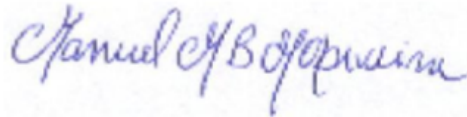


Dissertação apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Física Nuclear.

Flavia Pereira da Rocha

GRAVITOMAGNETISMO NO SISTEMA SOLAR

Dissertação aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:



Prof. Dr. Manuel M. B. Malheiro Oliveira
Orientador

Prof. Dr. Luiz Carlos Sandoval Góes
Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP – Brasil
2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Divisão de Informação e Documentação

Rocha, Flavia Pereira da
Gravitomagnetismo no Sistema Solar / Flavia Pereira da Rocha.
São José dos Campos, 2016.
67f.

Dissertação de Mestrado – Curso de Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Física Nuclear – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2016. Orientador: Prof. Dr. Manuel M. B. Malheiro Oliveira.

1. Relatividade Geral. 2. Gravitomagnetismo. 3. Efeito Lense-Thirring. I. Centro Técnico Aeroespacial. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Divisão de Física. II. Título.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ROCHA, Flavia Pereira da. **Gravitomagnetismo no Sistema Solar**. 2016. 67f.
Dissertação de Mestrado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DA AUTORA: Flavia Pereira da Rocha
TÍTULO DO TRABALHO: Gravitomagnetismo no Sistema Solar.
TIPO DO TRABALHO/ANO: Dissertação / 2016

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta dissertação e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. A autora reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação pode ser reproduzida sem a autorização da autora.

Flavia Pereira da Rocha
Praça Marechal Eduardo Gomes, 50
12.228-900 – Vila das Acácias, São José dos Campos–SP

GRAVITOMAGNETISMO NO SISTEMA SOLAR

Flavia Pereira da Rocha

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr.	Carlos Alberto Bomfim Silva	Presidente	-	ITA
Prof. Dr.	Manuel M. B. Malheiro Oliveira	Orientador	-	ITA
Prof. Dr.	Wayne Leonardo Silva de Paula	Membro Interno	-	ITA
Prof. Dra.	Laura Paulucci Marinho	Membro Externo	-	UFABC

ITA

À Elis, minha sobrinha querida.

Agradecimentos

Este espaço é dedicado àqueles que, de alguma forma, contribuíram para que esta dissertação fosse realizada. Não sendo viável nomeá-los a todos, há no entanto alguns a quem não posso deixar de manifestar o meu apreço e agradecimento sincero.

Primeiramente a Deus por me amparar nos momentos difíceis, me dar força interior para superar as dificuldades e mostrar os caminhos nas horas incertas.

Ao meu orientador, professor Dr. Manuel Malheiro e ao professor Dr. Rubens Marinho pela confiança que depositaram em mim, por me mostrarem o caminho da ciência, e por serem exemplos de profissionais aos quais sempre tive muita admiração. O apoio de vocês e disponibilidade manifestada contribuíram decisivamente para que este trabalho tenha chegado a bom termo. Agradeço, ainda, os incentivos constantes ao longo de todo o mestrado.

Aos professores que contribuíram com a minha formação, Dra. Nadja Simão, Dr. Jayr Amorim, Dr. Brett Carlson, Dr. Carlos Bomfim em especial ao Dr. Pedro Pompeia cuja ajuda foi imprescindível e a tantos outros da pós-graduação do ITA que são uma inspiração para nós alunos.

Aos amigos do mestrado, Larissa, Gerline, Lilian, Ivana, Ronaldo, Heitor, Aline, Vanderli, Emanuel, Armando, Leonardo, Gean, Carla, com quem vivi um ambiente de verdadeira aprendizagem colaborativa.

Às minhas irmãs, Glaucia e Jessica, melhores amigas que o universo poderia me proporcionar, por me apoiarem e me incentivarem, vocês são minhas inspirações.

Ao meu namorado, ouvinte atento de dúvidas, inquietações, desânimos e sucessos, pelo apoio, confiança e pela valorização e participação sempre tão entusiasta do meu trabalho.

Aos meus pais, por sempre me incentivarem perante os desafios, a fazer mais e melhor, quero partilhar convosco a alegria de conseguir vencer mais essa etapa!

Uma palavra de reconhecimento muito especial para eles, pelo amor incondicional e pela forma como ao longo de todos estes anos, tão bem souberam me ajudar

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro e à pós graduação do ITA.

*"If I have seen farther than others,
it is because I stood on the shoulders of giants."*

— SIR ISAAC NEWTON

Resumo

Em 1918, Josef Lense e Hans Thirring descobriram o efeito gravitomagnético (GM) quando estudavam soluções para as equações de campo de Einstein usando aproximação de campo fraco. Eles perceberam que na aproximação de campo fraco as equações de Einstein podem ser escritas numa forma similar às equações de Maxwell, então o gravitomagnetismo pode ser aplicado para sistemas astrofísicos com a massa assumindo o papel de carga, quando o campo é fraco. Nesse trabalho, apresentamos a dedução das equações gravitoeletromagnéticas e do análogo à força de Lorentz no eletromagnetismo e apresentamos o experimento Gravity Probe B, desenvolvido pela NASA e a universidade de Stanford, para testar a relatividade geral, em particular o efeito de precessão Lense-Thirring. Analisamos os efeitos gravitomagnéticos no Sistema Solar, e em especial o avanço do periélio da órbita de Mercúrio. Dois modelos para essa análise são propostos: um usando a interação de dipolo-dipolo e outro a força de Lorentz entre o Sol e o planeta. Concluimos, como esperado pelas Leis de Kepler, que os efeitos gravitomagnéticos são desprezíveis em relação à força gravitacional Newtoniana entre o Sol e o planeta e como consequência não consegue explicar o avanço do periélio da órbita de Mercúrio, que é um efeito não linear das equações de Einstein.

Abstract

In 1918, Joseph Lense and Hans Thirring discovered the gravitomagnetic (GM) effect when studied the Einstein field equations using weak field. They realized that the weak field approximation can be written as an electromagnetic form by analogy. The equations that they obtained were very similar to Maxwell's equations, then the gravitomagnetic formalism can be applied to astrophysical systems with mass assuming the charge's role, when the gravitational field is weak. In this work, we present the deduction of gravitoelectromagnetic equations and the analogue of the Lorentz force in the electromagnetism. We present the experiment Gravity Probe B which was developed by NASA and Stanford University, to test general relativity, in particular the effect of Lense - Thirring precession. We analyse the gravitomagnetic effects in the Solar System, and in special the problem of Mercury's perihelion advance orbit. Two models for this analysis are proposed: one using dipole-dipole interaction and other the Lorentz force between the Sun and the planet. We conclude, as expected by Kepler's laws, that gravitomagnetic effect in the Solar System are negligibles in comparison to the newtonian gravitational force between the Sun and the planet, and as a consequence cannot explain the Mercury's perihelion advance orbit, which is a nonlinear effect of Einstein's equations.

Lista de Figuras

FIGURA 2.1 – Representação da distorção do espaço-tempo ao redor da Terra. Fonte: Figura extraída da referência (NASA, 2015a)	29
FIGURA 2.2 – Representação do arraste provocado no espaço-tempo pela rotação da Terra. Fonte: Figura extraída da referência (NASA, 2015a)	29
FIGURA 2.3 – Representação esquemática da precessão LT (horizontal) e da precessão de Sitter (vertical). Fonte: Figura adaptada da referência (EVERITT <i>et al.</i> , 2011)	30
FIGURA 3.1 – Rotação no Sistema Solar. Figura extraída da referência (HAMILTON, 2016)	32
FIGURA 3.2 – Esfera Girando em torno do seu próprio eixo com velocidade angular ω constante e suas coordenadas.	34

Lista de Tabelas

TABELA 2.1 – Resultados da sonda GBP em unidades de milisegundos de arco por ano. Tabela adaptada da referência (EVERITT <i>et al.</i> , 2011)	31
TABELA 3.1 – Dados astronômicos de massa, raio equatorial e distância média do Sol para os planetas do Sistema Solar. Tabela extraída da referência (HAMILTON, 2016).	33
TABELA 3.2 – Dados astronômicos de período orbital e velocidade média dos planetas do Sistema Solar. Tabela extraída da referência (HAMILTON, 2016).	33
TABELA 3.3 – Dados dos módulos do momento de dipolo μ , campos B e forças gravitomagnéticas F para os planetas do Sistema Solar.	38
TABELA 3.4 – Razão entre a força de interação entre dipolos gravitomagnética F_d e força gravitacional F_{grav} para os planetas do Sistema Solar.	39
TABELA 3.5 – Avanço da órbita no periélio $\Delta\phi_0$ dos planetas do Sistema Solar, usando como correção a interação entre dipolos GM.	47
TABELA 3.6 – Avanço da órbita no periélio $\Delta\phi_0$ dos planetas do Sistema Solar, usando como correção a força de Lorentz GM.	49

Lista de Abreviaturas e Siglas

GPB	Gravity Probe B
GRACE	Gravity Recovery and Climate Experiment
GEM	Gravitoeletromagnetismo
GM	Gravitomagnetismo
LAGEOS	LAser GEOdynamics Satellite
LT	Lense-Thirring
NASA	National Aeronautics And Space Administration
RG	Relatividade Geral
RR	Relatividade Restrita

Lista de Símbolos

r	Distância radial.
A	Negrito em fórmulas matemáticas corresponde a vetor.
δ_{μ}^{ν}	Delta de Kronecker.
\odot	Referência ao Sol.
$T^{\mu\nu}$	Tensor energia momento.
$\eta^{\mu\nu}$	Métrica de Minkowski.
$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$	Símbolos de Christoffel.
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci.
R	Escalar de Ricci/curvatura.
$G_{\mu\nu}$	Tensor de Einstein.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
2	GRAVITOMAGNETISMO	18
2.1	Equações de Campo de Einstein	18
2.1.1	Aproximação de campo fraco	20
2.1.2	Campos gravitoeletromagnéticos	25
2.1.3	Força de Lorentz Gravitomagnética	26
2.2	Efeito Lense-Thirring	28
2.3	Gravity Probe B	29
3	GRAVITOMAGNETISMO NO SISTEMA SOLAR	32
3.1	Sistema Solar	32
3.2	Abordagem Gravitomagnética	33
3.2.1	Momento de Dipolo Gravitomagnético	34
3.2.2	Campo Gravitomagnético	36
3.2.3	Potencial e Força de interação entre dipolos	37
3.3	Precessão do Periélio	39
3.3.1	Cálculo de precessão usando relatividade geral	40
3.3.2	Cálculo de precessão usando o potencial de dipolo-dipolo gravitomagnético	44
3.3.3	Cálculo de precessão considerando a força de Lorentz gravitomagnética	47
4	CONCLUSÃO	50
	REFERÊNCIAS	52

APÊNDICE A – PROGRAMA WxMAXIMA	55
ANEXO A – FÓRMULAS VETORIAIS	66
A.1 RELAÇÕES VETORIAIS	66
A.2 RELAÇÕES DIFERENCIAIS	66
A.2.1 Coordenadas Cartezianas	66
A.2.2 Coordenadas esféricas	67

1 Introdução

Em 1905 Albert Einstein publicou a chamada teoria da Relatividade Restrita (RR), a qual revolucionou a física por apresentar uma nova proposta que modificava os conceitos de espaço e tempo: as noções separadas de espaço absoluto e tempo absoluto da mecânica newtoniana foram alteradas para uma nova noção de espaço-tempo absoluto, como salientado em (MOORE, 2015). Entretanto, a RR é uma modificação cinemática e dinâmica da mecânica newtoniana derivada de dois princípios:

- As leis físicas devem ser as mesmas para quaisquer observadores inerciais;
- A velocidade da luz no vácuo é uma constante universal para observadores inerciais.

Em 1916, Einstein publicou a Teoria da Relatividade Geral (RG), descrevendo como o espaço-tempo é afetado pela distribuição de massa presente no Universo. Em outras palavras a RG é uma teoria geométrica da gravitação que estende a RR para referenciais acelerados, introduzindo o princípio de que as forças gravitacionais e inerciais são equivalentes.

A dinâmica da Relatividade Geral é descrita por um conjunto de equações conhecido como as equações de campo de Einstein. Estas equações relacionam as propriedades geométricas do espaço-tempo, descrita por uma métrica e suas derivadas de primeira e segunda ordem com o tensor de energia-momento da matéria. O tensor de energia-momento é a generalização dos conceitos de energia e momento de uma partícula para a descrição de campos, e é por meio deste tensor que a distribuição de matéria é descrita.

A princípio, qualquer métrica pode ser solução das equações de campo de Einstein, mas para que possamos obter soluções exatas com interpretação física é necessário impor restrições ao tensor energia-momento. As soluções analíticas se restringem a um pequeno grupo e permitem que as propriedades físicas do espaço-tempo sejam descritas sem recorrer à integração numérica de equações diferenciais de segunda ordem.

Existem várias soluções analíticas que têm desempenhado um papel muito importante no desenvolvimento tanto teórico quanto experimental da RG (D'INVERNO, 1992), (MOORE, 2015) e (WEINBERG, 2008). Uma destas soluções muito importante das equações de campo de Einstein é a que representa o exterior de uma distribuição de matéria-energia com simetria esférica. Os sistemas com simetria esférica são razoavelmente simples de resolver.

A solução que descreve o espaço-tempo em torno de uma distribuição de matéria esfericamente simétrica em repouso foi obtida por Karl Schwarzschild em 1916, poucos meses após Einstein publicar suas equações de campo para o vácuo. A métrica de Schwarzschild é dada por:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1.1)$$

com

$$m = \frac{GM}{c^2}, \quad (1.2)$$

onde, M é a massa da fonte, G é a constante da gravitação universal e c é a velocidade da luz no vácuo. Quando $r \rightarrow \infty$ o espaço-tempo de Schwarzschild se aproxima do espaço-tempo de Minkowski. A solução de Schwarzschild está na base dos três testes clássicos da RG que são: o deslocamento de linhas espectrais pela presença do campo gravitacional, o desvio de um feixe de luz que passa perto de uma estrela e a precessão do periélio de Mercúrio. Esta solução também está ligada a uma das previsões mais famosas da RG, que é a possível existência de buracos negros. Se definirmos na equação (1.1) o raio de Schwarzschild $r_s = 2m$, para $r = r_s$ temos uma singularidade de coordenada. A superfície $r = r_s$ caracteriza o chamado horizonte de eventos. Essa superfície define a região que deixa passar a informação em um só sentido. Para um observador no exterior, todos os acontecimentos em $r < r_s$ são inacessíveis. Devido a essas características, o termo buraco negro foi introduzindo em 1967 por John Wheeler, para uma massa com essa singularidade.

