

Dissertação apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências no Curso de Física, Área de Dinâmica Não-Linear e Sistemas Complexos.

Francis Ferreira Franco

**CAOS E HIPERCAOS EM UM MODELO
REDUZIDO DE CONVECÇÃO
HIDROMAGNÉTICA**

Dissertação aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:



Prof. Dr. Erico Luiz Rempel

Orientador

Prof. Dr. Luiz Carlos Sandoval Góes
Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP - Brasil
2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Divisão de Informação e Documentação

Franco, Francis Ferreira
Caos e Hipercaos em um Modelo Reduzido de Convecção Hidromagnética / Francis Ferreira Franco.
São José dos Campos, 2016.
81f.

Dissertação de Mestrado – Curso de Física. Área de Dinâmica Não-Linear e Sistemas Complexos – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2016. Orientador: Prof. Dr. Erico Luiz Rempel.

1. Caos. 2. Sistemas dinâmicos. 3. Convecção. 4. Física. I. Centro Técnico Aeroespacial. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Divisão de Física. II. Título.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

FRANCO, Francis Ferreira. **Caos e Hipercaos em um Modelo Reduzido de Convecção Hidromagnética**. 2016. 81f. Dissertação de Mestrado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Francis Ferreira Franco

TÍTULO DO TRABALHO: Caos e Hipercaos em um Modelo Reduzido de Convecção Hidromagnética.

TIPO DO TRABALHO/ANO: Dissertação / 2016

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta dissertação e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação pode ser reproduzida sem a autorização do autor.

Francis Ferreira Franco

Francis Ferreira Franco
Av. Cidade Jardim, 679
12.233-066 – São José dos Campos–SP

CAOS E HIPERCAOS EM UM MODELO REDUZIDO DE CONVECÇÃO HIDROMAGNÉTICA

Francis Ferreira Franco

Composição da Banca Examinadora:

Prof ^a . Dr ^a .	Marisa Roberto	Presidente	-	ITA
Prof. Dr.	Erico Luiz Rempel	Orientador	-	ITA
Prof. Dr.	Brett Vern Carlson	Membro interno	-	ITA
Prof. Dr.	Sergio Roberto Lopes	Membro externo	-	UFPR

A minha mãe, irmã e noiva.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus ter me dado força e vontade de seguir em frente nos momentos difíceis.

Agradeço ao meu orientador Dr. Erico Luiz Rempel a orientação dada para realização deste trabalho, que permitiu que o mesmo se concretizasse. Aos professores do ITA o conhecimento transmitido. E aos meus colegas Tiago Gonçalves Santos, Jenny Marcela, Flávia Santos e Emanuel Vicente Chimanski pela atenção e contribuições dadas para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço a minha família que sempre me apoiou nessa batalha. A minha avó Eunice Rosa Ferreira, minha tia Maria José Rosa Ferreira, minha prima Sinara Martins e Patricia Martins, meu primo José Lusiano Neto pelo apoio e a atenção que sempre me deu.

Agradeço a minha mãe Edivalda Ferreira Rosa e minha irmã Glaziélia Ferreira Franco pelas palavras certas nas horas que mais precisei.

Agradeço aos meus amigos, Charles William, Bruno Martins, Renato Melo, Weiner César e Fran Freitas a amizade, que, apesar da distância estiveram sempre presentes em minha vida.

Agradeço a minha noiva Adriane Marques o companheirismo, o afeto e a compreensão.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) o auxílio financeiro de dois anos de bolsa de mestrado. E ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) a oportunidade e o suporte em minha formação.

*"If I have seen farther than others,
it is because I stood on the shoulders of giants."*

— SIR ISAAC NEWTON

Resumo

Neste trabalho realizou-se um estudo numérico em um modelo reduzido de convecção hidromagnética. A estabilidade assintótica do sistema foi investigada para um intervalo de valores de parâmetros. Novos resultados quanto ao modelo foram apresentados. A dinâmica caótica e hipercaótica foram investigadas em detalhes. Os expoentes de Lyapunov da sela caótica foram calculados no interior das janelas periódicas e exibidos junto ao espectro de expoentes de Lyapunov dos atratores do sistema. A origem da multiestabilidade no sistema foi identificada.

Abstract

In this work a numerical study of a reduced model of hydromagnetic convection was performed. The asymptotic stability of the system was investigated for an interval of parameter values. New results about of the model were presented. The chaotic and hyperchaotic dynamics were investigated in details. The Lyapunov exponents of the chaotic saddle were calculated in the interior of the periodic windows and plotted together with a Lyapunov exponents spectrum of the attractors of the system. The origin multistability in the system was identified.

Lista de Figuras

FIGURA 2.1 – Típica trajetória interceptando uma seção transversal Σ à um fluxo. A sequência de pontos $\{x_1, x_3, x_5, \dots\}$ é uma órbita unilateral de um mapa de Poincaré P_+ e $\{x_2, x_4, \dots\}$ é uma órbita de P_- . A órbita completa é a sequência $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ que expressa uma órbita dos dois lados do mapa de Poincaré P_{\pm} (PARKER; CHUA, 1989) (p. 34).	20
FIGURA 2.2 – Evolução de um elemento de volume esférico de raio $\varepsilon_0(x_0)$ em torno de um ponto inicial x_0 . Depois de um tempo t a esfera torna-se um elipsoide com eixos principais $\varepsilon_1(t)$ e $\varepsilon_2(t)$. (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994)(p. 140).	22
FIGURA 2.3 – Representação do campo vetorial referente à bifurcação sela-nó para diferentes valores do parâmetro r . (STROGATZ, 1994) (p. 45).	24
FIGURA 2.4 – Representação do diagrama de bifurcação da bifurcação sela-nó. (STROGATZ, 1994)(p. 46).	25
FIGURA 2.5 – Representação do campo vetorial referente à bifurcação forquilha supercrítica para diferentes valores do parâmetro r . (STROGATZ, 1994) (p. 56).	25
FIGURA 2.6 – Representação dos diagramas de bifurcação para: a) bifurcação forquilha supercrítica e b) bifurcação forquilha subcrítica. (STROGATZ, 1994)(p.56 e p.59).	26
FIGURA 3.1 – Diagrama da geometria da instabilidade de Rayleigh-Bénard. Fonte: Hilborn (HILBORN, 2000).	29
FIGURA 3.2 – Atrator de Lorenz com $r = 28$, $\sigma = 10$ e $b = 8/3$.	35
FIGURA 3.3 – Diagrama da geometria da instabilidade de Rayleigh-Bénard considerando um campo magnético \mathbf{B}_0 imposto horizontalmente.	38

FIGURA 4.1 – (a) Maior expoente de Lyapunov λ_1 e (b) segundo maior expoente de Lyapunov λ_2 . Ambas em função dos parâmetros r e ω_0 , e com $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $\sigma_m = 0, 1$	45
FIGURA 4.2 – Convergência dos quatro expoentes de Lyapunov com $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $\sigma_m = 0, 1$, $\omega_0 = 2$ e $r = 50$	46
FIGURA 4.3 – Dependência do maior expoente de Lyapunov λ_1 em função dos parâmetros ω_0 e r , com $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $\sigma_m = 0, 1$	47
FIGURA 4.4 – (a) diagrama de bifurcação $z(r)$ com $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $\sigma_m = 0, 1$. . .	49
FIGURA 4.5 – Dependência do maior expoente de Lyapunov λ_1 em função dos parâmetros ω_0 e r , com $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $\sigma_m = 0, 1$	50
FIGURA 4.6 – Atrator A_1 em vermelho e atrator A_2 em verde, com os parâmetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 445$, $\sigma_m = 0, 1$ e $\omega_0 = 5, 95$. (a) Projeção em $x - y - z$; (b) projeção em $x - y - w$. Os dois atratores são simétricos sendo um o espelho do outro.	51
FIGURA 4.7 – Projeção em $x - z$ do atrator A_1 em vermelho e atrator A_2 em verde, com os parâmetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 445$, $\sigma_m = 0, 1$ e $\omega_0 = 5, 95$	52
FIGURA 4.8 – Atrator A_1 quadrados em vermelho e atrator A_2 círculos verdes na seção de Poincaré, com os parâmetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 445$, $\sigma_m = 0, 1$ e $\omega_0 = 5, 95$	52
FIGURA 4.9 – Atratores A_1 e A_2 com os parâmetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $\sigma_m = 0, 1$, $\omega_0 = 5, 95$, e (a) com $r = 440$ e (b) com $r = 439$	54
FIGURA 4.10 – (a) Atratores A_1 e A_2 com os parâmetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $\sigma_m = 0, 1$, $\omega_0 = 5, 95$ e $r = 437, 805$. (b) ampliação da banda do atrator A_1 demarcada com o círculo em (a)	55
FIGURA 4.11 – (a) Atratores A_1 e A_2 para $r_c < r = 437, 7323$ e (b) único atrator gerado a partir de condições iniciais distintas com $r \approx r_c$. Ambas com os demais parâmetros como $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 445$, $\sigma_m = 0, 1$ e $\omega_0 = 5, 95$	56
FIGURA 4.12 – (a) atratores A para $r_c = r \approx 437, 7322$ e com os demais parâmetros como $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $\sigma_m = 0, 1$, $\omega_0 = 5, 95$. (b) ampliação da região demarcada com o círculo em (a). E (c), ampliação da região demarcada com o círculo em (b).	57
FIGURA 4.13 – Atrator A para $r_c > r = 437, 73215$ e com os demais parâmetros como $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $\sigma_m = 0, 1$ e $\omega_0 = 5, 95$	58

- FIGURA 4.14 –Típica evolução temporal no mapa de Poincaré para (a) atrator A_1 e (b) atrator A_2 , com $r > r_c$, e (c) com $r < r_c$ 59
- FIGURA 4.15 –Típica evolução temporal no mapa de Poincaré para (a) $r < r_c$ e (b) para $r < r_c$ 60
- FIGURA 4.16 –Tempo de vida de uma grade de condições iniciais em função das variáveis w e y , com $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 453$, $\sigma_m = 0,1$ e $\omega_0 = 5,95$. 61
- FIGURA 4.17 –Atrator A_1 quadrados em vermelho e atrator A_2 círculos em verde na seção de Poincaré, com os parâmetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 453$, $\sigma_m = 0,1$ e $\omega_0 = 5,95$ 62
- FIGURA 4.18 –Plot semi-logaritmo do número de órbitas que não convergiram para o atrator $N(t)$ em função do tempo, com os parâmetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 453$, $\sigma_m = 0,1$ e $\omega_0 = 5,95$. O coeficiente angular encontrado é dado por $\alpha \approx -0,000888 \pm 8 \times 10^{-6}$ e obtemos o tempo médio $\tau \approx 1126$ 63
- FIGURA 4.19 –Bacias de atração dos atratores A_1 e A_2 com os parâmetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 453$, $\sigma_m = 0,1$ e $\omega_0 = 5,95$ 64
- FIGURA 4.20 –Bacia de atração $w \times y$ com $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 453$, $\sigma_m = 0,1$. . . 65
- FIGURA 4.21 –Plot logaritmo na base-10 da fração de condições iniciais incertas versus a incerteza ϵ , com os parâmetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 453$, $\sigma_m = 0,1$ e $\omega_0 = 5,95$. A inclinação da reta traçada ao usar uma regressão linear é dada como $\alpha = 0,0006 \pm 0,0005$ 66
- FIGURA 4.22 –(a) Projecção em $y \times w$ da sela caótica encontrada no interior da janela periódica apresentada na Figura 4.4 usando o método *Sprinkler* e fixando os parâmetros de controle em $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 453$, $\sigma_m = 0,1$ e $\omega_0 = 5,95$. (b) Projecção em $y \times w$ do atrator caótico encontrado usando os mesmos valores de parâmetros de controle com exceção de r , que para este caso foi adotado $r = 455,48$ 68
- FIGURA 4.23 –Projecção da variedade estável da sela caótica com $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 453$, $\sigma_m = 0,1$ e $\omega_0 = 5,95$ 69
- FIGURA 4.24 –(a) Maior expoente de Lyapunov λ_1 e (b) segundo maior expoente de Lyapunov λ_2 . Ambas em função dos parâmetros r e ω_0 , e com $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $\sigma_m = 0,1$ 72

FIGURA 4.25 –(a)Diagrama de bifurcação de z em função de ω_0 com $r = 640$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $\sigma_m = 0, 1$. A órbita em azul representa o atrator A , os pontos em vermelho o atrator A_1 , os pontos em verde o atrator A_2 , os pontos em cinza representam a sela caótica Λ_S e os triângulos pretos uma órbita periódica instável (UPO). (b) espectro do expoente de Lyapunov em função de ω_0 , sendo em vermelho o maior expoente de Lyapunov λ_1 , em verde o segundo maior λ_2 e em azul o terceiro maior expoente λ_3 . A linhas tracejadas representam os espectros de Lyapunov da sela caótica Λ_S encontradas por meio do algoritmo híbrido, onde a cor violeta apresenta o maior expoente de Lyapunov λ_{1S} e a cor preta o segundo maior λ_{2S} , com $r = 640$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $\sigma_m = 0, 1$ 73

FIGURA 4.26 –Diagrama de bifurcação de z e y em função de ω_0 com $r = 640$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $\sigma_m = 0, 1$. A órbita em azul representa o atrator A , os pontos em vermelho o atrator A_1 , os pontos em verde o atrator A_2 , os pontos em preto representa uma órbita periódica instável (UPO). 74

FIGURA 4.27 –(a)Diagrama de bifurcação de x em função de ω_0 com $r = 640$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $\sigma_m = 0, 1$. Os pontos em vermelho representam o atrator A_1 , os pontos em verde o atrator A_2 e os pontos em cinza a sela caótica Λ_S . (b) espectro do expoente de Lyapunov em função de ω_0 , sendo em vermelho o maior expoente de Lyapunov λ_1 , em verde o segundo maior λ_2 e em azul o terceiro maior expoente λ_3 . A linhas tracejadas representam os espectros de Lyapunov da variedade estável da sela caótica Λ_S , onde a cor violeta apresenta o maior expoente de Lyapunov λ_{1S} e a cor preta o segundo maior λ_{2S} , com $r = 640$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $\sigma_m = 0, 1$ 75

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Organização do trabalho	16
2	SISTEMAS DINÂMICOS	17
2.1	Introdução	17
2.2	Mapas	18
2.3	Equações Diferenciais	19
2.4	Mapas de Poincaré	19
2.5	Conjuntos Limite	20
2.5.1	Atratores	21
2.6	Expoente de Lyapunov	21
2.7	Sela-Caótica	22
2.8	Bifurcação	23
2.8.1	Definição Bifurcação Local	24
2.8.2	Definição Bifurcação global	27
3	MODELO DE LORENZ GENERALIZADO	29
3.1	Introdução	29
3.2	Instabilidade de Rayleigh-Bénard	29
3.3	Modelo de Lorenz Generalizado	34
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	44
4.1	Introdução	44
4.2	Variando o Número de Rayleigh: Intermitência Induzida por Crise de Junção de Atratores, Sela Caótica e Hipercaos	48

4.2.1	Intermitência Induzida por Crise de Junção de Atratores	50
4.2.2	Longos Transientes, Bacia de Atração e Dimensão Fractal	58
4.2.3	Sela Caótica	67
4.3	Hipercaos	70
4.3.1	Variando o Campo Magnético B_0 Imposto Horizontalmente	71
5	CONCLUSÃO	77
	REFERÊNCIAS	79

1 Introdução

O fenômeno de convecção é comumente observado na natureza e trata do transporte de massa por meio do movimento do fluido devido à uma diferença de densidade, que por sua vez é causada em virtude de uma diferença de temperatura no ambiente. O problema de convecção em um fluido magnetizado é importante para plasmas de laboratório, plasmas espaciais, geofísica e astrofísica (MACEK; STRUMIK, 2010). A superfície solar (fotosfera, camada visível da atmosfera solar) apresenta várias granulações que correspondem ao topo das colunas convectivas de gás quente que se formam na região convectiva (abaixo da fotosfera) devido ao processo de convecção térmica. Tal processo é um dos responsáveis pelo transporte de energia de camadas mais internas do Sol para sua superfície. As partes mais internas do plasma solar são aquecidas pela radiação do núcleo e, conseqüentemente, se expandem e sobem para a superfície, onde perdem energia e se esfriam. Como resultado desse esfriamento, essas porções de plasma se tornam mais densas, voltando a descer (PRIEST, 1982). Um processo similar também é observado no interior do nosso planeta. O campo magnético terrestre é gerado através de processos de convecção térmica que ocorrem no núcleo externo do planeta, onde um fluido condutor e de baixa viscosidade se encontra em movimento devido ao resfriamento do núcleo. Ligas metálicas de ferro e níquel são mais densas que o fluido, logo estas descem em direção ao centro da Terra, enquanto que materiais menos densos como o ferro, níquel e enxofre, sobem para regiões mais elevadas do núcleo externo (GUBBINS, 1991). Na Terra, o movimento de placas tectônicas, terremotos e erupções de vulcões também possui uma relação com a convecção térmica.

Convecção térmica na presença de um campo magnético pode ser observada em planetas e estrelas em diferentes formas. Todo conhecimento das regiões mais internas desses corpos celestes foram alcançados através de estudos teóricos. Como ainda não se pode obter observações diretas da dinâmica desse fenômeno que ocorre no interior desses astros, o estudo de modelos convectivos apresenta grandes contribuições para o entendimento do mesmo (GLATZMAIER, 2014).

Vários fenômenos da natureza são descritos por modelos de Equações Diferenciais. Equações diferenciais nem sempre podem ser resolvidas analiticamente, sendo necessário a solução numérica. A Física da Dinâmica Não-Linear emprega métodos já conhecidos

e estudados para investigar fenômenos numericamente. Mesmo que sejam feitas aproximações, estes experimentos de cunho numérico podem trazer compreensões básicas da natureza dos problemas (VILLATE, 2007).

Nos últimos anos a teoria de caos tem fornecido ferramentas poderosas para a interpretação física de sistemas dinâmicos de baixa dimensão (REMPEL *et al.*, 2006). Discussões quanto à dinâmica caótica em modelos reduzidos de fluidos e plasma, como o modelo de Lorenz (LORENZ, 1963), equação de Schroedinger não-linear derivativa e (REMPEL *et al.*, 2006) e modelos de dínamo (e.g. Covas e Tavakol), etc., vêm se intensificando à medida que novas dinâmicas são identificadas. Recentemente Macek e Strumik (MACEK; STRUMIK, 2010) apresentaram um modelo reduzido para convecção hidromagnética, propondo investigar o comportamento de convecção considerando um campo magnético imposto no processo. Um comportamento hipercaótico foi encontrado neste modelo (MACEK; STRUMIK, 2014).

Este trabalho tem como objetivo estudar a dinâmica caótica e hipercaótica no modelo apresentado por Macek e Strumik, ponto importante para compreender a ação do campo magnético no processo de convecção.

1.1 Organização do trabalho

Esta Tese de Mestrado está organizada da seguinte maneira: o capítulo 2 contém uma introdução dos conceitos básicos de sistemas dinâmicos. O capítulo 3 apresenta a dedução detalhada para o modelo reduzido de convecção magnética estudado na presente Tese. O capítulo 4 apresenta os resultados obtidos ao se estudar o modelo. Novos atratores são apresentados, assim como diagramas de bifurcação e bacias de atração nunca antes mostrados. O capítulo 5 apresenta a conclusão e trabalhos que ainda podem ser desenvolvidos.

2 Sistemas Dinâmicos

2.1 Introdução

Um sistema dinâmico é um sistema que tem seus estados alterados com a evolução do tempo. Consiste de um conjunto de possíveis estados, junto à uma regra determinística que determina um presente estado usando um estado passado (ALLIGOOD *et al.*, 1996). Geralmente um sistema dinâmico é descrito por um conjunto de equações diferenciais ordinárias (EDOs) acopladas:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= f_1(y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t), a), \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t), a), \\ &\vdots \\ \frac{dy_N}{dt} &= f_N(y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t), a),\end{aligned}$$

onde as derivadas temporais, dy_1/dt , dy_2/dt e dy_N/dt ¹, representam as variáveis de estado do sistema dinâmico, $y_1(t)$, $y_2(t)$ e $y_N(t)$ caracterizam o estado do sistema, o qual é definido pelos valores das variáveis de estado para um tempo t , e a representa um conjunto de parâmetros de controle, que são responsáveis pela configuração da regra dinâmica do sistema. Um conjunto de variáveis de estado, para um dado tempo t , representa um único ponto de um estado físico em um espaço denominado *espaço de fase*. O espaço de fase é um espaço abstrato onde sua dimensão é dada pelo número de variáveis de estado do sistema dinâmico. No caso do sistema de EDOs dado como exemplo, N é a dimensão do espaço de fase. A evolução temporal de uma condição inicial $\mathbf{y}(t_0) = y_0$ representada no espaço de fase é definida como *trajetória*, *órbita* ou *fluxo*. O comportamento de um fluxo pode ser dividido em dois estágios: um *transiente inicial* e um *regime*. O transiente inicial é uma região no espaço de fase onde as soluções da condição inicial y_0 abrangem, antes de convergir assintoticamente para um conjunto no mesmo espaço, denominado

¹Também é comum a representação por: $\dot{y}_1 = dy_1/dt$, $\dot{y}_2 = dy_2/dt$ e $\dot{y}_N = dy_N/dt$.

regime. Sendo as características deste conjunto dependentes de propriedades intrínsecas do sistema.

Quando falamos de sistemas dinâmicos, temos que atentar para algumas características:

- *Comportamento*;
- *Energia total*; e
- *Modelos teóricos*.

Um mesmo sistema dinâmico pode exibir comportamentos diferentes simplesmente variando um dos parâmetros de controle do sistema, onde este comportamento pode ser *periódico*, *quase-periódico* e *caótico*. Quanto a energia total, o sistema dinâmico pode ser classificado como um sistema *conservativo*² ou *dissipativo*. E os modelos teóricos podem ser de *Tempo Discreto* e de *Tempo Contínuo*. Os modelos teóricos de Tempo Discreto são descritos por *Equações de Diferença Finita*, já os modelos de Tempo Contínuo são descritos por *Sistemas de Equações Diferenciais* (ALLIGOOD *et al.*, 1996), (VILLATE, 2007).

2.2 Mapas

Modelos teóricos descritos por Equações de Diferença Finita são denominados de *mapas*. Se trata de um sistema dinâmico de tempo discreto, ou seja, é um sistema que seus estados só mudam durante os instantes $\{t_0, t_1, t_2, \dots\}$, sendo $t = 1, 2, 3, \dots, n$ (VILLATE, 2007). Este sistema é representado por uma equação do tipo:

$$y_{n+1} = F(y_n), \quad (2.1)$$

sendo a função $F(y)$ uma função conhecida. Dado um estado inicial y_0 é possível obter uma sequência de estados y_n fazendo aplicações sucessivas da função $F(y)$ neste estado inicial:

$$\{y_0, F(y_0), F^2(y_0), F^3(y_0), \dots, y_n = F^n(y_0)\}, \quad (2.2)$$

onde esta evolução representa a evolução de um sistema discreto de primeira ordem e o índice n seria o número de iterações.

²Sistemas Hamiltonianos é um exemplo de sistemas conservativos.

2.3 Equações Diferenciais

Como mencionamos na seção anterior, os modelos teóricos de tempo contínuo são descritos por Sistemas de Equações Diferenciais. Considere o sistema de EDOs:

$$\frac{dy}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{y}, a), \quad (2.3)$$

onde $\mathbf{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ é uma função vetorial linear ou não-linear, $\mathbf{y}(t) = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}$ é um vetor que caracteriza o estado do sistema e a simboliza um conjunto de parâmetros de controle do sistema. Quando a função \mathbf{F} não depende explicitamente do tempo, dizemos que este é um sistema *autônomo*, mas se $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{y}, a, t)$ o sistema é dito como *não-autônomo*. Um sistema de EDOs não-autônomo pode ser reduzido a um sistema autônomo introduzindo mais um estado no sistema para descrever o tempo, onde considera-se o tempo como uma variável adicional³ (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994). Neste trabalho foram abordados apenas sistemas autônomos. O fluxo contínuo de um sistema de EDOs pode dar origem a um mapa discreto utilizando a *seção de Poincaré*.

2.4 Mapas de Poincaré

O mapa de Poincaré é uma técnica clássica para análise de sistemas dinâmico. Esta técnica substitui um fluxo de tempo contínuo de um sistema com dimensão n em um fluxo discreto de um sistema com dimensão $n - 1$ (PARKER; CHUA, 1989). Seja ϕ_t a solução da equação 2.3 para uma condição inicial \mathbf{x}_0 com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e considere um conjunto de hipersuperfícies $\Sigma = \{\Sigma_k, k \in \mathbb{Z}\}$, onde estas hipersuperfícies possuem uma dimensão $n - 1$ e sejam transversais ao fluxo de ϕ_t . Consideremos γ a trajetória do fluxo ϕ_t , a qual cruza sucessivamente as hipersuperfícies gerando um conjunto de pontos $S_\gamma = \{\dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots\}$. O mapa $P : \Sigma \rightarrow \Sigma | P(x_i) = x_{i+1}$ é chamado de *mapa de Poincaré* (ALLIGOOD *et al.*, 1996), (MACAU; GREBOGI, 2001).

