obtermos o diagrama de bifurcação calculamos as médias depois que um transiente inicial é descartado. Observamos que para baixos valores de σ o campo magnético semente decai e não há ação de dínamo. No início da ação do dínamo em $\sigma = 0.3$ acontece a bifurcação onde a energia magnética cresce à custa da energia cinética, até o momento em que ela satura. Observamos que na faixa entre $\sigma = 0.3$ e 0.4 há um aumento acentuado na energia magnética. Entre $\sigma = 0.4$ e 0.6 a energia magnética aumenta suavemente, entre $\sigma = 0.6$ e 0.7 a energia magnética decai e entre $\sigma = 0.7$ e 0.9 a energia magnética tem um aumento acentuado. A partir do diagrama de bifurcação observa-se o papel da helicidade cinética para a geração de campos magnéticos de grande escala.

Um fenômeno interessante é observado na Figura 3.3. A linha vermelha é a mesma da Figura 3.2 e mostra que a energia magnética média cresce à medida em que σ é aumentado, culminando com um salto (transição crítica) em $\sigma = 0.8$. Curiosamente, ao se reduzir o valor de σ a partir desse ponto, tomando-se o estado de alta energia magnética como condição inicial, o sistema não retorna aos estados anteriores com baixa energia. Em vez disso, a solução segue por um “ramo” de energia mais alta (linha verde), que decresce

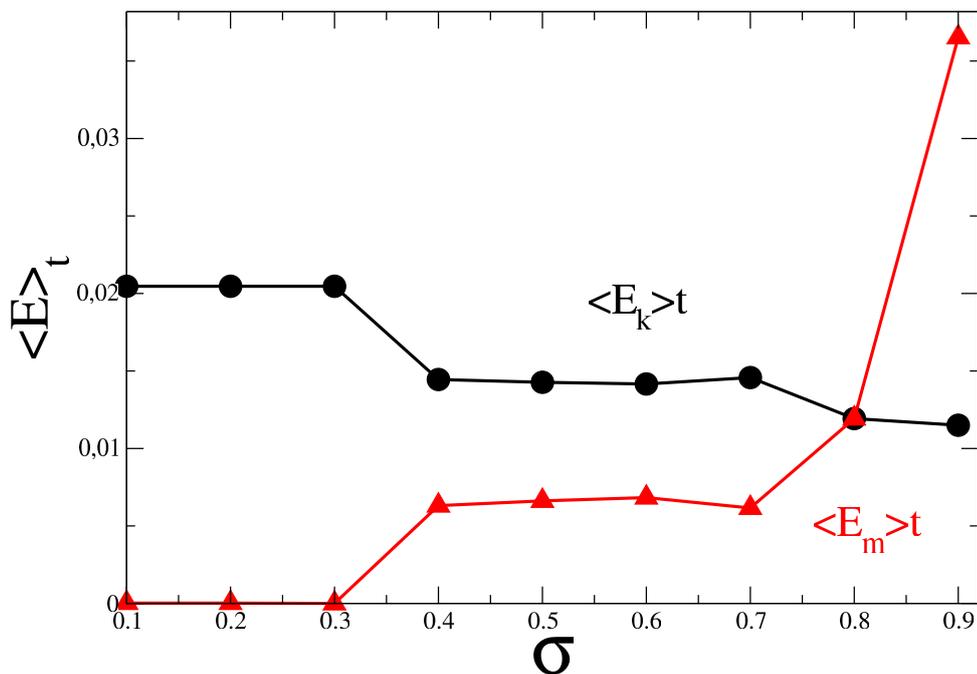


FIGURA 3.2 – Diagrama de bifurcação mostrando a variação das médias das energias cinética (círculos pretos) e magnéticas (triângulos vermelhos) em função da helicidade cinética σ .

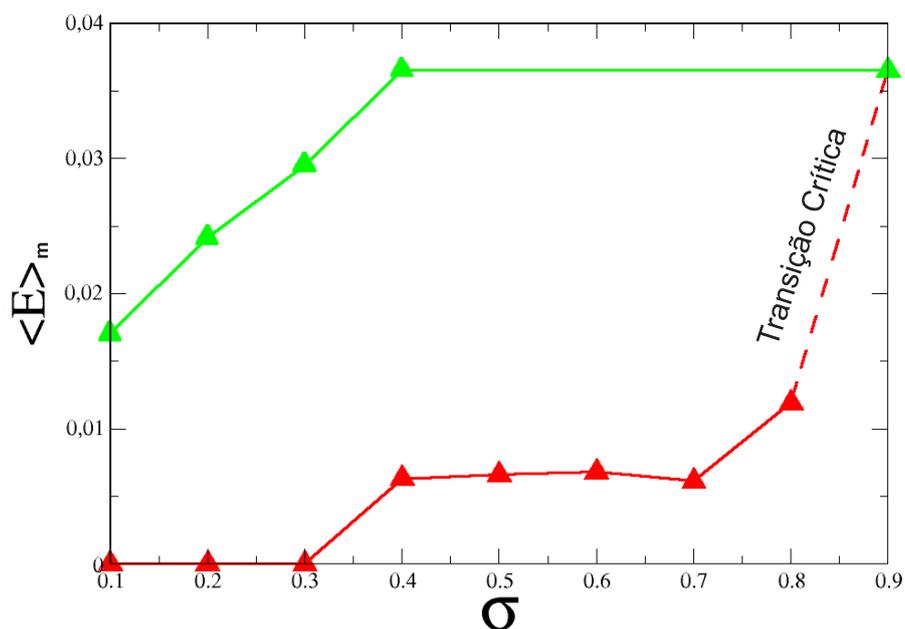


FIGURA 3.3 – Multiestabilidade no diagrama de bifurcação para a energia magnética em função de σ .

até $\sigma = 0,1$. Para valores menores de σ , não há dínamo em ambos os ramos. Esse quadro revela a existência de multiestabilidade, ou seja, a coexistência de mais de um

atrator para um dado intervalo de valores do parâmetro de controle. Cada um dos dois estados atrai um conjunto diferente de condições iniciais. O atrator do ramo inferior perde sua estabilidade por volta de $\sigma = 0.8$, quando o sistema é conduzido para o atrator do ramo superior. Similarmente, para valores de σ inferiores a 0.1 o atrator superior perde estabilidade e as órbitas são conduzidos para o atrator puramente hidrodinâmico (sem dínamo). Esse quadro se assemelha muito ao fenômeno da histerese descrito em (YADAV *et al.*, 2012), onde os ramos terminam em bifurcações de estados de equilíbrio. A diferença é que aqui os atratores não são equilíbrios nem movimentos periódicos, mas aperiódicos.

Durante a fase cinemática, o campo magnético exhibe flutuações de baixa amplitude para as componentes B_x, B_y, B_z , para um instante de tempo $t = 10^2$, como mostrado na Figura 3.4, com o parâmetro de controle $\sigma = 0.95$. Com a evolução temporal do campo magnético médio \mathbf{B}_{rms} a velocidade em pequena escala e as flutuações do campo magnético combinam-se para produzir um campo magnético robusto de campo médio de grande escala (Figura 3.5). Para a componente B_x , têm-se um campo magnético exibindo flutuações de pequena escala, sem apresentar uma direção preferencial ($t = 10^3$); para as componentes B_y e B_z , têm-se uma robusta estrutura coerente de grande escala que pode ser observada através da caixa de simulação. Observa-se que o campo magnético médio possui uma direção preferencial selecionada para o campo magnético para a direção x . O efeito α está relacionado com a ascensão destas componentes do campo magnético médio (KRAUSE; RÄDLER, 1980). Observa-se na caixa de simulação o campo de velocidade do fluido (Figura 3.6) nas direções u_x, u_y, u_z , para um tempo $t = 10^3$ no qual o sistema está em um regime fracamente turbulento em todas as componentes consideradas.

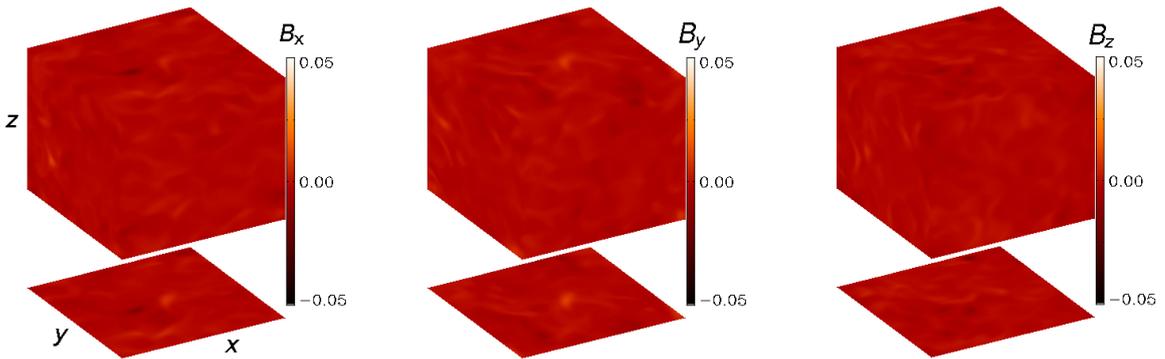


FIGURA 3.4 – Componentes do campo magnético, B_x, B_y, B_z , no tempo $t = 10^2$, para $\sigma = 0.95$. Pode-se observar flutuações de baixa amplitude formando-se nas respectivas direções.

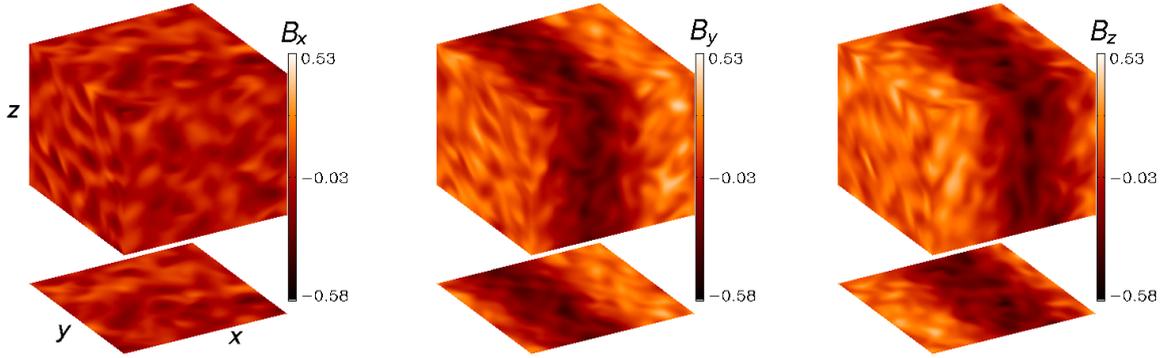


FIGURA 3.5 – Componentes do campo magnético, B_x, B_y, B_z , no tempo $t = 10^3$, para $\sigma = 0.95$. Observa-se na simulação que para a direção B_x tem-se um campo magnético exibindo flutuações de pequena escala. Para as componentes B_y, B_z tem-se uma robusta estrutura coerente de grande escala.