Outra solução importante foi obtida por Lense e Thirring em 1918, quando resolveram as equações de Einstein no regime de campo fraco e baixas velocidades para sistemas em rotação (J. Lense H. Thirring, 1984), (KARLSSON, 2006), (CIUFOLINI, 2004) e (MASHHOON *et al.*, 1999), eles descobriram que linearizando as equações nesse regime pode-se definir quatro equações análogas as equações de Maxwell, mas no lugar de carga teremos massa. Um novo conceito surge no qual uma corrente de massa gera um campo gravitomagnético análogo ao campo magnético e a essas equações foi dado o nome de equações gravitoeletromagnéticas (CIUFOLINI, 2010), (TAJMAR; De Matos, 2006) e (MASHHOON *et al.*, 1999). Alguns autores consideram que o gravitomagnetismo (GM) pode causar precessão (CHASHCHINA *et al.*, 2009), (BIEMOND, 2004b), (CIUFOLINI *et al.*, 1997) e (CIUFOLINI, 2004) então, o foco deste trabalho será, além de apresentar o formalismo GM, calcular sua influência na órbita dos planetas do sistema solar.

No segundo capítulo, demonstraremos matematicamente, a partir das equações de campo de Einstein, como é a forma das equações gravitoeletromagnéticas e também a equação análoga a força de Lorentz do Eletromagnetismo. Ainda nesse capítulo será discutido o efeito Lense-thirring (que é o efeito gravitomagnético mais famoso)(CHASHCHINA *et al.*, 2009) e o experimento Gravity Probe B (BIEMOND, 2004b), um experimento lançado pela

NASA em parceria com a universidade de Stanford para testar dois efeitos previsto pela RG, que são os efeitos de distorção e arraste do espaço-tempo, respectivamente geodesic effect e frame-dragging effect (nos termos em inglês) (BIEMOND, 2004b).

No terceiro capítulo, será feita a abordagem da correção GM no Sistem Solar e para isso calculamos o campo e potencial de dipolo gravitomagnético do Sol e do planeta e a força de interação entre dipolos gravitomagnéticos para modelar a força Sol-planeta. Apresentamos também a solução proposta pela relatividade geral para o avanço do periélio da órbita de Mercúrio, a qual considera o Sol esfericamente simétrico e estático, e o espaço-tempo ao seu redor descrito pela métrica de Schwarzschild.

Consideramos também o modelo onde o Sol cria um campo de dipolo gravitomagnético ao girar em torno do seu eixo, e este campo exerce uma força de Lorentz gravitomagnética no planeta que orbita em torno dele com velocidade orbital v .

Parte destes resultados já foram apresentados nas conferências XIII International Workshop on Hadron Physics e The Second ICRANet César Lattes Meeting e publicados recentemente (ROCHA *et al.*, 2015) e (ROCHA *et al.*, 2016).

Concluimos, como esperado pelas Leis de Kepler, que os efeitos gravitomagnéticos no Sistema Solar são desprezíveis e que as órbitas dos planetas em torno do Sol são bem descritas apenas pela força “elétrica” do gravitomagnetismo i.e. a força de gravitação de Newton. Como consequência deste resultado, também o avanço do periélio da órbita de Mercúrio em torno do Sol não pode ser explicado pelo gravitomagnetismo, pois é um efeito não linear das equações de Einstein da gravitação.

2 Gravitomagnetismo

2.1 Equações de Campo de Einstein

Em 1916 Albert Einstein publicou a Teoria da Relatividade Geral. Nesta teoria é estendida a descrição dos fenômenos físicos para sistemas não inerciais, ou seja, sistemas acelerados. O princípio da equivalência postula que é impossível distinguirmos sistemas uniformemente acelerados de campos gravitacionais.

Duas consequências deste princípio são: o desvio da luz por campos gravitacionais e o deslocamento da frequência de fótons em campos gravitacionais. Ambas as previsões foram confirmadas experimentalmente. Outro resultado importante da Teoria da Relatividade Geral (RG) foi a explicação da precessão do periélio de Mercúrio.

Ao incluir campos gravitacionais, a relatividade geral tornou-se uma teoria da gravitação, aperfeiçoando a teoria da gravitação universal de Newton.

A RG descreve o movimento de objetos em termos das trajetórias descritas sobre o espaço-tempo, que por sua vez são determinadas pela distribuição de massas do Universo, isto é, o espaço e o tempo não são estruturas absolutas e estáticas como na teoria de Newton, mas grandezas físicas em si.

Na RG a gravidade surge como uma manifestação variável da curvatura do espaço-tempo, isto é, são os efeitos da curvatura que observamos como campo gravitacional. A interação entre o espaço-tempo e a matéria é tal que a matéria curva o espaço-tempo, e este por sua vez define a trajetória de uma partícula de acordo com sua estrutura geométrica.

As equações de campo de Einstein são (D'INVERNO, 1992):

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{2.1}$$

onde, no lado esquerdo temos o tensor de Einstein ($G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$), o qual é definido em termos do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ o que descreve a geometria do espaço-tempo, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci e R é o escalar de Ricci. No lado direito temos a constante de acoplamento entre o campo e a geometria dada por: $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2}$. O tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ contém todas as informações referentes à energia e aos momentos do campo. O tensor de Einstein e o tensor energia-momento relacionam a geometria de um dado espaço-tempo à sua

distribuição de matéria. É importante lembrar que o tensor de Einstein obedece uma equação de conservação, na qual $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$. Desse modo, o tensor $T_{\mu\nu}$ constituído para representar uma dada distribuição de matéria, obedece também a lei de conservação $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

Antes de iniciar os cálculos é importante estabelecer algumas convenções.

O tensor métrico é definido como $g_{\mu\nu}$ e seu inverso $g^{\mu\nu}$; a métrica de Minkowski, também conhecida como a métrica do espaço plano é definida como $\eta_{\mu\nu}$ bem como seu inverso $\eta^{\mu\nu}$. Os símbolos de Christoffel são calculados em função da métrica:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \{\rho_{\mu\nu}\} \equiv \frac{1}{2}g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (2.2)$$

O tensor de Ricci/curvatura é calculado em termos dos símbolos de Christoffel:

$$R^\mu_{\gamma\nu\beta} = \partial_\nu \Gamma^\mu_{\gamma\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\gamma\nu} + \Gamma^\mu_{\eta\nu} \Gamma^\eta_{\gamma\beta} - \Gamma^\mu_{\eta\beta} \Gamma^\eta_{\gamma\nu}. \quad (2.3)$$

O tensor de Ricci pode ser obtido do tensor de Riemann;

$$R_{\gamma\beta} = g^{\mu\nu} R_{\mu\gamma\nu\beta} = R^\nu_{\gamma\nu\beta}. \quad (2.4)$$

O escalar de Ricci/curvatura se relaciona com o tensor de Ricci da seguinte forma:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\nu_{\nu}, \quad (2.5)$$

e o tensor de Einstein é definido em termos do tensor de Ricci, da métrica e do escalar de Riemann,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (2.6)$$

Além disso, o tensor Energia-momento:

$$T^{\rho\sigma} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_{matter}}{\delta g_{\rho\sigma}}; \quad (2.7)$$

onde \mathcal{L}_{matter} é a densidade de lagrangeana da matéria. E, finalmente, a derivada covariante é definida, como:

$$\begin{aligned} \nabla_\nu T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\lambda_1 \dots \lambda_m} &\equiv \partial_\nu T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\lambda_1 \dots \lambda_m} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu_1} T^{\sigma \mu_2 \dots \mu_n}_{\lambda_1 \dots \lambda_m} + \dots + \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu_n} T^{\mu_1 \dots \mu_{n-1} \sigma}_{\lambda_1 \dots \lambda_m} + \\ &- \Gamma_{\nu\lambda_1}^\sigma T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\sigma \lambda_2 \dots \lambda_m} - \dots - \Gamma_{\nu\lambda_m}^\sigma T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\lambda_1 \dots \lambda_{m-1} \sigma}. \end{aligned}$$

2.1.1 Aproximação de campo fraco

As equações de campo de Einstein são não-lineares e possuem uma álgebra bastante complexa. Em campos gravitacionais fracos, distante de fontes astrofísicas, o espaço-tempo é aproximadamente plano (D'INVERNO, 1992). O cálculo da equação de campo de Einstein longe das fontes é realizado através de uma aproximação de campo fraco, que consiste em considerarmos que a métrica é basicamente a métrica de Minkowski acrescida de um termo de perturbação (CIUFOLINI *et al.*, 2003).

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

onde, $h_{\mu\nu}$ é um termo de perturbação no espaço-tempo ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$, $|\partial_\rho h_{\mu\nu}| \ll 1$, $|\partial_\sigma \partial_\rho h_{\mu\nu}| \ll 1, \dots$) e a métrica de Minkowski é dada por:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Tomar o limite de campo fraco, significa que iremos desprezar os termos de ordem $|h_{\mu\nu}|^2$ e maiores nas equação a seguir (MOORE, 2015). Dada essa suposição, podemos mostrar, sendo a relação envolvendo a métrica inversa ($g_{\alpha\sigma} g^{\sigma\nu} \equiv \delta_\alpha^\nu$), que:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (2.9)$$

onde,

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho} \eta^{\mu\sigma} h_{\nu\sigma}, \quad (2.10)$$

ou seja, η tem propriedade de métrica, isto é, levantar e baixar índice.

O traço de $h_{\mu\nu}$ é

$$h = \eta^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} + O(h^2), \quad (2.11)$$

Agora com a nova métrica definida incluindo o termo de perturbação (2.8), encontramos os símbolos de Christoffel, que são derivadas da métrica perturbada,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} (\partial_\mu h_{\nu\sigma} + \partial_\nu h_{\mu\sigma} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}) + O(h^2).$$

O tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\rho \partial_\nu h_\mu^\rho - \partial_\rho \partial^\rho h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h + \partial_\mu \partial_\rho h_\nu^\rho) + O(h^2), \quad (2.12)$$

O escalar de curvatura,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + O(h^2) = \partial_\rho \partial_\nu h^{\nu\rho} - \partial_\rho \partial^\rho h + O(h^2), \quad (2.13)$$

e, o tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\rho \partial_\nu h_\mu^\rho - \partial_\rho \partial^\rho h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h + \partial_\mu \partial_\rho h_\nu^\rho) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial_\rho \partial_\sigma h^{\sigma\rho} - \partial_\rho \partial^\rho h). \quad (2.14)$$

2.1.1.1 Transformação de Gauge

Vamos agora aplicar uma transformação de coordenadas. Começaremos introduzindo o tensor traço reverso:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \quad (\bar{h} = -h), \quad (2.15)$$

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h}. \quad (2.16)$$

Com essa quantidade, as equações de campo tornam-se¹

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\rho \bar{h}_\mu^\rho + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\rho \bar{h}_\nu^\rho - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma \bar{h}^{\sigma\rho} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.17)$$

ou

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma \bar{h}^{\sigma\rho} - \partial_\nu \partial_\rho \bar{h}_\mu^\rho - \partial_\mu \partial_\rho \bar{h}_\nu^\rho = -2\kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.18)$$

onde, $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ no sistema CGS (gaussiano) e \square é o operador d'Alambertiano.

Fixando a condição de Gauge, conhecida como Lorentz (ou harmônica ou De Donder),

$$\partial_\sigma \bar{h}^{\sigma\rho} = 0, \quad (2.19)$$

Segue que,

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -2\kappa T_{\mu\nu} \quad (2.20)$$

1

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left(\partial_\rho \partial_\nu \left(\bar{h}_\mu^\rho - \frac{1}{2} \delta_\mu^\rho \bar{h} \right) - \partial_\rho \partial^\rho \left(\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h} \right) + \partial_\mu \partial_\nu \bar{h} + \partial_\mu \partial_\rho \left(\bar{h}_\nu^\rho - \frac{1}{2} \delta_\nu^\rho \bar{h} \right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \left(\partial_\rho \partial_\sigma \left(\bar{h}^{\sigma\rho} - \frac{1}{2} \eta^{\sigma\rho} \bar{h} \right) + \partial_\rho \partial^\rho \bar{h} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\rho \bar{h}_\mu^\rho + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\rho \bar{h}_\nu^\rho - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma \bar{h}^{\sigma\rho} \end{aligned}$$

No entanto, deve-se notar que,

$$\square \partial_\sigma \bar{h}^{\sigma\rho} = -2\kappa \partial_\sigma T^{\sigma\rho} = 0, \quad (2.21)$$

devido a coerência com a transformação de gauge utilizada, o tensor energia-momento é conservado:

$$\partial_\sigma T^{\sigma\rho} = 0. \quad (2.22)$$

Mas, sabemos também que $T^{\mu\nu}$ é conservado covariantemente:

$$\nabla_\sigma T^{\sigma\rho} = 0, \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma T^{\sigma\rho} &= \partial_\sigma T^{\sigma\rho} + \Gamma_{\sigma\beta}^\sigma T^{\beta\rho} + \Gamma_{\sigma\beta}^\rho T^{\sigma\beta} \\ &= \partial_\sigma T^{\sigma\rho} + \frac{1}{2} \eta^{\sigma\alpha} (\partial_\sigma h_{\beta\alpha} + \partial_\beta h_{\sigma\alpha} - \partial_\alpha h_{\sigma\beta}) T^{\beta\rho} \\ &\quad + \frac{1}{2} \eta^{\rho\alpha} (\partial_\sigma h_{\beta\alpha} + \partial_\beta h_{\sigma\alpha} - \partial_\alpha h_{\sigma\beta}) T^{\sigma\beta}. \end{aligned}$$

Estas duas condições, as conservações comuns e covariantes, são compatíveis somente se os termos com a forma

$$\partial_\sigma h_{\beta\alpha} T^{\beta\rho} \approx 0, \quad (2.24)$$

i.e. se $T_{\mu\nu}$ é da mesma ordem de magnitude de $\partial_\rho h_{\mu\nu} \sim h_{\mu\nu}$, que é esperado já que se trata de uma aproximação de campo fraco, ou seja, distante das fontes.