Na Figura 2.1 temos um exemplo de uma seção de Poincaré. Os pontos $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ são chamados de *pontos de Poincaré*. O ponto x_1 demarca o início da trajetória γ , desta forma x_1 é a condição inicial que dá origem a γ , e esta condição inicial está exatamente sobre a seção de Poincaré Σ . A trajetória γ intercepta sucessivamente Σ . Podemos separar os pontos de Poincaré com base no sentido que γ intercepta Σ . No caso da Figura 2.1 a trajetória tem o sentido $\Sigma^- \rightarrow \Sigma \rightarrow \Sigma^+$, assim podemos dizer que os pontos $\{x_1, x_3, x_5, \dots\}$ são gerados pelo fluxo que está saindo da seção de Poincaré, desde que adotemos o sentido $\Sigma \rightarrow \Sigma^+$ o sentido da trajetória que está saindo da seção, e os pontos $\{x_2, x_4, \dots\}$ são gerados pelo fluxo ao entrar na seção no sentido $\Sigma^- \rightarrow \Sigma$ (PARKER; CHUA,

³O novo estado do sistema seria o tempo, de forma que $t = y_n | dy_n/dt = 1$.

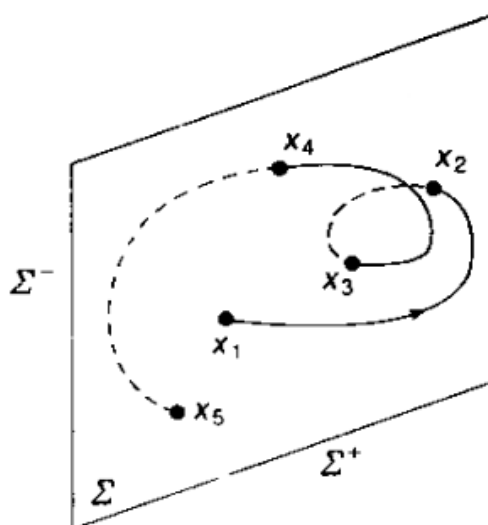


FIGURA 2.1 – Típica trajetória interceptando uma seção transversal Σ à um fluxo. A sequência de pontos $\{x_1, x_3, x_5, \dots\}$ é uma órbita unilateral de um mapa de Poincaré P_+ e $\{x_2, x_4, \dots\}$ é uma órbita de P_- . A órbita completa é a sequência $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ que expressa uma órbita dos dois lados do mapa de Poincaré P_{\pm} (PARKER; CHUA, 1989) (p. 34).

1989).

Devido à Henri-Poincaré, todo sistema descrito por equações diferenciais ordinárias pode ser reduzido a um mapa com dimensão $n - 1$, mantendo a dinâmica do sistema original. A vantagem deste procedimento é que trabalhar com mapas é mais prático, pois em geral, os mapas são mais simples de se analisar que os sistemas de equações diferenciais que lhe deram origem (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994).

2.5 Conjuntos Limite

Seja f um mapa e seja x_0 uma condição inicial. O *conjunto limite*, ou o *conjunto ω -limite*, de uma órbita $\{f^n(x_0)\}$ é o conjunto:

$$\omega(x_0) = \{x : \text{para todo } N \in \mathbb{N} \text{ existe } n > N \text{ tal que } |f^n(x_0) - x| < \epsilon\}.$$

onde n representa o número de iterações para o mapa f , N simboliza um tempo de transiente e ϵ um comprimento formado a partir do ponto x . Por exemplo: em um espaço \mathbb{R}^2 , ϵ representa um raio de um círculo, sendo que o ponto centrado na origem do círculo é a localização do ponto x e a área deste círculo representa a vizinhança de x . Conforme a definição acima, o conjunto limite é o conjunto de pontos para os quais a órbita retorna a vizinhança infinitas vezes. Desde que $\epsilon > 0$, não importa o quão pequeno o mesmo seja e quão longo seja N (ALLIGOOD *et al.*, 1996).

2.5.1 Atratores

Uma das características de sistemas dinâmicos dissipativos é a presença de conjuntos atratores. Um atrator A é um conjunto ω -limite que atrai um conjunto de condições iniciais com medida diferente de zero (medida não-nula para comprimento, área ou volume, dependendo se a dimensão do espaço de fase for um, dois ou maior) (ALLIGOOD *et al.*, 1996). O conjunto de condições iniciais que são atraídas para o atrator A é sua *bacia de atração* (ALLIGOOD *et al.*, 1996).

2.6 Expoente de Lyapunov

O expoente de Lyapunov λ representa a taxa de afastamento das trajetórias geradas a partir de duas condições iniciais distintas e arbitrariamente próximas uma da outra, as quais tendem a divergir ou convergir, fornecendo assim uma caracterização do sistema (PARKER; CHUA, 1989), (KIM e CHOE, 2010). O número de expoentes de Lyapunov é igual a dimensão do espaço de fase, sendo que o valor de cada expoente de Lyapunov representa a taxa de divergência ou convergência exponencial ao longo de uma direção do espaço de fase (CHIMANSKI *et al.*, 2015).

Consideremos inicialmente sistemas contínuos (com dimensão n). Imaginemos um pequeno hipervolume esférico de teste de estados iniciais vizinhos y_0 (raio $\varepsilon_0(x_0)$) em torno do ponto inicial x_0 de uma linha de fluxo, isto é,

$$|y_0 - x_0| \leq \varepsilon_0(x_0). \quad (2.4)$$

A medida que o tempo vai passando, a hiperesfera é deformada pelo fluxo transformando-a em um objeto hiperelipsoidal, com eixos principais $\varepsilon_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, como mostrado na Figura 2.2. Os expoentes de Lyapunov medem o crescimento exponencial dos eixos principais $\varepsilon_k(t)$ e são definidos por (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon_0(x_0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_0(x_0)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

Podemos caracterizar um atrator calculando seus expoentes de Lyapunov no fluxo (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994). Imaginemos um sistema com dimensão de $n = 4$, ao calcularmos os respectivos expoentes de Lyapunov e analisando apenas o sinal do expoente, teremos:

- 1 Ponto fixo: $(-, -, -, -)$, indica que o sistema sofre uma contração em todas as direções do espaço de fase, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e λ_4 são < 0 ;

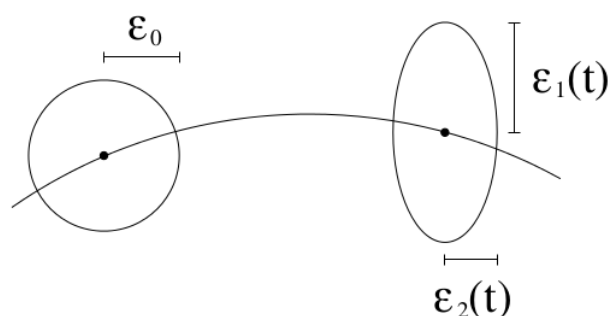


FIGURA 2.2 – Evolução de um elemento de volume esférico de raio $\varepsilon_0(x_0)$ em torno de um ponto inicial x_0 . Depois de um tempo t a esfera torna-se um elipsoide com eixos principais $\varepsilon_1(t)$ e $\varepsilon_2(t)$. (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994)(p. 140).

- 2 Ciclo limite: $(0, -, -, -)$, indica que em uma direção do espaço de fase o sistema está se conservando para $\lambda_1 = 0$, enquanto nas demais está se contraindo, λ_2, λ_3 e λ_4 são < 0 ;
- 3 Toro - T^2 : $(0, 0, -, -)$, indica que em duas direções do espaço de fase (λ_1 e λ_2) o sistema está se conservando enquanto nas demais está se contraindo, (λ_3 e λ_4);
- 4 Atrator caótico: $(+, 0, -, -)$, indica que em uma direção do espaço de fase o sistema está se expandindo ($\lambda_1 > 0$), em uma outra direção está se conservando ($\lambda_2 = 0$) e nas demais o sistema está se contraindo (λ_3 e λ_4);
- 5 Atrator hipercaótico: $(+, +, 0, -)$, indica que em duas direções o sistema está se expandindo (λ_1 e λ_2), em outra está se conservando (λ_3) e em outra está se contraindo (λ_4).

Quando o expoente de Lyapunov $\lambda = 0$ significa que este expoente foi calculado na direção do fluxo, sendo que para esta direção o sistema se conserva.

2.7 Sela-Caótica

Sela caótica é um conjunto caótico não-atrativo no espaço de fase, sendo formada pelo cruzamento de suas variedades estável e instável. A variedade estável da sela caótica é o conjunto de pontos que tendem à sela quando $t \rightarrow \infty$, e a variedade instável é o conjunto de pontos que tendem à sela quando $t \rightarrow -\infty$. Devido à esta característica, sistemas que possuem uma sela caótica costumam apresentar longos transientes caóticos. Isso porque, condições iniciais aleatórias, costumam passar algum tempo vagando a vizinhança da sela caótica antes de convergirem para os atratores (LAI; WINSLOW, 1995) e (REMPER; CHIAN, 2005).

Imaginemos uma linha unidimensional interceptando a variedade estável de um conjunto caótico Λ_S . Assuma que a dimensão da medida da variedade estável de Λ_S seja suficientemente grande para que uma linha escolhida aleatoriamente tenha uma probabilidade não nula para interceptar Λ_S . Geralmente pontos interceptando Λ_S com uma linha formam um conjunto de Cantor com uma dimensão por **box-counting** d_s (GREBOGI *et al.*, 1983). Seja $\lambda_1 > 0$, o maior expoente de Lyapunov de uma trajetória densa em Λ_S . Considere intervalos na linha com largura $\epsilon \approx e^{-\lambda_1 t}$, onde t é grande (e existem aproximadamente $N(\epsilon) \equiv \epsilon^{d_s}$ intervalos) e condições iniciais são distribuídas uniformemente na linha unidimensional. O comprimento total de todos esses intervalos é aproximadamente $\epsilon N(\epsilon) \approx \epsilon^{1-d_s}$. Então a fração de condições iniciais que caem nestes pequenos intervalos é aproximadamente ϵ^{1-d_s} . No tempo t o comprimento desses intervalos será aproximadamente $\epsilon e^{-\lambda_1 t} \approx 1$, portanto, a maioria das condições iniciais distribuídas nestes intervalos vai deixar a sela caótica Λ_S para um tempo maior do que o t (LAI; WINSLOW, 1995).

Conjuntos caóticos não-atrativos são de fundamental importância na caracterização de sistemas de dinâmica não-linear, podendo ser usados para estimar médias dinâmicas de atratores caóticos, como entropia e expoentes de Lyapunov. As selas caóticas são responsáveis por fenômenos não-lineares em sistemas dinâmicos além de transientes caóticos, como fronteira fractal entre bacias de atração e espalhamento caótico (REMPEL; CHIAN, 2004).

2.8 Bifurcação

Um sistema dinâmico é dito estruturalmente estável se para qualquer perturbação suficientemente pequena das equações que o define, o fluxo resultante apresenta o mesmo comportamento do fluxo inicial antes de sofrer a perturbação (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994). Por exemplo, se para um determinado valor do parâmetro de controle r , o sistema apresenta um atrator periódico de período 2. Se após pequenas variações em r as soluções ainda são atraídas para o atrator de período 2, o sistema é estruturalmente estável. Logo, quando o sistema muda de comportamento assintótico ao sofrer uma pequena perturbação, significa que ocorreu uma perda de estabilidade e dizemos que o sistema sofreu uma bifurcação. Assim, podemos definir bifurcação como mudanças qualitativas que ocorrem no comportamento dinâmico de um sistema ao se variar um ou mais parâmetros de controle (PARKER; CHUA, 1989) e (REMPEL, 2006). Bifurcações podem ser classificadas quanto a dois tipos: bifurcação local e bifurcação global.

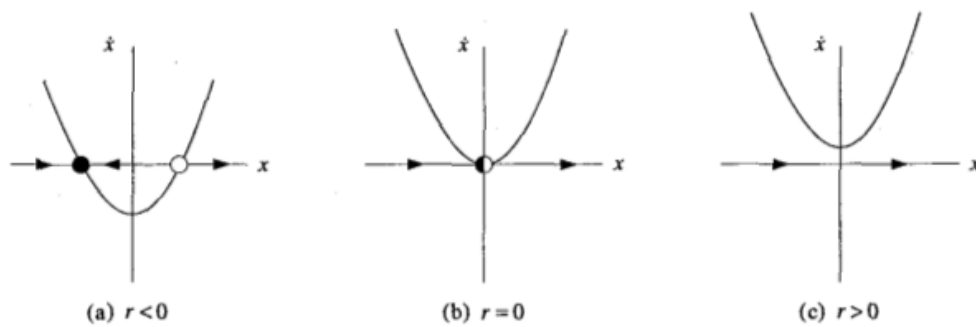


FIGURA 2.3 – Representação do campo vetorial referente à bifurcação sela-nó para diferentes valores do parâmetro r . (STROGATZ, 1994) (p. 45).

2.8.1 Definição Bifurcação Local

Bifurcação local são mudanças de comportamento do sistema que ocorrem na vizinhança local de um ponto fixo, ocasionando a destruição, criação ou mudança de estabilidade do ponto fixo. (STROGATZ, 1994). Os tipos mais comuns deste tipo de bifurcação são bifurcação sela nó, forquilha, Hopf e duplicação de período.

2.8.1.1 Bifurcação Sela-Nó

A bifurcação sela-nó é o mecanismo básico pelo qual pontos fixo são criados ou destruídos. A medida que um parâmetro é variado, dois pontos fixo ou periódicos, sendo um estável e outro instável, se movem em direção um ao outro, colidem e mutuamente se aniquilam (STROGATZ, 1994), como é apresentado no esquema da Figura 2.3.

A bifurcação sela-nó é a forma mais simples de bifurcação local, em que a mesma requer apenas uma dimensão no espaço de fase, um parâmetro de controle e apresenta apenas termos de baixa ordem (THOMPSON; STEWART, 2002). O diagrama de bifurcação para este tipo de bifurcação é apresentado na Figura 2.4. A linha tracejada na Figura 2.4 representa uma órbita periódica instável (SNB) e a linha contínua uma órbita periódica estável.

2.8.1.2 Bifurcação Forquilha

Outro tipo de bifurcação local é a chamada de bifurcação forquilha. Este tipo de bifurcação é comum em sistema físicos que apresentam simetria. Por exemplo, alguns problemas físicos apresentam uma simetria espacial entre o lado direito e lado esquerdo. Em alguns casos, pontos fixo tendem aparecer e desaparecer em pares simétricos (STROGATZ, 1994). A bifurcação forquilha é alterada qualitativamente por uma perturbação crítica (THOMPSON; STEWART, 2002). Esta bifurcação tem uma equação com a forma

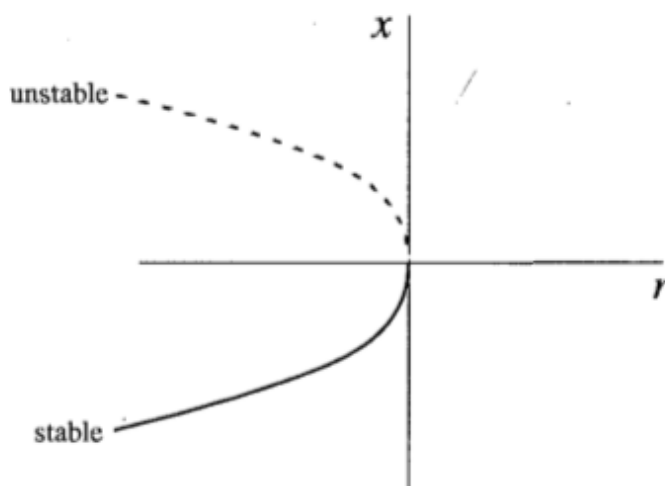


FIGURA 2.4 – Representação do diagrama de bifurcação da bifurcação sela-nó. (STROGATZ, 1994)(p. 46).

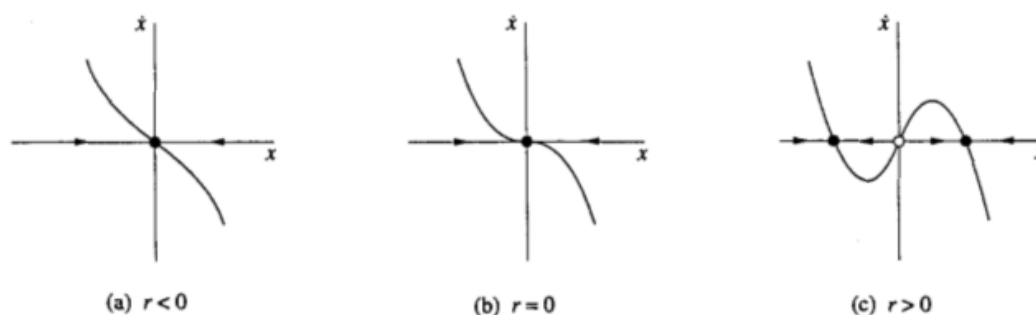
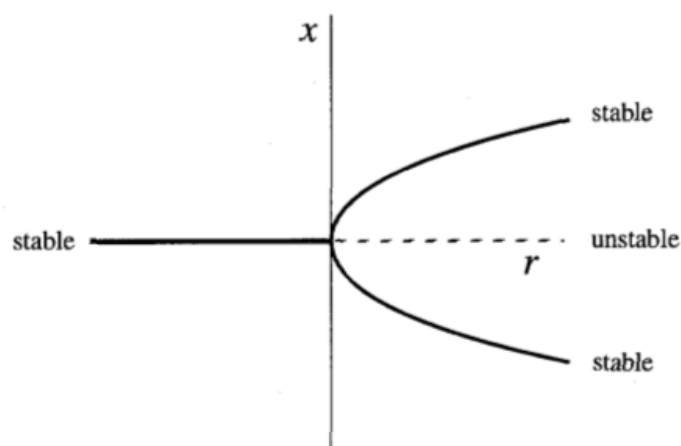


FIGURA 2.5 – Representação do campo vetorial referente à bifurcação forquilha supercrítica para diferentes valores do parâmetro r . (STROGATZ, 1994) (p. 56).

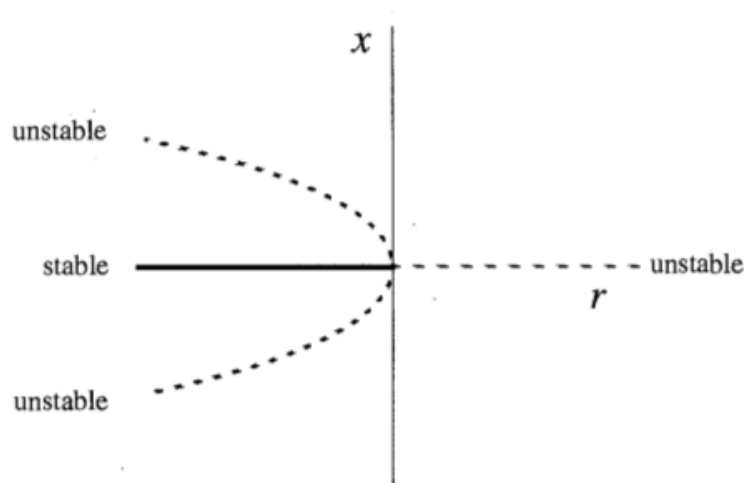
normal dada por:

$$\dot{x} = rx - x^3. \quad (2.6)$$

Uma característica notável da bifurcação forquilha é sua ocorrência em duas formas distintas (a *bifurcação forquilha supercrítica* e a *bifurcação forquilha subcrítica*), dependendo do sinal do termo cúbico na forma normal. A equação 2.6 descreve uma bifurcação forquilha supercrítica, sendo que após o ponto de bifurcação, tem um par de atratores com uma órbita periódica estável, como um subproduto necessário para separar a bacia recém-dividida (THOMPSON; STEWART, 2002). O campo vetorial para diferentes valores de r é demonstrado na Figura 2.5. A mesma configuração geométrica da Figura 2.5 ocorre quando o sinal de x^3 é alterado; no entanto, atratores e selas são trocados, passando a ter uma bifurcação forquilha subcrítica, uma vez que o atrator colide com um par simétrico de selas caóticas e desaparece, deixando apenas um único ponto de sela para $r > 0$. O diagrama de bifurcação para a bifurcação forquilha supercrítica é apresentado na Figura



(a)



(b)

FIGURA 2.6 – Representação dos diagramas de bifurcação para: a) bifurcação forquilha supercrítica e b) bifurcação forquilha subcrítica. (STROGATZ, 1994)(p.56 e p.59).

2.6-a) e a Figura 2.6-b) é a representação do diagrama de bifurcação para a bifurcação forquilha subcrítica. Na Figura 2.6, as linhas tracejadas representam uma órbita periódica instável (SNB), enquanto que as linhas sólidas representam uma órbita periódica estável.

2.8.1.3 Bifurcação Hopf

A bifurcação de Hopf pode ser supercrítica e subcrítica. A bifurcação de Hopf supercrítica é a bifurcação contínua de um ponto atrator para um ciclo-limite estável. Um espaço de fase bidimensional é um requisito para esta bifurcação e a forma normal envolve um par de equações de primeira ordem. O ponto de equilíbrio perde estabilidade quando o complexo conjugado de um par de expoentes de Lyapunov característicos cruzam o eixo imaginário no plano complexo. A condição de transversalidade afirma que, como o parâmetro de controle varia de maneira uniforme, os expoentes devem cruzar o eixo

com velocidade diferente de zero (THOMPSON; STEWART, 2002). A bifurcação de Hopf supercrítica contém a designação genérica do início gradual de um único modo de oscilação periódica. A partir da forma normal pode-se deduzir que a amplitude de oscilação inicialmente cresce como a raiz quadrada de um parâmetro de controle típico. Como um sub-produto inevitável do aparecimento do novo ciclo limite estável, instável e o ponto de equilíbrio é deixado no lugar do equilíbrio anteriormente estável. No espaço de fase bidimensional, o equilíbrio instável aparece como um repulsor espiral. Nas bifurcações subcríticas, um ponto de equilíbrio instável torna-se estável e um ciclo limite instável é criado (PARKER; CHUA, 1989), (THOMPSON; STEWART, 2002) e (REMPEL, 2006).

2.8.1.4 Bifurcação de Duplicação de Período

Em uma bifurcação de duplicação de período uma órbita periódica estável de período k existe para $r < r_c$, onde r_c denota o ponto de bifurcação. Para $r > r_c$, esta órbita perde estabilidade e uma órbita estável de período $2k$ é criada (PARKER; CHUA, 1989).

2.8.2 Definição Bifurcação global

Bifurcações globais são caracterizadas por mudanças de estabilidade envolvendo grandes regiões no espaço de fase. Tais bifurcações ocorrem quando grandes conjuntos invariantes, tais como órbitas periódica, colidem com o equilíbrio. Isto causa mudanças na topologia das trajetórias no espaço de fase que não podem ser confinadas em uma pequena região, como no caso da bifurcação local (STROGATZ, 1994). Exemplos de bifurcações globais são as crises.

2.8.2.1 Crises

Crises são ocasionadas pela colisão entre um atrator caótico e um ponto fixo ou órbita periódica instável coexistente, ou equivalentemente, com sua variedade estável (GREBOGI *et al.*, 1983) e (REMPEL, 2006). As mudanças ocorridas após uma crise podem ser de três tipos.

- *Crise de fronteira*: Na crise de fronteira o atrator caótico e sua bacia são destruídos imediatamente após $r > r_c$. Neste caso, o atrator caótico colide com uma órbita periódica instável que encontra-se sobre a fronteira entre a bacia de atração do atrator caótico e a bacia de outro conjunto atrator. As órbitas que pertenciam ao atrator habitam caoticamente ao redor da velha região do atrator durante um certo tempo transiente, e em seguida convergem para um outro conjunto atrator no espaço de fase (GREBOGI *et al.*, 1982) e (REMPEL, 2006).

- *Crise interior*: Na crise interior, a colisão do ponto fixo instável com o atrator caótico ocorre no interior da bacia de atração do atrator quando o parâmetro de controle r ultrapassa um valor crítico r_c . Conseqüentemente, uma expansão do atrator caótico ocorre uma vez que as órbitas sobre ele são repelidas pelo ponto fixo instável, e passam a habitar regiões do espaço de fases que ainda não eram habitadas (GREBOGI *et al.*, 1982).
- *Crise de junção de atratores*: Na crise de junção de atratores, para um parâmetro $r < r_c$ existem dois atratores caóticos, sendo que cada um apresenta sua própria bacia de atração. A medida que aumentamos r , os dois atratores aumentam de tamanho. Para $r = r_c$, temos o ponto da crise, onde ambos tocam simultaneamente a fronteira que separa as duas bacias resultando na junção dos atratores, dando origem à um único atrator maior (GREBOGI *et al.*, 1987), (REMPEL; CHIAN, 2005) e (REMPEL, 2006).

3 Modelo de Lorenz Generalizado

3.1 Introdução

O sistema de Lorenz tradicional consiste de um modelo extremamente simplificado para estudar o comportamento da atmosfera, onde simula-se o comportamento de um fluido contido entre dois planos retangulares, sendo que a temperatura do plano superior é menor que a temperatura do plano inferior. Quando esta diferença de temperatura ultrapassa um valor crítico, gera-se uma *corrente de convecção* no interior do fluido (LORENZ, 1963), (CHANDRASEKHAR, 1981).