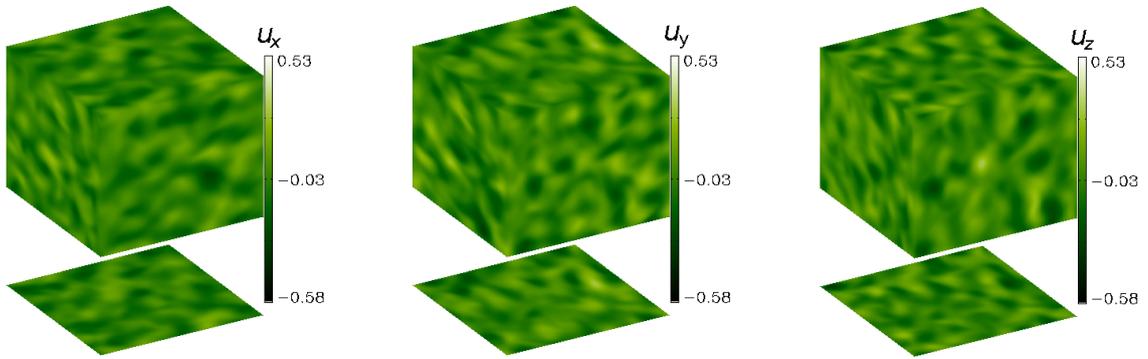
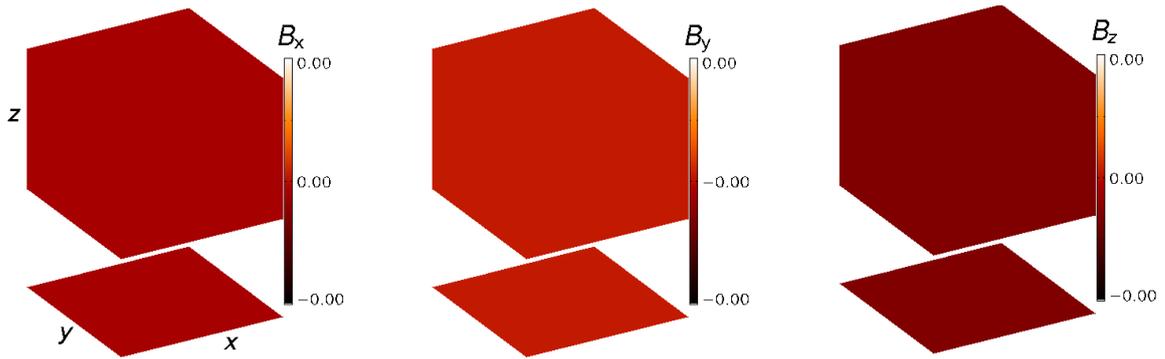
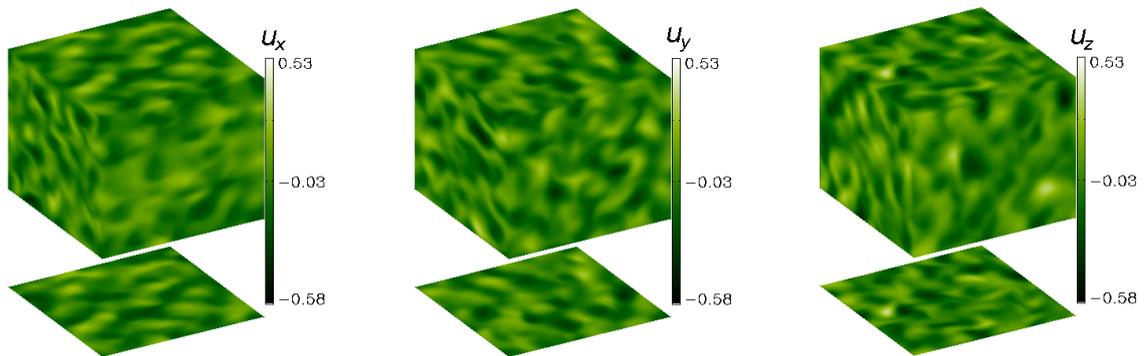
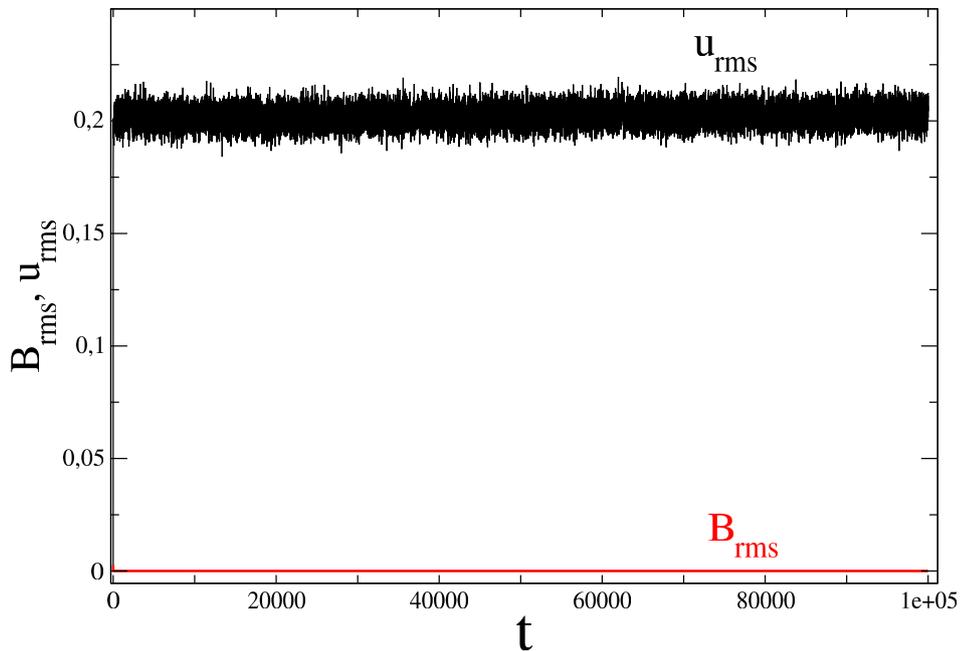


FIGURA 3.6 – Componentes do campo de velocidade, u_x, u_y, u_z , no tempo $t = 10^3$, para $\sigma = 0.95$.

3.2 Estrutura do Campo Magnético em Função da Helicidade Cinética

3.2.1 Helicidade cinética para $\sigma = 0$

Para o parâmetro de controle $\sigma = 0$, a helicidade cinética mínima, no tempo $t = 10^5$, observamos que não há geração de campo magnético em nenhuma das componentes, como pode ser observado na Figura 3.7. A caixa de simulação do campo de velocidade nas componentes u_x, u_y, u_z , mostra um campo com regime fraco e turbulento em todas as direções como pode ser observado na Figura 3.8. A série temporal da energia magnética \mathbf{B}_{rms} e cinética u_{rms} mostra como a energia cinética mantém-se enquanto a energia magnética é nula, como pode ser observado na Figura 3.9.

FIGURA 3.7 – Componentes do campo magnético no tempo $t = 10^5$.FIGURA 3.8 – Componentes do campo de velocidade no tempo $t = 10^5$.FIGURA 3.9 – Série temporal para energia magnética B_{rms} (linha vermelha) e energia cinética u_{rms} (linha preta), através de simulações de dínamo MHD.

3.2.2 Helicidade cinética para $\sigma = 0.215$

Para o parâmetro $\sigma = 0.215$, no tempo $t = 10^5$, têm-se as caixas de simulações do campo magnético através das componentes B_x, B_y, B_z , observadas através da Figura 3.10.

Para a componente do campo magnético B_x têm-se um campo apresentando oscilações de baixa amplitude, sem apresentar uma direção preferencial, para as componentes B_y e B_z o campo magnético começa a formar um padrão coerente de campo médio de grande escala. A caixa de simulação do campo de velocidade para as componentes u_x, u_y, u_z , mostra um campo com regime fraco e fracamente turbulento em todas as direções como pode ser observado na Figura 3.11. Observou-se pela Figura 3.12 que as linhas de campo magnético não possuem uma direção preferencial, ou seja, são isotrópicas. As séries temporais da energia magnética \mathbf{B}_{rms} e cinética u_{rms} mostram uma mudança abrupta no comportamento da energia no instante de tempo $t \sim 4 \times 10^4$, quando a energia magnética aumenta depois mantém-se. Essa mudança brusca pode ser observada na Figura 3.13, onde para um tempo de 0 a 2×10^4 têm-se um campo magnético próximo de nulo.

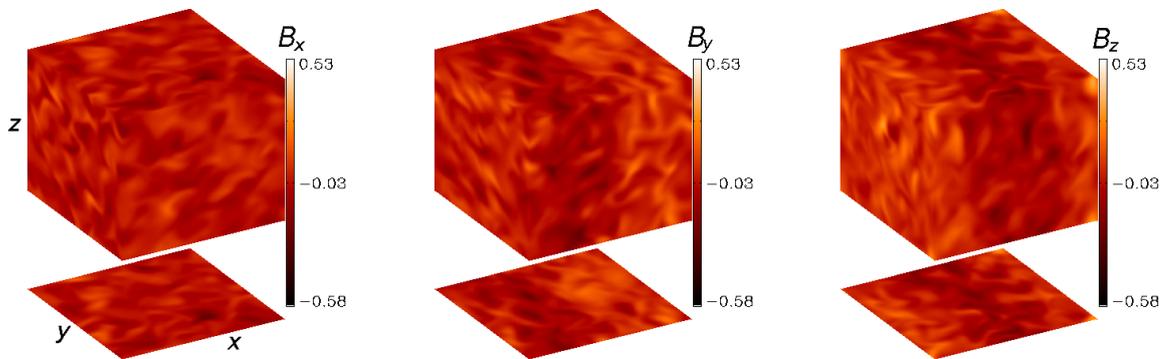


FIGURA 3.10 – Componentes do campo magnético, no tempo $t = 10^5$.

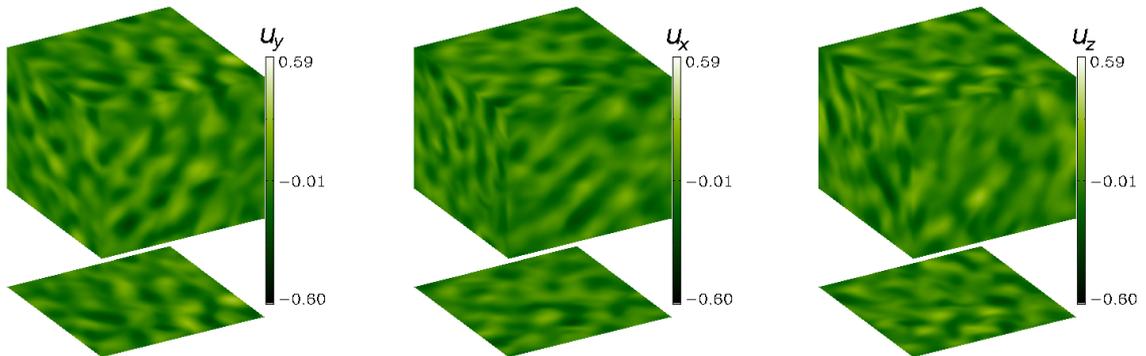


FIGURA 3.11 – Componentes do campo de velocidade, no tempo $t = 10^5$, para $\sigma = 0.215$.

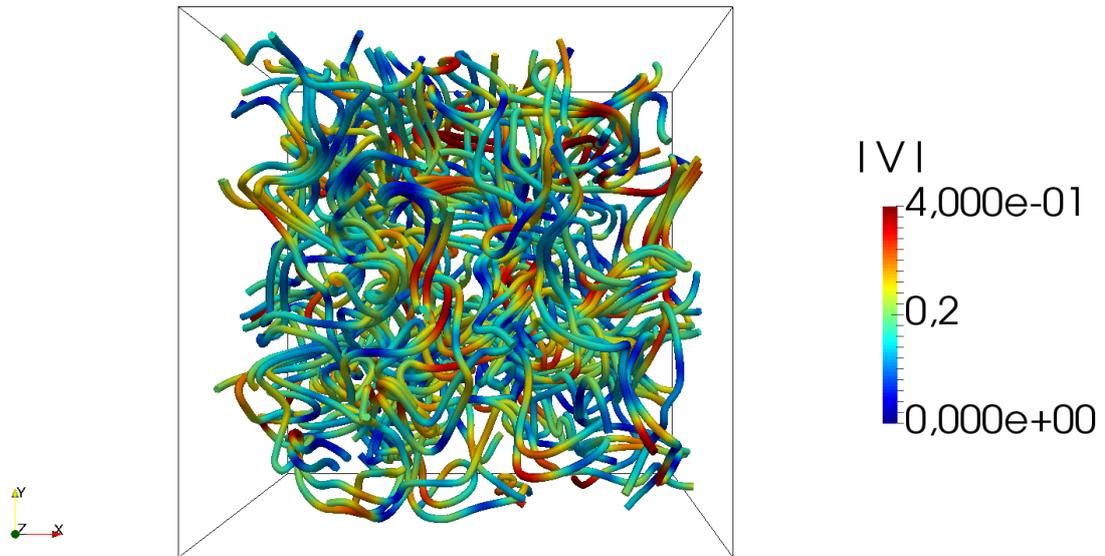
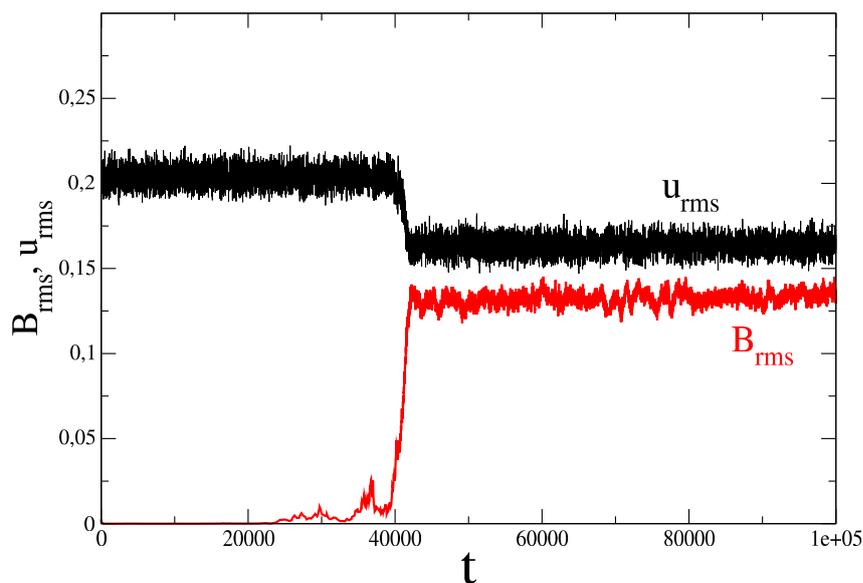


FIGURA 3.12 – Linhas de campo magnético.

FIGURA 3.13 – Série temporal para energia magnética B_{rms} (linha vermelha) e energia cinética u_{rms} (linha preta), através de simulações de dínamo MHD.

Para uma melhor compreensão do comportamento do campo magnético, é analisado a dinâmica espaço-temporal calculando $\langle B_x \rangle$ e $\langle B_y \rangle$, as médias de xy de \mathbf{B} . A Figura 3.14 mostra a evolução espaço-tempo de $\langle B_x \rangle$, onde observou-se que o campo médio do dínamo não propaga-se nos instantes de tempo entre 0 e 2.5×10^5 . Depois têm-se um padrão do campo médio formando-se, a direção de propagação é arbitrária, podendo o campo magnético médio se propagar em outras direções. O campo magnético assume outra direção de propagação para a direção yz , onde observam-se oscilações de grande escala para o campo magnético médio, como mostra a Figura 3.15. A partir das médias

calculadas obtém-se as séries temporais de $\langle B_x \rangle$ e $\langle B_y \rangle$ para a direção xy , como pode ser observado pela Figura 3.16 e yz (Figura 3.17) no ponto $z = 0$ e $x = 0$, ambas as séries apresentam oscilações de grande escala.