2.1.1.2 Aproximação não-relativística (baixas velocidades) para $\bar{h}_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$

Agora vamos fazer uma aproximação na qual a fonte consiste de um fluido perfeito não-relativístico (MOORE, 2015). O tensor energia momento $T^{\mu\nu}$, pode ser escrito como:

$$T^{\mu\nu} = (\rho_0 + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} \quad (2.25)$$

Nesse caso, a pressão p na fonte será desprezível comparada com a densidade de energia ρ_0 e a quadri-velocidade do fluido u^α em cada ponto será tal que $u^0 \approx 1$ e $u^i \approx v^i \ll 1$, onde os índices latinos dizem respeito a parte espacial. Nessa aproximação, mantemos somente os termos em primeira ordem $u^i \approx v^i$. Para este caso em que temos uma aproximação de

baixas velocidades as componentes do tensor energia-momento serão:

$$T^{00} \approx \rho_0 u^0 u^0 \approx \rho_0, \quad (2.26)$$

$$T^{0i} = T^{i0} \approx \rho_0 u^0 u^i \approx \rho_0 v^i, \quad (2.27)$$

$$T^{ij} \approx \rho_0 u^i u^j \approx 0 \quad (2.28)$$

e por consistência $\bar{h}_{ij} \approx 0$, que é o caso em que (MASHHOON *et al.*, 1999)

$$\bar{h}_{0\mu} \sim O\left(\frac{1}{c^2}\right), \quad \bar{h}_{ij} \sim O\left(\frac{1}{c^4}\right).$$

Portanto², nessa aproximação,

$$\bar{h} = \eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = \eta^{00} \bar{h}_{00} + \eta^{ij} \bar{h}_{ij} = \eta^{00} \bar{h}_{00}, \quad (2.29)$$

que, substituindo na equação (2.16), teremos:

$$h_{ij} = -\frac{1}{2} \eta_{ij} \eta^{00} \bar{h}_{00}, \quad (2.30)$$

$$h_{00} = \bar{h}_{00} - \frac{1}{2} \eta_{00} (\eta^{00} \bar{h}_{00}) = \frac{1}{2} \bar{h}_{00}, \quad (2.31)$$

$$h_{0i} = \bar{h}_{0i}, \quad (2.32)$$

$$h = -\eta^{00} \bar{h}_{00} = -2\eta^{00} h_{00}. \quad (2.33)$$

Quatro equações permanecem:

$$\square \bar{h}_{0\nu} = -2\kappa T_{0\nu}, \quad (2.34)$$

e a condição da transformação de Gauge $\partial_\sigma \bar{h}^{\sigma\rho} = 0$, leva:

$$\partial_\sigma \bar{h}^{\sigma 0} = \partial_0 \bar{h}^{00} + \partial_i \bar{h}^{i0} = 0, \quad (2.35)$$

$$\partial_0 \bar{h}^{0i} = 0. \quad (2.36)$$

As quatro equações de campo (2.34) podem ser escritas como

$$\square \bar{h}_{00} = -2\kappa T_{00} \quad (2.37)$$

$$\square \bar{h}_{0i} = -2\kappa T_{0i}, \quad (2.38)$$

²Por exemplo, para a matéria o tensor energia-momento estudada por Lense and Thirring (J. Lense H. Thirring, 1984)

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = \rho_0 \frac{dx^\mu}{dx^4} \frac{dx^\nu}{dx^4} \left(\frac{dx^4}{ds}\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} T^{0\nu} = \rho_0 \frac{dx^\nu}{dx^4} \left(\frac{dx^4}{ds}\right)^2 \sim O(v) \\ T^{ij} = \rho_0 \frac{dx^i}{dx^4} \frac{dx^j}{dx^4} \left(\frac{dx^4}{ds}\right)^2 \sim O(v^2) \approx 0 \end{cases}$$

se considerarmos somente termos de primeira ordem da velocidade.

ou também, como:

$$\partial_0 (\partial^0 \bar{h}_{00}) + \partial_i (\partial^i \bar{h}_{00}) = -2\kappa T_{00} \quad (2.39)$$

$$\partial_0 (\partial^0 \bar{h}_{0i}) + \partial_j (\partial^j \bar{h}_{0i}) = -2\kappa T_{0i}. \quad (2.40)$$

Usando a identidade,

$$\begin{aligned} \partial_j (\partial^j \bar{h}_{0i}) &= \partial_j (\partial^j \bar{h}_{0i}) + \partial_i (\partial^j \bar{h}_{0j}) - \partial_i (\partial^j \bar{h}_{0j}) \\ &= \partial_i (\partial^j \bar{h}_{0j}) + (\delta_i^m \delta_k^j) \partial_j (\partial^k \bar{h}_{0m}) - (\delta_i^j \delta_k^m) \partial_j (\partial^k \bar{h}_{0m}) \\ &= \partial_i (\partial^j \bar{h}_{0j}) + [\delta_i^m \delta_k^j - \delta_i^j \delta_k^m] \partial_j (\partial^k \bar{h}_{0m}) \\ &= \partial_i (\partial^j \bar{h}_{0j}) + \varepsilon_{nik} \varepsilon^{nmj} \partial_j (\partial^k \bar{h}_{0m}) \\ &= \partial_i (\partial^j \bar{h}_{0j}) + \varepsilon_{nik} \partial^k (\varepsilon^{nmj} \partial_j \bar{h}_{0m}) \end{aligned}$$

(onde $\varepsilon_{nik} \varepsilon^{nmj} = \delta_i^m \delta_k^j - \delta_i^j \delta_k^m$) e a condição de Gauge, as equações de campo se tornam:

$$\partial_0 (-\partial_i \bar{h}^i_0) + \partial_i (\partial^i \bar{h}_{00}) = -2\kappa T_{00} \quad (2.41)$$

$$\partial_0 (\partial^0 \bar{h}_{0i}) + \partial_i (\partial^j \bar{h}_{0j}) + \varepsilon_{nik} \partial^k (\varepsilon^{nmj} \partial_j \bar{h}_{0m}) = -2\kappa T_{0i} \quad (2.42)$$

Novamente, usando a condição de Gauge na segunda equação leva a

$$\partial_i (\partial^i \bar{h}_{00} - \partial_0 \bar{h}^i_0) = -2\kappa T_{00} \quad (2.43)$$

$$\partial_0 (\partial^0 \bar{h}_{0i}) + \partial_i (-\partial_0 \bar{h}^{00}) + \varepsilon_{nik} \partial^k (\varepsilon^{nmj} \partial_j \bar{h}_{0m}) = -2\kappa T_{0i} \quad (2.44)$$

Dessa maneira:

$$\partial_i \left(-\frac{1}{2} \partial^i \bar{h}_{00} + \frac{1}{2} \partial_0 \bar{h}^i_0 \right) = \kappa T_{00} \quad (2.45)$$

$$-\partial_0 \frac{1}{2} \left(-\partial_i \bar{h}^{00} + \partial^0 \bar{h}_{0i} \right) - \varepsilon_{nik} \partial^k \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{nmj} \partial_j \bar{h}_{0m} \right) = \kappa T_{0i} \quad (2.46)$$

2.1.2 Campos gravitoeletromagnéticos

Definindo o potencial gravitoeletrico (Φ) e o potencial vetor gravitomagnético (A^i) e a densidade de carga gravitacional (ρ) e a corrente (j_i) de acordo com (MOORE, 2015)

$$\Phi \equiv -\frac{c^2 \bar{h}_{00}}{4}, \quad (2.47)$$

$$A^i \equiv -\frac{c^2 \bar{h}_0^i}{4}, \quad (2.48)$$

$$\rho \equiv \frac{T_{00}}{c^2}, \quad (2.49)$$

$$j_i \equiv \frac{T_{0i}}{c}, \quad (2.50)$$

que substituindo em (2.45) e (2.46), teremos

$$\begin{cases} \partial_i (2\partial^i \Phi - 2\partial_0 A^i) = c^4 \kappa \rho \\ -\partial_0 (2\partial_i \Phi - 2\partial^0 A_i) - 2\varepsilon_{nik} \partial^k (\varepsilon^{nmj} \partial_j A_m) = c^3 \kappa j_i \end{cases}$$

Agora, com as seguintes definições para os campos gravitoeletrico (E^i) e gravitomagnético (B^i):

$$E^i \equiv -\partial^i \Phi + \partial_0 A^i, \quad (2.51)$$

$$B^n \equiv \varepsilon^{njm} \partial_j A_m, \quad (2.52)$$

encontramos

$$\begin{cases} \partial_i E^i = -4\pi G \rho \\ \partial_0 E_i - \varepsilon_{ink} \partial^k B^n = \frac{4\pi G}{c} j_i \end{cases}$$

ou simplesmente, as quatro equações gravitomagnéticas em unidades CGS (gaussiano), ficam:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -4\pi G \rho_m \quad (2.53)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{4\pi G}{c} \mathbf{J}_m + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.54)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.55)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (2.56)$$

E as equações de Maxwell no vácuo no sistema de unidades CGS (gaussiano) são:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_c, \quad (2.57)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_c + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.58)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.59)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.60)$$

i.e. com a mudança de $\rho_c \rightarrow -G\rho_m$ e $\mathbf{J}_c \rightarrow -G\mathbf{J}_m$, as equações de Maxwell se tornam as equações gravitomagnéticas, onde ρ_m e \mathbf{J}_m são a densidade de massa-energia e \mathbf{J}_m a corrente de massa, dada por: $\mathbf{J}_m = \rho_m \mathbf{v}$ e o sinal negativo denota a natureza atrativa da gravitação.

2.1.3 Força de Lorentz Gravitomagnética

Agora, vamos encontrar a expressão para a força de Lorentz gravitomagnética, para isso partiremos das equações geodésicas, que são:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (2.61)$$

Na aproximação de campo fraco,

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma} (\partial_\rho h_{\nu\sigma} + \partial_\nu h_{\rho\sigma} - \partial_\sigma h_{\rho\nu}) \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (2.62)$$

De onde se obtém:

$$\frac{d^2 x^0}{ds^2} + \frac{1}{2}\eta^{00} (\partial_\rho h_{\nu 0} + \partial_\nu h_{\rho 0} - \partial_0 h_{\rho\nu}) \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (2.63)$$

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \frac{1}{2}\eta^{ij} (\partial_\rho h_{\nu j} + \partial_\nu h_{\rho j} - \partial_j h_{\rho\nu}) \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (2.64)$$

Analizando Eq.(2.64):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \frac{1}{2}\eta^{ij} (\partial_\rho h_{\nu j} + \partial_\nu h_{\rho j} - \partial_j h_{\rho\nu}) \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \\ &= \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \frac{1}{2}\eta^{ij} (\partial_0 h_{0j} + \partial_0 h_{0j} - \partial_j h_{00}) \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^0}{ds} \\ &\quad + \frac{1}{2}\eta^{ij} (\partial_0 h_{kj} + \partial_k h_{0j} - \partial_j h_{0k}) \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^k}{ds} \\ &\quad + \frac{1}{2}\eta^{ij} (\partial_k h_{0j} + \partial_0 h_{kj} - \partial_j h_{k0}) \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^0}{ds} \\ &\quad + \frac{1}{2}\eta^{ij} (\partial_k h_{mj} + \partial_m h_{kj} - \partial_j h_{km}) \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^m}{ds} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \frac{1}{2} \eta^{ij} (2\partial_0 h_{0j} - \partial_j h_{00}) \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^0}{ds} \\
&\quad + \eta^{ij} (\partial_0 h_{kj} + \partial_k h_{0j} - \partial_j h_{0k}) \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^k}{ds} \\
&\quad + \frac{1}{2} \eta^{ij} (\partial_k h_{mj} + \partial_m h_{kj} - \partial_j h_{km}) \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^m}{ds}
\end{aligned}$$

Substituindo $h_{\mu\nu}$ por $\bar{h}_{\mu\nu}$ (Eq.(2.33)),

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \frac{1}{2} \eta^{ij} \left(2\partial_0 \bar{h}_{0j} - \frac{1}{2} \partial_j \bar{h}_{00} \right) \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^0}{ds} \\
&\quad + \eta^{ij} \left(-\frac{1}{2} \eta_{kj} \eta^{00} \partial_0 \bar{h}_{00} + \partial_k \bar{h}_{0j} - \partial_j \bar{h}_{0k} \right) \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^k}{ds} \\
&\quad + \frac{1}{2} \eta^{ij} (\partial_k h_{mj} + \partial_m h_{kj} - \partial_j h_{km}) \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^m}{ds}
\end{aligned}$$

2.1.3.1 Limite não-relativístico

Agora, o limite não-relativístico da última equação será analisado. Neste caso,

$$\begin{aligned}
\frac{dx^0}{ds} &\approx 1, \\
\frac{dx^k}{ds} \frac{dx^m}{ds} &\approx 0.
\end{aligned}$$

A primeira condição implica $\frac{dx^k}{ds} \approx \frac{dx^k}{dx^0}$, $\frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{d^2 x^i}{d(x^0)^2}$ a segunda simplifica alguns termos

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2 x^i}{d(x^0)^2} + \frac{1}{2} \eta^{ij} \left(2\partial_0 \bar{h}_{0j} - \frac{1}{2} \partial_j \bar{h}_{00} \right) \\
&\quad + \eta^{ij} \left(-\frac{1}{2} \eta_{kj} \eta^{00} \partial_0 \bar{h}_{00} + \partial_k \bar{h}_{0j} - \partial_j \bar{h}_{0k} \right) \frac{dx^k}{dx^0}
\end{aligned}$$

2.1.3.2 Campos estáticos

A segunda aproximação que é necessária é a condição que o campo gravitacional é estático (portanto as derivadas no tempo serão nulas), então a equação geodesica para uma partícula se movendo com velocidade não-relativística, se torna:

$$0 = \frac{d^2 x^i}{d(x^0)^2} + \eta^{ij} \left(-\frac{1}{4} \partial_j \bar{h}_{00} \right) + \eta^{ij} (\partial_k \bar{h}_{0j} - \partial_j \bar{h}_{0k}) \frac{dx^k}{dx^0}, \quad (2.65)$$

Substituindo as definições dos potenciais e campos, teremos

$$-\frac{d^2 x^i}{d(x^0)^2} = \frac{1}{c^2} \partial^i \Phi + \frac{4}{c^2} \eta^{ij} (\partial_j A_k - \partial_k A_j) \frac{dx^k}{dx^0}. \quad (2.66)$$

Recuperando a identidade $\varepsilon_{njk}\varepsilon^{nim} = \delta_j^i\delta_k^m - \delta_j^m\delta_k^i$ segue que $\varepsilon_{njk}B^n = \partial_j A_k - \partial_k A_j$. Dessa maneira,

$$-\frac{d^2x^i}{d(x^0)^2} = -\frac{E^i}{c^2} + \frac{4}{c^2}\eta^{ij}\varepsilon_{jkn}\frac{dx^k}{dx^0}B^n \quad (2.67)$$

onde foi usado $x^0 = ct$. Multiplicando os dois lados pela massa da partícula, chega-se a:

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = m\mathbf{E} + 4m\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}, \quad (2.68)$$

ou

$$F = m(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times 4\mathbf{B}) \quad (2.69)$$

Novamente temos o análogo à força de Lorentz do eletromagnetismo exceto pelo fato que a carga q é substituída pela massa m e a força possui um fator quatro que difere do eletromagnetismo.