3.2 Instabilidade de Rayleigh-Bénard

O modelo de Lorenz (LORENZ, 1963) descreve o movimento de um fluido sob condições da instabilidade de Rayleigh-Bénard. Esta instabilidade refere-se a um fluido contido entre duas placas horizontais separadas por uma altura h , onde a placa inferior apresenta uma temperatura T_b maior que a temperatura T_s da placa superior (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994). Este esquema é apresentado no diagrama da Figura 3.1.

Este sistema apresentado na Figura 3.1 possui extensão infinita na direção horizontal

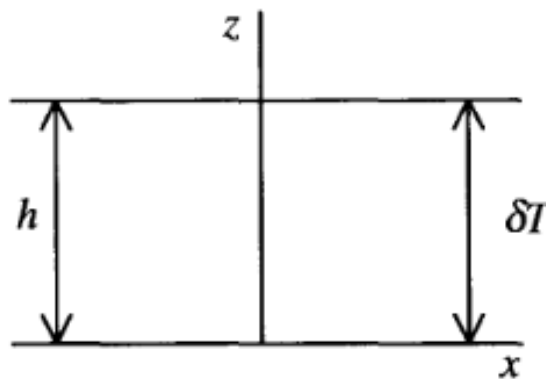


FIGURA 3.1 – Diagrama da geometria da instabilidade de Rayleigh-Bénard.
Fonte: Hilborn (HILBORN, 2000).

e na direção para dentro e fora da página (HILBORN, 2000). Quando o gradiente de temperatura δT é suficientemente grande, um pequeno volume do fluido que se desloque um pouco para cima uma quantidade Δz , experimentará uma força de empuxo ascendente. Isso devido ao mesmo ter se deslocado para uma região de densidade mais alta devido a temperatura nesta região ser mais baixa, onde podemos expressar a taxa de variação de temperatura em função do deslocamento em z como (CHANDRASEKHAR, 1981):

$$\Delta T = \frac{(\delta T)}{h} \Delta z. \quad (3.1)$$

Para um δT pequeno, a transferência de calor interna do fluido, contido entre as duas placas, ocorre por condução térmica. Isto porque se o gradiente de temperatura é pequeno, a força de empuxo ascendente é relativamente fraca e portanto a temperatura da pequena unidade de fluido se dissipará antes que ela possa se deslocar por uma distância significativa. Se o gradiente de temperatura for grande, significa que a força de empuxo ascendente pode ser suficientemente alta de forma que o pequeno volume de fluido desloque para cima mais rapidamente do que perde temperatura para o meio e gerando assim as correntes de convecções. A instabilidade Rayleigh-Bénard esta relacionada com a transferência de calor interna do fluido contido entre as duas placas ocorre e para isso temos como parâmetro o número de Rayleigh R_a . Para cada sistema existe um número de Rayleigh crítico R_{ac} que delimita a forma como a distribuição de energia térmica é realizada. Quando $R_a < R_{ac}$ significa que a transferência de calor se dá por condução, mas se o número de Rayleigh for maior que o número de Rayleigh crítico a transferência de calor se dá inicialmente por convecção (CHANDRASEKHAR, 1981).

Para deduzir o número de Rayleigh, temos que analisar um pequeno volume de fluido que sofre um pequeno deslocamento Δz para uma região que possua uma temperatura inferior à do mesmo. Primeiramente vamos considerar que a transferência de calor interna do fluido se dá por meio de condução térmica, sem convecção (CHANDRASEKHAR, 1981). Conforme a equação de difusão térmica de energia, a taxa de mudança de temperatura dT/dt , do pequeno volume de fluido para o meio, é igual ao coeficiente de difusão térmica κ multiplicado pelo Laplaciano da função da temperatura $\nabla^2 T$:

$$\frac{dT}{dt} = \kappa \nabla^2 T, \quad (3.2)$$

onde,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T.$$

Para manter o estado de não-convectividade, a temperatura do pequeno volume de fluido tem que se equilibrar com a temperatura do meio antes que o mesmo sofra um

deslocamento significativo no interior do fluido. Vamos denominar o tempo que o pequeno volume de fluido leva para dissipar sua energia térmica para o meio como tempo de repouso térmico δt_T e por meio das equações 3.1, 3.2 e 3.3 (HILBORN, 2000), temos:

$$\Delta T = \delta t_T \frac{dT}{dt}, \quad (3.3)$$

$$\frac{(\delta T)}{h} \Delta z = \delta t_T \kappa \nabla^2 T. \quad (3.4)$$

A variação da temperatura ocorre apenas na direção z , assim o Laplaciano é dado, apenas em uma dimensão, como:

$$\nabla^2 T = \frac{d^2 T(z)}{dz^2}. \quad (3.5)$$

Usando a aproximação do Laplaciano apresentada por Hilborn (HILBORN, 2000), temos:

$$\frac{d^2 T(z)}{dz^2} = \frac{\Delta T}{h^2}. \quad (3.6)$$

Substituindo a equação 3.1 na equação 3.6 temos:

$$\frac{d^2 T(z)}{dz^2} = \frac{\delta T}{h^2} \frac{\Delta z}{h}, \quad (3.7)$$

e substituindo a equação 3.7 na equação 3.5 encontramos:

$$\nabla^2 T \approx \frac{\delta T}{h^2} \frac{\Delta z}{h}. \quad (3.8)$$

Agora podemos substituir a equação 3.8 na equação 3.4, assim temos:

$$\frac{(\delta T)}{h} \Delta z = \delta t_T \kappa \frac{\delta T}{h^2} \frac{\Delta z}{h}, \quad (3.9)$$

fazendo a simplificação dos termos encontramos que o tempo de difusão térmica é dado por:

$$\delta t_T = \frac{h^2}{\kappa}. \quad (3.10)$$

Quando a temperatura da placa de baixo é muito alta se comparada com a temperatura da placa superior, apenas a condução térmica não é suficiente para difundir toda energia térmica no interior do fluido. Acima de uma diferença de temperatura crítica δT_c , parte

do fluido mais próxima da placa inferior sofre uma variação de densidade significativa e desta forma uma força de empuxo ascendente atua sobre o pequeno volume fazendo com que o mesmo se desloque mais rápido do que consegue dissipar sua energia térmica (CHANDRASEKHAR, 1981). A força de empuxo que atua sobre o pequeno volume é dada por (HILBORN, 2000):

$$F_e = \alpha \rho_0 g \Delta T, \quad (3.11)$$

onde α é o coeficiente de expansão térmica, ρ_0 é a densidade média do fluido e g é a aceleração gravitacional.

A força de empuxo varia conforme o fluido varia sua temperatura. Substituindo o ΔT da equação 3.1 na equação 3.11 encontramos a força de empuxo que atua sobre um pequeno volume de fluido que sofre um pequeno deslocamento Δz :

$$F_e = \alpha \rho_0 g \left(\frac{\delta T}{h} \right) \Delta z. \quad (3.12)$$

Vamos considerar que após iniciado o movimento de convecção, o fluido se movimenta com velocidade constante. Com isso, podemos encontrar o tempo de deslocamento τ_d que o pequeno volume leva para percorrer uma distância Δz como:

$$v_z = \frac{\Delta z}{\tau_d}, \quad (3.13)$$

$$\tau_d = \frac{\Delta z}{v_z}. \quad (3.14)$$

Considerando que o fluido se movimenta com uma velocidade constante, estamos presumindo que haja um equilíbrio entre as forças relacionadas ao movimento de convecção. Isto significa que a força de empuxo F_e equilibra a força viscosa do fluido F_ν (CHANDRASEKHAR, 1981). A força viscosa é dada pelo produto entre a viscosidade do fluido μ e o Laplaciano da velocidade $\nabla^2 v_z$, como se segue:

$$F_\nu = \mu \nabla^2 v_z. \quad (3.15)$$

Fazendo uma simplificação no Laplaciano da velocidade por meio de análise dimensional, encontramos que:

$$F_\nu \approx \mu \frac{v_z}{h^2}. \quad (3.16)$$

Fazendo a igualdade entre as duas forças (eq. 3.12 e eq. 3.16), temos que:

$$\alpha\rho_0g\left(\frac{\delta T}{h}\right)\Delta z = \mu\frac{v_z}{h^2}. \quad (3.17)$$

Desta forma, encontramos que a velocidade é dada por:

$$v_z = \frac{\alpha\rho_0gh\delta T}{\mu}\Delta z. \quad (3.18)$$

Substituindo esta velocidade na equação 3.14 temos que:

$$\tau_d = \frac{\mu}{\alpha\rho_0gh\delta T}. \quad (3.19)$$

Desde que o tempo de difusão térmica, equação 3.10, seja menor que o tempo de deslocamento do fluido, equação 3.19, o sistema permanecerá em seu estado normal de não-convecitividade, e se o tempo de difusão for mais longo que o tempo de deslocamento, então o pequeno volume de fluido continuará a sentir uma força ascendente, e a convecção continuará (CHANDRASEKHAR, 1981), (HILBORN, 2000). Assim, o importante é a razão entre o tempo de difusão térmica e o tempo de deslocamento, a qual é denominada de *número de Rayleigh* R_a e é dado por:

$$R_a = \frac{\delta t_T}{\tau_d}, \quad (3.20)$$

$$R_a = \frac{\alpha\rho_0gh^3\delta T}{\kappa\mu}. \quad (3.21)$$

O número de Rayleigh é um parâmetro crítico para a convecção de Rayleigh-Bénard e um dos parâmetros de controle que será estudado.

Numericamente, usamos o número de Rayleigh reduzido r :

$$r = \frac{R_a}{(1+a^2)^3(\pi^2/a)^2},$$

onde a é o quociente entre a altura h que separa as duas placas e a largura dos rolos de convecção gerados. O número de Rayleigh reduzido representa o número de Rayleigh normalizado por um número de Rayleigh crítico,

$$r = \frac{R_a}{R_c},$$

sendo o número de Rayleigh crítico R_c para este modelo:

$$R_c = (1 + a^2)^3(\pi^2/a)^2.$$

Desta forma, quando variamos o parâmetro r , de fato estamos variando a diferença de temperatura entre as duas placas tendo em vista que as demais variáveis são constantes,

$$r = \left[\frac{\frac{\alpha \rho_0 g h^3}{\kappa \mu}}{(1 + a^2)^3(\pi^2/a)^2} \right] \delta T. \quad (3.22)$$

3.3 Modelo de Lorenz Generalizado

O modelo de Lorenz tem sido intensamente investigado para a teoria do caos nas últimas décadas devido à riqueza de sua dinâmica (WU; CHEN, 2009). Nos últimos anos, vários pesquisadores têm apresentado modelos generalizados para aplicações específicas com base no modelo de Lorenz, onde podemos citar (JONES *et al.*, 1985), (RYPDAL; GARCIA, 2007), (WU; CHEN, 2009), (GOTODA *et al.*, 2013), dentre outros. O modelo de Lorenz generalizado deduzido por Macek e Strumik (MACEK; STRUMIK, 2010), consiste no modelo de Lorenz tradicional, mas com a adição do campo magnético. Esta diferença entre os dois modelos advém da forma como os mesmos são deduzidos. O modelo de Lorenz tradicional provém das equações da hidrodinâmica:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad (3.23)$$

$$\frac{dT}{dt} = \kappa \nabla^2 T, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.25)$$

onde a Equação 3.23 é a *equação de Navier-Stokes*, a Equação 3.24 é a *equação para condução de calor* e a Equação 3.25 é a *equação da continuidade*. Sendo que ρ é a densidade do fluido, ν é sua viscosidade, p é a pressão interna, κ é o termo de difusão térmica e \mathbf{f} representa as forças externas. Após representar as variáveis dependentes usando modos de Fourier e realizar mudanças de variáveis apropriadas (LORENZ, 1963), encontramos o modelo de Lorenz tradicional dado como:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \quad (3.26)$$

$$\frac{dy}{dt} = -xz + rx - y, \quad (3.27)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz, \quad (3.28)$$

onde os parâmetros de controle geralmente têm como valores $r = 28$, $\sigma = 10$ e $b = 8/3$. Usando estes valores de parâmetros encontramos o famoso atrator de Lorenz apresentado na Figura 3.2.

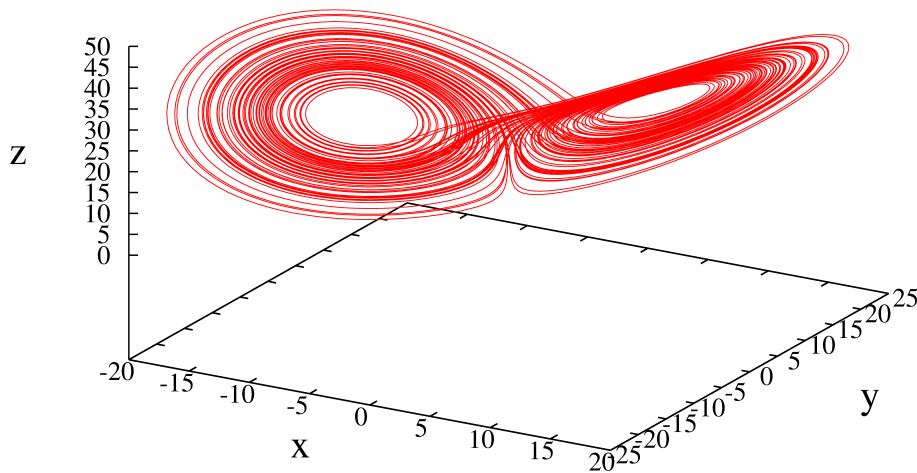


FIGURA 3.2 – Atrator de Lorenz com $r = 28$, $\sigma = 10$ e $b = 8/3$.

Enquanto o modelo de Lorenz tradicional consiste de um modelo de convecção térmica, o modelo de Lorenz generalizado consiste de uma convecção térmica na presença do campo magnético. Quando um fluido condutor se movimenta na presença de um campo magnético, campos elétricos são induzidos gerando um fluxo de corrente. O campo magnético exerce força sobre estas correntes que podem modificar consideravelmente o fluxo. Entretanto, as próprias correntes podem modificar o campo magnético (LANDAU; LIFSHITZ, 1984). Assim, nós temos uma complexa interação entre fenômenos magnéticos e fluido de campo, e o fluxo deve ser examinado pela combinação das equações de dinâmicas de fluido (equações 3.23-3.25) com as equações de campo, descritas pelas equações de Maxwell na seguinte forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (3.29)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E}, \quad (3.31)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (3.32)$$

onde a equação 3.29 é a *Lei de Gauss elétrica*, a equação 3.30 é a *Lei de Gauss magnética*, a equação 3.31 é a *Lei de Faraday* e a equação 3.32 é a *Lei de Ampère*. Sendo que \mathbf{E} é o campo elétrico, ε_0 é a permissividade do vácuo, c é a velocidade da luz, \mathbf{B} é o campo magnético, μ_0 é a permeabilidade do vácuo e \mathbf{J} é a densidade de corrente.

O campo elétrico \mathbf{E} em um referencial em repouso do fluido pode ser obtido a partir da Lei de Ohm, dada por:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (3.33)$$

isolando o campo elétrico na Lei de Ohm, encontramos que:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma}. \quad (3.34)$$

Em um fluido com uma velocidade \mathbf{v} , o campo elétrico é obtido por uma transformação Galeliana:

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{B}}{c}. \quad (3.35)$$

Logo \mathbf{E}' corresponde ao campo elétrico no referencial se movendo com velocidade \mathbf{v} (BISKAMP, 2003). Assim temos que:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{B}}{c} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma}, \quad (3.36)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} - \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{B}}{c}. \quad (3.37)$$

Substituindo a equação 3.37 na equação 3.31, temos:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}}{\sigma} - \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{B}}{c} \right), \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}}{\sigma} \right) + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (3.39)$$

Isolando \mathbf{J} na Lei de Ampère (equação 3.32) e substituindo na equação 3.39:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \left(\frac{1}{\sigma} \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} \right) + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\sigma} \frac{c^2}{4\pi} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (3.41)$$

Aplicando a propriedade do rotacional $\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} + \nabla^2 \mathbf{B}$ e $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}$, sabendo pela equação 3.30 que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ e considerando um fluido incompressível onde $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, encontramos:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \eta \nabla^2 \mathbf{B} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \quad (3.42)$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (3.43)$$

onde η representa a resistividade magnética, dada por:

$$\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma}. \quad (3.44)$$

A combinação do conjunto de equações de hidrodinâmica com o conjunto de equações de Maxwell, obtemos as equações de magnetohidrodinâmica (MHD), sendo que o modelo de Lorenz generalizado é deduzido a partir destas equações:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left(p + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}}{\mu_0 \rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho g, \quad (3.45)$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T - \mathbf{v} \cdot \nabla T, \quad (3.47)$$

onde a equação 3.45 é a *equação de conservação de momento*, a equação 3.46 é a *equação de indução magnética* e a equação 3.47 é a *equação de difusão térmica*, já apresentada anteriormente. Sendo que ν é a viscosidade cinética. Na equação 3.45, os termos do lado direito da igualdade que possuem campo magnético vêm da força de Lorentz.

O processo de convecção ao qual este novo modelo é submetido segue o cenário Rayleigh-Bénard comentado na seção anterior (seção 3.2), mas agora é imposto um campo magnético \mathbf{B}_0 horizontalmente. Um fluido confinado entre dois planos horizontais infinitos separados por uma altura h , onde o fluido é aquecido de baixo para cima devido ao plano de baixo possuir uma temperatura mais alta que a do plano superior e as temperaturas destes dois planos permanecem fixas, este esquema é apresentado na figura 3.3:

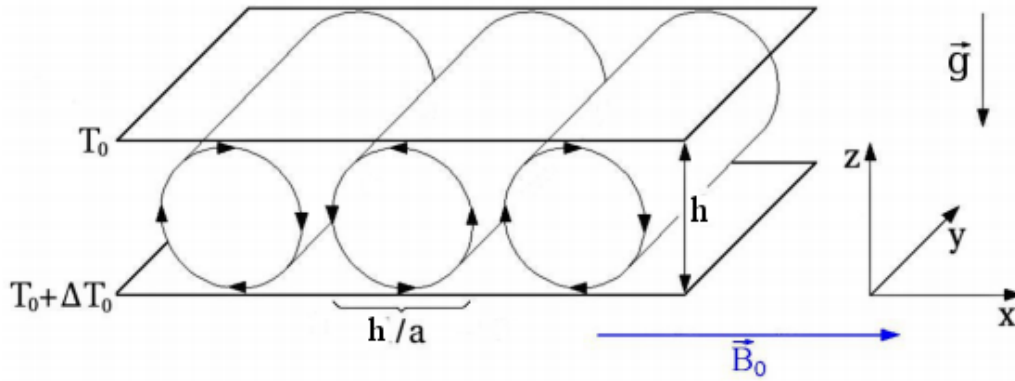


FIGURA 3.3 – Diagrama da geometria da instabilidade de Rayleigh-Bénard considerando um campo magnético \mathbf{B}_0 imposto horizontalmente.

Na equação 3.45 o primeiro termo após a igualdade:

$$-\frac{1}{\rho} \nabla \left(p + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right),$$

o qual é denominado como termo de pressão e consideramos a pressão interna do fluido e a pressão magnética. Vamos aproximar este termo para uma pressão total p_t . Outra aproximação que devemos é na equação 3.46, o primeiro termo após a igualdade é dado como:

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v}.$$

Vamos inserir nesta equação o campo magnético imposto horizontalmente \mathbf{B}_0 , desta forma vamos fazer uma aproximação como segue:

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} \approx (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}.$$

Temos que introduzir um parâmetro de controle que será proporcional à força inicial do campo magnético B_0 aplicado ao sistema, que é definido aqui como uma frequência de base magnética adimensional (MACEK; STRUMIK, 2014):

$$\omega_0 = \frac{\mathbf{v}_A}{\nu_0},$$

onde \mathbf{v}_A é equivalente a velocidade de Alfvén com uma constante de permeabilidade magnética μ_0 :

$$\mathbf{v}_A = \frac{B_0}{(\mu_0 \rho)^{1/2}}, \quad (3.48)$$

e ν_0 é uma velocidade de normalização dada por:

$$\nu_0 = \frac{4\pi\kappa}{abh},$$

onde κ é o termo de difusão térmica, a é o quociente entre a altura h que separa as duas placas e a largura dos rolos de convecção gerados e b é a relação entre a altura e a largura do retângulo.

Vamos inserir um potencial vetor de \mathbf{A} de forma que a equação 3.30 seja satisfeita:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (3.49)$$

sendo que:

$$\frac{\mathbf{A}}{(\mu_0\rho_0)^{1/2}} = \{0, \alpha(x, z, t) - v_{Az}, 0\}. \quad (3.50)$$

O campo magnético imposto horizontalmente é dado como:

$$\mathbf{B}_0 = \{B_0, 0, 0\}. \quad (3.51)$$

Como estamos tratando um fluido incompressível, temos uma relação semelhante a da equação 3.30, ou seja:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (3.52)$$

assim podemos definir uma função potencial da mesma forma da equação 3.49 de modo que satisfaça a equação 3.52:

$$\mathbf{v} = \nabla \times \Psi, \quad (3.53)$$

onde Ψ é dado como:

$$\Psi = \{0, \Psi(x, z, t), 0\}. \quad (3.54)$$

O perfil da temperatura é descrita por:

$$\theta(x, z, t) = T(x, z, t) - (T_1 + (T_2 - T_1)z), \quad (3.55)$$

onde T_1 é a temperatura na placa inferior e T_2 na superior.

Os modos de Fourier para este problema já são conhecidos (SALTZMAN, 1962), (LORENZ, 1963), (HILBORN, 2000), (MACEK; STRUMIK, 2010) e (MACEK; STRUMIK, 2014), sendo:

$$\Psi(x, z, t) = \sqrt{2} \frac{1+a^2}{a} \kappa \mathbf{x}(\mathbf{t}) \text{sen} \left(\frac{a\pi x}{h} \right) \text{sen} \left(\frac{\pi z}{h} \right), \quad (3.56)$$

que descreve o campo de velocidades (variável $x(t)$);

$$\theta(x, z, t) = \frac{R_c \delta T_0}{\pi R_a} \left[\sqrt{2} \mathbf{y}(\mathbf{t}) \cos\left(\frac{\pi a}{d} x\right) \text{sen}\left(\frac{\pi}{d} z\right) - \mathbf{z}(\mathbf{t}) \left(\frac{2\pi}{d} z\right) \right], \quad (3.57)$$

que descreve o gradiente de temperatura (variáveis $y(t)$ e $z(t)$); e

$$\alpha(x, z, t) = \sqrt{2} \frac{1+a^2}{a} \kappa \mathbf{w}(\mathbf{t}) \text{sen}\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \text{sen}\left(\frac{\pi}{h} z\right); \quad (3.58)$$

a qual descreve o campo magnético induzido (variável $w(t)$).

Substituindo a equação 3.56 na equação 3.53 para o potencial, temos:

$$\mathbf{v} = \nabla \times \left\{ 0, \sqrt{2} \frac{1+a^2}{a} \kappa \mathbf{x}(\mathbf{t}) \text{sen}\left(\frac{a\pi x}{h}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi z}{h}\right), 0 \right\}, \quad (3.59)$$

$$\mathbf{v} = \left\{ - \left(\sqrt{2} \frac{1+a^2}{a} \pi \kappa \mathbf{x}(\mathbf{t}) \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \text{sen}\left(\frac{a\pi x}{h}\right) \right), 0, \left(\sqrt{2} \frac{1+a^2}{a} \pi \kappa \mathbf{x}(\mathbf{t}) \cos\left(\frac{a\pi x}{h}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right) \right\}. \quad (3.60)$$

Para o campo magnético temos:

$$\mathbf{A} = \left\{ 0, (\mu_0 \rho_0)^{1/2} \left(-\frac{B_{0z}}{(\mu_0 \rho_0)^{1/2}} + \sqrt{2} \frac{1+a^2}{a} \kappa \mathbf{w}(\mathbf{t}) \text{sen}\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \text{sen}\left(\frac{\pi}{h} z\right) \right), 0 \right\}, \quad (3.61)$$

substituímos a equação 3.61 na equação 3.49 para o potencial vetor, obtemos:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \left\{ 0, (\mu_0 \rho_0)^{1/2} \left(-\frac{B_{0z}}{(\mu_0 \rho_0)^{1/2}} + \sqrt{2} \frac{1+a^2}{a} \kappa \mathbf{w}(\mathbf{t}) \text{sen}\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \text{sen}\left(\frac{\pi}{h} z\right) \right), 0 \right\}, \quad (3.62)$$

$$\mathbf{B} = \left\{ \frac{a B_0 h - 2^{1/2} (1+a^2) \pi \kappa w(t) (\mu_0 \rho_0)^{1/2} \cos\left(\frac{a\pi x}{h}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{a h}, 0, \right. \\ \left. - \frac{2^{1/2} (1+a^2) \pi \kappa w(t) (\mu_0 \rho_0)^{1/2} \text{sen}\left(\frac{a\pi x}{h}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{h} \right\}. \quad (3.63)$$

Substituindo as equações 3.60 e 3.63 na equação de momento, 3.45, e aplicando rotacional na mesma, após algumas simplificações obtemos:

$$\left\{ 0, \frac{2^{1/2} (1+a^2)^2 \pi^2 \kappa}{ah^4 \mu_0 \rho_0} (a B_0 h \pi (\mu_0 \rho_0)^{1/2} w(t) + \mu_0 \rho_0 ((1+a^2) \pi^2 \nu (x(t) - y(t)) + h^2 x'(t))) \right. \\ \left. * \text{sen} \left(\frac{a\pi x}{h} \right) \text{sen} \left(\frac{\pi z}{h} \right), 0 \right\} = 0. \quad (3.64)$$

Normalizando a equação 3.64 com um tempo t' dado por:

$$t' = \frac{(1+a^2)\kappa\pi^2}{h^2}, \quad (3.65)$$

e substituindo $x(t) \rightarrow x$, $y(t) \rightarrow y$ e $w(t) \rightarrow w$, encontramos que:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-x\nu + y\nu - \left(\frac{aB_0 h w (\mu_0 \rho_0)^{1/2}}{(1+a^2)\mu_0 \rho_0 \pi} \right)}{\kappa}. \quad (3.66)$$

Sabendo que o número de Prandtl é dado por $\sigma = \nu/\kappa$, temos:

$$\frac{dx}{dt} = -x\sigma + y\sigma - \left(\frac{aB_0 h w (\mu_0 \rho_0)^{1/2}}{(1+a^2)\mu_0 \rho_0 \pi \kappa} \right). \quad (3.67)$$

A equação 3.67 pode ser reescrita como:

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y - \omega_0 w, \quad (3.68)$$

onde ω_0 é dado como:

$$\omega_0 = \left[\frac{ah(\mu_0 \rho_0)^{1/2}}{\pi \kappa \mu_0 \rho_0 (1+a^2)} \right] B_0, \quad (3.69)$$

sendo que a , h , μ_0 , ρ_0 , π e κ são constantes; onde a é o quociente entre a altura h que separa as duas placas e a largura dos rolos de convecção gerados, μ_0 é a constante de permeabilidade magnética, ρ_0 é densidade do fluido e κ é o termo de difusão térmica. Desta forma, ao variarmos o parâmetro ω_0 , estamos de fato variando o campo magnético B_0 imposto horizontalmente na equação 3.51.