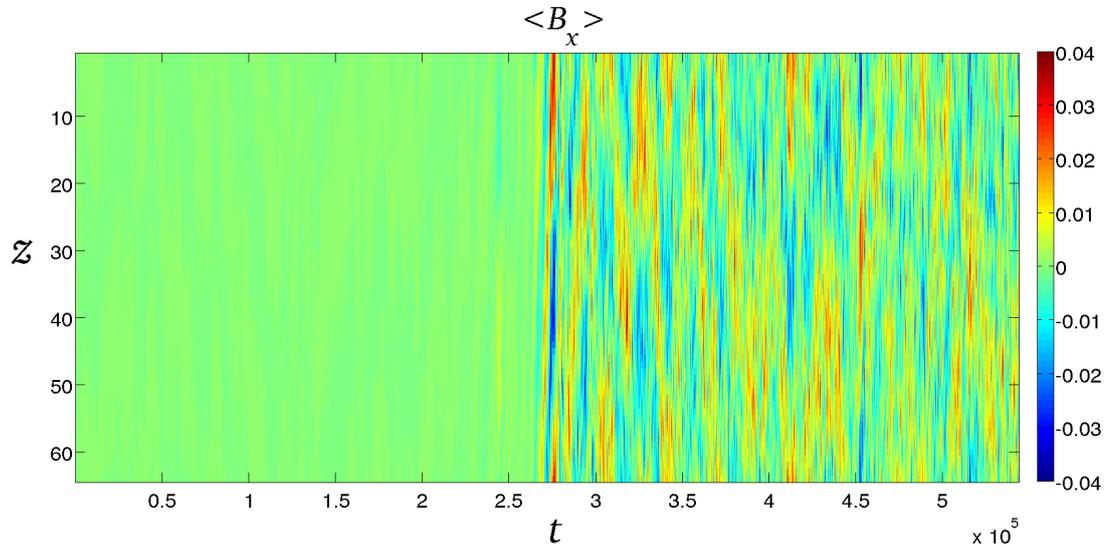


FIGURA 3.14 – Evolução espaço-tempo da média de $\langle B_x \rangle$ no plano xy .

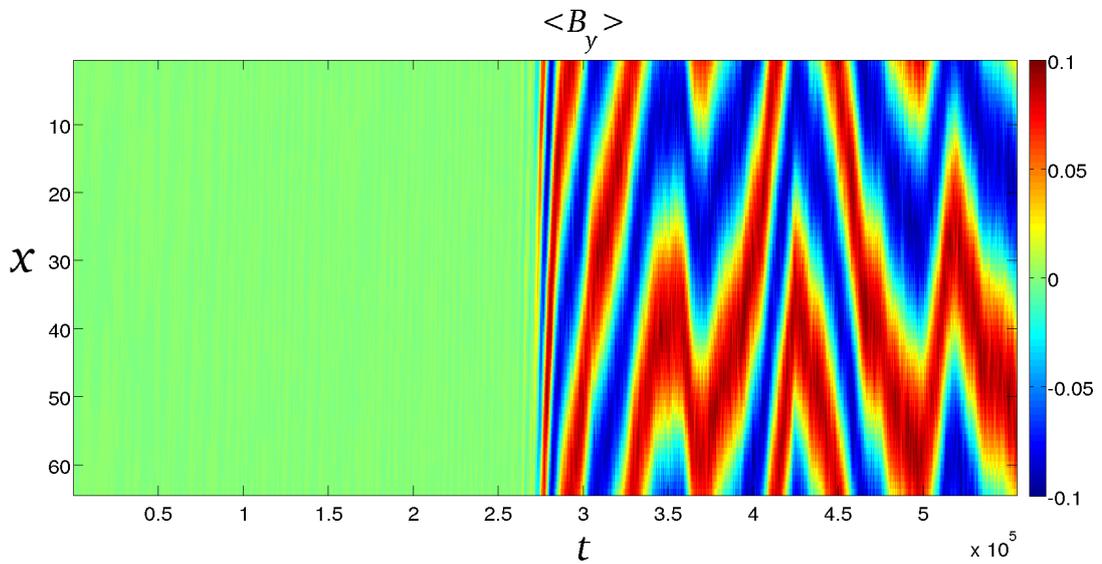


FIGURA 3.15 – Evolução espaço-tempo da média de $\langle B_y \rangle$ no plano yz .

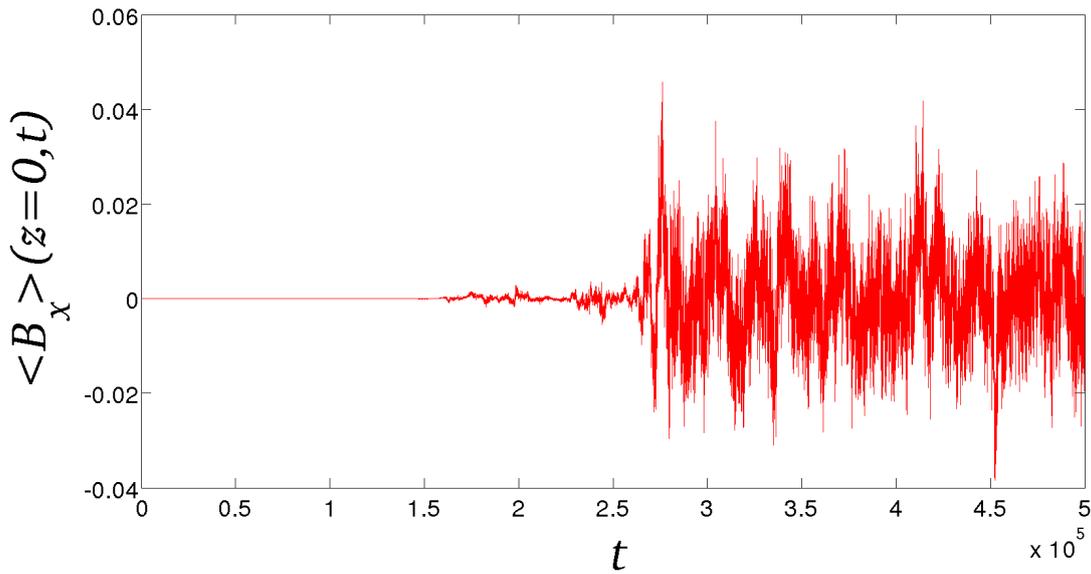


FIGURA 3.16 – Série temporal obtida a partir da média de $\langle B_x \rangle$ no plano xy , no ponto $z = 0$.

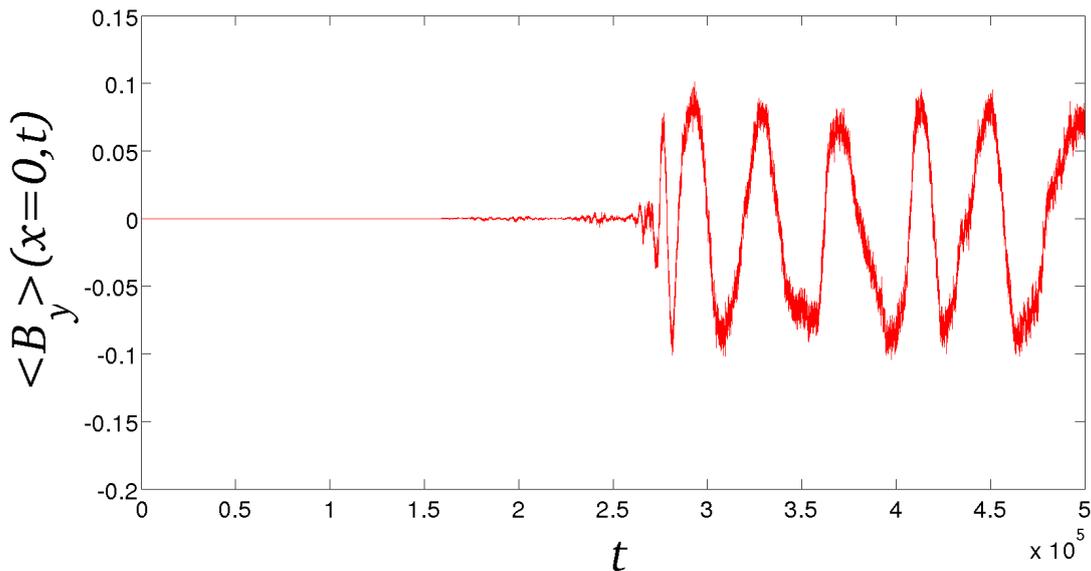


FIGURA 3.17 – Série temporal obtida a partir da média de $\langle B_y \rangle$ no plano yz , no ponto $x = 0$.

3.2.3 Helicidade cinética para $\sigma = 0.95$

A Figura 3.18 apresenta as componentes do campo magnético para $\sigma = 0.95$, no tempo $t = 10^5$. Pode-se observar que para B_x não há uma direção preferencial. Para as componentes B_y e B_z têm-se um campo magnético de grande escala, a direção preferencial é x . Para uma melhor compreensão a respeito das linhas de campo magnético, observa-se pela Figura 3.20 que as linhas de campo passam a ser alinharem na direção x , ou seja, passam a ser anisotrópicas. Têm-se o campo de velocidades para as componentes u_x, u_y, u_z

na Figura 3.19, que mostra um campo irregular e só com estruturas de pequena escala. As séries temporais da energia magnética \mathbf{B}_{rms} (linha vermelha) e cinética u_{rms} (linha preta) são exibidas na Figura 3.21, onde pode-se visualizar o crescimento da energia magnética enquanto a energia cinética decai. Inicialmente, um campo magnético fraco (semente) sofre um crescimento linear na fase de cinemática até o campo ser forte o suficiente para impactar a velocidade do fluido. Observa-se que a energia magnética satura devido a efeitos não-lineares.

Assim como foi feito para $\sigma = 0.215$, calculamos as médias de $\langle B_y \rangle$ no plano xy . A Figura 3.22 mostra a evolução espaço-tempo de $\langle B_y \rangle$, onde observamos que o campo magnético médio forma um padrão entre os instantes de tempo $10^3 \sim 4 \times 10^3$, ampliando a imagem podemos verificar o padrão do campo magnético médio (Figura 3.23), porém, devido à direção de propagação de \mathbf{B} ser arbitrária, o campo magnético forma-se em outra direção, yz , e observamos um campo magnético médio de grande escala na Figura 3.24.

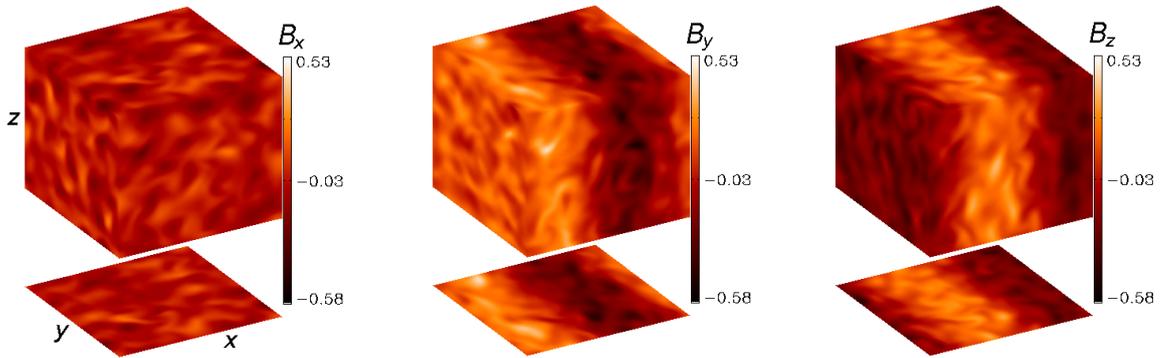


FIGURA 3.18 – Componentes B_x, B_y, B_z , no tempo $t = 10^5$.

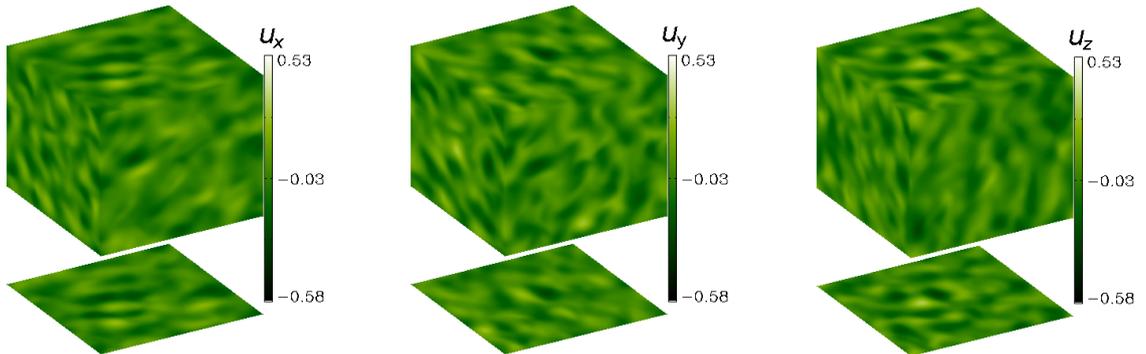


FIGURA 3.19 – Componentes u_x, u_y, u_z , no tempo $t = 10^5$.