2.2 Efeito Lense-Thirring

O efeito gravitomagnético mais famoso é o efeito Lense-Thirring (HERBERT, 2005), o qual é observado quando consideramos um corpo teste no campo de uma distribuição de matéria em rotação. Esse efeito foi descoberto em 1918 pelos físicos austríacos Has Thirring e Josef Lense e por homenagem a eles ficou conhecido como efeito Lense-Thirring. O efeito LT consegue prever a precessão do eixo de um giroscópio próximo a um corpo em rotação como pode ser visto em (J. Lense H. Thirring, 1984), (CIUFOLINI *et al.*, 1997), (CIUFOLINI, 2004) e (MURPHY, 2009).

O arraste de sistemas inerciais está intimamente relacionado com a existência do campo gravitomagnético descrito na seção 2.1.2. Sendo assim, considerando a analogia da gravitação e do eletromagnetismo, um objeto com simetria esférica e com rotação produz um campo magnético dipolar no seu exterior (MOORE, 2015):

$$\mathbf{B} = -\frac{G}{r^3}[3(\boldsymbol{\mu}_g \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\mu}_g], \quad (2.70)$$

onde $\boldsymbol{\mu}_g$ é o momento de dipolo gravitomagnético total do objeto, \mathbf{r} é a distância do objeto ao ponto onde o campo será analisado e $\hat{\mathbf{r}}$ é um vetor unitário apontando na direção \mathbf{r} . Por analogia, o campo gravitomagnético produzido por uma estrela ou planeta esféricos com momento angular de spin total \mathbf{S} é

$$\mathbf{B} = -\frac{G}{r^3}[3(\boldsymbol{\mu}_g \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\mu}_g] = \frac{G}{2cr^3}[\mathbf{S} - 3(\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}], \quad (2.71)$$

onde o fator 2 vem de $\boldsymbol{\mu}_g = \frac{1}{2c}\mathbf{S}$ (como mostraremos no próximo capítulo) e o sinal de menos vem da inversão do campo gravitomagnético em comparação com o análogo campo magnético. Podemos usar isso para estimar a magnitude e direção do efeito de Lense - Thirring perto de um corpo em rotação de interesse (MOORE, 2015).

Na próxima seção vamos apresentar o experimento designado para medir esse efeito e outros provenientes da teoria da relatividade geral, chamados testes clássicos.

2.3 Gravity Probe B

No dia 20 de abril de 2004, a NASA lançou a missão Gravity Probe B (NASA, 2015a), (MOORE, 2015) que levou ao espaço um experimento para testar a Teoria da Relatividade Geral de Einstein, mais especificamente o experimento buscava testar dois efeitos previstos pela teoria, a distorção fig.(2.1) e o arraste do espaço fig.(2.2). O primeiro efeito é causado pela distribuição de massa e o segundo é provocado pelo movimento da massa.

Para medir o efeito de arreste (ou efeito Lense-Thirring) e o efeito geodésico (ou efeito

FIGURA 2.1 – Representação da distorção do espaço-tempo ao redor da Terra. Fonte: Figura extraída da referência (NASA, 2015a)

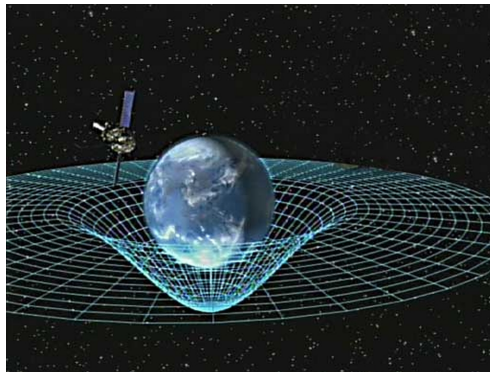
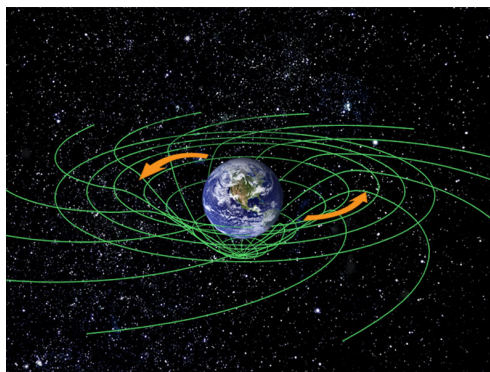


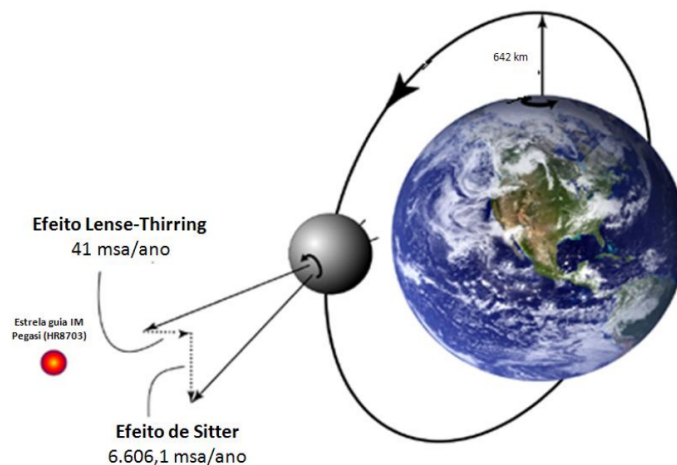
FIGURA 2.2 – Representação do arraste provocado no espaço-tempo pela rotação da Terra. Fonte: Figura extraída da referência (NASA, 2015a)



de Sitter) a sonda levou quatro giroscópios precisos, cada um consistido de uma esfera

de quartzo quase perfeita eletrostaticamente suspensa numa câmara. Os eixos de rotação dos giroscópios foram cuidadosamente monitorizados em relação a direção de uma estrela guia. A estrela escolhida foi a IM Pegasi, ou HR8703, na constelação de Pegasus, e a cerca de 300 anos-luz de nós. Trata-se de um sistema binário (duas estrelas orbitando um centro de massa comum), e as razões para essa escolha foram sua posição próxima ao equador celeste ser brilhante o suficiente para ser observada pelo telescópio da missão e seu brilho utilizado como referência, e por seu movimento ser bem conhecido, devido a ser esse sistema uma forte fonte de ondas de rádio. Os dois efeitos previstos em relação à estrela IM Pegasi estão apresentados na Fig.(2.3).

FIGURA 2.3 – Representação esquemática da precessão LT (horizontal) e da precessão de Sitter (vertical). Fonte: Figura adaptada da referência (EVERITT *et al.*, 2011)



De modo esquemático o Gravity Probe B, consiste em:

- Colocar quatro giroscópios e um telescópio orbitando em um satélite no pólo da Terra, cerca de 642 km acima da Terra.
- No início do experimento alinhar o telescópio e o eixo do spin de cada giroscópio com o ponto de referência, que no caso é a estrela guia IM Pegasi.
- Manter o telescópio alinhado com a estrela guia durante um ano, enquanto o veículo espacial realiza 5.000 órbitas ao redor da Terra, e medir a mudança no alinhamento do eixo de rotação de cada giroscópio ao longo deste período, tanto no plano da órbita (a precessão geodésica) e ortogonalmente no plano de rotação da Terra (precessão de Lense-Thirring).

O GPB é o segundo experimento da NASA para testar a Relatividade Geral. O primeiro, Gravity Probe A, estudou o efeito do campo gravitacional sobre as medidas de tempo usando relógios de hidrogênio. Esse experimento, o redshift gravitacional, foi o primeiro teste da gravitação proposto por Einstein e é conhecido como um dos três testes clássicos da Relatividade Geral.

A existência do redshift gravitacional decorre do princípio da equivalência, de modo que um relógio em um campo gravitacional é indistinguível de outro relógio idêntico em um referencial acelerado. A primeira medida precisa do redshift gravitacional, 1% de precisão, foi realizada por Robert Pound e Glen Rebka, em 1960, usando dois relógios atômicos em movimento vertical na torre da Universidade de Havard. O teste do redshift gravitacional mais preciso foi realizado por Vessot (VESSOT *et al.*, 1980) em 1976.

A Sonda Gravidade A comparou o tempo decorrido em dois relógios de hidrogênio idênticos, um na Terra e o outro viajando por aproximadamente duas horas em um foguete. O satélite do Gravity Probe A foi lançado no dia 18 de junho de 1976 a uma altitude de 10.000 km em uma trajetória aproximadamente vertical. Esse experimento confirmou a previsão do redshift gravitacional com uma precisão de 0,02%.

O principal objetivo do experimento GPB é detectar o efeito LT com alta precisão e cerca de 1% de erro. Após dezoito meses de análises dos dados, foram apresentados os primeiros resultados do experimento GBP, o efeito de Sitter era claramente visível nos giroscópios do GPB, confirmando as previsões de Einstein com uma precisão da ordem de 1,5% (EVERITT *et al.*, 2011), os pesquisadores do GBP explicaram que os desvios dos resultados esperados surgiram dos torques produzidos nos giroscópios (NASA, 2015a). Os resultados apresentados em setembro de 2009 mostram claramente a existência do efeito LT, o qual foi medido com precisão de 14%. Os sinais dos quatro giroscópios foram analisados independentemente e os resultados foram combinados e checados de várias maneiras (EVERITT *et al.*, 2011). Os resultados finais apresentados pelo GBP estão expostos na tabela (2.1), podemos perceber que os resultados da sonda Gravity Probe B foram altamente

TABELA 2.1 – Resultados da sonda GBP em unidades de milisegundos de arco por ano. Tabela adaptada da referência (EVERITT *et al.*, 2011)

Fonte	Efeito de Sitter (msa/ano)	Efeito Lense-Thirring (msa/ano)
Giroscópio 1	$-6.588,6 \pm 31,7$	$-41,3 \pm 24,6$
Giroscópio 2	$-6.707,0 \pm 64,1$	$-16,1 \pm 29,7$
Giroscópio 3	$-6.610,7 \pm 43,2$	$-25,0 \pm 12,1$
Giroscópio 4	$-6.588,7 \pm 33,2$	$-49,3 \pm 11,4$
Média	$-6.601,8 \pm 18,3$	$-37,2 \pm 7,2$
Previsão RG	$-6.606,1$	$-39,2$

satisfatórios e mostram claramente a existência do efeito LT. Esse foi o primeiro teste do efeito de arraste do espaço-tempo, mas o efeito da distorção por distribuição de massa já foi verificado em diversas outras observações astronômicas.

3 Gravitomagnetismo no Sistema Solar

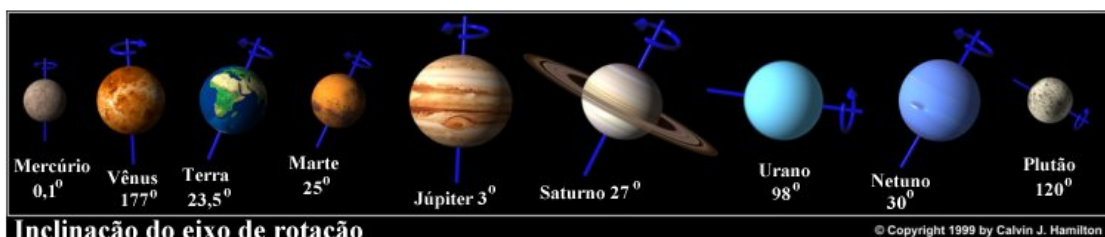
3.1 Sistema Solar

O Sistema Solar consiste de uma estrela mediana a qual chamamos Sol, oito planetas: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno. Ainda inclui os satélites dos planetas; numerosos cometas, asteróides, meteoritos e o meio interplanetário. O Sol é a mais rica fonte de energia eletromagnética (maior parte na forma de luz e calor) do Sistema Solar (NASA, 2015b).

O Sistema Solar como um todo faz parte de um disco espiral de 200 bilhões de estrelas, uma galáxia chamada Via Láctea. A Via Láctea por sua vez possui várias pequenas galáxias orbitando-a, as quais são visíveis do hemisfério sul. As duas principais são chamadas a Grande Nuvem de Magalhães e Pequena Nuvem de Magalhães. A mais próxima grande galáxia é a galáxia de Andrômeda, é uma galáxia espiral tal qual a Via Láctea, mas é quatro vezes mais massiva e está a dois milhões de anos-luz de distância.