Agora, substituindo a equação 3.63 na equação na equação 3.45 e aplicando rotacional na mesma, após algumas simplificações obtemos:

$$\left\{ 0, \frac{2^{1/2} (1+a^2)^2 \pi^2 \kappa}{ah^4} ((1+a^2)\pi^2 \eta (\mu_0 \rho_0)^{1/2} w(t) + h(-a B_0 \pi x(t) + h(\mu_0 \rho_0)^{1/2} w'(t))) \right. \\ \left. * \cos \left(\frac{a\pi x}{h} \right) \text{sen} \left(\frac{\pi z}{h} \right), 0 \right\} = 0. \quad (3.70)$$

Normalizando a equação 3.70 com o t' da equação 3.65 e fazendo a substituição de $x(t) \rightarrow x$, $y(t) \rightarrow y$ e $w(t) \rightarrow w$, encontramos que: encontramos

$$\frac{dw}{dt} = \frac{-w \eta + \frac{aB_0 h x (\mu_0 \rho_0)^{1/2}}{(1+a^2)\pi \mu_0 \rho_0}}{\kappa}. \quad (3.71)$$

Sendo o número de Prandtl magnético dado por $\sigma_m = \eta/\kappa$ e lembrando ω_0 é dado pela equação 3.69, podemos obter uma forma simplificada da equação 3.71, descrita como:

$$\frac{dw}{dt} = \omega_0 x - \sigma_m w. \quad (3.72)$$

De modo similar ao processo realizado para obter as equações 3.67 e 3.72, substituindo a equação 3.57 na equação 3.47, aplicando o rotacional, normalizando pela equação 3.65 e após realizar mudanças de variáveis apropriadas (LORENZ, 1963), (HILBORN, 2000), obtemos as duas últimas equações que completam o modelo, sendo estas idênticas as do modelo de Lorenz tradicional (LORENZ, 1963):

$$\frac{dy}{dt} = -xz + rx - y, \quad (3.73)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz, \quad (3.74)$$

onde r é o número de Rayleigh reduzido e b a relação entre a altura e a largura do retângulo, dado como:

$$b = \frac{4}{(1+a^2)}. \quad (3.75)$$

O conjunto de equações acopladas formado pelas equações 3.67, 3.73, 3.74 e 3.72 corresponde ao modelo de Lorenz generalizado de Macek (MACEK; STRUMIK, 2010), dado por:

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y - \omega_0 w, \quad (3.76)$$

$$\frac{dy}{dt} = -xz + rx - y, \quad (3.77)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz, \quad (3.78)$$

$$\frac{dw}{dt} = \omega_0 x - \sigma_m w, \quad (3.79)$$

onde a equação 3.76 descreve o fluxo convectivo, a equação 3.77 descreve a distribuição de temperatura por convecção, a equação 3.78 descreve a distribuição de temperatura linear e a equação 3.79 descreve o perfil do campo magnético em um fluido convectivo

magnetizado (MACEK; STRUMIK, 2014).

Quando não há um campo magnético imposto ao fluido, temos $\omega_0 = 0$, onde a equação 3.76 passa a ser:

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma(x + y), \quad (3.80)$$

desacoplando com a equação 3.79. Neste caso, o modelo formado pelas equações 3.76 - 3.79 volta a ser o modelo de Lorenz tradicional, apresentado nas equações 3.26 - 3.28.

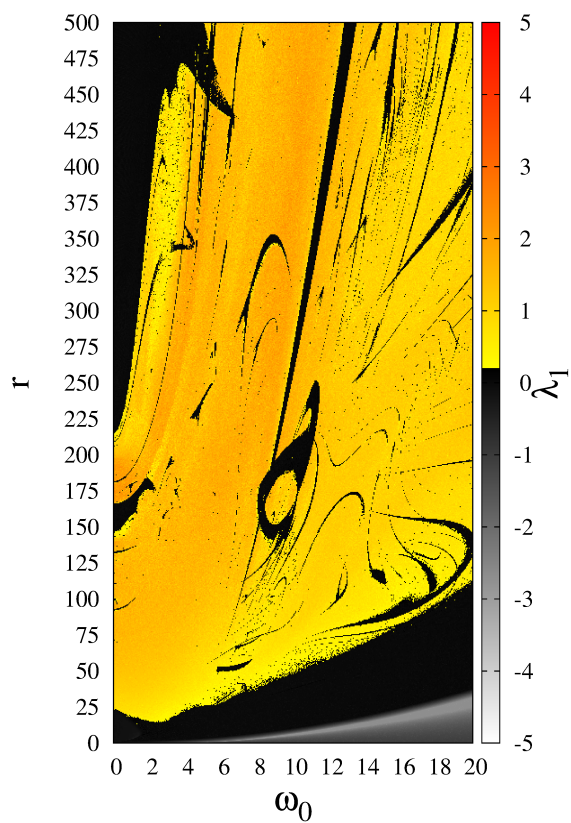
4 Resultados e Discussão

4.1 Introdução

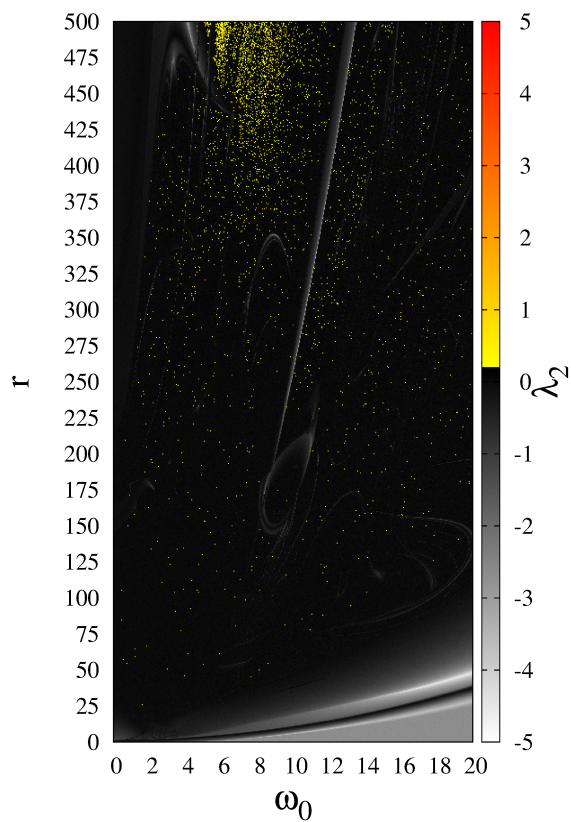
Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos numericamente para o modelo de Lorenz generalizado, onde foi usado como integrador numérico o método Runge-Kutta de quarta ordem com um passo de tempo $\delta t = 0,005$. Iniciamos a análise numérica verificando a estabilidade assintótica das soluções das equações 3.76-3.79. Para isso, fizemos a construção do diagrama apresentado na Figura 4.1 que mostra o valor dos dois maiores expoentes de Lyapunov λ_1 e λ_2 em função de dois parâmetros de controle do sistema. Através deste diagrama é possível investigar o comportamento assintótico do sistema para um intervalo de $r = 0$ até $r = 500$ e $\omega_0 = 0$ até $\omega_0 = 20$.

O diagrama apresentado na Figura 4.1 foi obtido como se segue: primeiro se define a região em que os parâmetros serão variados, desta forma se define uma grade de valores para os parâmetros de controle a serem variados. Após feito isso, calcula-se o expoente de Lyapunov para cada valor de parâmetro da grade fazendo o sorteio de condições iniciais aleatórias e desprezando o transiente necessário. Neste caso, desprezamos o transiente contando o tempo referente a seção de Poincaré. Para a Figura 4.1 o parâmetro r foi variado de $r = 0$ à $r = 500$ com passo de 0,1, mesmo passo usado para ω_0 , o qual foi investigado em um intervalo de $\omega_0 = 0$ à $\omega_0 = 20$. Com esses passos para os parâmetros adotados, tem-se uma grade de 5000×200 valores para os parâmetros de controle r e ω_0 . Os demais parâmetros dos sistemas foram mantidos fixos sendo $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $\sigma_m = 0,1$.

As Figuras 4.1-(a) e 4.1-(b) apresentam as projeções do maior expoente de Lyapunov λ_1 e do segundo maior expoente de Lyapunov λ_2 , respectivamente, em função dos parâmetros r e ω_0 . Conforme vimos na seção 2.6, quando o expoente de Lyapunov de um atrator é $\lambda > 0$, significa que o sistema apresenta um comportamento caótico. Regiões que apresentam um comportamento caótico foram plotadas em escala amarela, tendendo para vermelho dependendo do valor do expoente de Lyapunov. Esta variação é mostrada na escala de cores ao lado de cada um dos diagramas. Regiões onde $\lambda \leq 0$, foram plotadas em escala cinza, tendendo para branco as regiões em que o expoente de Lyapunov é



(a)



(b)

FIGURA 4.1 – (a) Maior expoente de Lyapunov λ_1 e (b) segundo maior expoente de Lyapunov λ_2 . Ambas em função dos parâmetros r e ω_0 , e com $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $\sigma_m = 0, 1$.

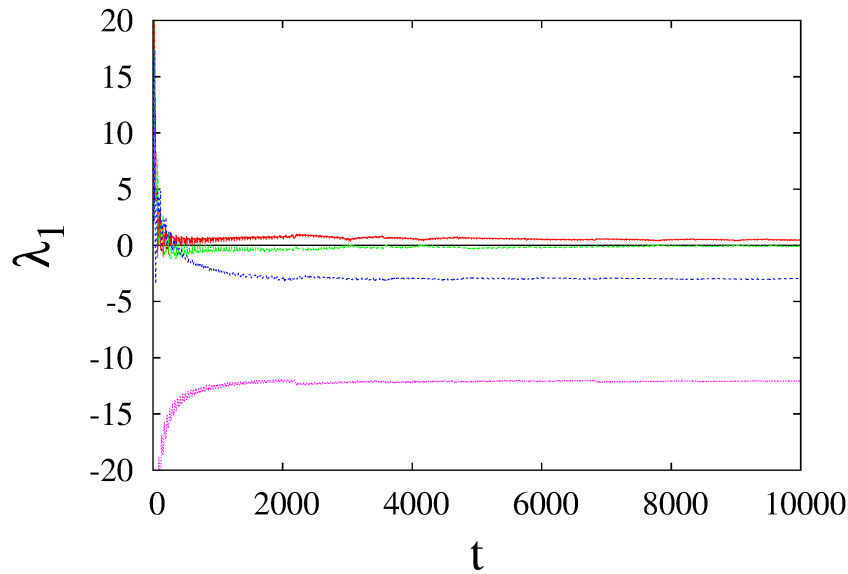
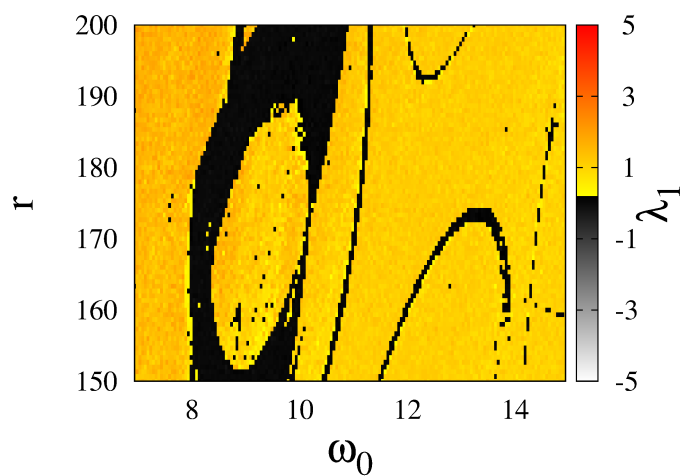


FIGURA 4.2 – Convergência dos quatro expoentes de Lyapunov com $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $\sigma_m = 0, 1$, $\omega_0 = 2$ e $r = 50$.

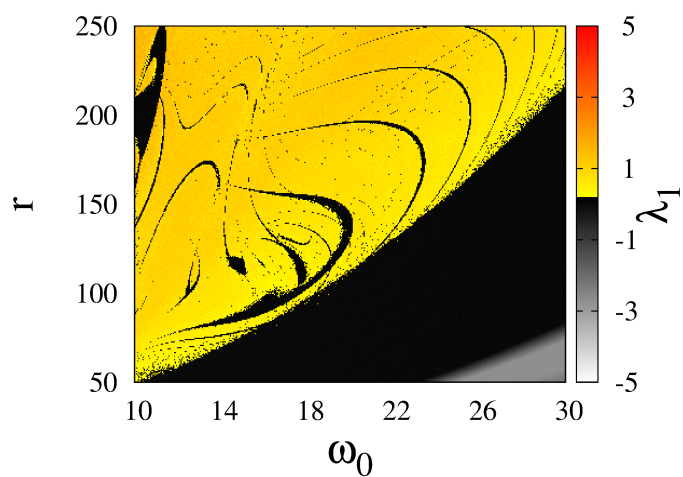
mais negativo. A convergência para os quatro expoentes de Lyapunov é apresentada na Figura 4.2, que mostra um exemplo da convergência dos expoentes conforme os parâmetros adotados no código usado na construção do diagrama da Figura 4.1. O código usado para calcular os expoentes de Lyapunov foi uma adaptação do código apresentado por Chimanski (CHIMANSKI *et al.*, 2015) do método linearizado (WOLF *et al.*, 1985). Para mais detalhes quanto ao código vide Referência (CHIMANSKI *et al.*, 2015) e (WOLF *et al.*, 1985).

Fazendo uma ampliação na Figura 4.1 é possível perceber uma “ilha” de soluções caóticas, cercada por regiões com soluções periódicas. Esta ampliação é apresentada na Figura 4.3-(a). Outras estruturas interessantes são apresentadas na Figura 4.3-(b), as quais consistem em estruturas auto-similares, demonstrando um padrão de comportamento.

Em um primeiro momento, estudamos o intervalo de valores do parâmetro de controle r adotado por Macek e Strumik (MACEK; STRUMIK, 2014) para uma janela periódica. Novos resultados quanto ao comportamento deste sistema com relação a esta janela periódica são apresentados neste capítulo. Outro intervalo de valores de parâmetros é estudado para uma nova janela periódica, fixando o valor do parâmetro de controle r e variando o ω_0 .



(a)



(b)

FIGURA 4.3 – Dependência do maior expoente de Lyapunov λ_1 em função dos parâmetros ω_0 e r , com $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $\sigma_m = 0, 1$.

4.2 Variando o Número de Rayleigh: Intermitência Induzida por Crise de Junção de Atratores, Sela Caótica e Hipercaos

O número de Rayleigh R_a representa a razão entre o tempo de difusão térmica e o tempo de deslocamento (HILBORN, 2000). Numericamente, usa-se o número de Rayleigh reduzido r , este que é a razão entre R_a por um número de Rayleigh crítico R_c :

$$r = \frac{R_a}{R_c}. \quad (4.1)$$

Conforme discutido no capítulo 3 o número de Rayleigh reduzido é um parâmetro de controle do sistema o qual é proporcional ao gradiente de temperatura δt (MACEK; STRUMIK, 2010), (GOTODA *et al.*, 2013), (MACEK; STRUMIK, 2014). Essa discussão foi apresentada na seção 3.2. Fixamos a seção de Poincaré em $x = 0$ e variamos o parâmetro de controle r por um intervalo de $r = 430$ até $r = 480$, com um passo de interação de $r_{passo} = 0,005$. Adotando os demais parâmetros controle como $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $\sigma_m = 0,1$ e $\omega_0 = 5,95$, obteve-se a janela periódica apresentada na Figura 4.4.

A Figura 4.4-a) apresenta o diagrama de bifurcação (na seção de Poincaré $x = 0$) encontrado ao se observar o comportamento assintótico do sistema dinâmico variando o parâmetro r . **MC** denota uma crise de junção de atratores e **SNB** uma bifurcação sela-nó. Estas duas regiões no espaço de fase, marcam os valores do parâmetro de controle r em que o sistema altera seu comportamento assintótico de maneira brusca. Para estes valores de parâmetros adotados, observou-se que o sistema apresenta multiestabilidade. Existe dois atratores coexistindo no espaço de fase, sendo estes apresentados com cores distintas. A Figura 4.4-a) é formada por pontos na cor vermelha, verde e cinza. Os pontos da cor vermelha representam o comportamento assintótico para o atrator denominado A_1 e os pontos em verde o comportamento assintótico para o segundo atrator A_2 , onde os mesmos são simétricos. Os pontos cinza representam a sela caótica Λ_s , a qual é onipresente para todos os valores de r na figura. A Figura 4.5 é uma ampliação da Figura 4.1 mostrando apenas a região no espaço de fase dos diagramas apresentados na Figura 4.4. Lembrando que na Figura 4.4, foi adotado $\omega_0 = 5,95$.

A Figura 4.4-b) é a representação do maior expoente de Lyapunov λ_1 e do segundo maior expoente de Lyapunov λ_2 em função do parâmetro r . Para valores de parâmetros em que o sistema apresenta pelo menos um expoente de Lyapunov positivo, significa que este sistema apresenta uma dinâmica caótica (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994), (ALLIGOOD *et al.*, 1996), (STROGATZ, 1994). Quando o sistema apresenta dois expoentes de Lyapunov positivos, dizemos que o sistema apresenta uma dinâmica hipercaótica (MACEK; STRUMIK,

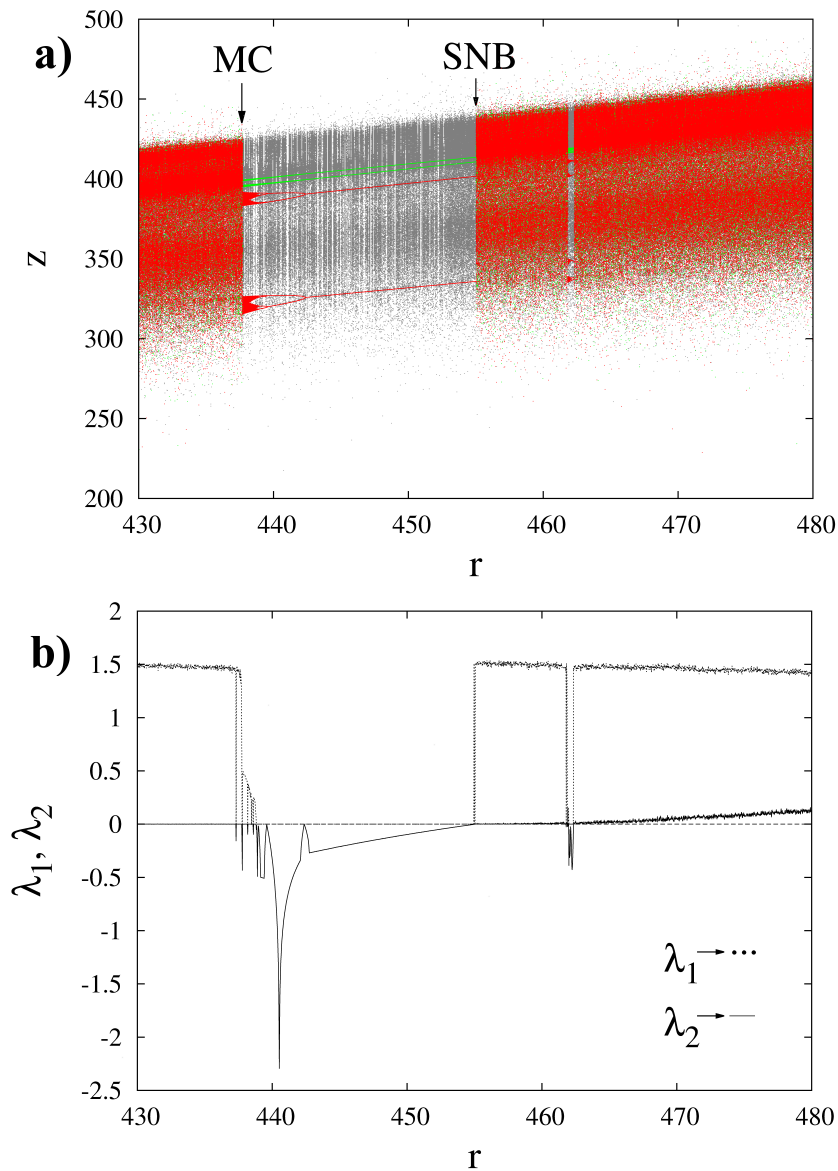


FIGURA 4.4 – (a) diagrama de bifurcação $z(r)$ com $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $\sigma_m = 0,1$ e $\omega_0 = 5,95$. Os pontos cinza representam a sela caótica Λ_s , em vermelho o atrator A_1 e em verde o atrator A_2 . MC denota uma crise de junção de atratores e SNB denota uma bifurcação sela nó. (b) variação dos dois maiores expoentes de Lyapunov λ_1 e λ_2 em função do parâmetro r .

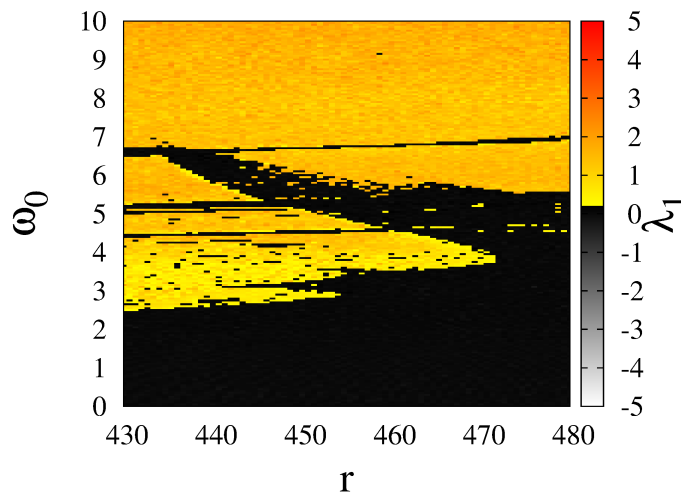


FIGURA 4.5 – Dependência do maior expoente de Lyapunov λ_1 em função dos parâmetros ω_0 e r , com $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $\sigma_m = 0, 1$.

2014), (WU; CHEN, 2009).

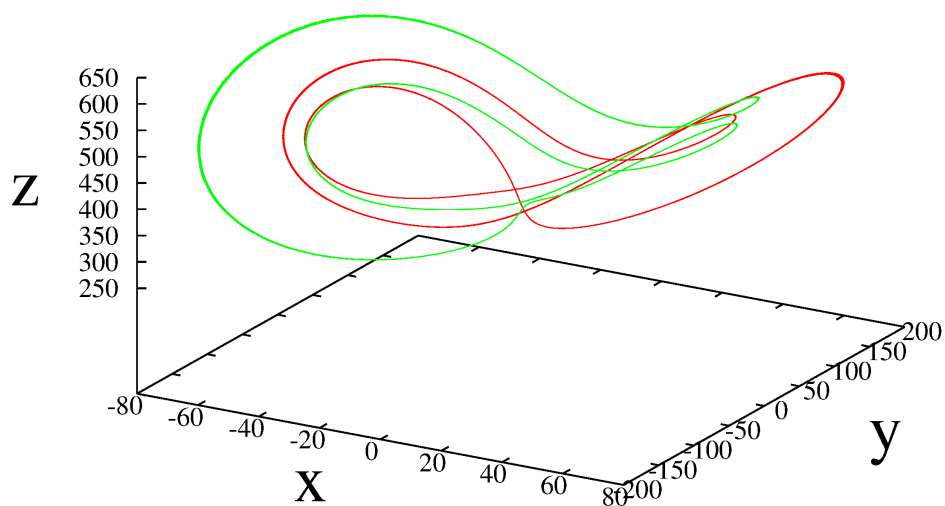
Primeiro, identificamos a rota para caos variando o parâmetro r no intervalo de $r = 445$ até $r = 435$. Estudamos a dinâmica do sistema no interior da janela periódica, fixando o parâmetro de controle r em $r = 453$. Por último, identificamos a rota para caos e posteriormente hipercaos para o intervalo $r = 454$ até $r = 480$.