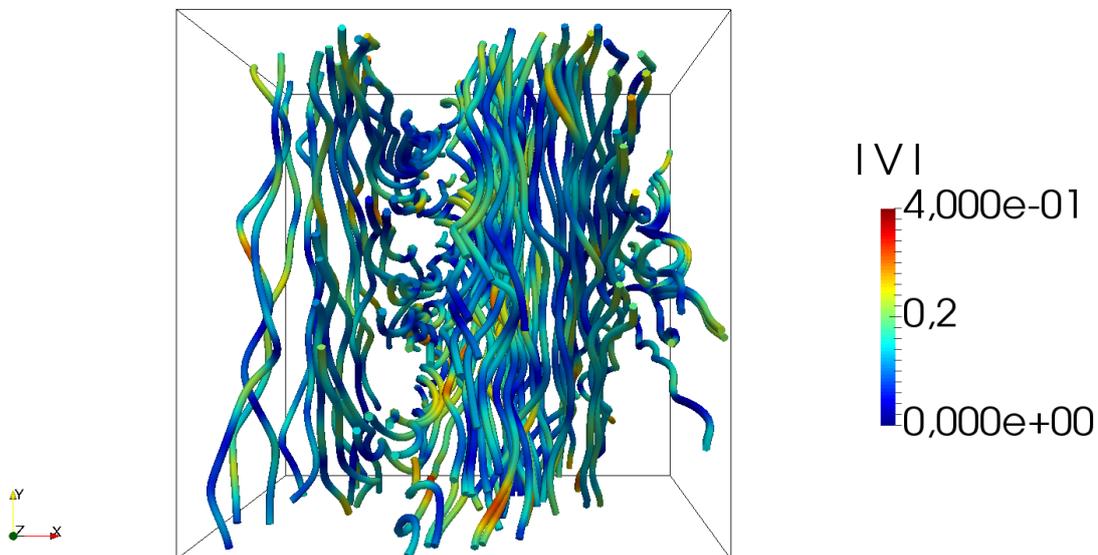
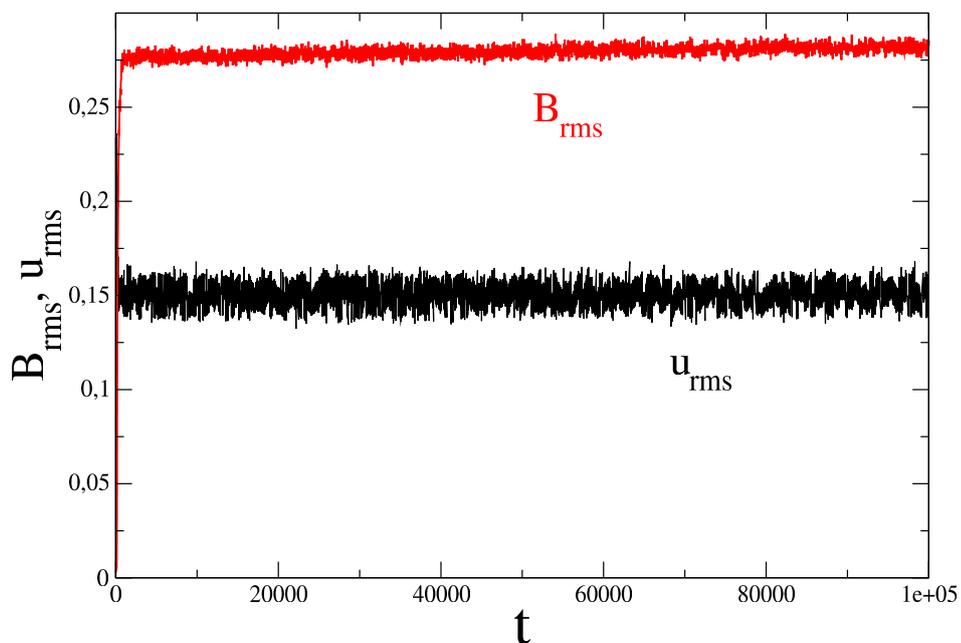


FIGURA 3.20 – Linhas de campo magnético.

FIGURA 3.21 – Série temporal para energia magnética B_{rms} (linha vermelha) e energia cinética u_{rms} (linha preta).

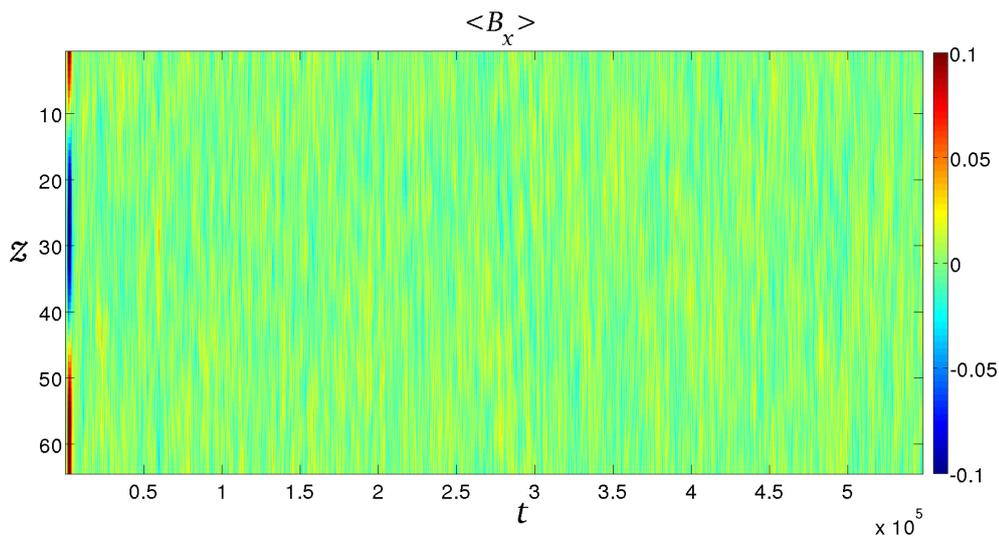


FIGURA 3.22 – Evolução espaço-tempo da média de $\langle B_x \rangle$ no plano xy .

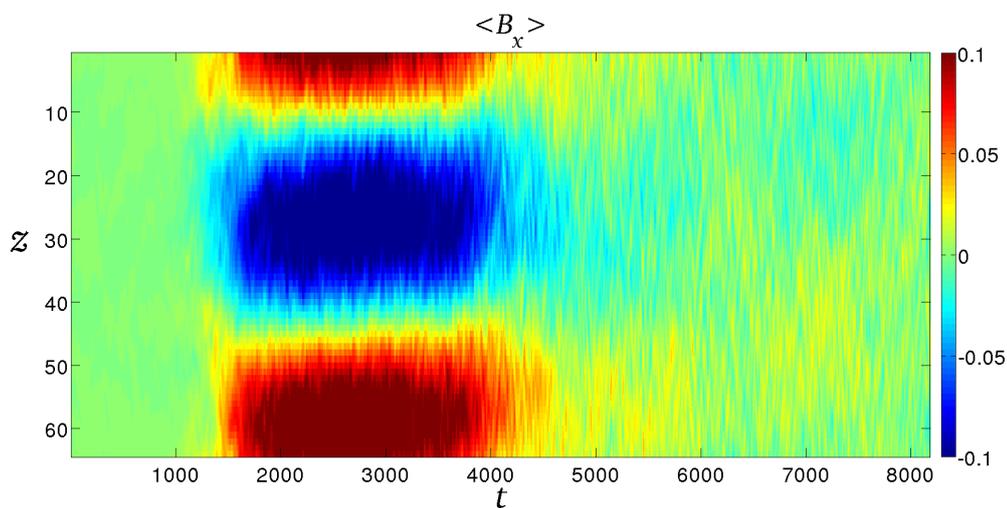


FIGURA 3.23 – Ampliação da evolução espaço-tempo da média de $\langle B_x \rangle$ no plano xy .

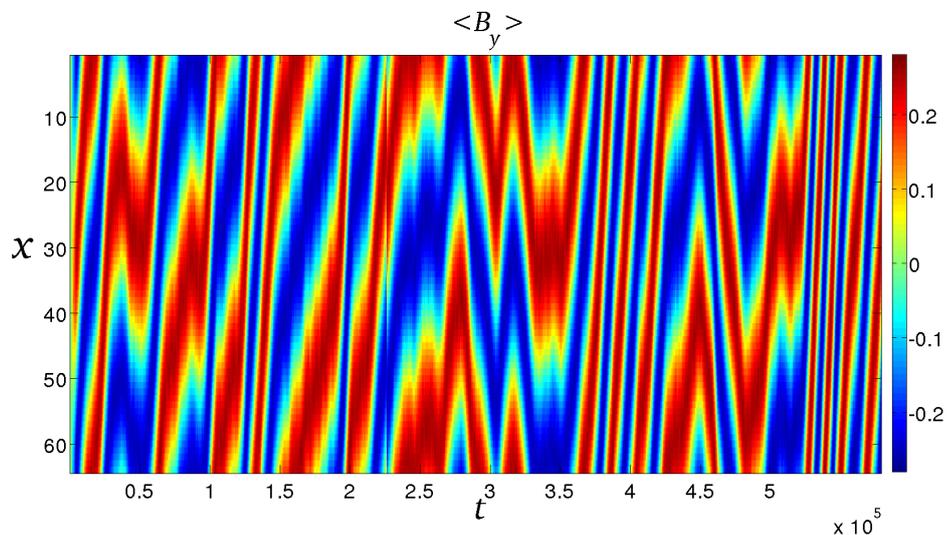
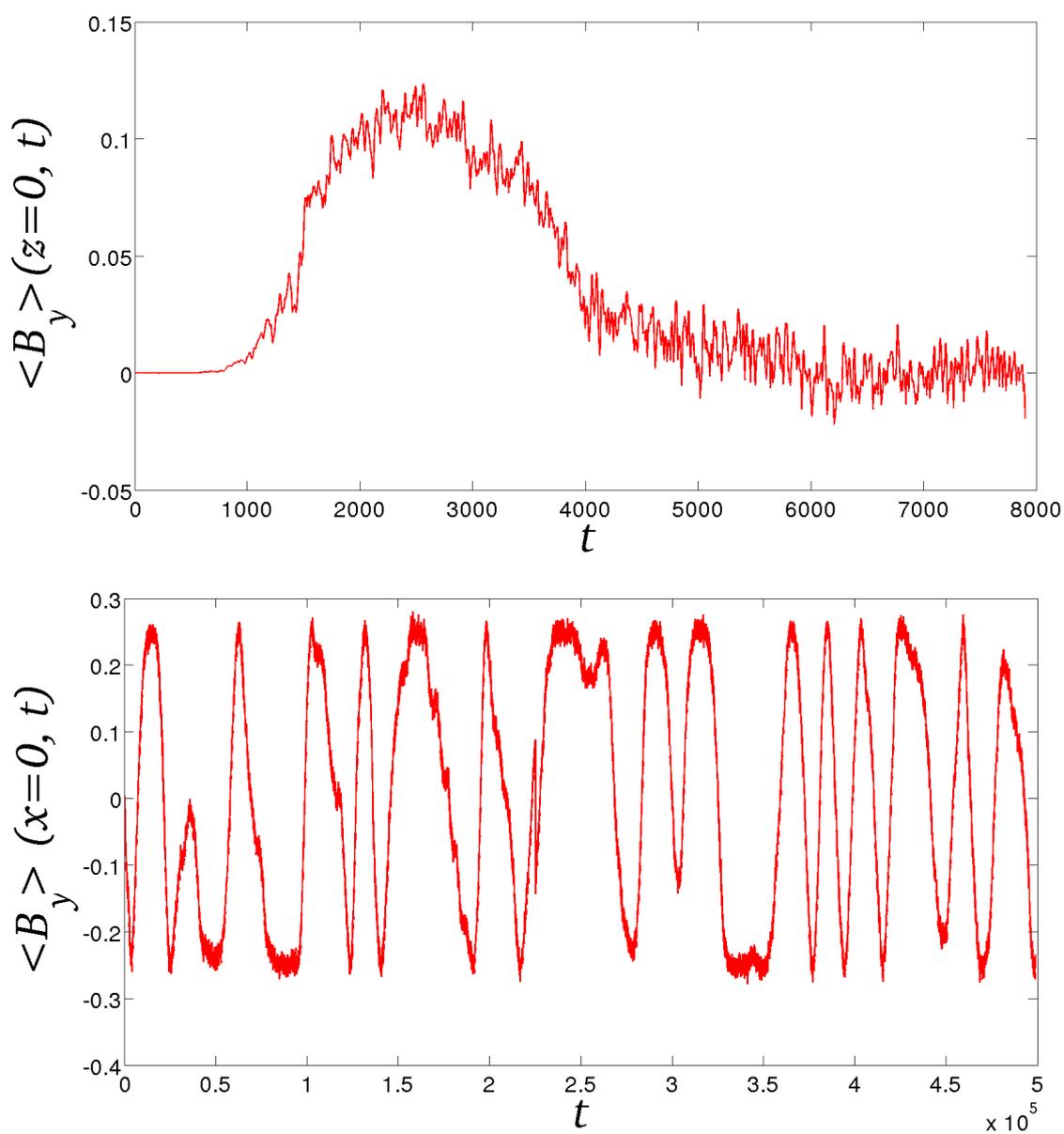


FIGURA 3.24 – Evolução espaço-tempo da média $\langle B_y \rangle$ no plano yz .

FIGURA 3.25 – Séries temporais obtidas a partir de $\langle B_y \rangle$ nos planos xy e yz

3.2.4 Helicidade cinética para $\sigma = 1$

Para a helicidade cinética máxima $\sigma = 1$, no tempo $t = 10^5$, (Figura 3.26), uma sólida estrutura coerente de grande escala é observada ao longo da caixa de simulação. Para as componentes B_x e B_y , o campo magnético possui uma direção de propagação preferencial ao longo de z , para a componente B_z não há uma direção preferencial e o campo magnético exibe flutuações de baixa amplitude. As componentes u_x, u_y, u_z mostram um campo com regime fraco e fracamente turbulento em todas as direções, como pode ser observado na Figura 3.27.

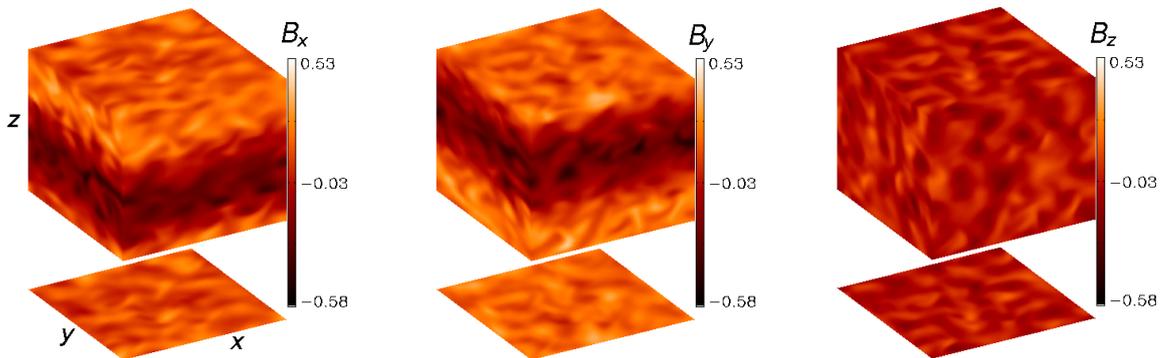


FIGURA 3.26 – Componentes B_x, B_y, B_z do campo magnético no tempo $t = 10^5$, para $\sigma = 1$.