Os planetas, a maioria dos satélites dos planetas e os asteróides giram em torno do Sol na mesma direção, em órbitas praticamente circulares. Quando olhado de cima do pólo norte solar para baixo, a órbita dos planetas está no sentido anti-horário. Os planetas orbitam o Sol em, ou próximos de um mesmo plano chamado a eclíptica. O eixo de rotação da maioria dos planetas está próximo da perpendicular da eclíptica, a exceção é Urano, que está muito inclinado para o lado, como podemos notar na fig.(3.1)

FIGURA 3.1 – Rotação no Sistema Solar. Figura extraída da referência (HAMILTON, 2016)



Nas tabelas (3.1) e (3.2) temos informações astronômicas do Sol e dos planetas que fazem parte do Sistema Solar.

TABELA 3.1 – Dados astronômicos de massa, raio equatorial e distância média do Sol para os planetas do Sistema Solar. Tabela extraída da referência (HAMILTON, 2016).

Planeta	Massa(kg)	Raio Equatorial (km)	Distância Média do Sol (km)
Sol	$1,980 \times 10^{30}$	695.000	-
Mercúrio	$3,303 \times 10^{23}$	2.439,7	57.910.000
Vênus	$4,869 \times 10^{24}$	6.051,8	108.200.000
Terra	$5,976 \times 10^{24}$	6.378,14	149.600.000
Marte	$6,421 \times 10^{23}$	3.397,2	227.940.000
Júpiter	$1,900 \times 10^{27}$	71.492	778.330.000
Saturno	$5,688 \times 10^{26}$	60.268	1.429.400.000
Urano	$8,686 \times 10^{25}$	25.559	2.870.990.000
Netuno	$1,024 \times 10^{26}$	24.746	4.504.300.000

TABELA 3.2 – Dados astronômicos de período orbital e velocidade média dos planetas do Sistema Solar. Tabela extraída da referência (HAMILTON, 2016).

Planeta	Período Orbital (dias)	Velocidade média (km/s)
Sol	27,000 (spin)	-
Mercúrio	87,969	47,87
Vênus	224,701	35,03
Terra	365,256	29,79
Marte	686,98	24,13
Júpiter	4.332,71	13,06
Saturno	10.759,71	9,64
Urano	30.685,15	6,81
Netuno	60.190,53	5,43

3.2 Abordagem Gravitomagnética

Até aqui estudamos a concepção do GM das equações de campo de Einstein com as devidas aproximações para chegarmos às equações do Tipo-Maxwell e Tipo-Lorentz Gravitomagnéticas. Agora, veremos uma aplicação do GM nas órbitas dos planetas do Sistema Solar.

O GM é esperado segundo a Teoria da Relatividade Geral de Einstein, quando um planeta, estrela, buraco negro ou algo massivo gira em seu próprio eixo, arrasta o espaço-tempo a sua volta, essa ação é chamada "frame dragging".

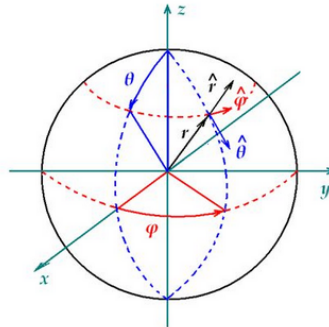
Alguns pesquisadores (CIUFOLINI, 2004), (IORIO *et al.*, 2011), (KARLSSON, 2006) dentre outros afirmam que o GM pode precessionar satélites em órbitas, e isso poderia fazer um giroscópio (por exemplo, o que está na órbita da Terra) balançar.

Tendo em mente os conceitos e formalismo GM, nesta seção calculamos o campo produzido por dois dipolos para medir a influência que o Sol tem sobre Mercúrio, que é o planeta mais próximo ao Sol do Sistema Solar, levando em consideração o campo gravitomagnético que o Sol e Mercúrio produzem ao girarem em torno de si mesmos, para então inferir se essa força influencia o avanço do periélio de Mercúrio. Além disso, calculamos a razão entre a força devido ao dipolo gravitomagnético do Sol atuando em cada planeta que orbita com sua velocidade orbital (para todos os planetas do Sistema Solar) e a força Gravitacional de Newton, para compararmos a intensidade de uma em relação à outra.

3.2.1 Momento de Dipolo Gravitomagnético

Nesta subseção, iremos calcular uma expressão para um momento de dipolo genérico. Para isso, consideraremos uma esfera com distribuição de massa uniforme, girando em seu próprio eixo com velocidade angular ω , como na figura a seguir,

FIGURA 3.2 – Esfera Girando em torno do seu próprio eixo com velocidade angular ω constante e suas coordenadas.



onde ϕ é o ângulo azimutal e θ é o ângulo zenital da esfera. As coordenadas x , y e z são:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.1)$$

Conforme (JACKSON, 1999), o potencial vetor devido a um dipolo gravitomagnético $\boldsymbol{\mu}_g$ é

$$\mathbf{A} = -G \frac{\boldsymbol{\mu}_g \times \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^3}. \quad (3.2)$$

Agora, vamos calcular o momento de dipolo gravitomagnético produzido por essa esfera. Nesta expressão o momento de dipolo devido a corrente de massa \mathbf{J}_g em torno do seu

próprio eixo pode ser escrita como

$$\boldsymbol{\mu}_g = \frac{1}{2c} \int \mathbf{r} \times \mathbf{J}_m d^3x, \quad (3.3)$$

o produto vetorial pode ser expresso como:

$$\boldsymbol{\mu}_g = \frac{1}{2c} \int (x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z) \times (-J_m \text{sen}\phi \hat{e}_x + J_m \text{cos}\phi \hat{e}_y) d^3x, \quad (3.4)$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\mu}_g = \frac{1}{2c} \int (xJ_m \text{cos}\phi \hat{e}_z + yJ_m \text{sen}\phi \hat{e}_z - zJ_m \text{sen}\phi \hat{e}_y - zJ_m \text{cos}\phi \hat{e}_x) d^3x, \quad (3.5)$$

Para respeitar o formalismo gravitomagnético, substituiremos a corrente de carga por uma corrente de massa em rotação com velocidade \mathbf{v} , portanto:

$$\mathbf{J}_m = \rho_m \mathbf{v} \quad (3.6)$$

onde, a velocidade pode ser escrita como,

$$\mathbf{v} = \omega r \text{sen}\theta \hat{e}_\phi, \quad (3.7)$$

como $\boldsymbol{\omega}$ na direção \hat{z} .

$$\mathbf{J}_m = \rho_m \omega r \text{sen}\theta \hat{e}_\phi, \quad (3.8)$$

Agora, aplicando transformação de coordenadas (3.1) e, substituindo a densidade obtida em (3.8), teremos:

$$\boldsymbol{\mu}_g = \frac{\rho_m \omega}{2c} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (r^4 \text{sen}^3\theta \text{cos}^2\phi \hat{e}_z + r^4 \text{sen}^3\theta \text{sen}^2\phi \hat{e}_z$$

$$+ r^4 \text{sen}^2\theta \text{cos}\theta \text{sen}\phi \hat{e}_y - r^4 \text{sen}^2\theta \text{cos}\theta \text{cos}\phi \hat{e}_x) dr d\theta d\phi \quad (3.10)$$

Onde, R é o raio da esfera. Agora, resolvendo a integral e utilizando a definição dos vetores \hat{e}_θ e \hat{e}_ϕ em função de $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$

$$\hat{e}_\theta = \text{cos}\theta \text{cos}\phi \hat{e}_x + \text{cos}\theta \text{sen}\phi \hat{e}_y - \text{sen}\theta \hat{e}_z \quad (3.11)$$

$$\hat{e}_r = \text{sen}\theta \text{cos}\phi \hat{e}_x + \text{sen}\theta \text{sen}\phi \hat{e}_y + \text{cos}\theta \hat{e}_z. \quad (3.12)$$

e portanto $\hat{e}_z = \text{cos}\theta \hat{e}_r - \text{sen}\theta \hat{e}_\theta$ obtemos,

$$\boldsymbol{\mu}_g = \frac{\rho_m \omega}{2c} \left(\frac{R^5}{5} \frac{4\pi}{3} + \frac{R^5}{5} \frac{4\pi}{3} \right) \hat{e}_z. \quad (3.13)$$

No caso de uma esfera homogênea,

$$\rho_m = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}, \quad (3.14)$$

Substituindo ρ_m e simplificando, obtemos (BIEMOND, 2004a):

$$\boldsymbol{\mu}_g = \frac{M\omega R^2}{5c} \hat{e}_z. \quad (3.15)$$

Onde M é a sua massa, R o raio e ω sua velocidade angular. Deste modo, o momento de dipolo gravitomagnético de uma esfera está relacionado diretamente com o spin dela por

$$\boldsymbol{\mu}_g = \frac{1}{2c} \mathbf{S}, \quad (3.16)$$

onde \mathbf{S} é o spin de uma esfera rígida e uniforme, rotacionando em torno do seu eixo com velocidade angular ω ,

$$\mathbf{S} = I\boldsymbol{\omega} = \frac{2}{5}MR^2\boldsymbol{\omega}$$

3.2.2 Campo Gravitomagnético

Nesta subseção, vamos calcular o campo de dipolo gravitomagnético dado por este momento de dipolo $\boldsymbol{\mu}_g$. No caso estacionário o campo gravitomagnético induzido \mathbf{B} pode ser calculado a partir de:

$$\nabla \times \mathbf{B} = -4\pi c^{-1} G \rho_m \mathbf{v} \quad \text{e} \quad (3.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.18)$$

Segundo (FRENKEL, 1996), o termo dominante na expansão de multipolos magnéticos do potencial vetor pode ser expresso em termos do momento de dipolo $\boldsymbol{\mu}_g$ como:

$$\mathbf{A} = -G \frac{\boldsymbol{\mu}_g \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (3.19)$$

O campo magnético devido ao dipolo $\boldsymbol{\mu}_g$ pode ser calculado pelo rotacional de (3.19)

$$\nabla \times \mathbf{A} = -\nabla G \times \left[\frac{(\boldsymbol{\mu}_g \times \mathbf{r})}{r^3} \right] \quad (3.20)$$

De tal modo que teremos,

$$\nabla \times \mathbf{A} = -G \left[\nabla \frac{1}{r^3} \times (\boldsymbol{\mu}_g \times \mathbf{r}) + \frac{1}{r^3} \nabla \times (\boldsymbol{\mu}_g \times \mathbf{r}) \right] \quad (3.21)$$

Agora, usando a identidade vetorial (A.7) e tendo em vista o operador ∇ não atua sobre $\boldsymbol{\mu}_g$ e que $(\boldsymbol{\mu}_g \cdot \nabla)\mathbf{r} = \boldsymbol{\mu}_g$ (FRENKEL, 1996). Obtemos assim:

$$\nabla \times \mathbf{A} = -G \left[-\frac{3\hat{r}}{r^4} \times (\boldsymbol{\mu}_g \times \mathbf{r}) + \frac{2\boldsymbol{\mu}_g}{r^3} \right] \quad (3.22)$$

Como: $\mathbf{r} = |r|\hat{r}$, então:

$$\nabla \times \mathbf{A} = -G \left[-\frac{3\mathbf{r}}{r^5} \times (\boldsymbol{\mu}_g \times \mathbf{r}) + \frac{2\boldsymbol{\mu}_g}{r^3} \right] \quad (3.23)$$

Agora, aplicando a identidade (A.2), teremos:

$$\nabla \times \mathbf{A} = -G \left[-\frac{3}{r^5} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\mu}_g - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\mu}_g)\mathbf{r} - \frac{2}{3}\boldsymbol{\mu}_g r^2] \right] \quad (3.24)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = -G \left[\frac{1}{r^5} [3(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\mu}_g)\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu}_g r^2] \right] \quad (3.25)$$

E, como $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, teremos:

$$\mathbf{B} = -\frac{G}{r^5} [3(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\mu}_g)\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu}_g r^2] \quad (3.26)$$

Que é o campo dipolar gravitomagnético à uma distância $r > R$. Para o Sol, os componentes do vetor \mathbf{B}_\odot em coordenadas esféricas, ou seja, r , θ e ϕ , são dados por (BIEMOND, 2012):

$$\mathbf{B}_{\odot,r} = -G \frac{2\mu_\odot \cos\theta}{r^3} \hat{e}_r, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{B}_{\odot,\theta} = -G \frac{\mu_\odot \sin\theta}{r^3} \hat{e}_\theta \quad (3.28)$$

$$\mathbf{B}_{\odot,\phi} = 0 \hat{e}_\phi \quad (3.29)$$

Onde \hat{e}_r , \hat{e}_θ e \hat{e}_ϕ são vetores unitários, μ_\odot é o módulo do momento de dipolo do Sol e \mathbf{r} é o vetor posição do Sol ao Planeta.

3.2.3 Potencial e Força de interação entre dipolos

Agora, nessa subseção, calcularemos o potencial gravitomagnético para podermos calcular a expressão para a força de interação entre dipolos. Para isso, usamos a expressão para a energia potencial de um dipolo no campo gravitomagnético \mathbf{B}

$$U = -4(\boldsymbol{\mu}_p \cdot \mathbf{B}_\odot), \quad (3.30)$$

Onde, $\boldsymbol{\mu}_p$ é o momento de dipolo do planeta e o fator quatro vem do GM onde mostramos que o efeito \mathbf{B}_g é quatro vezes maior que o campo \mathbf{B} eletromagnético.

Fazendo,

$$\boldsymbol{\mu}_p = \frac{M_p \omega_p R_p^2}{5c} \hat{e}_z = K_p \hat{e}_z, \quad (3.31)$$

e

$$\boldsymbol{\mu}_\odot = \frac{M_\odot \omega_\odot R_\odot^2}{5c} \hat{e}_z = K_\odot \hat{e}_z, \quad (3.32)$$

o potencial se torna:

$$U = -G \left[-\frac{4K_p K_\odot}{r^3} (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right], \quad (3.33)$$

onde usamos as expressões (3.26) e (3.29) e r é a distância média orbital entre o Sol e o planeta. A força entre dipolos é dada por:

$$\mathbf{F}_d = -\nabla U = -G \left[-\frac{12K_p K_\odot}{r^4} (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \hat{e}_r - \frac{4K_p K_\odot}{r^4} (6 \cos \theta \sin \theta) \hat{e}_\theta \right].$$

Considerando que no plano da órbita temos $\theta = \frac{\pi}{2}$, teremos então a força de interação entre dipolos, que é:

$$\mathbf{F}_d = -G \frac{12K_p K_\odot}{r^4} \hat{e}_r. \quad (3.34)$$

Portanto, a força possui uma dependência no componente radial e além disso é uma força central atrativa. Agora, estamos aptos para calcular a relação entre as forças gravitomagnética e gravitacional.