4.2.1 Intermitência Induzida por Crise de Junção de Atratores

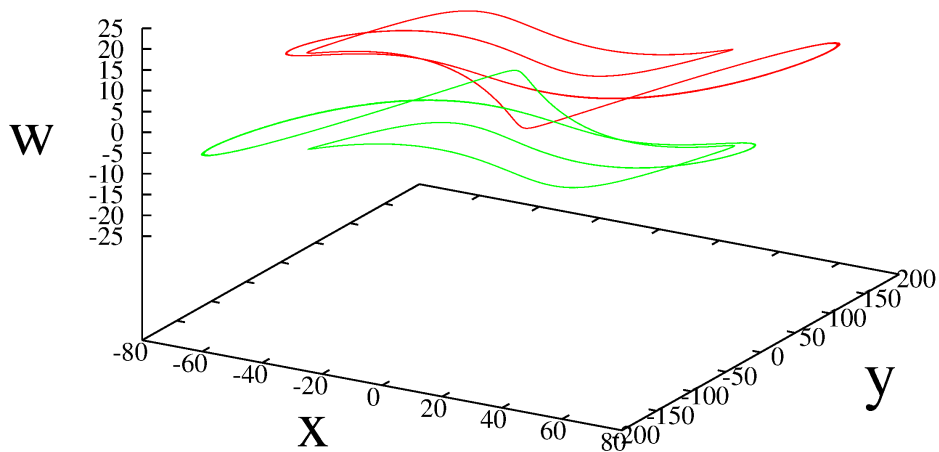
Na Figura 4.4-a), para o parâmetro $r = 445$, tem-se dois atratores periódicos simétricos coexistindo no espaço de fase, estes que são apresentados na Figura 4.6, sendo esta a representação dos dois atratores no fluxo para diferentes tipos de projeções. Já a Figura 4.7 é a projeção bidimensional dos dois atratores simétricos em $x - z$.

Usando a seção de Poincaré por meio do método de Hénon, reduzimos a dimensão do sistema de $n = 4$ para $n = 3$. A representação dos dois atratores na seção de Poincaré é apresentada na Figura 4.8. Adotando apenas um sentido em que o fluxo corta a seção, para um mapa os dois atratores são representados no espaço de fase como 2 pares de pontos. Isto porque para estes valores de parâmetros de controle, o sistema apresenta uma órbita periódica. Assim tem-se dois atratores periódicos de período 2.

Indo de $r = 445$ até $r = 435$, para o valor de $r \approx 442, 35$ o sistema sofre uma bifurcação do tipo *flip*, iniciando uma cascata de duplicação de período. A Figura 4.9-(a) mostra os dois atratores após sofrer a primeira duplicação de período, passando de atratores de período dois, como mostrado na Figura 4.8 com $r = 440$, para atratores de período quatro. Após a primeira bifurcação *flip*, inicia-se uma sequência de bifurcação de duplicação de período. Sendo que a segunda duplicação ocorreu para $r \approx 439, 56$, onde os atratores



(a)



(b)

FIGURA 4.6 – Atrator A_1 em vermelho e atrator A_2 em verde, com os parâmetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 445$, $\sigma_m = 0,1$ e $\omega_0 = 5,95$. (a) Projeção em $x - y - z$; (b) projeção em $x - y - w$. Os dois atratores são simétricos sendo um o espelho do outro.

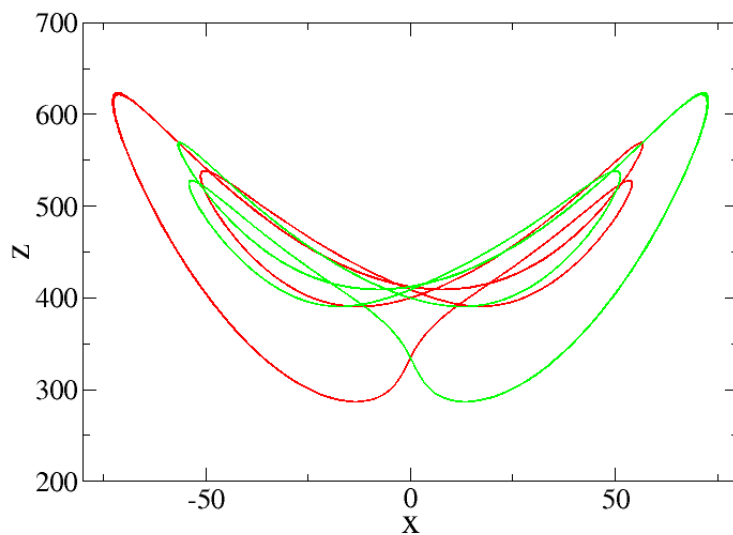


FIGURA 4.7 – Projecção em $x - z$ do atrator A_1 em vermelho e atrator A_2 em verde, com os parâmetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 445$, $\sigma_m = 0, 1$ e $\omega_0 = 5, 95$.

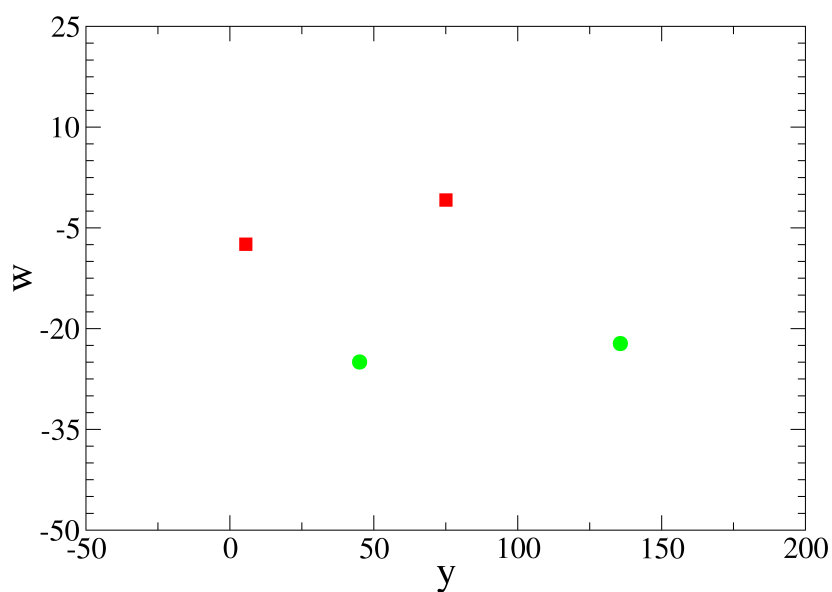


FIGURA 4.8 – Atrator A_1 quadrados em vermelho e atrator A_2 círculos verdes na seção de Poincaré, com os parâmetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 445$, $\sigma_m = 0, 1$ e $\omega_0 = 5, 95$.

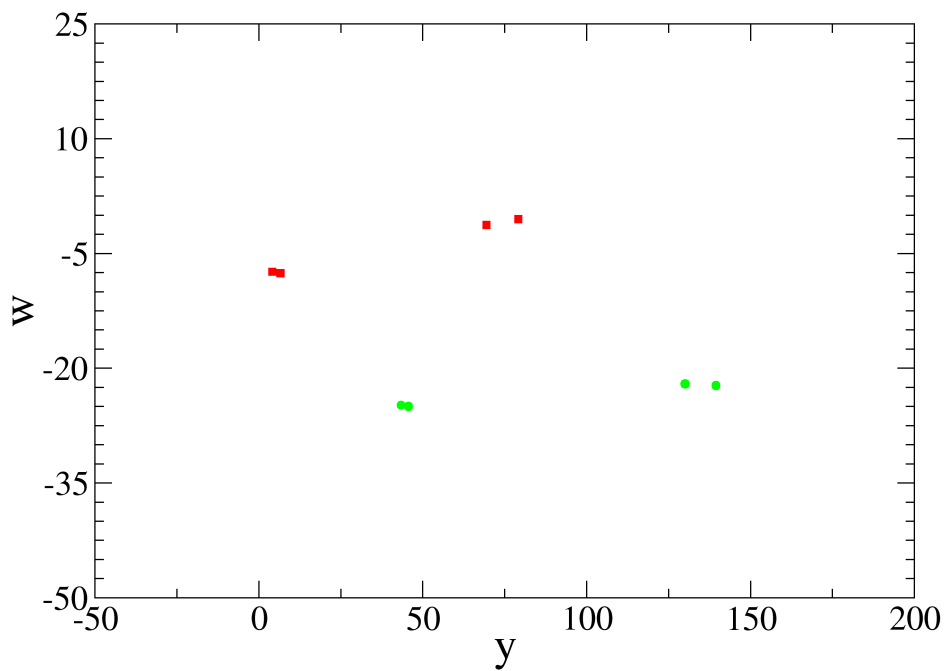
passam de período quatro para atratores periódicos de período oito, como mostrado na Figura 4.9-(b) para $r = 439$. Esta sequência de duplicação conduz o sistema para uma dinâmica caótica. A Figura 4.10-(a) mostra os dois atratores caóticos em duas bandas com $r = 437,805$, sendo que o atrator A_1 é apresentado em vermelho e o atrator A_2 em verde. A Figura 4.10-(b) é uma ampliação da banda de A_1 demarcada com o círculo na Figura 4.10-(a).

Chegando ao fim da janela periódica da Figura 4.4-(a), tem-se uma mini janela periódica dentro desta maior. Mostramos que para $r = 437,805$ o sistema passa de uma órbita periódica para uma órbita caótica, devido à uma sequência de bifurcações de duplicação de período. Este comportamento caótico perdura até $r \approx 437,775$. Para este valor de parâmetro o sistema passa novamente por uma perda de instabilidade ao sofrer uma bifurcação sela-nó (SNB). Devido à SNB o sistema deixa de ter dois atratores caóticos, com duas banda cada, e passa a apresentar dois atratores periódicos de período seis. Esta mini janela periódica deixa de existir para $r \approx 437,735$, ponto em que os atratores voltam a serem caóticos, mas com varias bandas. A rota para o caos dentro desta mini janela, novamente é uma cascata de duplicação de período, iniciando em $r \approx 437,755$.

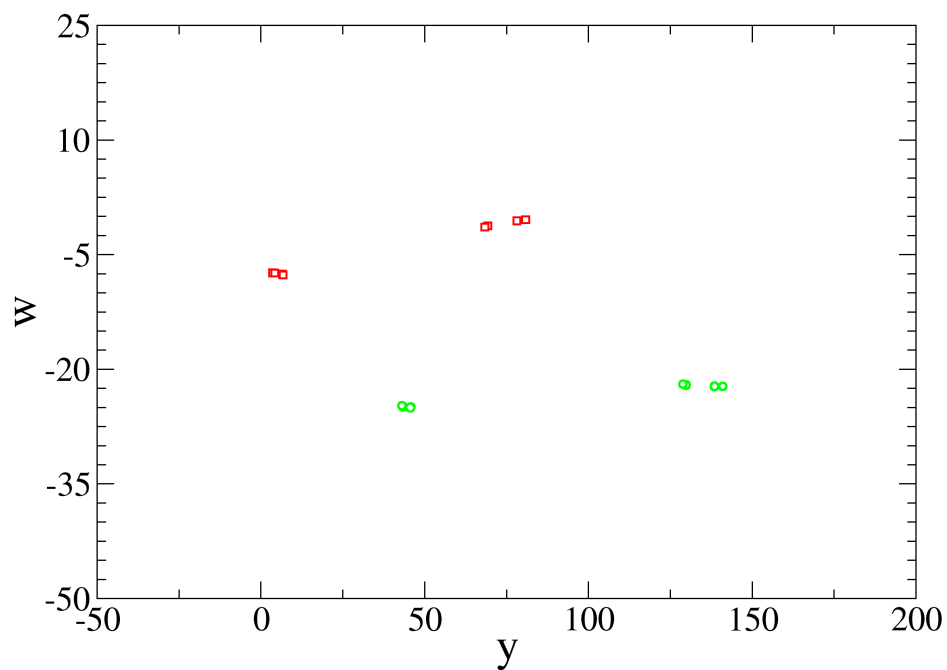
O comportamento caótico dos dois atratores permanece o mesmo até $r = 437,7323$. A partir deste ponto, o sistema passa novamente por uma perda de instabilidade, mas desta vez causada por uma bifurcação global. O comportamento do sistema é alterado de um caos *fraco* para um caos *forte*. Com base na Figura 4.4-(b), consideramos caos fraco quando $\lambda_1 < 0,5$ e caos forte para $\lambda_1 > 0,5$. A rota para caos forte no sistema se trata de uma intermitência devido à uma crise de junção de atratores. Crise de junção de atratores é quando dois ou mais atratores se juntam e formam um único atrator maior (REMPEL; CHIAN, 2005), (GREBOGI *et al.*, 1987).

Na crise de junção de atratores, há um valor crítico r_c para o parâmetro de controle r , onde os atratores pré-criSES tocam simultaneamente a fronteira que separa ambas bacias de atração e colidem com uma ou mais órbitas periódicas instáveis sobre a fronteira das bacias (REMPEL; CHIAN, 2005). A Figura 4.11-(a) apresenta A_1 e A_2 para $r > r_c$, onde $r = 437,7323$. Na Figura 4.11-(b) é apresentado o atrator A para $r \approx r_c$. Sendo as Figuras 4.12-(a), 4.12-(b) e 4.12-(c), ampliações da Figura 4.11-(b). A Figura 4.13 apresenta o atrator caótico que surge após a junção dos atratores A_1 e A_2 para $r < r_c$. Na Figura 4.13 $r = 437,73215$.

Podemos observar o comportamento do sistema na crise de junção de atratores observando as séries temporais para diferentes valores de parâmetros. As Figuras 4.14-(a) e 4.14-(b) apresenta a série temporal na seção de Poincaré de $x(t)$ com $r = 437,7323$, caso em que $r > r_c$, para o atrator A_1 e A_2 respectivamente. A série temporal demonstra um comportamento caótico, onde os atratores caóticos apresenta duas faixas. A Figura 4.14-(c) apresenta a série temporal para $r = 437,73225$. Através da mesma podemos ver

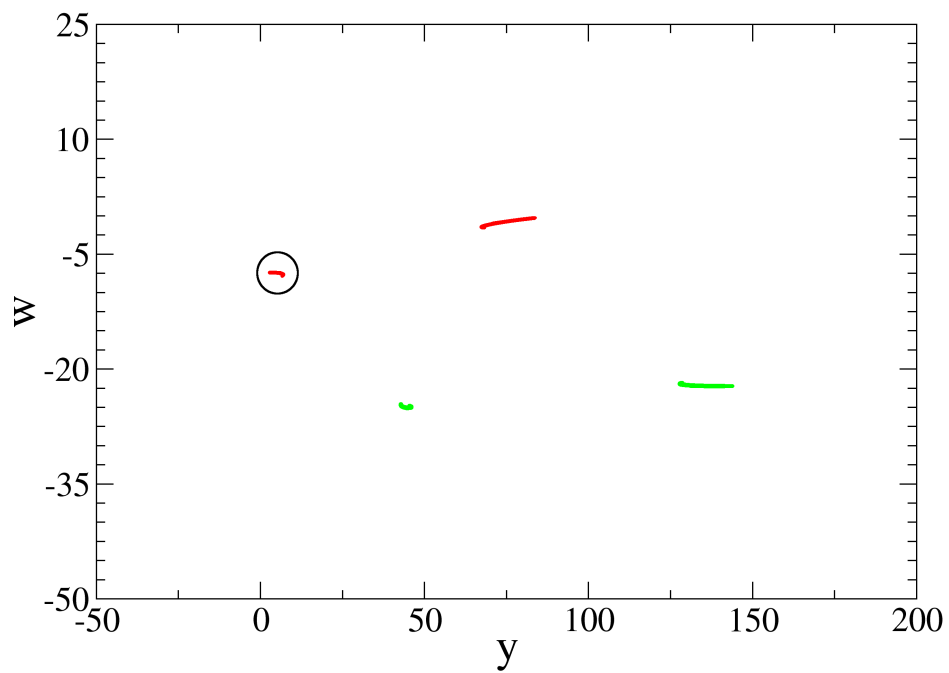


(a)

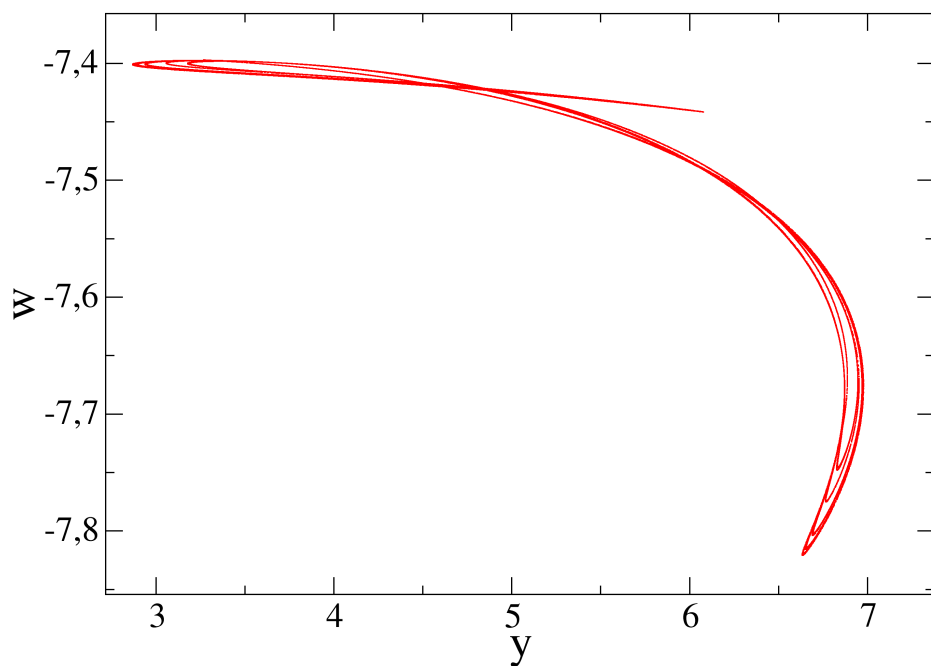


(b)

FIGURA 4.9 – Atratores A_1 e A_2 com os parâmetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $\sigma_m = 0, 1$, $\omega_0 = 5, 95$, e (a) com $r = 440$ e (b) com $r = 439$.

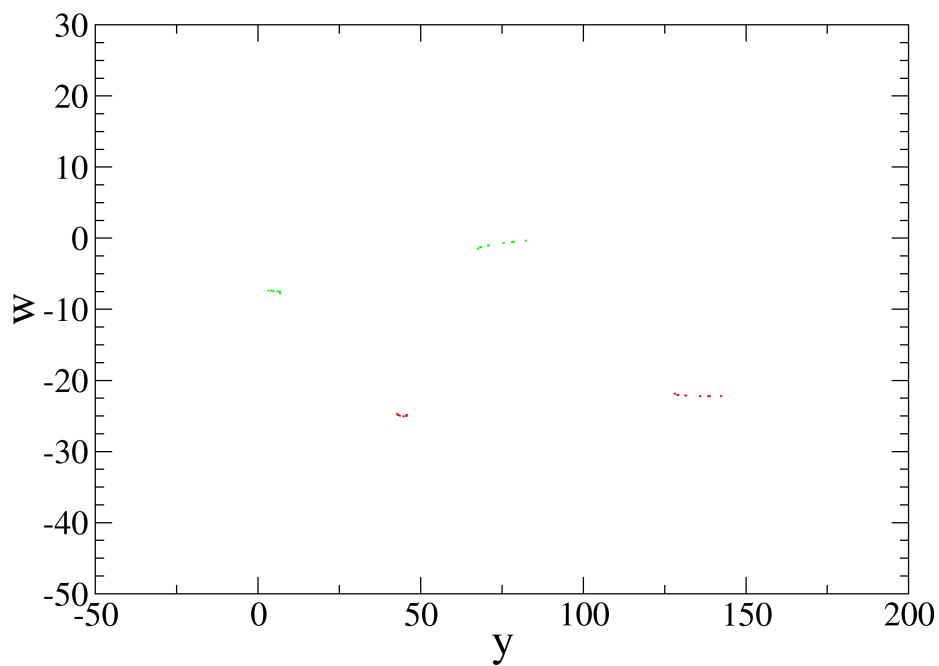


(a)

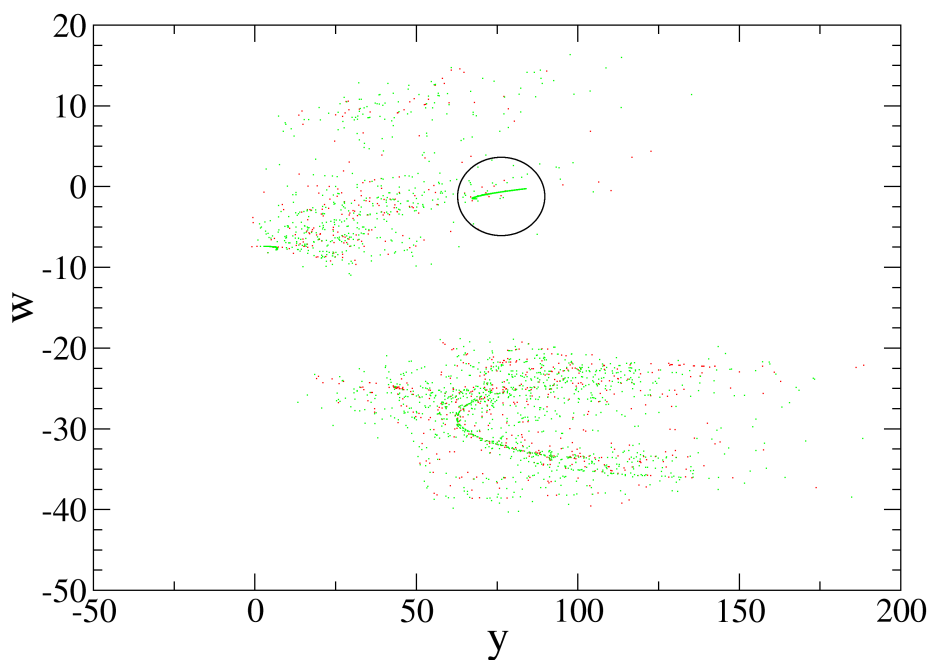


(b)

FIGURA 4.10 – (a) Atratores A_1 e A_2 com os parâmetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $\sigma_m = 0,1$, $\omega_0 = 5,95$ e $r = 437,805$. (b) ampliação da banda do atrator A_1 demarcada com o círculo em (a)

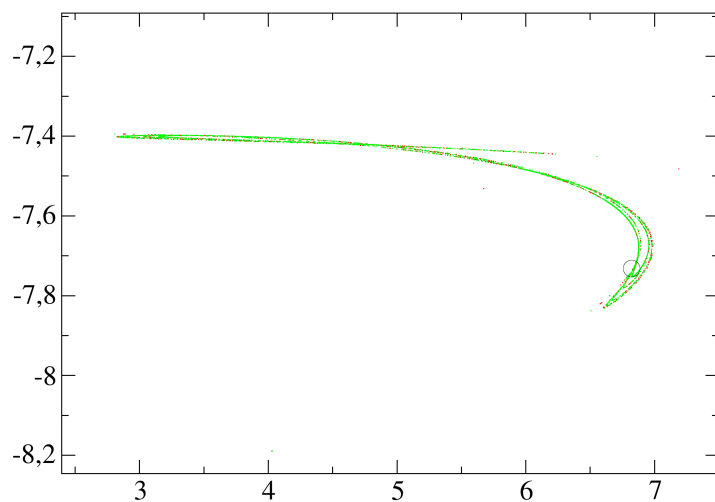


(a)

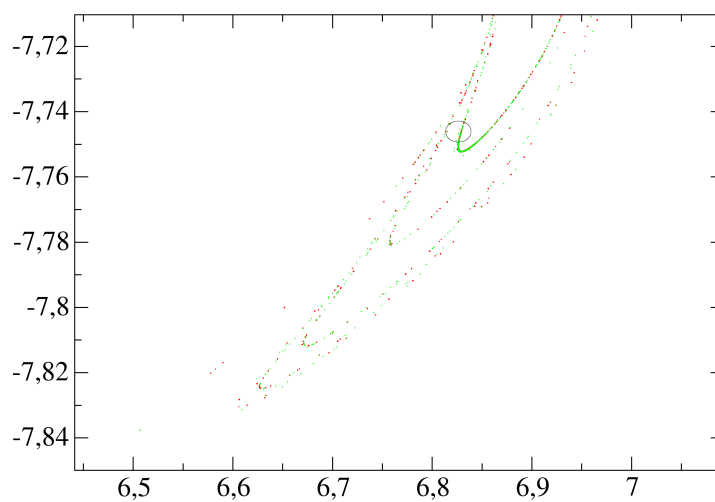


(b)

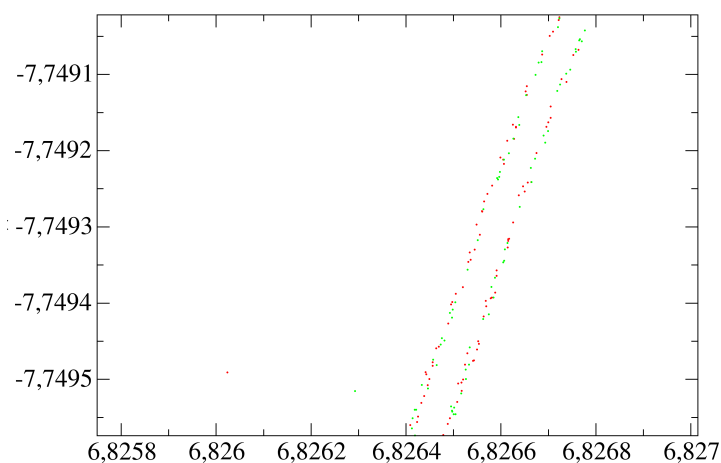
FIGURA 4.11 – (a) Atratores A_1 e A_2 para $r_c < r = 437,7323$ e (b) único atrator gerado a partir de condições iniciais distintas com $r \approx r_c$. Ambas com os demais parâmetros como $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 445$, $\sigma_m = 0,1$ e $\omega_0 = 5,95$.