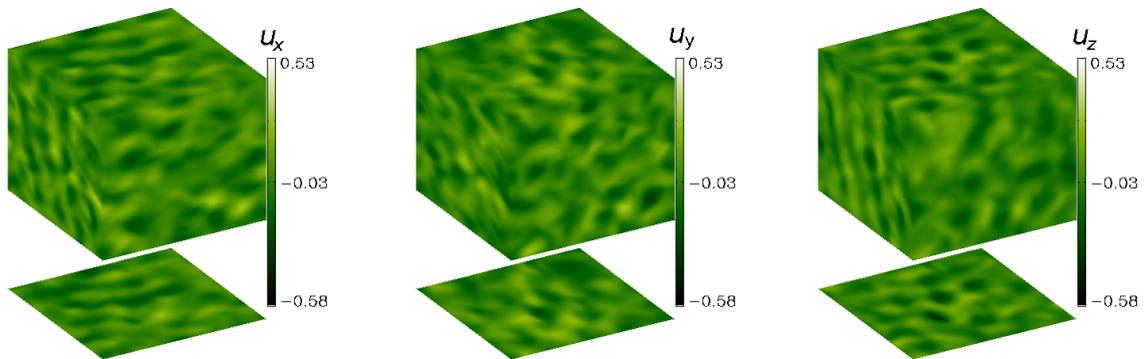


FIGURA 3.27 – Componentes u_x, u_y, u_z do campo de velocidades no tempo $t = 10^5$, para $\sigma = 1$.

3.3 Complexidade Espaço-Temporal

3.3.1 Informação, Entropia e Dimensão

A teoria da informação ou entropia de Shannon (1948), a qual foi criada para comprimir e enviar dados, teve contribuições importantes para o estudo da mecânica estatística, ciência da computação (complexidade algorítmica) e teoria da probabilidade. O conceito fundamental desta teoria, baseia-se na entropia formulada por Boltzmann (1877), onde a entropia é uma medida de aleatoriedade ou imprevisibilidade (SHANNON, 1948).

Considerando uma fonte que emite uma sequência de símbolos s_i pertencentes a um alfabeto $A = \{s_1, s_2, \dots, s_b\}$, com probabilidade $P(s_i)$, $\forall s_i \in A$. A incerteza associada a cada evento depende de sua probabilidade.

- Se \exists tal que $P(s_i) = 1$, a saída é totalmente previsível.
- Se $P(s_i) = 1/b$, para $\forall s_i$, a incerteza é máxima.

A incerteza média sobre todas as saídas $s_i \in A$ de um experimento é medida através da entropia:

$$S = - \sum_{i=1}^b P(s_i) \ln P(s_i), \quad (3.1)$$

onde $P(s_i)$ é a função de distribuição de probabilidade de um dado experimento, P é um vetor $\{p_1, p_2, \dots, p_b\}$.

A entropia S possui algumas propriedades fundamentais, tais como:

- (1) $S = 0$ se e somente se um dos símbolos tiver a probabilidade $P(s_i) = 1$ (convencionase que $x \ln x = 0$ para $x = 0$) o que implica que a adição de termos de $P(s_i) = 0$ não altera a entropia.
- (2) $h(x) = -x \ln x$ é contínua, não-negativa e côncava em $[0, 1]$. Então, vale a desigualdade de Jensen:

$$\begin{aligned}
S = \sum_{i=1}^b h(p_i) &\leq bh \left(\frac{1}{b} \sum_{i=1}^b p_i \right), & (3.2) \\
&\leq bh \left(\frac{1}{b} \right), \\
&\leq b \left(-\frac{1}{b} \ln \frac{1}{b} \right), \\
&\leq \ln \left(\frac{1}{b} \right)^{-1}, \\
S &\leq \ln b.
\end{aligned}$$

Portanto o valor máximo de $\ln b$ é alcançado.

$$\max(S) = \ln b. \quad (3.3)$$

Vemos que o máximo ocorre se $p_i = 1/b$, para \forall_i . Nesse caso:

$$S = - \sum_{i=1}^b p_i \ln p_i, \quad (3.4)$$

$$= - \sum_{i=1}^b \frac{1}{b} \ln \frac{1}{b}, \quad (3.5)$$

$$= -b \frac{1}{b} \ln \frac{1}{b}, \quad (3.6)$$

$$= -(\ln 1 - \ln b), \quad (3.7)$$

$$S = \ln b. \quad (3.8)$$

Em teoria da informação a aplicação de S visa obter a quantidade mínima de bits necessária para representar uma sequência de símbolos transmitidos para a formação de uma mensagem (BADII; POLITI, 1997).

Com base na entropia de Shannon, pode-se caracterizar o grau de desordem espacial através da entropia espectral (REMPEL *et al.*, 2007; REMPEL *et al.*, 2009),

$$S(t) = - \sum_{k=1}^M p_k(t) \ln [p_k(t)], \quad (3.9)$$

onde M é o número de harmônicas utilizadas nos espectros de energia magnética ou cinética e $p_k(t)$ é o peso relativo da energia E_k de cada harmônica em um instante de

tempo t ,

$$p_k(t) = \frac{E_k(t)}{\sum_{k=1}^M E_k(t)} \quad (3.10)$$

A entropia espectral é máxima para um sistema aleatório com distribuição uniforme de energia entre os modos de Fourier, isto é, para todo k , $p_k(t) = 1/M$, caso em que $S(t) = \ln S$.

A Figura 3.28 mostra a entropia espectral ($S_m(t)$) para $\sigma = 0.215$ obtida a partir da média de $\langle B_y \rangle$ no plano xy , onde observou-se que a entropia permanece errática e alta ao longo do tempo. Como o campo magnético médio alinha-se em outro plano como visto na Figura 3.15, obtém-se a entropia para o plano yz , (como mostra a Figura 3.29), onde têm-se que para os instantes de tempo t de 0 a 2.7×10^5 , a entropia permanece alta, para os instantes de tempo t de 2.9×10^5 a 5×10^5 , a entropia é menor, quando têm-se uma redução da complexidade espaço-temporal.

Obtém-se a entropia espectral para o valor de parâmetro 0.95, calculada a partir da média de $\langle B_y \rangle$ na direção xy (Figura 3.30). Ampliando a imagem observa-se que a entropia permanece alta para os instantes de tempo $t \sim 10$ e 20, para os instantes de tempo $t \sim 1200$ e 4000 a entropia é baixa, entre $t \sim 4500$ e 5×10^5 têm-se a entropia alta, como pode ser observado pela Figura 3.31. Para a média de $\langle B_y \rangle$ no plano yz obtém-se a entropia como pode ser observada através da Figura 3.32, onde a entropia é baixa, indicando uma ordem na complexidade espaço-tempo.

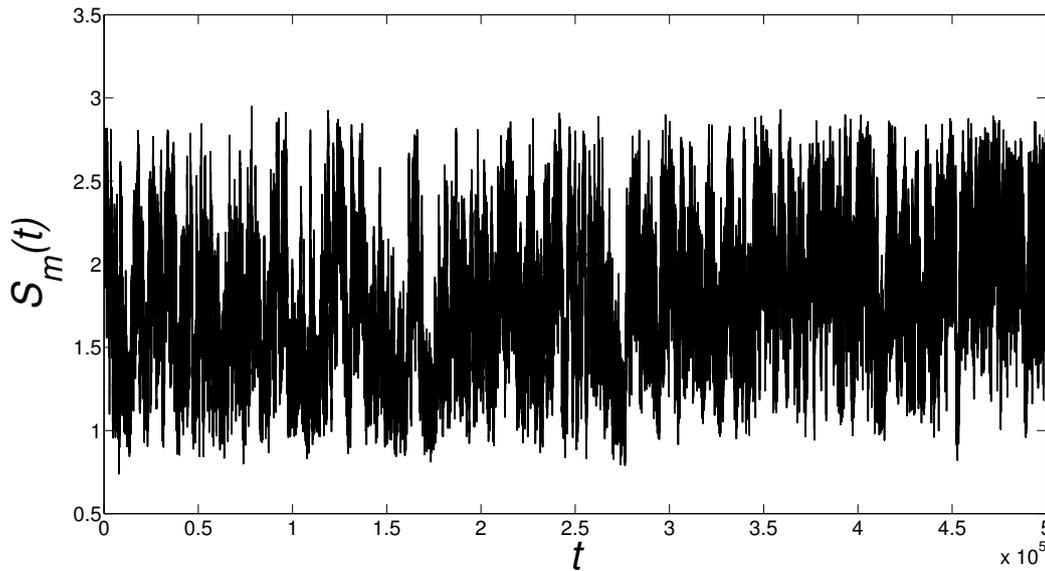


FIGURA 3.28 – Série temporal da entropia espectral para $\sigma = 0.215$, obtida a partir da média $\langle B_y \rangle$ no plano xy .

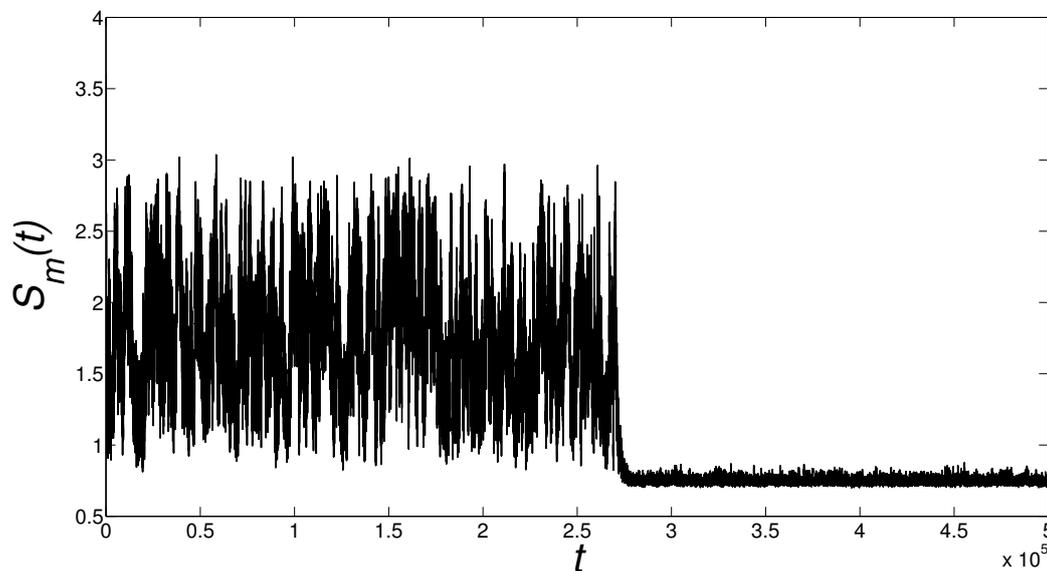


FIGURA 3.29 – Série temporal da entropia espectral para $\sigma = 0.215$, obtida a partir da média de $\langle B_y \rangle$ no plano yz .

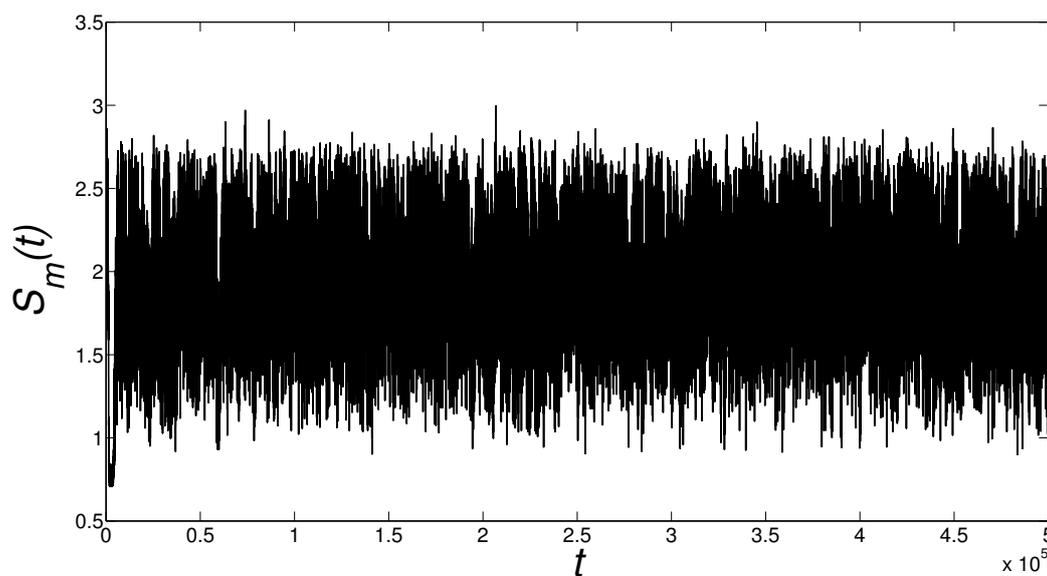


FIGURA 3.30 – Série temporal da entropia espectral para $\sigma = 0.95$, obtida a partir da média de $\langle B_y \rangle$ no plano xy .