Na tabela a seguir temos os dados do momento de dipolo, campo e força gravitomagnéticas no Sistema Solar. Podemos notar que os dados para o momento de dipolo do

TABELA 3.3 – Dados dos módulos do momento de dipolo μ , campos B e forças gravitomagnéticas F para os planetas do Sistema Solar.

Planeta	$\mu_g(gcm)$	$B(cms^{-2})$	$F_d(dinas)$
Sol	$1,70 \times 10^{38}$	-	-
Mercúrio	$1,08 \times 10^{26}$	$5,90 \times 10^{-8}$	$1,32 \times 10^7$
Vênus	$3,56 \times 10^{27}$	$9,10 \times 10^{-9}$	$3,60 \times 10^7$
Terra	$1,18 \times 10^{30}$	$3,42 \times 10^{-9}$	$3,24 \times 10^9$
Marte	$3,50 \times 10^{28}$	$9,68 \times 10^{-10}$	$1,78 \times 10^7$
Júpiter	$1,14 \times 10^{35}$	$2,43 \times 10^{-11}$	$4,26 \times 10^{11}$
Saturno	$2,35 \times 10^{34}$	$1,30 \times 10^{-12}$	$7,74 \times 10^9$
Urano	$3,70 \times 10^{32}$	$4,84 \times 10^{-13}$	$7,47 \times 10^6$
Netuno	$4,53 \times 10^{32}$	$1,25 \times 10^{-13}$	$1,51 \times 10^6$

Sol e dos planetas do Sistema Solar são consistentes, pois o momento de dipolo depende basicamente da massa do objeto, da velocidade angular e do quadrado do raio do objeto, o que justifica o fato de o maior momento de dipolo ser do Sol e o segundo maior ser o de

Júpiter visto serem os mais massivos e com maior raio como podemos ver na tabela (3.1). O campo de dipolo gravitomagnético decai com $1/r^3$, portanto a intensidade do campo de dipolo gerado pelo Sol diminui conforme a distância Sol-planeta aumenta e portanto coerente com a tabela (3.3). O fato do campo de dipolo GM dos planetas Vênus e Terra terem a mesma ordem de grandeza é devido a distância Sol-Terra não ser muito maior do que a distância Sol-Vênus e portanto não é suficiente para alterar a ordem de grandeza, o que não é o caso para os outros planetas.

Por fim a força de dipolo gravitomagnética depende do módulo dos momentos de dipolo do Sol e do planeta sobre a distância elevada à quarta, e apesar da distância Sol-Júpiter ser maior do que de alguns planetas, este planeta possui o maior momento de dipolo do Sistema Solar o que explica o fato dele possuir a maior força de dipolo.

Na Tab. (3.4), temos a razão da força de dipolo gravitomagnética (3.34) pela força

TABELA 3.4 – Razão entre a força de interação entre dipolos gravitomagnética F_d e força gravitacional F_{grav} para os planetas do Sistema Solar.

Planet	F_d/F_{grav}
Mercúrio	$1,02 \times 10^{-20}$
Vênus	$6,52 \times 10^{-21}$
Terra	$9,18 \times 10^{-19}$
Marte	$1,10 \times 10^{-19}$
Jupiter	$1,03 \times 10^{-17}$
Saturno	$2,10 \times 10^{-18}$
Urano	$5,37 \times 10^{-20}$
Netuno	$2,27 \times 10^{-20}$

gravitacional, dada por:

$$F_{grav} = G \frac{M_{\odot} M_p}{r^2}. \quad (3.35)$$

Podemos perceber o quão menor é a força de interação dipolo-dipolo gravitomagnético quando comparada a força gravitacional, cerca de 10^{20} vezes menor. Os cálculos efetuados para compor as duas tabelas supracitadas estão presentes no apêndice (A).

3.3 Precessão do Periélio

Quando Einstein publicou sua teoria da relatividade geral em 1916, um dos grandes anúncios foi a explicação da anômala precessão do periélio do planeta Mercúrio, um quebra-cabeça que tinha incomodado astrônomos desde os anos 1850. Observações astronômicas cuidadosas demonstraram bem antes que com o tempo a elipse orbital de Mercúrio precessava. Até a década de 1850, porém, as pessoas assumiram que isso foi causado pelos efeitos gravitacionais dos outros planetas. A maior parte da precessão observada é explicada na verdade desta maneira, mas uma vez que todos os efeitos fo-

ram contabilizados, uma pequena quantidade permaneceu. O resultado mais moderno é $43,11 \pm 0,45$ arco-segundo/século, mas esse valor foi conhecido com uma incerteza em torno de $\pm 15\%$ desde de 1882 (MOORE, 2015). Einstein solucionou esse problema o que deu grande credibilidade à sua teoria. O propósito desta seção é demonstrar como a teoria da relatividade explica esse resultado clássico e se o gravitomagnetismo poderia também explicar esta precessão.

3.3.1 Cálculo de precessão usando relatividade geral

Nesta subseção vamos usar a equação da geodésica para explorar a trajetória de partículas no espaço-tempo de Shwarzchild, no qual assume-se que o Sol é esféricamente simétrico e estático. Segundo (MOORE, 2015) a equação da geodésica na forma mais adequada para nós é:

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) - \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}. \quad (3.36)$$

Agora, a métrica de Swarzhild é:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (3.37)$$

Comparando a equação acima com a equação geral da métrica $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, os componentes do tensor métrico de Schwarzschild são:

$$g_{tt} = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right), \quad g_{rr} = \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1}, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta. \quad (3.38)$$

Se tomarmos o componente μ da equação (3.36) como sendo igual a t , teremos:

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left(g_{t\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) - \frac{1}{2} \partial_t g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}, \quad (3.39)$$

a métrica de Schwarzschild é diagonal e independente do tempo, então:

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left(g_{tt} \frac{dt}{d\tau} \right) \rightarrow \text{constante} = -g_{tt} \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} \equiv e \quad (3.40)$$

A quantidade e é conservada ao longo de todas as trajetórias geodésicas no espaço-tempo de Schwarzschild. Ainda por (MOORE, 2015), podemos interpretar essa quantidade como sendo a energia relativística por unidade de massa que o objeto terá no infinito, pois se substituirmos $r = \infty$ na equação (3.40), e se reduz a $dt/d\tau = \gamma$, onde $\gamma = E/m_0 c^2$ é o

fator de Lorentz. Agora, fazendo μ da equação (3.36) igual a ϕ , teremos:

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left(g_{\phi\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) - \frac{1}{2} \partial_\phi g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}, \quad (3.41)$$

a métrica de Schwarzschild é diagonal e independente de ϕ , então:

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left(g_{\phi\phi} \frac{d\phi}{d\tau} \right) \rightarrow \text{constante} = g_{\phi\phi} \frac{d\phi}{d\tau} = r^2 \sin^2\theta \frac{d\phi}{d\tau} \equiv l, \quad (3.42)$$

a quantidade l também é conservada ao longo de todas as trajetórias geodésicas no espaço-tempo de Schwarzschild. Para uma trajetória no plano equatorial, $\sin^2\theta = 1$, então essa quantidade se reduz a $l = r^2(d\phi/d\tau)$, a qual pode ser interpretada como sendo o momento angular relativístico por massa.

Agora, se substituirmos os componentes da métrica da equação (3.38)

$$-1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu, \quad (3.43)$$

$$-1 = g_{tt} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + g_{rr} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + g_{\theta\theta} \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + g_{\phi\phi} \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2, \quad (3.44)$$

tomando estes resultados, substituindo na métrica e usando as equações (3.40) e (3.41), obtemos

$$1 = \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} e^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{l^2}{r^2}, \quad (3.45)$$

onde consideramos a órbita no plano equatorial ($\theta = \pi/2$). Portanto

$$\frac{1}{2}(e^2 - 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GMl^2}{r^3} \equiv E, \quad (3.46)$$

Esse resultado pode ser interpretado como equivalente à conservação da equação de energia $E = k + V(r)$, com

$$k \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 \quad (3.47)$$

sendo a “energia potencial radial” efetiva dada por,

$$V(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GMl^2}{r^3} \quad (3.48)$$

sendo o potencial efetivo dependente somente de r .

Desse modo, temos as equações a seguir, que são consequência da equação geodésica para órbitas equatoriais no espaço-tempo de Schwarzschild (MOORE, 2015), que acabamos de

deduzir

$$l = r^2 \frac{d\phi}{d\tau}, \quad (3.49)$$

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GMl^2}{r^3}, \quad (3.50)$$

onde l e E são constantes. O análogo às equações newtonianas são o mesmo exceto quando $\tau \rightarrow t$ e o último termo na equação (3.50) não aparece.

Podemos reformular estas equações para uma equação que descreve a forma de $r = r(\phi)$ do seguinte modo. Primeiramente podemos escrever

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi} \frac{l}{r^2}, \quad (3.51)$$

onde na última etapa, foi usado a equação (3.49). Se substituirmos (3.51) na equação (3.50), conseguiremos a forma diferencial da equação da órbita:

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 \frac{l^2}{r^4} - \frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GMl^2}{r^3}, \quad (3.52)$$

poderíamos integrar diretamente para encontrar $r(\phi)$, mas as equações se tornam muito mais fáceis de resolver se definirmos

$$u = 1/r \Rightarrow \frac{du}{d\phi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \Rightarrow \frac{dr}{d\phi} = -r^2 \frac{du}{d\phi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi}, \quad (3.53)$$

se substituirmos este resultado na equação (3.52), podemos eliminar todas as dependências em r . Se fizermos isso e aplicarmos Euler-Lagrange (THORNTON; MARION, 2004) com respeito a ϕ , obtemos:

$$\frac{d}{d\phi} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u} = 0, \quad (3.54)$$

ou seja,

$$l^2 \frac{d^2 u}{d\phi^2} - \left(GM - \frac{2l^2 u}{2} + GMl^2 3u^2 \right) = 0 \quad (3.55)$$

simplificando a expressão anterior, chegamos a

$$l^2 \frac{d^2 u}{d\phi^2} - GM + l^2 u - 3GMl^2 u^2 = 0. \quad (3.56)$$

Dividindo esta equação por l^2 , obtemos a equação da órbita:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{l^2} + 3GMu^2, \quad (3.57)$$

a equação newtoniana correspondente é a mesma, exceto, novamente, pelo último termo que não existe.

3.3.1.1 Cálculo de Perturbação

Não podemos resolver a equação (3.57) analiticamente, mas podemos usar uma abordagem conhecida como um cálculo de perturbação. Esta é uma técnica poderosa para a resolução de equações difíceis e que é frequentemente usada em Física.

Consideremos primeiro um órbita circular com raio constante r_c . O valor de $u_c = 1/r_c$ e deve satisfazer a equação (3.57), então temos

$$\frac{d^2 u_c}{d\phi^2} + u_c = \frac{GM}{l^2} + 3GMu_c^2. \quad (3.58)$$

Agora, considere uma perturbação nesta órbita que é ligeiramente não-circular. Definida como

$$u(\phi) = u_c + u_c \omega(\phi), \quad (3.59)$$

onde a função $\omega(\phi) \ll 1$. Conectando a equação (3.59) com a equação (3.57) e usando a equação (3.58) para eliminar alguns termos envolvendo u_c , obtemos

$$\frac{d^2 u_c}{d\phi^2} + \frac{d^2 \omega}{d\phi^2} u_c + \frac{d^2 u_c}{d\phi^2} \omega + 2 \frac{du_c}{d\phi} \frac{d\omega}{d\phi} + u_c + u_c \omega = \frac{GM}{l^2} + 3GM(u_c + u_c \omega)^2, \quad (3.60)$$

simplificando esta equação obtemos

$$\frac{d^2 \omega}{d\phi^2} + \omega = 3GMu_c \omega^2 + 6GMu_c \omega. \quad (3.61)$$

Como $\omega(\phi) \ll 1$ por hipótese, o segundo termo do lado direito será muito menor que o primeiro, então

$$\frac{d^2 \omega}{d\phi^2} + (1 - 6GMu_c)\omega \simeq 0. \quad (3.62)$$

Isso é formalmente o mesmo que a equação do oscilador harmônico $d^2 x/dt^2 + \omega_0^2 x = 0$ com a constante $(1 - 6GM/r_c)$ desempenhando o papel de ω_0^2 . Sabemos que a solução para o oscilador harmônico é $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta_0)$, onde A e θ_0 são constantes. Então por analogia, a solução da equação (3.62) será

$$\omega(\phi) = A \cos(\omega_0 \phi + \phi_0), \quad (3.63)$$

onde $\omega_0 \equiv \left(1 - \frac{6GM}{r_c}\right)^{1/2}$ e onde A e ϕ_0 são constantes.

A órbita do periélio ocorre quando $\omega(\phi)$ é mínimo, i.e. quando o argumento da função

coseno na equação (3.63) é $\pi + 2\pi n$. Sucessivos periélios ocorrem quando o argumento muda por 2π , que é, quando

$$\omega_0 \Delta\phi = \left(1 - \frac{6GM}{r_c}\right)^{1/2} \Delta\phi = 2\pi \quad (3.64)$$

$$\Delta\phi = \left(1 - \frac{6GM}{r_c}\right)^{-1/2} 2\pi \approx 2\pi \left(1 + \frac{3GM}{r_c}\right) = 2\pi + \frac{6\pi GM}{r_c} \quad (3.65)$$

onde no último passo usamos uma aproximação binomial, assumindo que r_c é grande o suficiente para que $GM/r_c \ll 1$. Isto implica que a coordenada angular após cada volta atingiu o periélio com $6\pi GM/r_c$ radianos a mais em relação ao periélio anterior. Quando aplicado para a órbita de Mercúrio, esse avanço do periélio é aproximadamente 43 arco-segundos por século.