(a)



(b)



(c)

FIGURA 4.12 – (a) atratores A para $r_c = r \approx 437,7322$ e com os demais parâmetros como $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $\sigma_m = 0,1$, $\omega_0 = 5,95$. (b) ampliação da região demarcada com o círculo em (a). E (c), ampliação da região demarcada com o círculo em (b).

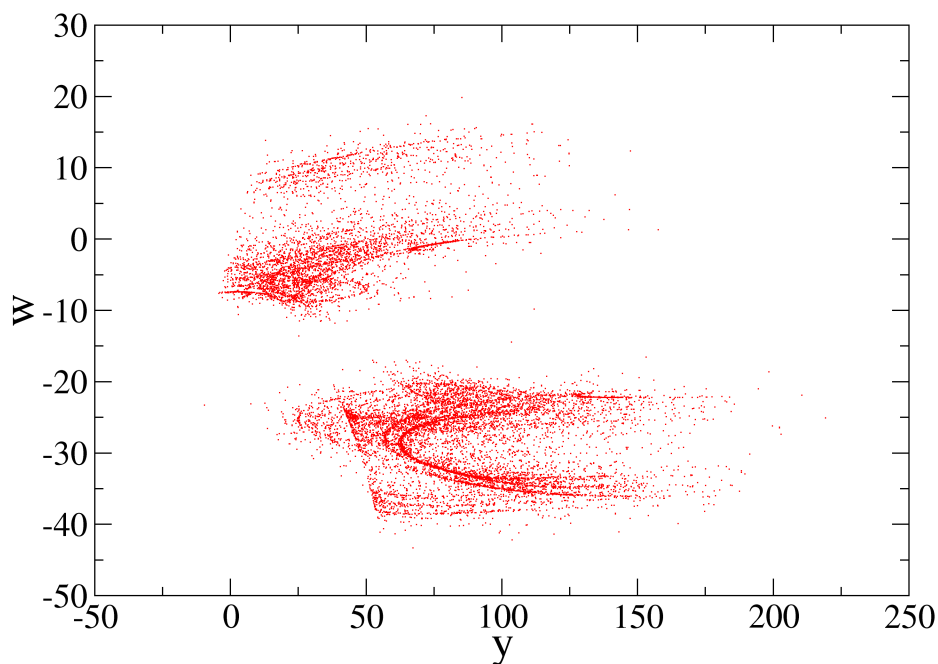


FIGURA 4.13 – Atrator A para $r_c > r = 437,73215$ e com os demais parâmetros como $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $\sigma_m = 0,1$ e $\omega_0 = 5,95$.

um comportamento intermitente, sendo que as soluções do sistema visita as regiões no espaço de fase onde antes habitava os atratores.

A Figura 4.15-(a) apresenta a série temporal para $r = 437,7322$, caso em que $r < r_c$. Já a Figura 4.15-(b) apresenta a série temporal para $r = 437,73215$, caso em que $r < r_c$. Para o valor de parâmetro adotado na Figura 4.15-(b) observamos caso após a crise de junção de atratores, passando o sistema a ter apenas um atrator caótico ocupando uma região maior no espaço de fase.

4.2.2 Longos Transientes, Bacia de Atração e Dimensão Fractal

Como já mencionado, o comportamento de um fluxo em sistemas dissipativos pode ser dividido em dois estágios: o regime, quando as soluções de uma condição inicial aleatória y_0 convergirem assintoticamente para um atrator, e o transiente inicial que é uma região no espaço de fase que as soluções, da condição inicial aleatória y_0 , percorrem antes de convergirem assintoticamente para o regime. O tempo que o fluxo de y_0 leva para convergir para o estado de regime varia de sistema para sistema, mas em certos sistemas este tempo pode ser demasiadamente longo. Transientes caóticos são comumente observados em sistemas dinâmico e ocorrem devido à presença de uma sela caótica. Quando há uma sela caótica no espaço de fase, é comum trajetórias geradas a partir de condições iniciais aleatórias passarem algum tempo vagando na vizinhança da sela antes de convergirem para o atrator (LAI; WINSLOW, 1995). O tempo que uma condição inicial leva vagando

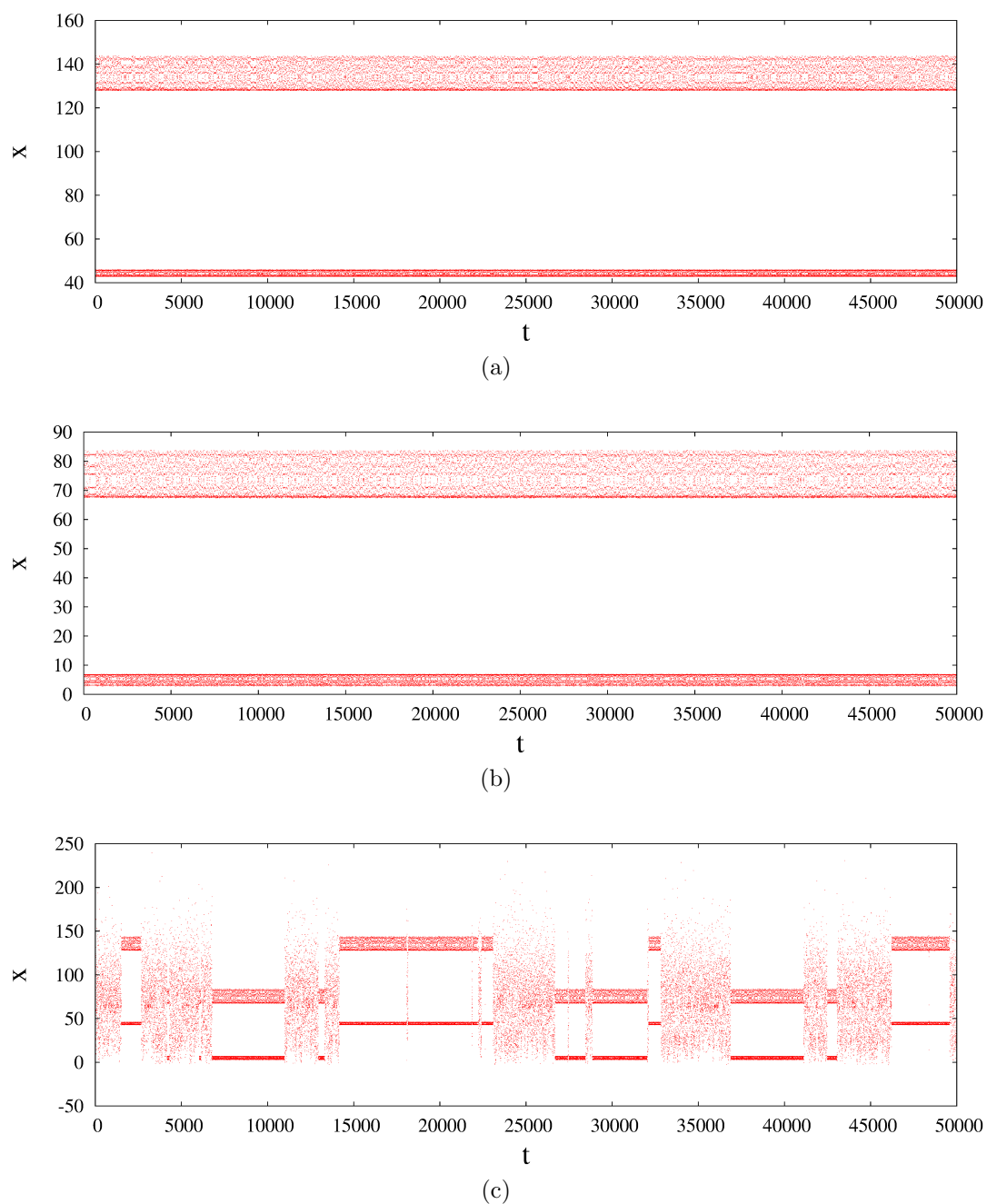
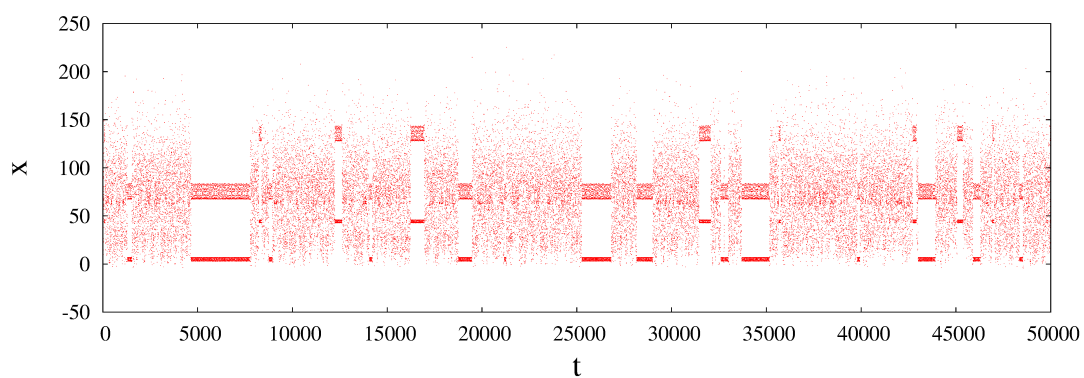
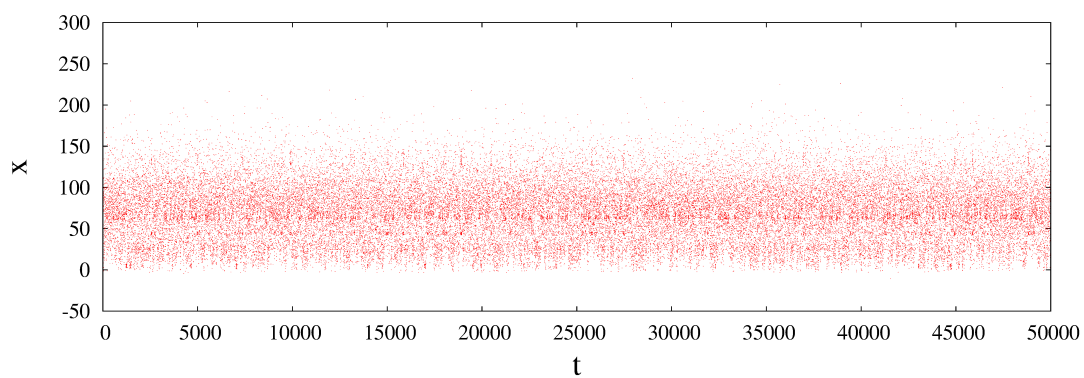


FIGURA 4.14 – Típica evolução temporal no mapa de Poincaré para (a) atrator A_1 e (b) atrator A_2 , com $r > r_c$, e (c) com $r < r_c$



(a)



(b)

FIGURA 4.15 – Típica evolução temporal no mapa de Poincaré para (a) $r < r_c$ e (b) para $r < r_c$

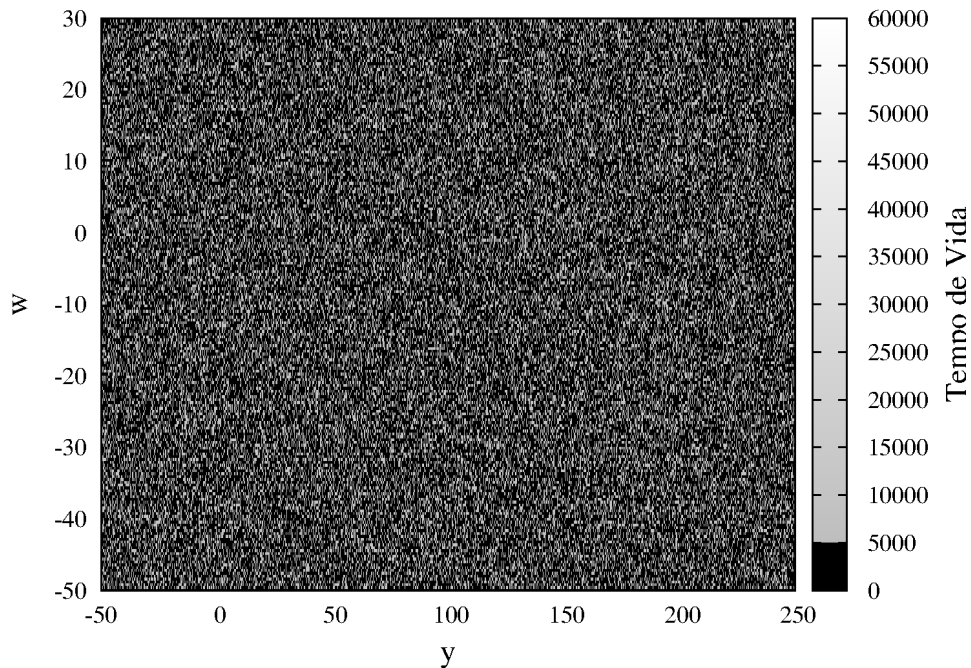


FIGURA 4.16 – Tempo de vida de uma grade de condições iniciais em função das variáveis w e y , com $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 453$, $\sigma_m = 0, 1$ e $\omega_0 = 5, 95$.

a vizinhança de uma sela caótica antes de convergir para o atrator dentro de uma janela periódica é denominado como *tempo de vida* (MUÑOZ *et al.*, 2012). A Figura 4.16 demonstra o tempo de vida de uma grade de condições iniciais em $y - w$, com resolução de 800×3000 , demonstrando o tempo que cada condição inicial leva para convergir para o atrator em função da cor, onde os valores dos parâmetros foram $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $\sigma_m = 0, 1$, $\omega_0 = 5, 95$ e $r = 453$ correspondendo a um valor de parâmetro dentro da janela periódica do diagrama de bifurcação apresentado na Figura 4.4.

Para os valores de parâmetros adotados na Figura 4.16, o sistema apresenta dois atratores periódicos de período 2. Estes dois atratores são apresentados na Figura 4.17, que é a representação dos atratores na seção de Poincaré. Os quadrados em vermelho demarca o atrator A_1 , enquanto os círculos em verde o atrator A_2 .

Para encontrarmos o tempo de vida de uma condição inicial y_0 , devemos evoluir o sistema até que o mesmo convirja para o atrator. Mas, pela definição de atrator, sabemos que se trata de um conjunto invariante para o qual o fluxo gerado por uma condição inicial aleatória converge quando o tempo tende a ∞ . Como não deixamos o sistema evoluindo infinitamente, usando a distância Euclidiana é possível construir uma *esfera* em torno de cada coordenada dos atratores apresentados na Figura 4.17. Após definido a esfera iteramos uma condição inicial y_0 até que o fluxo gerado pela mesma entre dentro da esfera, quando isso acontece, assumimos que o fluxo convergiu para um dos atratores e adotamos como o tempo de vida o número de iterações feitas. Para a Figura 4.16 adotamos o raio da esfera como $\delta_e = 0,001$. Na Figura 4.16, condições que convergem com menos de 5000

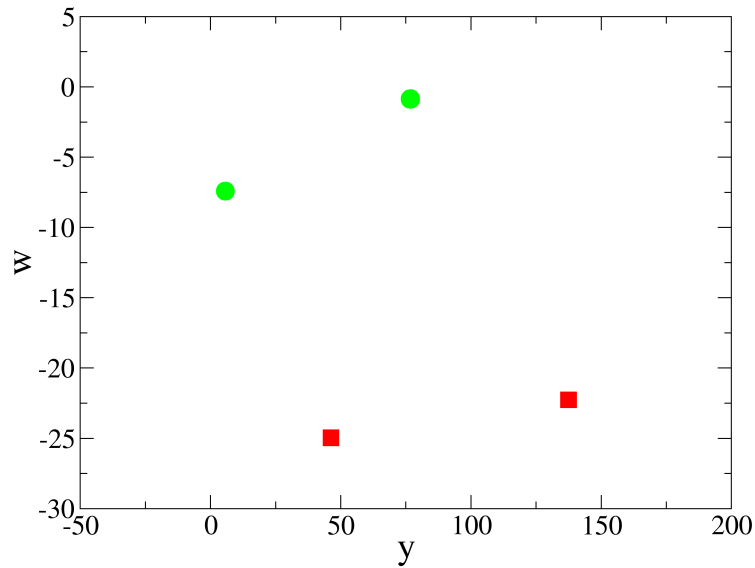


FIGURA 4.17 – Atrator A_1 quadrados em vermelho e atrator A_2 círculos em verde na seção de Poincaré, com os parâmetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 453$, $\sigma_m = 0,1$ e $\omega_0 = 5,95$.

iterações foram plotadas na cor preta. Já condições que possuem um tempo de vida maior que 5000, foram plotadas na cor cinza.

O tempo médio do tempo de vida, o qual corresponde ao tempo médio do transiente τ dentro de uma janela periódica é obtido da seguinte forma: Definimos uma grade de condições iniciais N_0 com resolução de 500×100 , com isso, para um tempo inicial $t = 0$ temos $N_0 = 50000$. E seja $N(t)$ o número de trajetórias que não convergiram para um dos atratores após um tempo t . Devido à natureza caótica da sela caótica Λ_s , $N(t)$ decaem exponencialmente com o tempo (LAI; WINSLOW, 1995):

$$N(t) = N_0 \exp(t/\tau), \quad (4.2)$$

O tempo médio é obtido através do coeficiente angular α do gráfico de $\ln(N(t)) \times t$.

A Figura 4.18 apresenta o gráfico de $\ln(N(t)) \times t$. O coeficiente angular encontrado é dado por $\alpha \approx -0,000888 \pm 8 \times 10^{-6}$, assim encontramos que o tempo médio de transiente caótico é dado por:

$$\alpha = -1/\tau$$

$$\tau \approx 1126$$

Para mapas bidimensionais o tempo médio pode ser relacionado com a medida da dimensão fractal da variedade estável da sela caótica (LAI; WINSLOW, 1995), pela seguinte

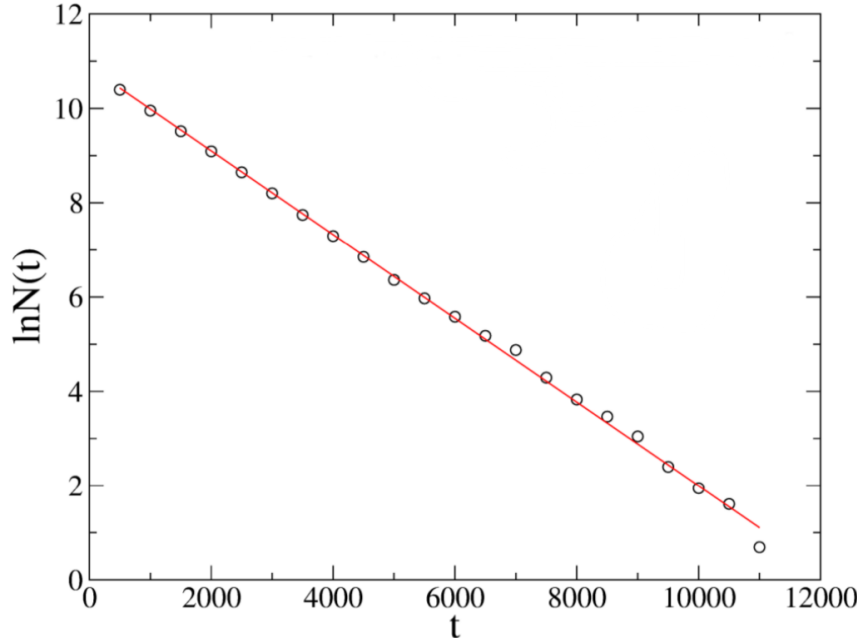


FIGURA 4.18 – Plot semi-logarítmico do número de órbitas que não convergiram para o atrator $N(t)$ em função do tempo, com os parâmetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 453$, $\sigma_m = 0,1$ e $\omega_0 = 5,95$. O coeficiente angular encontrado é dado por $\alpha \approx -0,000888 \pm 8 \times 10^{-6}$ e obtemos o tempo médio $\tau \approx 1126$.

equação:

$$\tau \approx \frac{1}{(1 - d_s)\lambda_1}, \quad (4.3)$$

onde d_s é a medida da dimensão fractal da variedade estável da sela caótica e λ_1 é o máximo expoente de Lyapunov da sela caótica. Podemos encontrar a dimensão fractal da variedade estável da sela caótica calculando a dimensão fractal da fronteira entre as bacias de atração. A fronteira fractal entre as bacias de atração é a variedade estável da sela caótica (REMPEL *et al.*, 2004), (CHIAN, 2013). Cada um dos atratores, A_1 e A_2 , possui sua própria bacia de atração. Podemos encontrar a bacia de atração destes atratores usando a distância Euclidiana, como usado na construção do diagrama apresentado na Figura 4.16. A bacia de atração de um atrator A é o conjunto de todas condições iniciais cujo fluxo convirja para A quando o tempo tende a infinito. Para encontrarmos as bacias de atração definimos uma grade de condições iniciais e iteramos cada condição até que convirja para um dos atratores, escrevendo a condição inicial de cada atrator em arquivos distintos. Consideramos que o fluxo de uma condição inicial aleatória convergiu para um atrator quando sua órbita entra dentro da esfera, sendo que para encontrar as bacias de atração usamos uma esfera de raio $\delta_{disco} = 0,005$. A Figura 4.19 apresenta a bacia de atração com projeção $y - z - w$, lembrando que a dimensão do sistema foi reduzida para $n = 3$.

Observando a bacia de atração apresentada na Figura 4.19 é possível perceber o quanto o sistema é complexo devido à sua alta fractalidade. Para tentar uma visualização menos

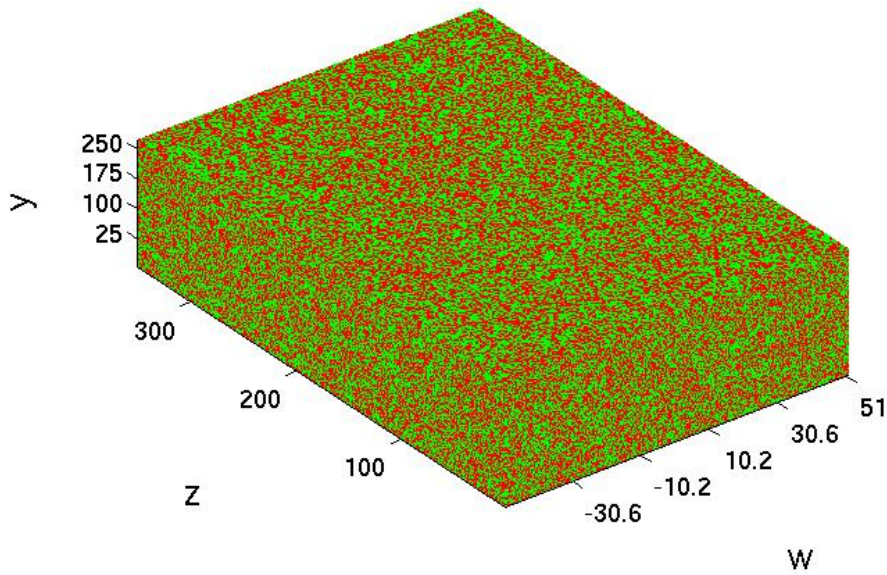


FIGURA 4.19 – Bacias de atração dos atratores A_1 e A_2 com os parâmetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 453$, $\sigma_m = 0,1$ e $\omega_0 = 5,95$.

complexa das bacias, tracemos um plano neste volume. Para ser mais específico, escolhemos um plano que passa exatamente sobre a coordenada do atrator A_1 . O atrator A_1 , apresentado na Figura 4.17, é um atrator periódico de período 2. Adotando apenas coordenadas de um dos períodos temos: $y = 46,2713175083$, $z = 408,9409853032$, $w = -24,9613511180$ e $x = 0$ devido à seção de Poincaré. Escolhendo um plano em $z = 408,9409853032$ temos uma nova projeção da bacia de atração em $y - w$, a qual é apresentada na Figura 4.20.

Com base na Figura 4.20 a dimensão fractal da fronteira entre as bacias dos atratores A_1 e A_2 pode ser encontrada por meio da equação:

$$d_s = n - \alpha, \quad (4.4)$$

onde n é a dimensão do espaço de fase e α é o valor da inclinação do gráfico da fração de condições iniciais incertas pela incerteza.