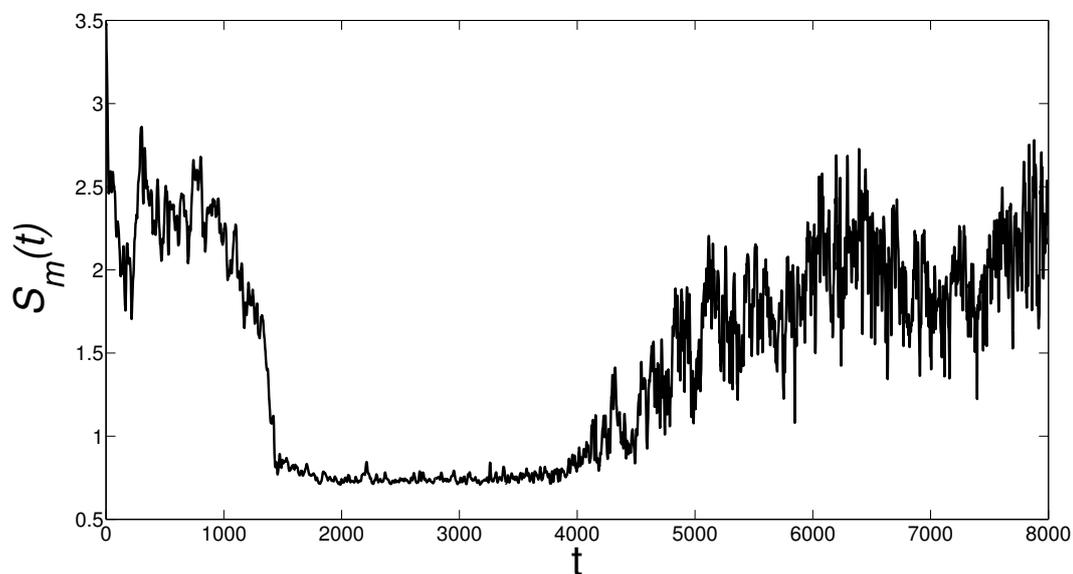


FIGURA 3.31 – Série temporal da entropia espectral para $\sigma = 0.95$, obtida a partir da média de $\langle B_y \rangle$ no plano xy .

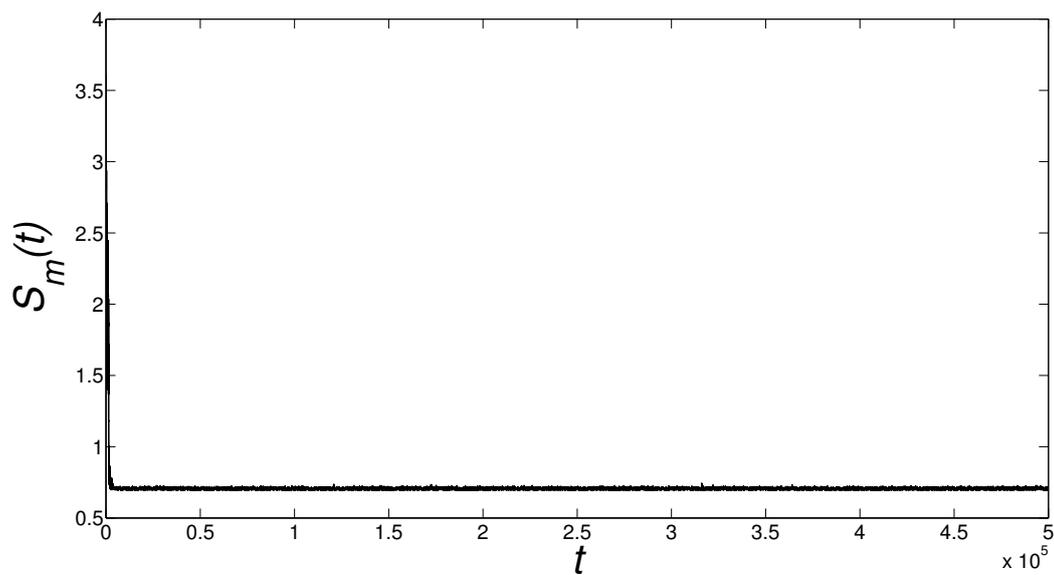
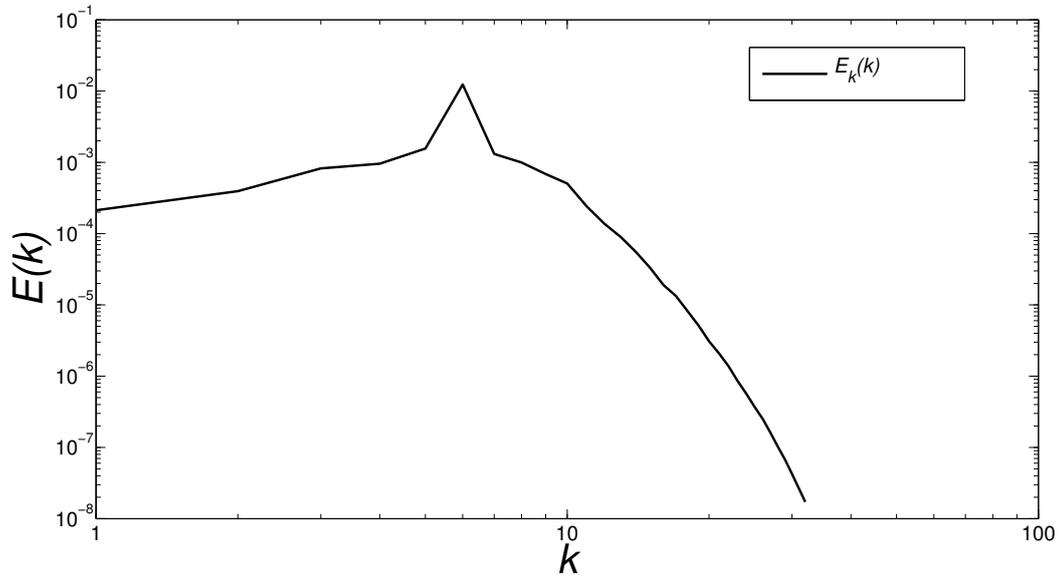
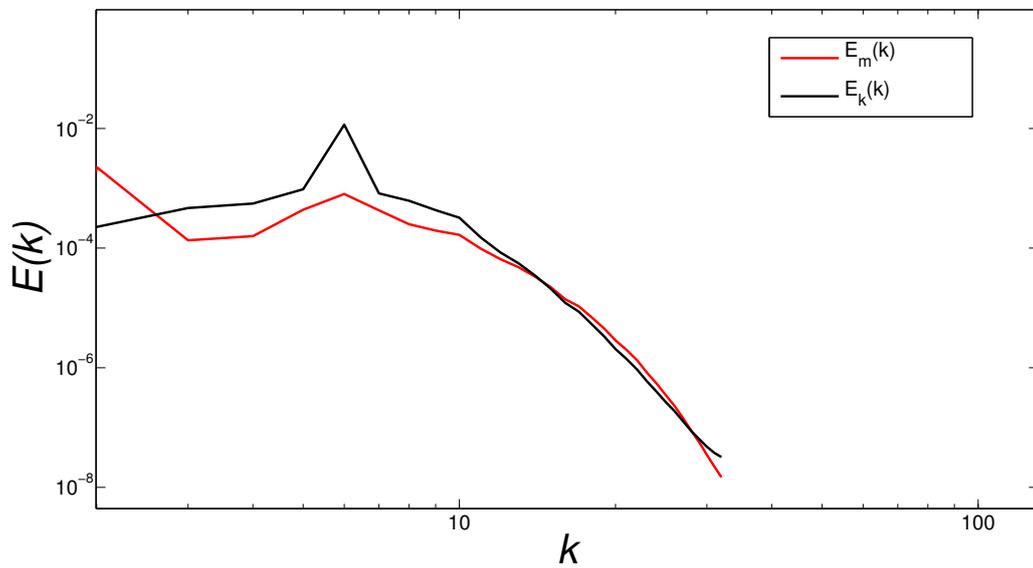


FIGURA 3.32 – Série temporal da entropia espectral para $\sigma = 0.95$, obtida a partir média de $\langle B_y \rangle$ no plano yz .

3.4 Transferência Inversa de Energia

O dínamo de campo médio deve-se à transferência de energia magnética da escala menor de injeção de energia para escalas maiores. Espera-se essa transferência em escoamentos helicoidais, e na teoria do dínamo de campo médio essa transferência de energia é atribuída ao efeito α . Encontram-se o desenvolvimento de campos de grande escala através de um efeito de transferência inversa de energia (BRANDENBURG, 2001). Esse efeito pode ser melhor visualizado através da evolução dos espectros de energia magnética e cinética. A Figura 3.33 mostra os espectros de potência da energia cinética ($E_k(k)$ linha preta) e magnética ($E_m(k)$ linha vermelha) para o dínamo de campo médio para a helicidade mínima com $\sigma = 0$ para um tempo $t = 10^5$. Tém-se que para $\sigma = 0$ não há transferência inversa de energia no espectro de energia magnética, pois as escalas grandes (k pequeno) têm pouca energia em comparação com $k = 5$. Para obter os espectros de energia, o Pencil code computa as integrais da energia espectral ao longo de conchas esféricas no espaço de Fourier tridimensional com raios definidos a partir do módulo de k . Uma vez que usa-se a escala forçante $k = 5$, ocorre um pico de energia alto, pois é onde a escala está sendo injetada energia.

Para $\sigma = 0.215$ visualizamos uma transferência inversa de energia devido ao efeito α . A Figura 3.34 mostra os espectros de energia, onde pode-se visualizar que no espectro de energia cinética há um pico de energia em $k = 5$, mas no espectro de energia magnética o pico maior está em $k = 1$, devido à transferência inversa de energia magnética. Para $\sigma = 0.95$ (Figura 3.35) e para a helicidade máxima $\sigma = 1$ (Figura 3.36) têm-se os espectros de energia onde claramente pode-se visualizar uma transferência inversa de energia de escalas menores para escalas maiores. Como foi dito anteriormente, tal processo é resultado do efeito α . Nota-se que em torno de $k = 1$ a energia magnética excede a energia cinética, porém em $k = 5$ pode-se visualizar onde está sendo injetado energia. A energia magnética atinge a equipartição com a energia cinética para $k > 5$.

FIGURA 3.33 – Espectro de energia cinética (linha preta), para $t = 10^5$, para $\sigma = 0$.FIGURA 3.34 – Espectro de energia cinética (linha preta) e magnética (linha vermelha) para $t = 10^5$, para $\sigma = 0.215$.

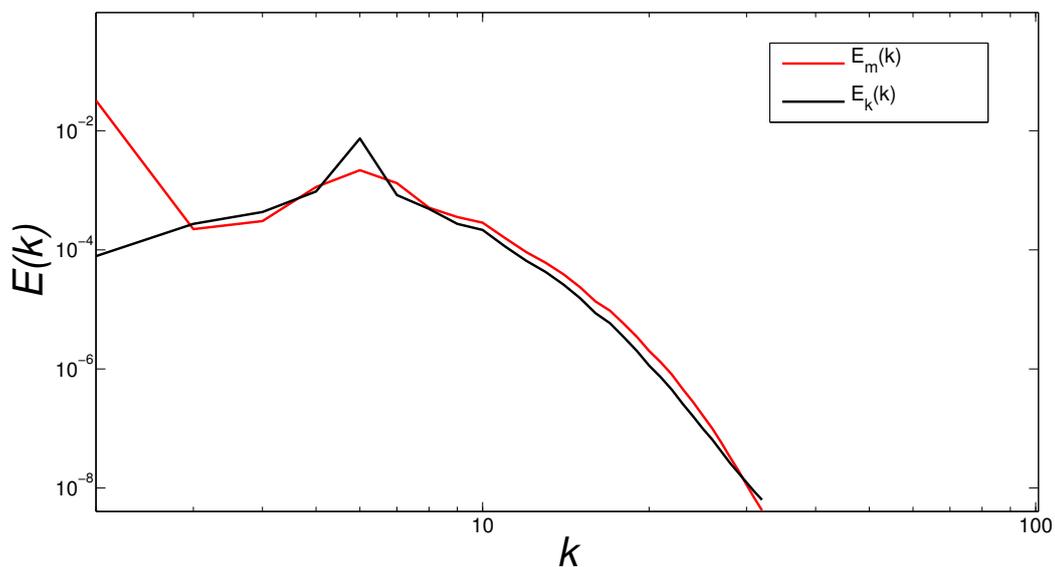


FIGURA 3.35 – Espectro de energia cinética (linha preta) e magnética (linha vermelha) para $t = 10^5$, para $\sigma = 0.95$.

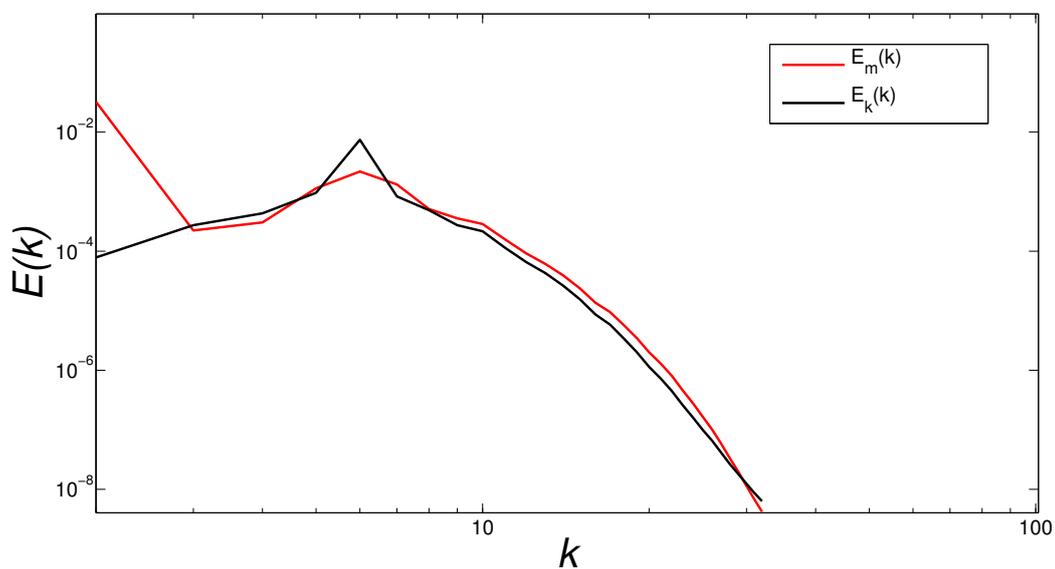


FIGURA 3.36 – Espectro de energia cinética (linha preta) e magnética (linha vermelha) para $t = 10^5$, para $\sigma = 1$.