3.3.2 Cálculo de precessão usando o potencial de dipolo-dipolo gravitomagnético

Nesta subseção, calcularemos o avanço do periélio adicionando a correção gravitomagnética, na qual assumiremos que o Sol e o planeta giram em torno dos seus eixos. Desse modo, teremos uma energia potencial efetiva dada por:

$$V(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{k}{r^3}. \quad (3.66)$$

onde, r é a distância do Sol ao planeta e k a constante que acompanha o potencial de dipolo gravitomagnético $k = \frac{4GK_p K_\odot}{M_p}$ dado pela expressão (3.33) com $\theta = \pi/2$. Note que na verdade incluímos a massa do planeta M_p na constante k do potencial devido a compatibilidade com o formalismo que estamos usando. A energia do sistema por massa do planeta é dada por:

$$\frac{E}{M_p} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{k}{r^3}, \quad (3.67)$$

e o momento angular L por massa do planeta M_p :

$$l = r^2 \frac{d\phi}{dt} \quad (3.68)$$

Analogamente à subseção anterior, vamos reformular estas equações para uma equação que descreve a forma de $r(\phi)$, de modo que,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} = \frac{dr}{d\phi} \frac{l}{r^2}, \quad (3.69)$$

se substituirmos (3.69) em (3.67), obtemos:

$$\frac{E}{M_p} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 \frac{l^2}{r^4} - \frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{k}{r^3}. \quad (3.70)$$

Fazendo uma mudança de variável,

$$u = \frac{1}{r} \longrightarrow \frac{du}{d\phi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \longrightarrow \frac{dr}{d\phi} = -r^2 \frac{du}{d\phi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi}, \quad (3.71)$$

e substituindo este resultado na equação da energia (3.67), obtemos:

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 l^2 - GMu + \frac{l^2}{2} u^2 - ku^3, \quad (3.72)$$

aplicando a lagrangiana $L = T - V$ e resolvendo as equações de movimento de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{d\phi} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u} = 0 \quad (3.73)$$

obtemos

$$l^2 \frac{d^2 u}{d\phi^2} - \left(GM - \frac{2l^2 u}{2} + 3ku^2 \right) = 0 \quad (3.74)$$

$$l^2 \frac{d^2 u}{d\phi^2} - GM + l^2 u - 3ku^2 = 0, \quad (3.75)$$

dividindo por l^2 , obteremos a equação da órbita:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{l^2} + \frac{3ku^2}{l^2}. \quad (3.76)$$

Similarmente a equação (3.57), essa equação corresponde a equação newtoniana, exceto pelo último termo. Vamos agora, aproximar essa equação para a de uma órbita circular,

$$\frac{d^2 u_c}{d\phi^2} + u_c = \frac{GM}{l^2} + \frac{3ku_c^2}{l^2} \quad (3.77)$$

na teoria da relatividade o termo $\frac{d^2 u_c}{d\phi^2}$ é zero, pois r não depende do ângulo ϕ , resolvendo agora perturbativamente, como já discutido anteriormente, consideraremos uma pequena perturbação na órbita circular, definida como:

$$u(\phi) = u_c + u_c \omega(\phi), \quad (3.78)$$

com $\omega(\phi) \ll 1$. De modo, que obtemos

$$\frac{d^2 u_c}{d\phi} + \frac{d}{d\phi} \left(\frac{d\omega}{d\phi} u_c + \frac{du_c}{d\phi} \omega \right) + u_c + u_c \omega = \frac{GM}{l^2} + \frac{3k}{l^2} (u_c + u_c \omega)^2 \quad (3.79)$$

obtemos

$$\frac{d^2 u_c}{d\phi^2} + \frac{d^2 \omega}{d\phi^2} u_c + \frac{d^2 u_c}{d\phi^2} \omega + 2 \frac{du_c}{d\phi} \frac{d\omega}{d\phi} + u_c + u_c \omega = \frac{GM}{l^2} + \frac{3k}{l^2} u_c^2 + \frac{3k}{l^2} u_c^2 \omega^2 + \frac{6k}{l^2} u_c^2 \omega, \quad (3.80)$$

analogamente u_c representa a órbita circular e portanto não varia em ϕ . Usando (3.77) para simplificar a expressão, obtemos

$$\frac{d^2 \omega}{d\phi^2} + \omega = + \frac{3k}{l^2} u_c^2 \omega^2 + \frac{6k}{l^2} u_c \omega. \quad (3.81)$$

Como $\omega \ll 1$, o termo em ω^2 pode ser desprezado, portanto:

$$\frac{d^2 \omega}{d\phi^2} + \omega = \frac{6k}{l^2} u_c \omega \quad (3.82)$$

ou,

$$\frac{d^2 \omega}{d\phi^2} + \left(1 - \frac{6k}{l^2} u_c \right) \omega \approx 0 \quad (3.83)$$

ou ainda,

$$\frac{d^2 \omega}{d\phi^2} + \left(1 - \frac{6k}{l^2 r_c} \right) \omega \approx 0. \quad (3.84)$$

Podemos assumir a mesma solução do oscilador harmônico adotada na subseção anterior, de modo que agora nossa constante será:

$$\omega_0 \equiv \left(1 - \frac{6k}{r_c l^2} \right)^{1/2}. \quad (3.85)$$

Do modo que assumimos o mesmo raciocínio anterior, obtemos

$$\Delta\phi = 2\pi + \frac{6\pi k}{r_c l^2} \quad (3.86)$$

Finalmente o avanço para os planetas do Sistema Solar podem ser calculados como

$$\Delta\phi_0 = \frac{6\pi k}{r_c l^2} = \frac{24\pi G M_\odot \omega_p \omega_\odot R_p^2 R_\odot^2}{25c^2 r_c l^2} \text{ radianos/revolução} \quad (3.87)$$

ou ainda,

$$\Delta\phi_0 = \frac{24\pi G K_\odot K_p}{M_p r_c l^2} \text{ radianos/revolução.} \quad (3.88)$$

Observe que para obtermos o avanço em arcosegundo por século temos que multiplicar por um fator de conversão $f = \frac{T_T}{T_p} \times 100 \times 206265$, onde T_T é o período da Terra e T_p é o período do respectivo planeta. De modo que para os planetas do Sistema Solar, temos:

TABELA 3.5 – Avanço da órbita no periélio $\Delta\phi_0$ dos planetas do Sistema Solar, usando como correção a interação entre dipolos GM.

Planeta	$\Delta\phi_0$ arcoseg/sec
Mercúrio	$1,49 \times 10^{-14}$
Vênus	$4,07 \times 10^{-15}$
Terra	$8,87 \times 10^{-16}$
Marte	$3,07 \times 10^{-17}$
Júpiter	$2,93 \times 10^{-17}$
Saturno	$9,95 \times 10^{-19}$
Urano	$5,48 \times 10^{-21}$
Netuno	$5,40 \times 10^{-22}$

Podemos notar pelos dados expostos na tabela (3.5) que a correção para o avanço do periélio para os planetas do Sistema Solar apresentada por meio da interação dipolo-dipolo é desprezível, e esses valores se devem ao fato de termos uma divisão pelo momento angular do planeta ao quadrado na expressão (3.88). Os cálculos efetuados para compor esta tabela estão no apêndice (A).

3.3.3 Cálculo de precessão considerando a força de Lorentz gravitomagnética

A expressão para a força de Lorentz gravitomagnética como já deduzida anteriormente é

$$F_L = 4M_p \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}. \quad (3.89)$$

Como \mathbf{v} e \mathbf{B} do dipolo no plano equatorial são perpendiculares a força de Lorentz GM é central e dada por

$$F_L = 4M_p \frac{vB}{c} \sin\theta = -4M_p \frac{vB}{c}, \quad (3.90)$$

onde usamos $\theta = -\pi/2$, pois o campo B e a velocidade são perpendiculares e agora o ângulo θ está girando no sentido anti-horário devido ao sentido do campo. Usando o B de dipolo gerado pelo Sol no planeta no plano equatorial (3.29)

$$\mathbf{B} = -\frac{GM_\odot\omega_\odot R_\odot^2}{5cr^3} \hat{e}_\theta, \quad (3.91)$$

substituindo o campo de dipolo (3.91), a força de Lorentz gravitomagnética fica

$$F_L = -4M_p \frac{v}{c} \frac{GM_\odot \omega_\odot R_\odot^2}{5cr^3}, \quad (3.92)$$

como o momento angular $L = M_p r v \sin\phi$ é conservado, e considerando que próximo ao periélio $\sin\phi \approx \pi/2$, então substituindo temos

$$F_L = -\frac{4GM_\odot \omega_\odot R_\odot^2 L}{5c^2 r^4} \quad (3.93)$$

como é uma força central $\mathbf{F}_L = F_L(r)\hat{e}_r$

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\frac{dU}{dr}\hat{e}_r \quad (3.94)$$

integrando,

$$\int_\infty^r \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_\infty^r \frac{dU}{dr} dr \quad (3.95)$$

então,

$$U = -\int_\infty^r \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_\infty^r -\frac{4GM_\odot \omega_\odot R_\odot^2 L}{5c^2 r^4} dr' \quad (3.96)$$

Que nos leva a um potencial do tipo,

$$U = -4 \frac{GM_\odot \omega_\odot R_\odot^2 L}{15c^2 r^3} \quad (3.97)$$

de modo que nosso potencial tem a forma

$$U = -\frac{\alpha}{r^3} \quad (3.98)$$

onde $\alpha = 4 \frac{GM_\odot \omega_\odot R_\odot^2 L}{15c^2}$. Agora, podemos calcular o avanço de modo análogo ao da subseção anterior escrevendo um potencial efetivo como

$$V(r) = -\frac{GM}{r} - \frac{\alpha'}{r^3} + \frac{l^2}{2r^2}, \quad (3.99)$$

sendo agora $\alpha' = 4 \frac{GM_\odot \omega_\odot R_\odot^2 l}{15c^2}$, onde $l = L/M_p$. Como o potencial tem a mesma dependência em r exatamente igual ao caso da interação dipolo-dipolo temos como resultado para o avanço usando a força de Lorentz gravitomagnética

$$\Delta\phi_0 = \frac{6\pi\alpha'}{r_c l^2} = \frac{24\pi G K_\odot}{3c r_c l} \text{ radianos/revolução} \quad (3.100)$$

Usando os dados para os planetas do Sistema Solar, o avanço é dado aproximadamente pelos valores da tabela abaixo

TABELA 3.6 – Avanço da órbita no periélio $\Delta\phi_0$ dos planetas do Sistema Solar, usando como correção a força de Lorentz GM.

Planeta	$\Delta\phi_0$ arcoseg/sec
Mercúrio	$1,40 \times 10^{-5}$
Vênus	$2,16 \times 10^{-6}$
Terra	$8,14 \times 10^{-7}$
Marte	$2,30 \times 10^{-7}$
Júpiter	$5,78 \times 10^{-9}$
Saturno	$9,33 \times 10^{-10}$
Urano	$1,15 \times 10^{-10}$
Netuno	$2,98 \times 10^{-11}$

Este cálculo está realizado no apêndice (A). Como podemos perceber, os resultados para os avanços das órbitas usando a força de Lorentz como correção fornece um resultado desprezível como era esperado, porém maior que os valores obtidos calculados pela interação de dipolo-dipolo gravitomagnético, sendo 10^9 vezes maior no caso de Mercúrio.

Esse valor superior se deve ao fato de que na expressão para o $\Delta\phi_0$ apresentada na equação (3.100) temos apenas dependência no momento de dipolo do Sol pelo momento angular do planeta, já na solução usando a interação de dipolo temos dependência nos momentos de dipolo do Sol e do planeta dividido pelo momento angular do planeta ao quadrado, e esse termo quadrático no momento angular é a causa do valor muito inferior da interação dipolo-dipolo comparado ao obtido usando a força de Lorentz gravitomagnética.

4 Conclusão

Nesta dissertação obtivemos as equações gravitoeletromagnéticas a partir das equações de campo de Einstein, aplicamos uma aproximação de campo fraco às equações de campo e definimos os campos gravitoeletrico e gravitomagnético para assim obtermos as equações GEM, mostrando assim sua similaridade com as equações de Maxwell do eletromagnetismo. Encontramos também a força de Lorentz GM a partir da equação da geodésica. Introduzimos o que foi a missão Gravity Probe B e vimos que os resultados obtidos por essa missão demonstram a existência do chamado efeito Lense-Thirring que é um efeito de precessão, mostrando assim que o GM pode causar precessão.

Nesta dissertação testamos a teoria gravitomagnética no Sistema Solar. Para isso fizemos cálculos de momento de dipolo genérico para uma esfera girando e calculamos o campo de dipolo GM que o Sol produz nos planetas, o potencial e a força de interação entre os dipolos do Sol e do planeta. Fizemos a razão da força de dipolo-dipolo GM pela força gravitacional de Newton e percebemos que a força de dipolo GM é muito menor que a gravitacional, da ordem de 10^{-20} menor.

Abordamos o anômalo avanço da órbita de Mercúrio e apresentamos a solução obtida pela relatividade geral na qual é usado a métrica de Schwarzschild, que considera o Sol estático e esférico. Vimos que com essa solução obtém-se um avanço de aproximadamente 43 arcoseg/século de acordo com o medido experimentalmente. Usamos a mesma solução perturbativa para calcular o avanço introduzindo uma solução obtida da interação de dipolos GM e da força de Lorentz GM, e obtivemos resultados muito menores, essencialmente desprezíveis. Contudo o efeito GM calculado pela força de Lorentz é cerca de $10^9 - 10^{11}$ vezes maior que o obtido pela interação de dipolo-dipolo.

Parte destes resultados já foram apresentados nas conferências XIII International Workshop on Hadron Physics e The Second ICRANet César Lattes Meeting e publicados recentemente (ROCHA *et al.*, 2015) e (ROCHA *et al.*, 2016).