Podemos encontrar o valor de α por meio do algoritmo do expoente de incerteza. Fixando $y = -20$ nos resta apenas a dimensão de w , onde o espaço fase passa a ser um espaço de $1D$ com dimensão de $n = 1$. Após feito isso, sobre esta linha, sorteamos $N_s = 10000$ condições iniciais aleatórias para encontrar condições que sejam incertas. Uma condição inicial é considerada incerta quando ao aplicarmos uma pequena perturbação na mesma faz com que ela passe a pertencer à bacia de atração de um outro atrator. Ao sortear uma condição inicial $w = y_0$ verificamos a qual bacia de atração a mesma pertence, se corresponde a do atrator A_1 ou do atrator A_2 . Feito isso somamos uma pequena

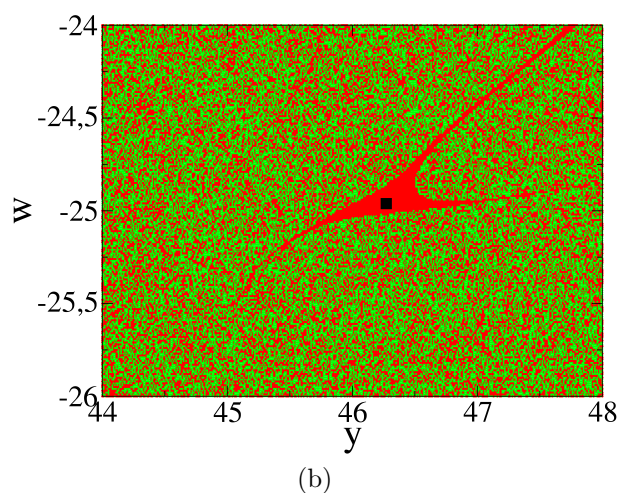
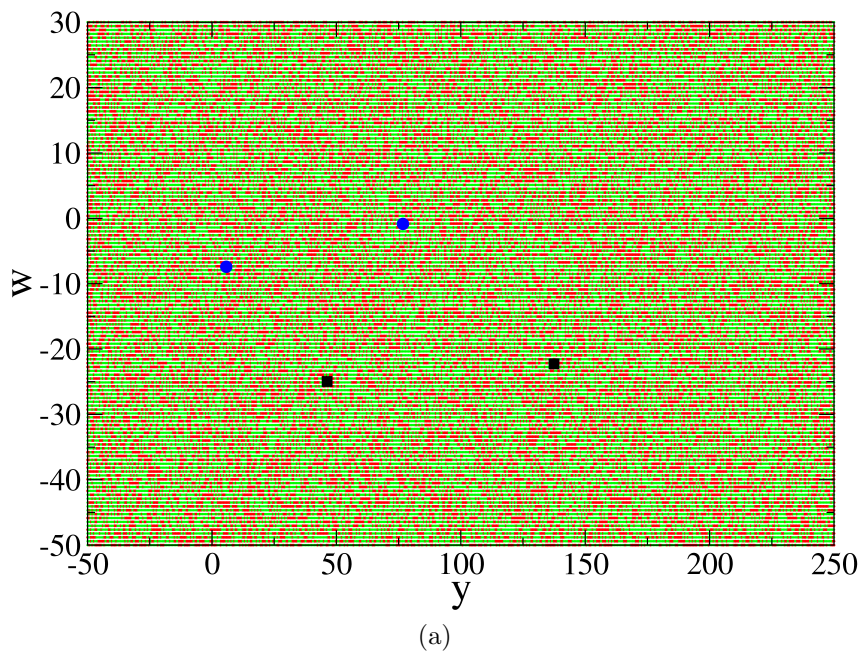


FIGURA 4.20 – Bacia de atração $w \times y$ com $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 453$, $\sigma_m = 0,1$ e $\omega_0 = 5,95$. Na Figura 4.20-(a) os quadrados pretos representam o atrator A_1 de período dois e os círculos em azul o atrator A_2 também de período dois em virtude da simetria do sistema. A região em vermelho representa as condições iniciais que convergem para A_1 e em verde as condições iniciais que convergem para A_2 . A Figura 4.20-(b) é uma ampliação da Figura 4.20-(a) para uma região mais próxima de um dos períodos do atrator A_1 . As condições iniciais próxima ao atrator convergem diretamente pra ele.

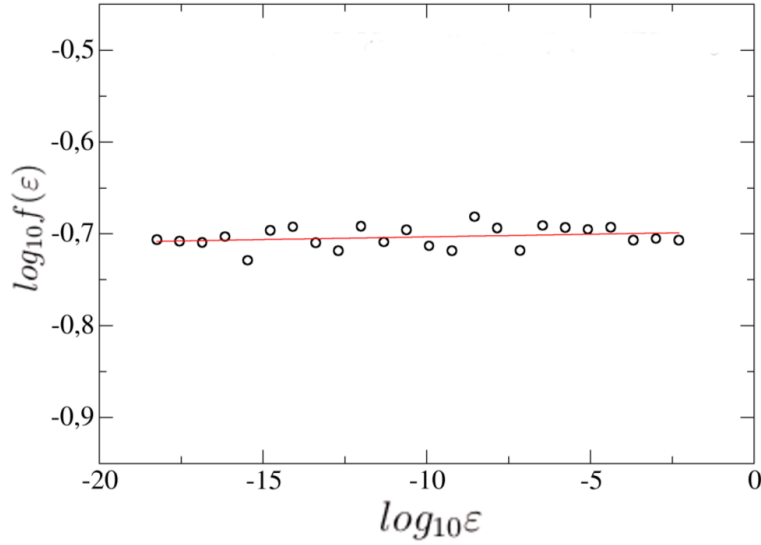


FIGURA 4.21 – Plot logaritmo na base-10 da fração de condições iniciais incertas versus a incerteza ϵ , com os parâmetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 453$, $\sigma_m = 0,1$ e $\omega_0 = 5,95$. A inclinação da reta traçada ao usar uma regressão linear é dada como $\alpha = 0,0006 \pm 0,0005$.

pertubação ϵ a esta condição inicial, $w = y_0 + \epsilon$. Se a condição inicial não for incerta a descartamos e sorteamos outra, e caso seja uma condição inicial incerta reduzimos o tamanho da perturbação. Para cada valor de ϵ contamos o número de condições incertas obtidas após os 10000 sorteios. Com isso, podemos calcular a fração de pontos incertos $f(\epsilon)$ que é dada pela razão entre número de condições incertas $N(f(\epsilon))$ e o número de sorteio N_s :

$$f(\epsilon) = \frac{N(f(\epsilon))}{N_s}.$$

O plot da fração de condições iniciais incertas em função da incerteza é apresentada da Figura 4.21. A Figura 4.21 apresenta o plot logaritmo na base-10 da fração de condições incertas versus o tamanho da perturbação. Inicialmente foi usado uma perturbação inicial $\epsilon_i = 10^{-1}$ até uma perturbação final de $\epsilon_f = 10^{-18}$. Adotando os parâmetros de controle como $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 453$, $\sigma_m = 0,1$ e $\omega_0 = 5,95$, obteve-se a inclinação da reta traçada ao usar uma regressão linear como $\alpha = 0,0006 \pm 0,0005$. Pela equação 4.4 temos:

$$d_s = 1 - 0,0006, \quad (4.5)$$

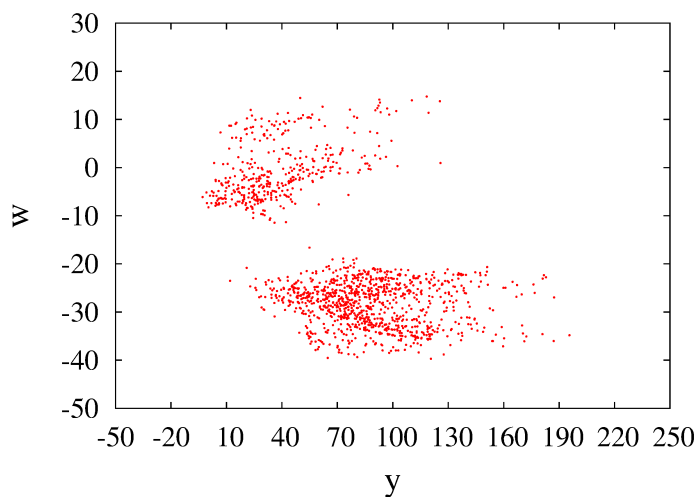
e assim encontramos a dimensão fractal entre as fronteiras das suas bacias sendo $d_s = 0,9994$. O valor de d_s próximo de 1 indica que a fronteira fractal tem dimensão próxima à do espaço de fase, o que significa que a variedade estável da sela caótica ocupa quase todo espaço de fase, fazendo com que os transientes caóticos sejam muito longos (LAI;

WINSLOW, 1995), (REMPEL *et al.*, 2004), (CHIAN, 2013).

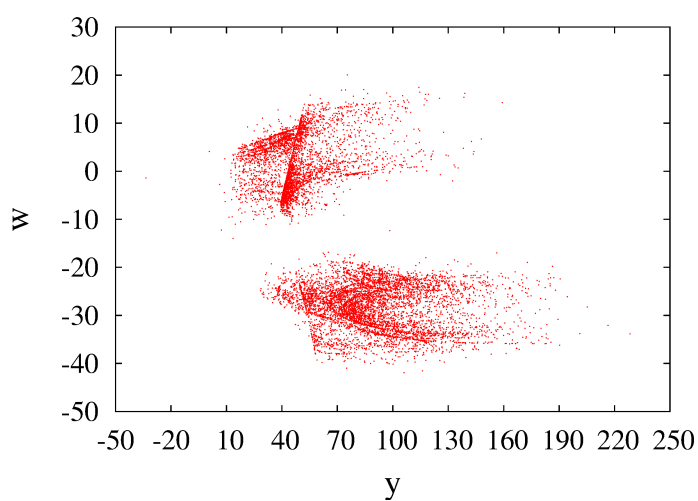
4.2.3 Sela Caótica

Na Figura 4.4 a sela caótica é demarcada com pontos cinzas, onde podemos ver a variação da sela caótica em função do parâmetro de controle r . Para obter a sela caótica na Figura 4.4, calculamos as soluções das equações 3.76-3.79 sem desprezar o transiente inicial. Desta forma, os pontos cinza apresentados no diagrama de bifurcação, são uma aproximação da sela caótica Λ_S . Podemos encontrar a sela caótica dentro da janela periódica pelo método *Sprinkler* da seguinte forma: Define-se uma grade fina de condições iniciais em R , sendo gerada uma trajetória para cada condição inicial da grade. As órbitas que permanecem em R após um certo tempo t_c fornecem as aproximações desejadas. As condições iniciais destas órbitas fornecem a aproximação para variedade estável de Λ_S , e suas últimas iterações são uma aproximação para a variedade instável. Os pontos para um tempo t_m é a aproximação para Λ_S . Os valores para t_c e t_m precisam ser escolhidos após um pouco de tentativa e erro, mas geralmente t deve ser grande comparado com o tempo médio de transiente τ , ou seja, o tempo que a trajetória leva para abandonar R . A Figura 4.22-(a) apresenta a sela caótica e a Figura 4.23 a variedade estável encontradas por meio do método *Sprinkler*.

A Figura 4.22-(a) é a projeção em $y \times w$ da sela caótica encontrada no interior da janela periódica apresentada na Figura 4.4 para $r = 453$ e a Figura 4.22-(b) é a projeção em $y \times w$ do atrator caótico calculado para $r = 455,48$, o qual foi escolhido para uma região na Figura 4.4-(a), em que o sistema apresente um atrator caótico. Podemos observar que a sela caótica encontrada no interior da janela tem a mesma forma do atrator caótico, indicando que a sela é uma continuação do atrator após o mesmo perder a estabilidade ao sofrer uma bifurcação sela-nó com $r \approx 455,04$. Para gerar a Figura 4.22-(a) define-se uma grade fina de condições iniciais distribuídas igualmente em R . A órbita para cada condição inicial definida é calculada por um tempo crítico t_c . As órbitas de algumas das condições iniciais iram convergir rapidamente para um dos atratores apresentados na Figura 4.17. Novamente estamos usando a distância Euclidiana para construir esferas em torno das coordenadas dos atratores na seção de Poincaré. Para o método *Sprinkler* usamos esferas com raio $\delta = 0,1$. As condições que convergem rapidamente para um dos atratores são desconsiderada. As condições que permanecem em R após o tempo t_c são selecionadas. Isto devido ao fluxo destas condições iniciais ficarem por um determinado tempo vagando na vizinhança da sela caótica. Estas condições iniciais que permanecem em R são uma aproximação para a variedade estável da sela caótica. As últimas iterações destas condições iniciais remanescente é uma aproximação para o variedade instável da sela. Os pontos entre o tempo t_c e o tempo adotado para as ultimas iterações fornecem



(a)



(b)

FIGURA 4.22 – (a) Projeção em $y \times w$ da sela caótica encontrada no interior da janela periódica apresentada na Figura 4.4 usando o método *Sprinkler* e fixando os parâmetros de controle em $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 453$, $\sigma_m = 0, 1$ e $\omega_0 = 5, 95$. (b) Projeção em $y \times w$ do atrator caótico encontrado usando os mesmos valores de parâmetros de controle com exceção de r , que para este caso foi adotado $r = 455, 48$.

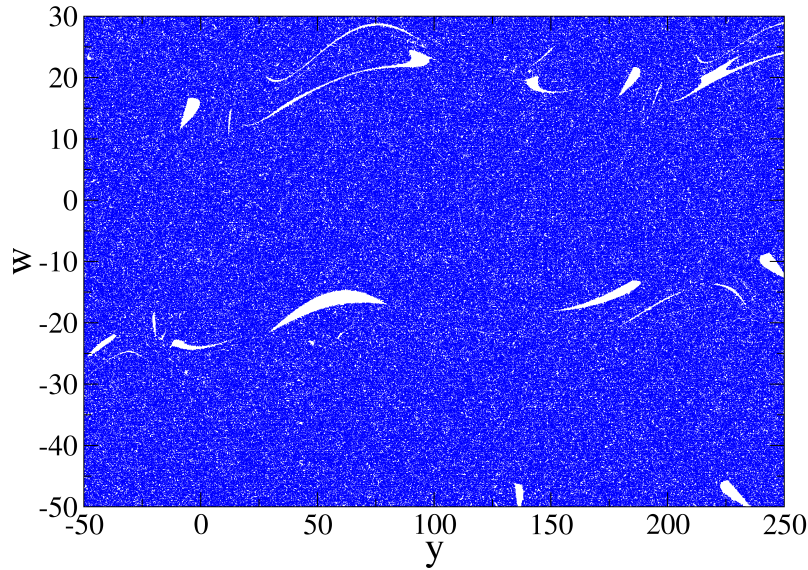


FIGURA 4.23 – Projção da variedade estável da sela caótica com $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 453$, $\sigma_m = 0,1$ e $\omega_0 = 5,95$.

uma aproximação da sela caótica. Para a Figura 4.22-a usamos uma grade com resolução de 800×3000 e adotamos o tempo $t_c = 3000$, o qual é bem maior que o tempo médio encontrado $\tau = 1126$. Estes tempo podem variar de sistema para sistema, e a forma de escolher o melhor t_c é por meio de tentativa e erro (REMPEL *et al.*, 2006).

A Figura 4.23 é a projeção em $y \times w$ da variedade estável da sela caótica. A dimensão fractal da variedade estável da sela caótica foi aproximada com a dimensão fractal da fronteira entre as bacias de atração, a qual tinha como medida $d_s = 0,999420166$. A partir destas informações foi possível encontrar o valor do maior expoente de Lyapunov da sela caótica usando a equação 4.3:

$$\tau \approx \frac{1}{(1 - d_s)\lambda_1}, \quad (4.6)$$

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{(1 - 0,999420166)1126}, \quad (4.7)$$

com isso encontramos o valor do maior expoente de Lyapunov da sela caótica como sendo $\lambda_{1s} \approx 1,5316$. Podemos comparar este resultado com o valor do expoente de Lyapunov calculado para o atrator caótico apresentado na Figura 4.22-(b) e com base no espectro de Lyapunov apresentado na Figura 4.4-(b). Para $r = 455,58$ o maior expoente de Lyapunov possui medida de $\lambda_{1a} = 1,5101$. As duas medidas dos maiores expoentes de Lyapunov ficaram muito próxima uma da outra, validando a medida do maior expoente de Lyapunov da sela caótica e confirmando que ela encontra-se na fronteira entre as bacias.

4.3 Hipercaos

Hipercaos é tipicamente definido como um comportamento caótico complexo. que possui no mínimo dois expoentes de Lyapunov maiores que zero (MACEK; STRUMIK, 2014). Considerando um volume no espaço de fase, quando em sistemas dissipativos com 3 dimensões temos um expoente $\lambda_1 > 0$, obrigatoriamente os demais expoentes são $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 < 0$. Isso significa que $\lambda_1 > 0$ sinaliza uma direção em esta havendo expansão de volume. Para $\lambda_2 = 0$ o volume esta sendo conservado, sendo que sempre tem uma direção em que o volume é conservado. E como o sistema é dissipativo, tem uma direção em que o o volume é comprimido, indicada por $\lambda_3 < 0$. Sendo assim, é impossível observar hipercaos em sistemas dissipativos que possuem menos de 4 dimensões, não sendo possível observar uma dinâmica hipercaótica no modelo de Lorenz normal.

A Figura 4.4-(b) apresenta o espectro dos dois maiores expoentes de Lyapunov em função do parâmetro r . O segundo expoente de Lyapunov passa a ser positivo para $r \approx 460,82$, mantendo-se assim até $r \approx 462,14$, momento em que se tem uma pequena janela periódica. Neste ponto o maior expoente de Lyapunov passa a medir $\lambda_1 = 0$ e o segundo maior $\lambda_2 < 0$. Após esta janela periódica, para $r \approx 463,34$ ambos os expoentes se tornam maiores que zero. O maior expoente de Lyapunov passa a medir $\lambda_1 \approx 1,4651$. Já o segundo maior a medir $\lambda_2 \approx 0,0144$, o qual passa por um aumento gradativo à medida que r é variado. Estudando a estatística do sistema, foi possível comprovar a existência de uma sela hipercaótica no interior dessa janela periódica (seção 4.2.3).

Uma das formas mais eficientes para verificar se um sistema tem a presença de caos, é por meio do calculo do expoente de Lyapunov. Outras medidas como a entropia de Kolmogorov e a dimensão de correlação dão uma medida da complexidade da dinâmica, enquanto que o expoente de Lyapunov fornece a medida da sensibilidade as condições iniciais (KIM e CHOE, 2010). Para verificar se a sela caótica presente na janela periódica se trata de uma sela hipercaótica, é necessário calcular pelo menos os dois maiores expoentes de Lyapunov do sistema. Para calcular o expoente de Lyapunov da sela caótica, tomamos médias do expoente de Lyapunov de tempo finito calculados a partir das condições iniciais selecionadas no método *Sprinkler*, antes delas convergirem para os atratores. Aplicando este método para a janela periódica usando como valores de parâmetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 453$, $\sigma_m = 0,1$ e $\omega_0 = 5,95$, obteve-se o resultado apresentado na Tabela 4.1 para o maior expoente de Lyapunov da sela caótica.

O resultado encontrado está de acordo com o que já havia sido encontrado, para o maior expoente de Lyapunov da sela caótica, usando a equação 4.3. Usando deste método, é possível obter o valor de todos expoentes de Lyapunov do sistema. Para os valores de parâmetros estudados o segundo maior expoente de Lyapunov esta muito próximo do zero. Pelo diagrama apresentado na Figura 4.1-(b) podemos observar que o segundo

TABELA 4.1 – Expoentes de Lyapunov Calculados

Método	Parâmetro r	Maior expoente λ_1
Equação 4.3	453,00	1,5316
Atrator Caótico	455,58	1,5101
Algoritmo Híbrido	453,00	1,5184

maior expoente de Lyapunov aumenta a medida que assumimos valores maiores para o número de Rayleigh. Assim, analisamos o comportamento assintótico do sistema para um intervalo de $r = 500$ até $r = 1000$, conservando os demais parâmetros e o intervalo usado para ω_0 . Este resultado é demonstrado na Figura 4.24.

4.3.1 Variando o Campo Magnético B_0 Imposto Horizontalmente

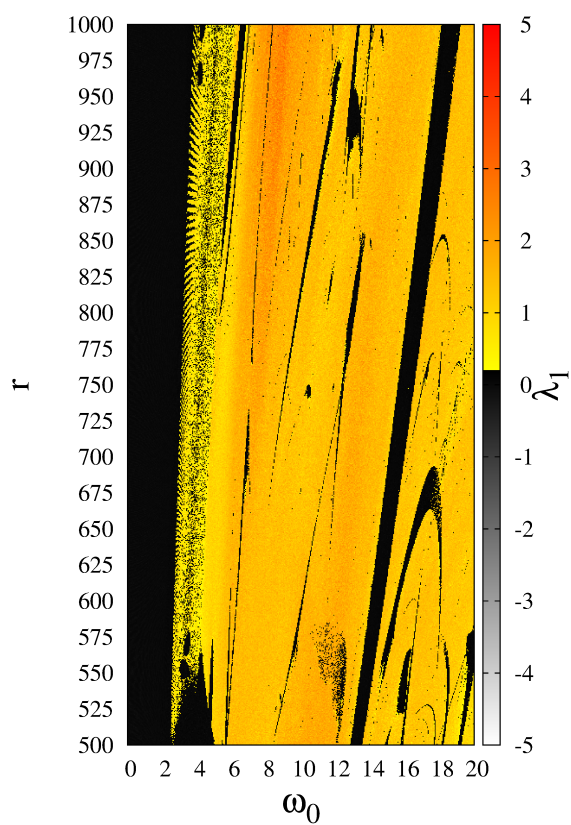
Na seção 3.3, assumimos ω_0 como:

$$\omega_0 = \left[\frac{ah(\mu_0\rho_0)^{1/2}}{\pi\kappa\mu_0\rho_0(1+a^2)} \right] B_0, \quad (4.8)$$

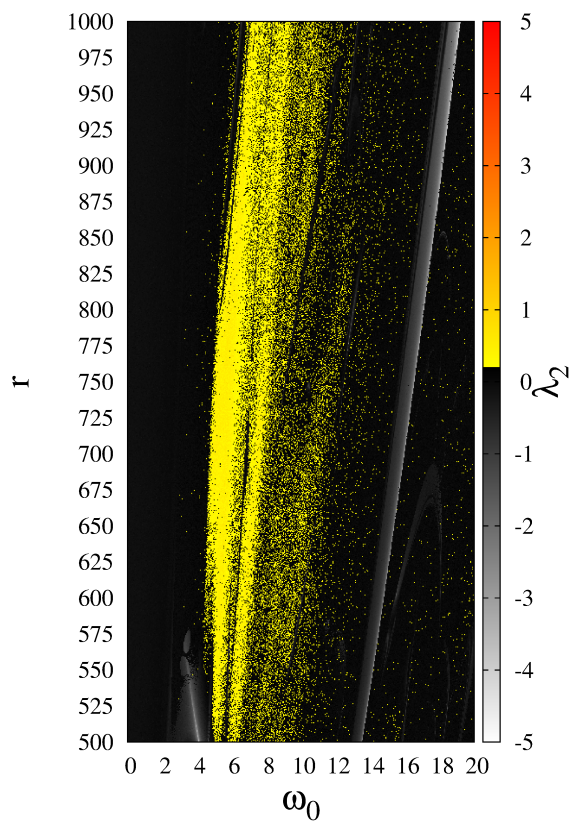
onde a , h , μ_0 , ρ_0 , π e κ são constantes; sendo a o quociente entre a altura h que separa as duas placas e a largura dos rolos de convecção gerados, μ é a constante de permeabilidade magnética, ρ_0 é densidade do fluido e κ é o termo de difusão térmica. Desta forma, ao variarmos o parâmetro ω_0 , estamos de fato variando o campo magnético B_0 imposto horizontalmente. Para o diagrama de bifurcação apresentado na Figura 4.4, foi escolhido um intervalo para o parâmetro r que abrangia uma região periódica com os extremos caóticos, como mostrado na Figura 4.5. Para uma segunda região a ser estudada, buscamos um intervalo em que se tem o segundo maior expoente Lyapunov em torno de $\lambda_2 \approx 0.5$, caracterizando uma região em que se tem um hipercaos forte.

Na Figura 4.25-(a) temos um diagrama de bifurcação demonstrando a evolução do sistema ao se variar o parâmetro ω_0 , correspondente ao campo magnético, com $r = 640$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $\sigma_m = 0,1$. Inicialmente o sistema apresenta apenas um atrator periódico A demarcado em azul. Quando $\omega_0 \approx 2,34$ o sistema sofre uma bifurcação forquilha do tipo supercrítico, apresentando a partir deste ponto, multiestabilidade. Os pontos em vermelho demarcam o atrator periódico A_1 e os pontos em verde o atrator periódico A_2 . A Figura 4.26 apresenta o diagrama de bifurcação da Figura 4.25-(a) com o acréscimo de mais uma dimensão, melhorando a visualização para A_2 .