4 Conclusão

A geração e evolução de campos magnéticos em plasmas astrofísicos permanece como uma área de intensos debates. A simulação de modelos MHD tem se mostrado particularmente útil para se explorar os modelos existentes. Nesta dissertação, investigou-se o papel da helicidade cinética no modelo de dínamo α^2 por meio de variações do parâmetro de controle σ . O diagrama de bifurcação em função de σ mostra a dependência da energia magnética média em termos da helicidade cinética. Para certos valores de helicidade cinética não foi possível estabelecer a ação do dínamo. A partir do diagrama de bifurcação para a energia magnética, obteve-se o fenômeno de multiestabilidade indicando a coexistência de mais de um atrator. Nos casos em que houve crescimento considerável da intensidade do campo magnético médio, nota-se que a helicidade influi em alguns fatores chave. Primeiramente, observou-se que para baixos valores de helicidade cinética, é necessário um tempo maior para o estabelecimento do campo magnético. Valores mais altos de σ fornecem linhas de campo magnético com alinhamento em uma direção preferencial e campos magnéticos mais intensos.

Verificou-se também a dependência da organização espaço-tempo através das médias de $\langle B_y \rangle$ nos planos xy e yz . Com isso, foi possível observar que o campo magnético médio tem direção de propagação arbitrária. A série temporal da entropia média para as médias xy e yz ilustram a organização do sistema. No caso em que $\sigma = 0.215$ o sistema se organiza na direção yz depois de um tempo considerável de simulação e não se organiza na direção xy . Já no caso em que $\sigma = 0.95$, o sistema apresenta organização na direção xy apenas por um curto período de tempo após o estabelecimento da ação do dínamo. Na direção yz , a helicidade $\sigma = 0.95$ garante uma baixa entropia mostrando um alinhamento preferencial do sistema nessa direção. Ou seja, a helicidade cinética influi na entropia determinando assim, a existência da organização ou não do sistema em uma dada direção, embora a direção particular de alinhamento dependa, também, da condição inicial.

Os espectros de energia indicam uma transferência inversa de energia. Isto é, a energia é transportada das menores escalas do sistema para as maiores escalas em decorrência do efeito α . Para o parâmetro de controle $\sigma = 0$ há um pico de energia cinética em $k = 5$, porém não há espectro de energia magnética. O aumento da helicidade cinética no sistema implica na transferência inversa de energia cinética para energia magnética em números

de onda cada vez menores.

Os resultados dessa dissertação indicam que a helicidade cinética desempenha papel crucial para o estabelecimento do início da ação do dínamo, na organização e alinhamento do sistema e também na transferência de energia. O próximo passo nesse estudo é procurar a intermitência próximo aos pontos de transição do dínamo. Além disso, em trabalhos futuros almeja-se explorar a evolução e dinâmica do dínamo em função de outros parâmetros como o número de Prandtl magnético e helicidade negativa. Outro aspecto interessante é um aprofundamento nos estudos do fenômeno de histerese observado.

Referências

ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **Chaos an introduction to dynamical systems**. New York: Springer, 1996.

BRANDENBURG, A.; SUBRAMANIAN, K. Astrophysical magnetic fields and nonlinear dynamo theory. **Physics Reports**, v. 417, n. 1, p. 1-209, 2005.

BRANDENBURG, A.; SPIEGEL, E. A. Modeling a Maunder minimum. **Astron. Nachr**, v. 329, p.351-358, 2008.

BRANDENBURG, A. The inverse cascade and nonlinear alpha-effect in simulations of isotropic helical hydromagnetic turbulence. **The Astrophysical Journal**, v. 550, n. 2, p. 824, 2001.

BRANDENBURG, A. Computational aspects of astrophysical MHD and turbulence. In: A. Ferriz-Mas & M. Núñez. **Advances in nonlinear dynamos (The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics)**. London and New York: Taylor & Francis, 2003. p. 269-344.

BRANDENBURG, A.; SUBRAMANIAN, K.; SOKOLOFF, D. Current status of turbulent dynamo theory. **Space Science Reviews**, v. 169, n. 1-4, p. 123-157, 2012.

BABCOCK, H. W. The Topology of the Sun's Magnetic Field and the 22-YEAR Cycle. **The Astrophysical Journal**, v. 133, p. 572, 1961.

BLACKMAN, E. G.; BRANDENBURG, A. Dynamic nonlinearity in large-scale dynamos with shear. **The Astrophysical Journal**, v. 579, n. 1, p. 359, 2002.

BLACKMAN, E. G. Magnetic helicity and large scale magnetic fields: A primer. **Space Science Reviews**, v. 188, n. 1-4, p. 59-91, 2014.

BISKAMP, D. **Magnetohydrodynamic turbulence**. Cambridge University Press, 2003.

BISKAMP, D. **Magnetic reconnection in plasmas**. Cambridge University Press, 2005.

BADII, R. T.; POLITI, A. **Complexity: Hierarchical structures and scaling in physics**. Cambridge University Press, 1999.

CHOUDHURI, A. R. **Nature's Third Cycle: A Story of Sunspots**. Oxford University Press, 2015.

- CANDELARESI, S.; BRANDENBURG, A. Kinetic helicity needed to drive large-scale dynamos. **Physical Review E**, v. 87, n. 4, p. 043104, 2013.
- COWLING, T. G. The magnetic field of sunspots. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 94, p. 39-48, 1934.
- CHARBONNEAU, P. Dynamo models of the solar cycle. **Living Reviews in Solar Physics**, v. 7, n. 1, p. 1-91, 2010.
- CHAGAS, M. L. D. **Atividade Cromosférica induzida por planetas extrasolares gigantes**. 2010. 81f. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.
- CATTANEO, F.; HUGHES, D. W. Nonlinear saturation of the turbulent α effect. **Physical Review E**, v. 54, n. 5, p. R4532, 1996.
- DUARTE, T. S. **Investigando o campo magnético das estrelas análogas e gêmeas solares através da espectropolarimetria**. 2012. 89f. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.
- DEL SORDO, F.; GUERRERO, G.; BRANDENBURG, A. Turbulent dynamos with advective magnetic helicity flux. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 429, n. 2, p. 1686-1694, 2013.
- DAVIDSON, P. A. **Turbulence in rotating, stratified and electrically conducting fluids**. Cambridge University Press, 2013.
- DAL PINO, E. M. D. G. **Astrofísica de plasmas**. São Paulo: USP. 2000. Apostila de aula.
- ERASO, G. A. G. **Estudos numéricos do dínamo Solar**. 2009. 229f. Tese (Doutorado em Ciências) - Universidade de São Paulo, São Paulo.
- EVERSHED, J. Radial movement in sunspots. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 69, p. 454, 1909.
- FIELD, G. B.; BLACKMAN, E. G.; CHOU, H. Nonlinear α -effect in dynamo theory. **The Astrophysical Journal**, v. 513, n. 2, p. 638, 1999.
- FRICK, P.; STEPANOV, R.; SOKOLOFF, D. Large-and small-scale interactions and quenching in an α^2 -dynamo. **Physical Review E**, v. 74, n. 6, p. 066310, 2006.
- DEL SORDO, F. **Generation of magnetic fields on galactic scale**. 2011. 79f. Thesis (Doctoral in Astronomy) - Stockholm University, Sweden.
- GRASSO, D.; RUBINSTEIN, H. R. Magnetic fields in the early universe. **Physics Reports**, v. 348, n. 3, p. 163-266, 2001.
- GAURAT, M.; JOUVE, L.; LIGNIÈRES, F.; GASTINE, T. Evolution of a magnetic field in a differentially rotating radiative zone. **Astronomy & Astrophysics**, v. 580, p. A103, 2015.
- GRAHAM, J. P.; BLACKMAN, E. G.; MININNI, P. D. Not much helicity is needed to drive large-scale dynamos. **Physical Review E**, v. 85, n. 6, p. 066406, 2012.

- GOEDBLOED, J. P.; POEDTS, S. **Principles of magnetohydrodynamics: with applications to laboratory and astrophysical plasmas.** Cambridge university press, 2004.
- HOYT, D. V.; SCHATTEN, K. H. **The role of the sun in climate change.** New York: Oxford University Press, 1997.
- HALE, G. E. On the probable existence of a magnetic field in sun-spots. **The Astrophysical Journal**, v. 28, p. 315, 1908.
- HUGHES, D. W.; ROSNER, R.; WEISS, N. O. **The Solar Tachocline.** New York: Cambridge University Press, 2007.
- HUGHES, D. W.; CATTANEO, F.; KIM, E. J. Kinetic helicity, magnetic helicity and fast dynamo action. **Physics Letters A**, v. 223, n. 3, p. 167-172, 1996.
- HOLMES, P. J.; MOON, F. C. Strange attractors and chaos in nonlinear mechanics. **Journal of Applied Mechanics**, v. 50, p. 1021, 1983.
- JABBARI, S. **Origin of solar surface activity and sunspots.** 2014. 87f. Thesis (Doctoral in Astronomy) - Stockholm University, Sweden.
- JACKSON, J. D. **Classical electrodynamics.** New York: Wiley, 1962.
- KRAUSE, F.; RÄDLER, K-H. **Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory.** Berlin: Akademie-Verlag, 1980.
- LEIGHTON, R. B. A magneto-kinematic model of the solar cycle. **The astrophysical journal**, v. 156, p. 1, 1969.
- LARMOR, J. How could a rotating body such as the Sun become a magnet. **Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci**, v. 159, p. 412, 1919.
- LAI, Y.-C.; WINSLOW, R. L.; M. Geometric Properties of the Chaotic Saddle Responsible for Supertransients in Spatiotemporal Chaotic Systems. **Physical Review Letters**, v. 74, n. 26, p. 5208-5211, 1995.
- MESTEL, L. **Stellar magnetism.** Oxford: OUP, 2012.
- MOFFATT, H. K. **Field generation in electrically conducting fluids.** Cambridge: Cambridge University Press, 1978.
- NARAIN, U.; DWIVEDI, B. N. Physics of the Sun and Its Atmosphere. In: Recent Advances in Solar Physics, 2006, Meerut College. **Proceedings of the National Workshop**, Meerut: World Scientific, 2006.
- OSSENDRIJVER, M. The solar dynamo. **The Astronomy and Astrophysics Review**, v. 11, n. 4, p. 287-367, 2003.
- PRIEST, E. **Magnetohydrodynamics of the Sun.** New York: Cambridge University Press, 2014.
- PARKER, E. N. Hydromagnetic Dynamo Models. **The Astrophysical Journal**, v. 122, p. 293, 1955.

- PROCTOR, M. R. Numerical solutions of the nonlinear α -effect dynamo equations. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 80, p. 769–784, 1977.
- REMPEL, E. L.; PROCTOR, M. R.; CHIAN, A. C.-L. A novel type of intermittency in a non-linear dynamo in a compressible flow. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 400, n. 1, p. 509-517, 2009.
- REMPEL, E. L.; CHIAN, A. C. L.; BRANDENBURG, A.; MUÑOZ, P. R.; SHADDEN, S. C. Coherent structures and the saturation of a nonlinear dynamo. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 729, p. 309-329, 2013.
- REMPEL, E. L.; CHIAN, A. C. L.; MIRANDA, R. A. Chaotic saddles at the onset of intermittent spatiotemporal chaos. **Physical Review E**, v. 76, n. 5, p. 056217, 2007.
- REMPEL, E. L.; CHIAN, A. C. L.; BRANDENBURG, A. Lagrangian chaos in an ABC-forced nonlinear dynamo. **Physica Scripta**, v. 86, n. 1, p. 018405, 2012.
- REMPEL, E. L.; CHIAN, A. C. L.; BERON-VERA, F. J.; SZANYI, S.; HALLER, G. Objective vortex detection in an astrophysical dynamo. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters**, v. 466, n. 1, p. L108-L112, 2016.
- RUDIGER, G.; HOLLERBACH, R. **The Magnetic Universe: geophysical and astrophysical dynamo theory**. Weinheim: Wiley-VCH, 2004.
- SANCHEZ, S.; FOURNIER, A.; PINHEIRO, K. J.; AUBERT, J. A mean-field Babcock-Leighton solar dynamo model with long-term variability. **Anais da Academia Brasileira de Ciências**, v. 86, p. 11–26, 2014.
- STEENBECK, M.; KRAUSE, F.; RÄDLER, K-H. Berechnung der mittleren Lorentz-Feldstärke für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis-Kräfte beeinflusster Bewegung. **Zeitschrift für Naturforschung A**, v. 21, p. 369–376, 1966.
- SHANNON, C. E. A Mathematical Theory of Communication. **The Bell System Technical Journal**, v. 27, p.379-423, 1948.
- YADAV, R. K.; VERMA, M. K.; WAHI, P. Bistability and chaos in the Taylor-Green dynamo. **Physical Review E**, v. 85, n. 3, p. 036301, 2012.
- YOSHIMURA, H. A model of the solar cycle driven by the dynamo action of the global convection in the solar convection zone. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, v. 29, p. 467-494, 1975.

Apêndice A - Dedução da Função Forçante

Esse apêndice contém a dedução da função forçante descrita na seção 2.4.4.1. Para facilitar a dedução, chama-se:

$$\begin{cases} a = k^2 [2(1 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e})^2)/k^2]^{1/2} \rightarrow \text{escalar,} \\ \mathbf{f}_k = \mathbf{c} + i\mathbf{d} \rightarrow \text{vetor complexo,} \end{cases}$$

com isto, têm-se

$$\mathbf{f}_k = a^{-1} \{i\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{e}) - \sigma |\mathbf{k}| (\mathbf{k} \times \mathbf{e})\}. \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \{N(\mathbf{c} + i\mathbf{d}) \exp [i\mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{x} + i\phi(t)]\}, \quad (\text{A.2})$$

onde $\mathbf{k} = \mathbf{k}(t)$.