Para $\omega_0 \approx 2,72$ a dinâmica passa por outra bifurcação, desta vez uma bifurcação do tipo *Flip*, o que indicaria uma rota para caos no cenário de cascata de duplicação de período, mas quando $\omega_0 \approx 3,89$ o sistema passa repentinamente de órbitas estáveis para um comportamento caótico. Após sofrer a bifurcação forquilha, além das duas órbitas

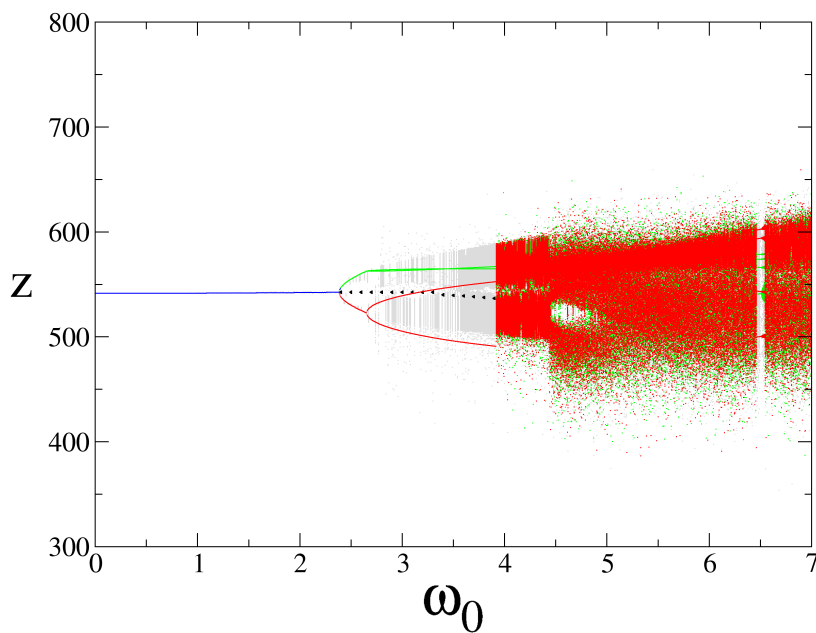


(a)

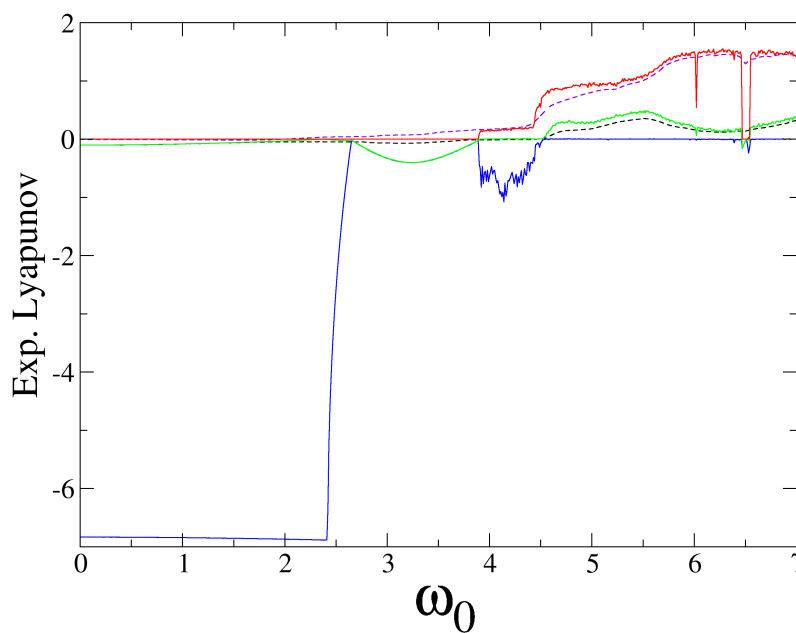


(b)

FIGURA 4.24 – (a) Maior expoente de Lyapunov λ_1 e (b) segundo maior expoente de Lyapunov λ_2 . Ambas em função dos parâmetros r e ω_0 , e com $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $\sigma_m = 0, 1$.



(a)



(b)

FIGURA 4.25 – (a) Diagrama de bifurcação de z em função de ω_0 com $r = 640$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $\sigma_m = 0,1$. A órbita em azul representa o atrator A , os pontos em vermelho o atrator A_1 , os pontos em verde o atrator A_2 , os pontos em cinza representam a sela caótica Λ_S e os triângulos pretos uma órbita periódica instável (UPO). (b) espectro do expoente de Lyapunov em função de ω_0 , sendo em vermelho o maior expoente de Lyapunov λ_1 , em verde o segundo maior λ_2 e em azul o terceiro maior expoente λ_3 . As linhas tracejadas representam os espectros de Lyapunov da sela caótica Λ_S encontradas por meio do algoritmo híbrido, onde a cor violeta apresenta o maior expoente de Lyapunov λ_{1S} e a cor preta o segundo maior λ_{2S} , com $r = 640$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $\sigma_m = 0,1$.

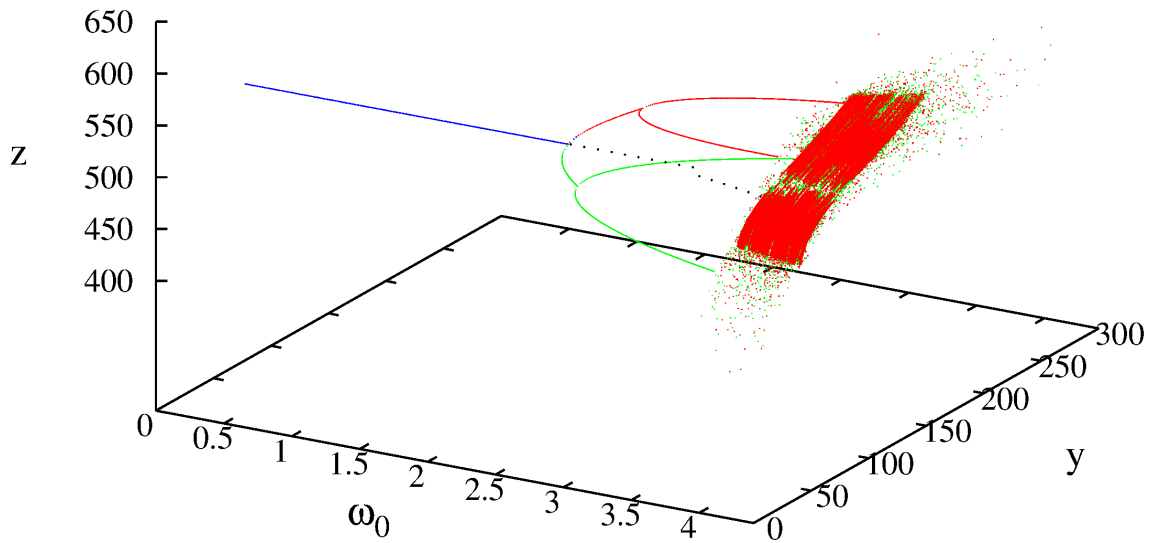


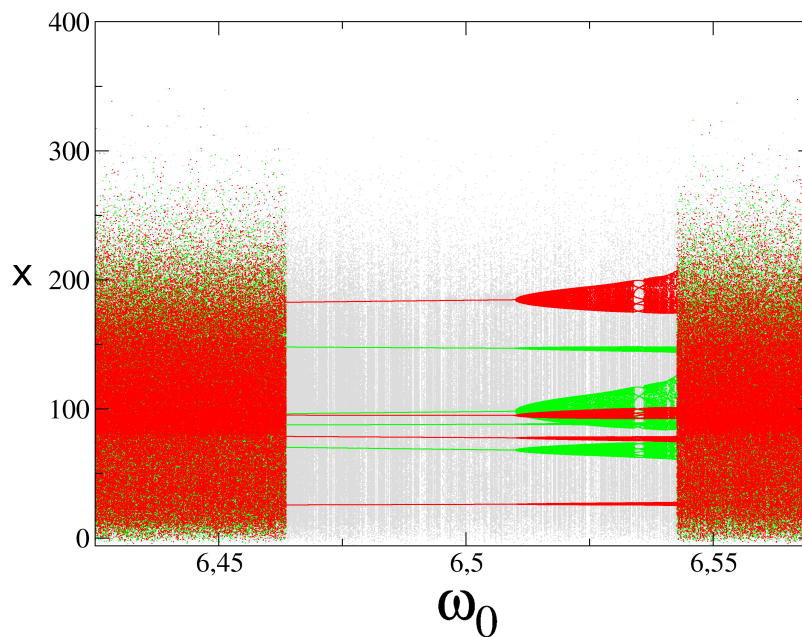
FIGURA 4.26 – Diagrama de bifurcação de z e y em função de ω_0 com $r = 640$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $\sigma_m = 0, 1$. A órbita em azul representa o atrator A , os pontos em vermelho o atrator A_1 , os pontos em verde o atrator A_2 , os pontos em preto representa uma órbita periódica instável (UPO).

periódicas estáveis, tem início a uma órbita periódica instável representada por pontos pretos. Por meio do método de bissecção, apresentado por Muñoz (MUÑOZ *et al.*, 2012), podemos calcular a mesma até o momento em que o sistema fica caótico. Na Figura 4.25-(a) os pontos cinzas representam a sela caótica Λ_S . A Figura 4.25-(b) apresenta o espectro do expoente de Lyapunov em função de ω_0 , onde o maior expoente de Lyapunov λ_1 é demarcado em vermelho, o segundo maior λ_2 em verde e o terceiro maior expoente λ_3 em azul. As linhas tracejadas representam os espectros de Lyapunov da sela caótica Λ_S , onde a cor violeta apresenta o maior expoente de Lyapunov λ_{1S} e a cor preta o segundo maior λ_{2S} , com $r = 640$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $\sigma_m = 0, 1$.

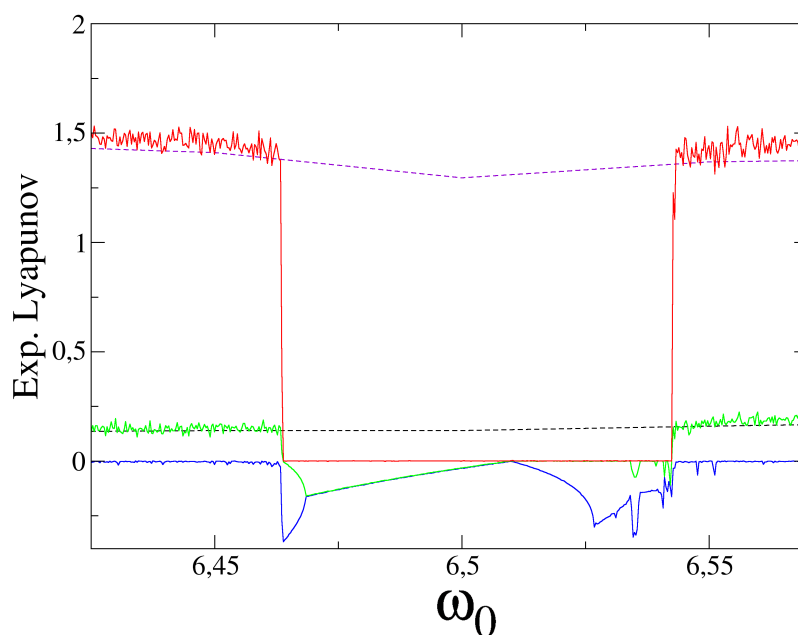
Para $\omega_0 \approx 3,89$ o sistema muda seu comportamento bruscamente, passando de um comportamento periódico para um comportamento caótico. Essa mudança de estabilidade ocorre devido à sela caótica presente no espaço de fase. Pela Figura 4.25-(b) é possível notar que o expoente de Lyapunov da sela caótica se torna positivo para $\omega_0 \approx 2,46$, tornando-se maior a medida que o parâmetro ω_0 aumenta. Ainda sobre a Figura 4.25-(b), notamos que quando $\omega_0 \approx 2,635$, λ_2 e λ_3 possuem o mesmo valor.

4.3.1.1 Hipercaos no Interior da Janela Periódica

Investigamos o interior da primeira janela periódica apresentada na Figura 4.25-(a). A ampliação do diagrama de bifurcação e do espectro do expoente de Lyapunov para a janela periódica são apresentados na Figura 4.27:



(a)



(b)

FIGURA 4.27 – (a) Diagrama de bifurcação de x em função de ω_0 com $r = 640$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $\sigma_m = 0,1$. Os pontos em vermelho representam o atrator A_1 , os pontos em verde o atrator A_2 e os pontos em cinza a sela caótica Λ_S . (b) espectro do expoente de Lyapunov em função de ω_0 , sendo em vermelho o maior expoente de Lyapunov λ_1 , em verde o segundo maior λ_2 e em azul o terceiro maior expoente λ_3 . As linhas tracejadas representam os espectros de Lyapunov da variedade estável da sela caótica Λ_S , onde a cor violeta apresenta o maior expoente de Lyapunov λ_{1S} e a cor preta o segundo maior λ_{2S} , com $r = 640$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $\sigma_m = 0,1$.

A Figura 4.27-(a) apresenta o diagrama de bifurcação de x em função de ω_0 com $r = 640$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $\sigma_m = 0,1$. Sendo que os pontos em vermelho representam atrator A_1 , os pontos em verde o atrator A_2 e os pontos em cinza a sela caótica Λ_S . A Figura 4.27-(b) apresenta o espectro do expoente de Lyapunov em função de ω_0 , onde em vermelho o maior expoente de Lyapunov λ_1 , em verde o segundo maior λ_2 e em azul o terceiro maior expoente λ_3 . As linhas tracejadas representam os espectros de Lyapunov da sela caótica Λ_S , onde a cor violeta representa o maior expoente de Lyapunov λ_{1S} e a cor preta o segundo maior λ_{2S} , usando os mesmos valores de parâmetros da Figura 4.27.

5 Conclusão

Este trabalho teve como objetivo principal desenvolver um estudo numérico sobre caos e hipercaos em um modelo reduzido de convecção hidromagnética para uma camada de fluido viscoso magnetizada horizontalmente e aquecida de baixo para cima por um gradiente de temperatura vertical submetida em um campo gravitacional. Os principais resultados aqui obtidos foram:

- Apresentamos a análise da estabilidade assintótica do sistema calculando os expoentes de Lyapunov ao variar os parâmetros r e ω_0 , referentes à diferença de temperatura e ao campo magnético, respectivamente, e fixando os demais parâmetros do sistema. O parâmetro r teve um intervalo de $r = 0$ até $r = 1000$ e ω_0 variou de $\omega_0 = 0$ até $\omega_0 = 20$. Foram mostrados os diagramas da estabilidade quanto aos dois maiores expoentes de Lyapunov;
- Investigamos uma janela periódica encontrada ao variar o parâmetro r para um intervalo de $r = 430$ até $r = 480$. Para esta janela, caracterizamos em detalhes uma crise de junção de atratores como uma rota para caos no sistema.
- No interior da janela periódica citada acima, observou-se longos transientes provenientes de uma sela caótica no espaço de fase. Fixando $r = 453$ caracterizamos o tempo médio de transiente no interior da janela periódica, o qual foi usado para encontrar a sela caótica através do método *sprinkler*, e usando condições iniciais selecionadas por meio do *sprinkler*, calculamos o expoente de Lyapunov da sela caótica. Observando a bacia de atração do sistema constatamos uma alta fractalidade do mesmo. Calculamos a dimensão fractal da interseção da fronteira com uma reta no espaço de fase, onde obtemos como resultado $d_s = 0,999420166$, este valor próximo de 1 indica que a fronteira fractal tem dimensão próxima à do espaço de fase, razão do sistema apresenta longos transientes.
- Constatamos que o sistema apresenta multiesbabilidade, proveniente de uma bifurcação forquilha supercrítica que sistematicamente ocorre para $r > 30$ e $\omega_0 > 3,89$. Essa bifurcação gera dois atratores periódicos.

- Estudamos uma segunda janela periódica gerada ao variar ω_0 . Para esta janela identificamos uma sela hipercaótica e seus expoentes de Lyapunov foram calculados. Caracterizamos um comportamento quase-periódico no interior da janela periódica.

Embora tenhamos investigado em detalhes a dinâmica do sistema, há ainda muito a se descobrir. Uma possível continuação seria explorar outros valores de parâmetros do sistema, tendo assim novos atratores, crises, etc. Outro ponto a se considerar é a identificação da origem de hipercaos no sistema. O modelo estudado é extremamente simplificado, assim, desenvolver este estudo usando as equações completas da teoria magnetohidrodinâmica seria importante para o aprimoramento do estudo de convecção hidromagnética.

Referências

ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **Chaos An Introductions To Dynamical Systems**. New York: Springer, 1996.

BISKAMP, D. **Magnetohydrodynamic turbulence**. New York: Cambridge University Press, p. 10–32, 2003.

CHANDRSEKHAR, S. **Hydrodynamic and hydromagnetic stability**. New York: Dover Publications, 1981.

CHERTOVSKIH, R. A. **Thermal convection and magnetic field generation by conducting fluid flows in rotating layer**. Tese (Doutorado) - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2010.

CHIAN, A. C.-L.; BOROTTO, F. A.; REMPEL, E. L. Alfvén boundary crisis. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 12, n. 7, p. 1653–1658, 2002.

CHIAN, A. C.-L.; and MUÑOZ, P. R.; and REMPEL, E. L. Edge of chaos and genesis of turbulence. **Physical Review E**, v. 88, n. 052910, p. 052910-1–052910-7, 2013.

CHIMANSKI, E. V.; REMPEL, E. L.; CHERTOVSKIH, R. **Route to Hypechaos in Rayleigh-Bénard Convection**. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado), Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos - SP, 2015.

FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C. P. C. do. **Caos Uma Introdução**. Brasil: Edgard Blücher LTDA, 1994.

GLATZMAIER, G. A. **Introduction to modeling convection in planets and stars: magnetic field**. New Jersey: Princeton University Press, 2014.

GLATZMAIER; ROBERTS1995 GLATZMAIER, G.; and ROBERTS, P. H A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle. **Physics of the Earth and Planetary Interiors**, v. 91, p. 63–75, 1995.

GOTODA, H.; TAKEUCHI, R.; OKUNO, Y.; MIYANO, T. Low-dimensional dynamical system for rayleigh-bénard convection subjected to magnetic field. **Jornal of Applied Physics**, v. 113, n. 124902, p. 124902-1–124902-13, 2013.

GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. Chaotic attractors in crisis. **Physical Review Letters**, v. 48, n. 22, p. 1507–1510, 1982.

- GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. Crises, sudden changes in chaotic attractors and transient chaos. **Physical D**, v. 7, p. 181–200, 1983.
- GREBOGI, C.; OTT, E.; ROMEIRAS, F.; YORKE, J. A. Critical exponents for crisis-induced intermittency. **Physical Review A**, v. 36, n. 11, p. 5365–5380, 1987.
- GUBBINS, D. Convection in the Earth's core and mantle. **Quartely Journal of the Royal a Astronomical Society**, v. 32, p. 68–84, 1991.
- HILBORN, R. C. **Chaos and Nonlinear Dynamics: An introduction for scientists and engineers**. 2sd. ed. New York: Oxford University Press, 2000.
- JONES, C. A.; WEISS, N. O.; CATTANEO, F. Nonlinear dynamos: A complex generalization of the lorenz equations. **Physica D**, v. 14 p. 161–176, 1985.
- KIM, B. J.; CHOE, G. H. High Precision Numerical Estimation of the Largest Lyapunov Exponent. **Commun Nonlinear Sci Numer Simulat**, p. 1378–1384, 2010.
- LAI, Y.-C.; WINSLOW, R. L., M. Geometric Properties of the Chaotic Saddle Responsible for Supertransients in Spatiotemporal Chaotic Systems. **Physical Review Letters**, v. 74, n. 26, p. 5208–5211, 1995.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **Electrodynamics of Continuous Media: Course of theoreticcal physics**. 2sd. ed. Oxford: Pergamon Press, 1984.
- LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of The Atmospheric Sciences**, v. 20, n. 2, p. 130–141, 1963.
- MACAU, E. E. N.; GREBOGI, C. Driving trajectories in chaotic systems. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 11, n. 5, p. 1423–1442, 2001.
- MACEK, W. M.; STRUMIK, M. Model for hydromagnetic convection in a magnetized fluid. **Physical Review E**, v. 82, n. 027301, p. 027301–1–027301–4, 2010.
- MACEK, W. M.; STRUMIK, M. Hyperchaotic intermittent convection in a magnetized viscous fluid. **Physical Review Letters**, v. 112, n. 074502, p. 074502–1–074502–5, 2014.
- MIRANDA, R. A.; REMPEL, E. L.; CHIAN, A. C.-L. Chaotic saddles in nonlinear modulational interactions in a plasma **Physics of Plasmas**, v. 19, n.112303, p.112303–1–112303–12, 2012.
- MUÑOZ, P. N.; and BARROS, J. J.; and CHIAN, A. C.-L.; REMPEL, E. L. Edge state and crisis in the pierce diode. **Chaos**, v. 22, n. 3, p. 033120-1–033120-7, 2012.
- PARKER, E. N. Hydromagnetic dynamo models. **The Astrophysical Journal**, v. 122, p. 293–314, 1955.
- PARKER, T. S.; CHUA, L. O. **Practical numerical algorithms for chaotic systems**. New York: Springer-Verlag, 1989.
- PRIEST, E. R. **Solar magneto-hydrodynamic** Holanda, D. reidel Publishing Company, 1982.

- REMPEL, E. L. **Análise de conjuntos caóticos atrativos e não-atrativos em sistemas dinâmicos de baixa e alta dimensão: Aplicação para a dinâmica de ondas de plasma na conexão Sol-Terra.** Tese (Doutorado) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2006.
- REMPEL, E. L.; CHIAN, A. C.-L. Alfvén chaotic saddles. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 14, n. 11, p. 4009–4017, 2004.
- REMPEL, E. L.; SANTANA, W. M.; CHIAN, A. C.-L. Alfvén multistability: Transient and intermittent dynamics induced by noise. **Physics of Plasmas**, v. 13, n. 032308, p. 032308–1–032308–5, 2006.
- REMPEL, E. L.; CHIAN, A. C.-L. Intermittency induced by attractor-merging crisis in the Kuramoto-Sivashinsky equation. **Physical Review E**, v. 71, n. 016203, p. 016203–1–016203–5, 2005.
- REMPEL, E. L.; and CHIAN, A. C.-L.; and KOGA, D.; and MIRANDA, R. A.; and SANTANA W. M. Alfvén complexity. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 18, n. 6, p. 1697–1703, 2008.
- REMPEL, E. L.; and CHIAN, A. C.-L.; and MACAU, E. E. N.; and ROSA, R. R. Analysis of Chaotic Saddles in High-dimensional Dynamical Systems: The Kuramoto Sivashinsky Equation. **Chaos**, v. 14, n. 3, p. 545–556, 2004.
- RYPDAL, K.; GARCIA, O. E. Reduced lorenz models for anomalous transport and profile resilience. **Physics of Plasmas**, v. 14, n. 022101, p. 022101–1–022101–11, 2007.
- SALTZMAN, B. Finite amplitude free convection as an initial value problem-I. **Journal of The Atmospheric Sciences**, v. 19, p. 329–341, 1962.
- STROGATZ, S. H. **Nonlinear dynamics and chaos.** New York: Addison-Wesley, 1994.
- THOMPSON, J. M. T.; STEWART, H. B. **Nonlinear dynamics and chaos.** England: Wiley, 2ed., 2002.
- VILLATE, J. E. **Introdução aos sistemas dinâmicos: uma abordagem prática com o Maxima.** Porto: Universidade do Porto, 2007.
- WU, W.; CHEN, Z. Hopf bifurcation and intermittent transition to hyperchaos in a novel strong four-dimensional hyperchaotic system. **Nonlinear Dynamics**, v. 60, n. 4, p. 615–630, 2009.
- WOLF, A.; SWIFT, J. B.; SWINNEY, H. L.; VASTANO, J. A. Determining Lyapunov Exponents From a Time Series. **Physica D**, v. 16, p. 285–317, 1985.

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

^{1.} CLASSIFICAÇÃO/TIPO <p style="text-align: center;">DM</p>	^{2.} DATA <p style="text-align: center;">29 de fevereiro de 2016</p>	^{3.} REGISTRO Nº <p style="text-align: center;">DCTA/ITA/DM-005/2016</p>	^{4.} Nº DE PÁGINAS <p style="text-align: center;">81</p>
^{5.} TÍTULO E SUBTÍTULO: <p>Caos e hipercaos em um modelo reduzido de convecção hidromagnética</p>			
^{6.} AUTOR(ES): <p>Francis Ferreira Franco</p>			
^{7.} INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): <p>Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA</p>			
^{8.} PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: <p>Caos, Hipercaos, Sela Caótica.</p>			
^{9.} PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: <p>Caos; Sistemas dinâmicos; Convecção; Física.</p>			
^{10.} APRESENTAÇÃO: (X) Nacional () Internacional <p>ITA, São José dos Campos. Curso de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Sistemas Complexos e Dinâmica Não-Linear. Orientador: Prof. Dr. Erico Luiz Rempel. Defesa em 26/02/2016. Publicada em 2016.</p>			
^{11.} RESUMO: <p>Neste trabalho realizou-se um estudo numérico em um modelo reduzido de convecção hidromagnética. A estabilidade assintótica do sistema foi investigada para um intervalo de valores de parâmetros. Novos resultados quanto ao modelo foram apresentados. A dinâmica caótica e hipercaótica foram investigadas em detalhes. Os expoentes de Lyapunov da sela caótica foram calculados no interior das janelas periódicas e exibidos junto ao espectro de expoentes de Lyapunov dos atratores do sistema. A origem da multiestabilidade no sistema foi identificada.</p>			
^{12.} GRAU DE SIGILO: <p style="text-align: center;">(X) OSTENSIVO () RESERVADO () SECRETO</p>			