Da Eq. (A.2), têm-se que:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \{N(\mathbf{c} + i\mathbf{d})(\cos\theta + i\text{sen}\theta)\}, \quad (\text{A.3})$$

onde utilizou-se a relação de Euler,

$$\begin{cases} \exp [i\theta] = \cos\theta + i\text{sen}\theta. \\ \theta = \mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{x} + \phi(t), \end{cases}$$

então,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = N \text{Re} \{ \mathbf{c} \cos\theta + i\mathbf{c} \text{sen}\theta + i\mathbf{d} \cos\theta + i^2 \mathbf{d} \text{sen}\theta \},$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = N \text{Re} \{ \mathbf{c} \cos\theta + i\mathbf{c} \text{sen}\theta + i\mathbf{d} \cos\theta - \mathbf{d} \text{sen}\theta \},$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = N(\mathbf{c} \cos\theta - \mathbf{d} \sin\theta). \quad (\text{A.4})$$

Logo da Eq. (A.4), obtém-se

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}^2 = N^2(\mathbf{c} \cos\theta - \mathbf{d} \sin\theta) \cdot (\mathbf{c} \cos\theta - \mathbf{d} \sin\theta). \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{f}^2 = N^2(\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} \cos^2\theta - 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} \underbrace{\sin\theta \cos\theta}_0 + \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} \sin^2\theta). \quad (\text{A.6})$$

Tem-se que o segundo termo dentro do parênteses é nulo. De fato, da Eq. (A.1), têm-se que

$$\mathbf{c} = -a^{-1}\sigma |\mathbf{k}| (\mathbf{k} \times \mathbf{e}) \rightarrow \text{parte real de } \mathbf{f}_k. \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{d} = a^{-1}\mathbf{k}(\mathbf{k} \times \mathbf{e}) \rightarrow \text{parte imaginária de } \mathbf{f}_k, \quad (\text{A.8})$$

onde $\mathbf{k} = \mathbf{k}(t) \rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ e $\mathbf{d} = \mathbf{d}(t)$.

Das relações (A.7) e (A.8), têm-se que

$$\mathbf{d} = -\left(\frac{\mathbf{k}}{\sigma |\mathbf{k}|} \times \mathbf{c}\right) \rightarrow \mathbf{d} = -\frac{1}{\sigma |\mathbf{k}|}(\mathbf{k} \times \mathbf{c}). \quad (\text{A.9})$$

Logo,

$$2\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} \sin\theta \cos\theta = -\frac{2}{\sigma |\mathbf{k}|} \mathbf{c} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{c}) \sin\theta \cos\theta,$$

utilizando a propriedade vetorial

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}), \quad (\text{A.10})$$

obtém-se

$$2\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} \sin\theta \cos\theta = -\frac{2}{\sigma |\mathbf{k}|} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{c}) \sin\theta \cos\theta = 0; \text{ já que } \mathbf{c} \times \mathbf{c} = 0. \quad (\text{A.11})$$

Logo, mostrou-se que o segundo termo da Eq. (A.11) no parênteses é nulo. Portanto.

$$\mathbf{f}^2 = N^2 (|\mathbf{c}|^2 \cos^2\theta + |\mathbf{d}|^2 \sin^2\theta). \quad (\text{A.12})$$

Agora, calcula-se $\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, da Eq. (A.4), têm-se que

$$\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \{N[\mathbf{c} \cos\theta - \mathbf{d} \sin\theta]\}. \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = N\nabla \times (\mathbf{c} \cos\theta) - N\nabla \times (\mathbf{d} \sin\theta). \quad (\text{A.14})$$

Utilizando a seguinte propriedade vetorial

$$\nabla \times (g\mathbf{v}) = g\nabla \times \mathbf{v} + (\nabla g) \times \mathbf{v}; \quad g = g(\mathbf{x}) = \text{função}, \quad (\text{A.15})$$

substituindo a (A.15) na Eq. (A.14), têm-se

$$\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = N[\cos\theta \nabla \times \mathbf{c} + (\nabla \cos\theta) \times \mathbf{c}] - N[\sin\theta \nabla \times \mathbf{d} + (\nabla \sin\theta) \times \mathbf{d}]. \quad (\text{A.16})$$

Deve-se notar, das relações (A.7) e (A.8), que os vetores \mathbf{c} e \mathbf{d} dependem apenas do tempo, portanto, $\nabla \times \mathbf{c}$ e $\nabla \times \mathbf{d}$ são nulos, visto que o operador ∇ (nabla) atua nas coordenadas espaciais. Então,

$$\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = N(\nabla \cos\theta) \times \mathbf{c} - N(\nabla \sin\theta) \times \mathbf{d}. \quad (\text{A.17})$$

Já às funções $\cos\theta$ e $\sin\theta$, são funções que dependem da posição \mathbf{x} e do tempo, ou seja, $\theta = \theta(\mathbf{x}, t)$. Para tal, faz-se o cálculo apenas de $\nabla \cos\theta$, sendo $\nabla \sin\theta$ completamente análogo. Utilizando o fato que $\theta = \mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{x} + \phi(t)$, têm-se que

$$\begin{aligned} \nabla \cos\theta &= \partial_x \cos\theta \hat{i} + \partial_y \cos\theta \hat{j} + \partial_z \cos\theta \hat{z}, \\ &= -k_x \sin\theta \hat{i} - k_y \sin\theta \hat{j} - k_z \sin\theta \hat{z}, \\ &= -(k_x \hat{i} - k_y \hat{j} + k_z \hat{z}) \sin\theta, \\ &= -\mathbf{k} \sin\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Similarmente, têm-se que

$$\nabla \text{sen}\theta = \mathbf{k} \cos\theta, \quad (\text{A.19})$$

substituindo (A.18) e (A.19) em (A.17), obtém-se

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) &= -N \text{sen}\theta(\mathbf{k} \times \mathbf{c}) - N \cos\theta(\mathbf{k} \times \mathbf{d}), \\ \nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) &= -N [\text{sen}\theta(\mathbf{k} \times \mathbf{c}) + \cos\theta(\mathbf{k} \times \mathbf{d})]. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Agora, fazendo uso da Eq. (A.20), pode-se calcular $\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f}$. De fato,

$$\begin{aligned} \mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} &= \{N [\mathbf{c} \cos\theta - \mathbf{d} \text{sen}\theta]\} \cdot \{-N [\text{sen}\theta(\mathbf{k} \times \mathbf{c}) + \cos\theta(\mathbf{k} \times \mathbf{d})]\}, \\ \mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} &= N^2 [\mathbf{c} \cos\theta - \mathbf{d} \text{sen}\theta] \cdot [\text{sen}\theta(\mathbf{c} \times \mathbf{k}) + \cos\theta(\mathbf{d} \times \mathbf{k})], \end{aligned}$$

onde utilizou-se a propriedade vetorial ($\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$).

$$\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = N^2 \left[\underbrace{\cos\theta \text{sen}\theta \mathbf{c} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{k})}_0 + \cos^2\theta \mathbf{c} \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{k}) - \text{sen}^2\theta \mathbf{d} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{k}) - \underbrace{\text{sen}\theta \cos\theta \mathbf{d} \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{k})}_0 \right],$$

então

$$\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = N^2 [\cos^2\theta \mathbf{c} \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{k}) - \text{sen}^2\theta \mathbf{d} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{k})], \quad (\text{A.21})$$

utilizando a propriedade vetorial (A.10) no primeiro termo dentro do colchetes da Eq. (A.21) e, utilizando ($\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$) no segundo termo dentro do colchetes, obtém-se

$$\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = N^2 [\cos^2\theta \mathbf{k} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) + \text{sen}^2\theta \mathbf{d} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{c})], \quad (\text{A.22})$$

utilizando agora a Eq. (A.9), obtém-se

$$\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = N^2 \left\{ \cos^2\theta \mathbf{k} \cdot \left[\mathbf{c} \times \left(-\frac{1}{\sigma |\mathbf{k}|} \mathbf{k} \times \mathbf{c} \right) \right] + \text{sen}^2\theta \mathbf{d} \cdot [-\sigma |\mathbf{k}| \mathbf{d}] \right\}, \quad (\text{A.23})$$

$$\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = N^2 \left\{ -\frac{\cos^2\theta}{\sigma |\mathbf{k}|} \mathbf{k} \cdot [\mathbf{c} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{c})] - \sigma |\mathbf{k}| \text{sen}^2\theta |\mathbf{d}|^2 \right\}, \quad (\text{A.24})$$

utilizando a propriedade vetorial (A.10), obtém-se

$$\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = N^2 \left\{ -\frac{\cos^2 \theta}{\sigma |\mathbf{k}|} (\mathbf{k} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{c}) - \sigma |\mathbf{k}| \operatorname{sen}^2 \theta |\mathbf{d}|^2 \right\}, \quad (\text{A.25})$$

$$\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = N^2 \left\{ -\frac{\cos^2 \theta}{\sigma |\mathbf{k}|} |\mathbf{k} \times \mathbf{c}|^2 - \sigma |\mathbf{k}| \operatorname{sen}^2 \theta |\mathbf{d}|^2 \right\}, \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = N^2 \left\{ -\sigma |\mathbf{k}| \cos^2 \theta \left| \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \times \mathbf{c} \right|^2 - \sigma |\mathbf{k}| \operatorname{sen}^2 \theta |\mathbf{d}|^2 \right\}, \quad (\text{A.27})$$

$$\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = N^2 \left\{ -\sigma |\mathbf{k}| \cos^2 \theta |\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{c}|^2 - \sigma |\mathbf{k}| \operatorname{sen}^2 \theta |\mathbf{d}|^2 \right\}, \quad (\text{A.28})$$

utilizando a propriedade ($|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \operatorname{sen} \Phi$) no primeiro das chaves no termo da Eq. (A.28), obtém-se

$$\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = N^2 \left\{ -\sigma |\mathbf{k}| \cos^2 \theta \left[|\hat{\mathbf{k}}| \cdot |\mathbf{c}| \underbrace{\operatorname{sen} \Phi}_1 \right]^2 - \sigma |\mathbf{k}| \operatorname{sen}^2 \theta |\mathbf{d}|^2 \right\}, \quad (\text{A.29})$$

onde Φ é o ângulo entre os vetores “ $\hat{\mathbf{k}}$ ” e “ \mathbf{c} ”.

Como “ Φ ” é o ângulo entre os vetores “ $\hat{\mathbf{k}}$ ” e “ $\mathbf{c} = -a^{-1} |\mathbf{k}| (\mathbf{k} \times \mathbf{e})$ ”, propositalmente REMPEL *et al.* (2013) introduz o vetor “ \mathbf{e} ”, tal que $\mathbf{k} \times \mathbf{e}$ seja perpendicular ao vetor \mathbf{k} , de modo que o ângulo Φ seja 90° , ou seja, $\operatorname{sen} \Phi = 1$. Logo,

$$\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = N^2 \{ -\sigma |\mathbf{k}| \cos^2 \theta |\mathbf{c}|^2 - \sigma |\mathbf{k}| \operatorname{sen}^2 \theta |\mathbf{d}|^2 \}, \quad (\text{A.30})$$

$$\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = -\sigma |\mathbf{k}| N^2 (|\mathbf{c}|^2 \cos^2 \theta + |\mathbf{d}|^2 \operatorname{sen}^2 \theta), \quad (\text{A.31})$$

através da Eq. (A.17), têm-se que

$$\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = -\sigma |\mathbf{k}| \mathbf{f}^2. \quad (\text{A.32})$$

Obteve-se a equação necessária para a produção de dínamos. Para $\sigma = 1$, têm-se a helicidade cinética máxima, ou seja,

$$\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = |\mathbf{k}| \mathbf{f}^2, \quad (\text{A.33})$$

enquanto que para $\sigma = 0$, têm-se a helicidade cinética mínima, ou seja, não há produção

de dínamos, como constatou-se no capítulo de resultados e discussões (capítulo (3)).

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO DM	2. DATA 08 de agosto de 2017	3. DOCUMENTO Nº DCTA/ITA/DM-070/2017	4. Nº DE PÁGINAS 77
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: O papel da helicidade em um dínamo magnetohidrodinâmico			
6. AUTOR(ES): Dalton Nunes Oliveira			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: Helicidade cinética; Magnetohidrodinâmica; Dínamo; Física			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Magnetohidrodinâmica; Helicidade; Simulação computadorizada; Campos magnéticos; Física			
10. APRESENTAÇÃO: <input checked="" type="checkbox"/> Nacional <input type="checkbox"/> Internacional ITA, São José dos Campos. Curso de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Sistemas Complexos e Dinâmica Não-Linear. Orientador: Prof. Dr. Erico Luiz Rempel. Defesa em 17/07/2017. Publicada em 2017.			
11. RESUMO: <p>Esta dissertação investiga o papel da helicidade cinética para o modelo de dínamo α^2 através de simulações tridimensionais das equações de magnetohidrodinâmica (MHD). Isso foi feito a partir da variação do parâmetro de helicidade cinética dentro do intervalo $[0, 1]$ comparando as séries temporais de campo médio e de entropia, bem como os espectros de energia. Observa-se que a helicidade cinética influi na organização do sistema e no estabelecimento da ação do dínamo. Valores mais altos de helicidade levam rapidamente ao dínamo e também a um aumento da intensidade do campo magnético. Também verificou-se que o aumento da helicidade cinética leva à transferência inversa de energia para números de onda menores indicando que a helicidade cinética tem um papel determinante no estabelecimento e evolução do dínamo MHD.</p>			
12. GRAU DE SIGILO: <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <input checked="" type="checkbox"/> OSTENSIVO <input type="checkbox"/> RESERVADO <input type="checkbox"/> SECRETO </div>			