Concluimos, como esperado pelas Leis de Kepler, que os efeitos gravitomagnéticos no Sistema Solar são desprezíveis e que as órbitas dos planetas em torno do Sol são bem descritas apenas pela força gravitoeletrica i.e. a força de gravitação de Newton. Como consequência deste resultado, também o avanço do periélio da órbita de Mercúrio em torno do Sol não pode ser explicado pelo gravitomagnetismo, sendo assim um efeito não

linear das equações de Einstein da gravitação. Isto, porque como mostramos, a explicação deste avanço pela relatividade geral utilizou a métrica não linear de Schwarzschild, sem qualquer aproximação de campo fraco.

O objetivo deste trabalho foi estudar melhor o formalismo gravitomagnético, sua origem e sua forma similar ao eletromagnetismo. Nesse aspecto concluímos que existem importantes diferenças, por exemplo: o campo \mathbf{B}_g gravitomagnético tem sinal oposto ao \mathbf{B} magnético e portanto, devemos usar a regra da mão esquerda ao invés da mão direita. Além disso, o campo \mathbf{B}_g dá origem à uma força que possui um fator quatro não esperado na analogia com o eletromagnetismo e a força de Lorentz gravitomagnética só é válida para campos gravitomagnéticos estáticos, o que não é o caso no eletromagnetismo.

Algumas dificuldades foram encontradas no decorrer deste trabalho, por exemplo, a bibliografia é muito escassa e confusa, o que gerou muitas discussões e controvérsias acerca das definições dos potenciais escalar e vetorial e dos campos gravitoeletromagnéticos consequentemente gerando diferentes maneiras de calcularmos a força de Lorentz gravitomagnética. De modo que adotamos como definição dos campos gravitoeletromagnéticos o análogo exato dos campos eletromagnéticos apenas substituindo ρ_c por $-G\rho_m$ e J_c por $-GJ_m$.

Como perspectiva deste trabalho observamos que os efeitos GM podem ser aplicados a outros sistemas, por exemplo, sistemas binários de estrelas de nêutrons ou de buracos negros, sistemas planetários mais massivos que o Sistema Solar entre outros, respeitando o critério de campo fraco o que implica campos longe destas fontes gravitacionais. O GM talvez também possa ser usado como uma tentativa de explicar a curva de rotação de galáxias sem a necessidade de inclusão de matéria escura. Uma outra possível aplicação do GM são os buracos negros supermassivos que acreditam-se haver nos centros das galáxias, estudando o movimento orbital das estrelas longe do buraco negro. Uma consequência do GM neste caso seria que tais buracos negros na realidade possam ser menos massivos.

Referências

BIEMOND, J. The magnetic field of pulsars and the gravito-magnetic theory. **ArXiv Astrophysics e-prints**, 2004.

BIEMOND, J. Which gravitomagnetic precession rate will be measured by Gravity Probe B? **ArXiv Physics e-prints**, 2004.

BIEMOND, J. The Gravitomagnetic Vector Potential and the Gravitomagnetic Field of a Rotating Sphere. **viXra**, n. 1, p. 18, 2012. Disponível em: <<http://vixra.org/abs/1205.0064>>.

CHASHCHINA, O.; IORIO, L.; SILAGADZE, Z. Elementary Derivation of the Lense-Thirring Precession. **Acta Physica Polonica B**, v. 40, p. 2363, 2009.

CIUFOLINI, I. Frame-dragging, gravitomagnetism and Lunar Laser Ranging. **New Astronomy**, Elsevier B.V., v. 15, n. 3, p. 332–337, 2010. ISSN 13841076. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.newast.2009.08.004>>.

CIUFOLINI, I.; KOPEIKIN, S.; MASHHOON, B.; RICCI, F. On the gravitomagnetic time delay. **Physics Letters A**, v. 308, p. 101–109, 2003.

CIUFOLINI, I.; LUCCHESI, D.; VESPE, F.; CHIEPPA, F. Measurement of gravitomagnetism. **Europhysics Letters (EPL)**, IOP Publishing, v. 39, n. 4, p. 359–364, aug 1997. ISSN 0295-5075. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0295-5075-/39/i=4/a=359?key=crossref.41b54f6c8a8f94ce884363f661244f15>>.

CIUFOLINI, P. A confirmation of the general relativistic prediction of the Lense-Thirring effect. **nature**, 2004.

D'INVERNO, R. **Introducing Einstein's Relativity**. Clarendon Press, 1992. ISBN 9780198596868. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=8nw5fIWhkI4C>>.

EVERITT, C. W. F.; DEBRA, D. B.; PARKINSON, B. W.; TURNEAURE, J. P.; CONKLIN, J. W.; HEIFETZ, M. I.; KEISER, G. M.; SILBERGLEIT, A. S.; HOLMES, T.; KOLODZIEJCZAK, J.; AL-MESHARI, M.; MESTER, J. C.; MUHLFELDER, B.; SOLOMONIK, V. G.; STAHL, K.; WORDEN, P. W.; BENCZE, W.; BUCHMAN, S.; CLARKE, B.; AL-JADAAN, A.; AL-JIBREEN, H.; LI, J.; LIPA, J. A.; LOCKHART, J. M.; AL-SUWAIDAN, B.; TABER, M.; WANG, S. Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity. **Physical Review Letters**, American

Physical Society, v. 106, n. 22, p. 221101, may 2011. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.221101>>.

FRENKEL, J. **Princípios de Eletrodinâmica Clássica**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1996. ISBN 85-314-0327-8.

HAMILTON, J. C. Views of the Solar System. 2016. Disponível em: <<http://solarviews.com/eng/homepage.htm>>.

HERBERT, P. **On the history of the so-called Lense-Thirring effect**. 2005. Disponível em: <<http://philsci-archive.pitt.edu/2681/>>.

IORIO, L.; LICHTENEGGER, H. I. M.; RUGGIERO, M. L.; CORDA, C. Phenomenology of the Lense-Thirring effect in the solar system. **Astrophysics and Space Science**, Springer, v. 331, n. 2, p. 351–395, 2011.

J. Lense H. Thirring, E. t.-t. b. B. M. F. W. H. D. S. T. **J. Lense, H. Thirring, Phys. Z. 19 (1918) 156 (English translation by B. Mashhoon, F. W. Hehl, D. S. Thesis, Gen. Rel. Grav. [S.l.], 1984. 16 p. (Technical Report LUTEDX/(TEAT-7150)/1-7/(2006), TEAT-711).**

JACKSON, J. D. **Classical electrodynamics**. 3rd ed.. ed. New York, {NY}: Wiley, 1999. ISBN 9780471309321.

KARLSSON, A. **A gravitomagnetic thought experiment for undergraduates**. [S.l.], 2006. 7 p. (Technical Report LUTEDX/(TEAT-7150)/1-7/(2006), TEAT-7150).

MASHHOON, B.; GRONWALD, F.; THEISS, D. On measuring gravitomagnetism via spaceborne clocks: a gravitomagnetic clock effect. **Annalen der Physik**, v. 511, p. 135–152, 1999.

MOORE, T. A. **A General Relativity Workbook**. Blurb, Incorporated, 2015. ISBN 9781320894395. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=BVxXrgEACAAJ>>.

MURPHY, T. W. Lunar Ranging, Gravitomagnetism, and APOLLO. **Space Science Reviews**, v. 148, n. 1, p. 217–223, 2009. ISSN 1572-9672. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s11214-009-9491-z>>.

NASA. Gravity Probe B: Testing Einstein's Universe. 2015. Disponível em: <<http://einstein.stanford.edu/MISSION/mission1.html>>.

NASA. **Mercury**. 2015. (http://www.nasa.gov/pdf/62215main_Mercury_Lithograph.pdf).

ROCHA, F.; MALHEIRO, M.; MARINHO, R. Gravitomagnetic correction for perihelion advance. v. 050010, p. 050010, 2015. Disponível em: <<http://scitation.aip.org/content/aip/proceeding/aipcp/10.1063/1.4937203>>.

ROCHA, F.; MALHEIRO, M.; MARINHO, R. On some Aspects of Gravitomagnetism and Correction for Perihelion Advance. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 706, p. 052014, 2016. ISSN 1742-6588. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1742-6596/706/i=5/a=052014?key=crossref.8e39164cbf4603f4c3dd28f6fdae57cc>>.

TAJMAR, M.; De Matos, C. Gravitomagnetic fields in rotating superconductors to solve tate's Cooper pair mass anomaly. **AIP Conference Proceedings**, v. 813, p. 1415–1420, 2006. ISSN 0094243X.

THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Classical Dynamics of Particles and Systems**. [S.l.]: Brooks/Cole, 2004. ISBN 9780534408961.

VESSOT, R. F. C.; LEVINE, M. W.; MATTISON, E. M.; BLOMBERG, E. L.; HOFFMAN, T. E.; NYSTROM, G. U.; FARREL, B. F.; DECHER, R.; EBY, P. B.; BAUGHER, C. R.; WATTS, J. W.; TEUBER, D. L.; WILLS, F. D. Test of Relativistic Gravitation with a Space-Borne Hydrogen Maser. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 45, n. 26, p. 2081–2084, 1980. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.45.2081>>.

WEINBERG, S. Cosmology. **Annals of Physics**, v. 54, p. 612, 2008.

Apêndice A - Programa WxMaxima

O Maxima é uma linguagem computacional que permite realizar cálculos numéricos e simbólicos, representações gráficas e efectuar programação, possuindo uma grande variedade de comandos para os mais variados fins em Matemática e aplicações. É um software de livre acesso, disponível para os sistemas operativos usuais.

O código Maxima utilizado nesta dissertação começa na página a seguir.

```
(%i88) reset ()$kill(all)$
```

```
(%i11) G:6.67e-8 /* constante gravitacional */;
M:1.98e33 /* massa do sol */;
Ts:27*24*60*60 /* periodo sol */;
ws:2*%pi/Ts,numer /* frequencia angular sol */;
rs:695e8 /* raio do sol*/;
m:3.30e26 /* massa reduzida */;
Tm:87.9*24*60*60 /* periodo mercurio */;
wm:2*%pi/Tm,numer /* frequencia angular mercurio */;
r1: 57910e8 /* distancia sol-mercurio */;
rm:2439.7e5 /*raio de mercurio*/;
c:299792458e2;
Tterra:1*24*60*60;
```

```
(%o1) 6.67 10-8
```

```
(%o2) 1.98 1033
```

```
(%o3) 2332800
```

```
(%o4) 2.693409339497422 10-6
```

```
(%o5) 6.95 1010
```

```
(%o6) 3.3 1026
```

```
(%o7) 7594560.0000000002
```

```
(%o8) 8.273271008695152 10-7
```

```
(%o9) 5.791 1012
```

```
(%o10) 2.4397 108
```

```
(%o11) 2.99792458 1010
```

```
(%o12) 86400
```

Cálculo para Mercúrio usando dipolo-dipolo

```
(%i13) musol:M*ws*rs^2/(5*c);
```

```
(%o13) 1.718487802316407 1038
```

```
(%i14) muplaneta:m*wm*rm^2/(5*c);
```

```
(%o14) 1.084109963470641 1026
```

```
(%i15) B:-G*musol/(r1^3);
```

```
(%o15) 5.90216835152102 10-8
```



```

(%i16) F:12*G*musol*muplaneta/r1^4;
(%o16) 1.325905615465038 107

(%i17) Frazao:F/(G*M*m/r1^2);
(%o17) 1.020269198650082 10-20

(%i18) l:m*r1^2*wm;
(%o18) 9.155842653346911 1045

(%i19) avanco:6*pi*4*G*muplaneta*musol*m/(r1*(1)^2)
*Tterra/Tm*100*206265, numer;
(%o19) 1.494538605917857 10-14
Mercúrio usando força de Lorentz GM

(%i20) deltaphi0:6*pi*4*G*musol*m/(3*c*l*r1)
*Tterra/Tm*100*206265, numer;
(%o20) 1.403428090699842 10-5
Cálculo para vênus. Momento de dipolo para o sol já calculado

(%i21) mvenus:4.87e27;
(%o21) 4.87 1027

(%i22) raiodevenus:6.05e8;
(%o22) 6.05 108

(%i23) r1venus:1.08e13;
(%o23) 1.08 1013

(%i24) Tvenus:243.0187*24*60*60;
(%o24) 2.099681568 107

(%i25) wvenus:2*pi/Tvenus, numer;
(%o25) 2.992446760945985 10-7

(%i26) muplanetavenus:mvenus*wvenus*raiodevenus^2/(5*c);
(%o26) 3.558569366036878 1027

```

```

(%i27) B: -G*musol/(rivenus^3);
(%o27) 9.099154125268664 10-9

(%i28) F: 12*G*musol*muplanetavenus/rivenus^4;
(%o28) 3.597774569669907 107

(%i29) Frazao: F/(G*M*mvenus/rivenus^2);
(%o29) 6.524713901625161 10-21

(%i30) lvenus: mvenus*rivenus^2*wvenus;
(%o30) 1.699819882258122 1047

(%i31) avanco: 6*pi^4*G*muplanetavenus*musol*mvenus/(rivenus*(lvenus)^2)
          *Tterra/Tvenus*100*206265, numer;
(%o31) 4.073747266631488 10-15
Vênus usando força de Lorentz

(%i32) deltaphi0: 6*pi^4*G*musol*mvenus/(3*c*lvenus*rivenus)
          *Tterra/Tvenus*100*206265, numer;
(%o32) 2.163613055482989 10-6
Cálculo para Terra

(%i33) mterra: 5.976e27;
(%o33) 5.976 1027

(%i34) raiodeterra: 6.37814e8;
(%o34) 6.37814 108

(%i35) ritterra: 1.496e13;
(%o35) 1.496 1013

(%i36) Tterra: 1*24*60*60;
(%o36) 86400

(%i37) wterra: 2*pi/Tterra, numer;
(%o37) 7.27220521664304 10-5

```

```

(%i38) muplanetaterra:mterra*wterra*raiodeterra^2/(5*c);
(%o38) 1.179435248572817 1030

(%i39) B:-G*musol/(r1terra^3);
(%o39) 3.4235565604796 10-9

(%i40) F:12*G*musol*muplanetaterra/r1terra^4;
(%o40) 3.238927767041999 109

(%i41) Frazao:F/(G*M*mterra/r1terra^2);
(%o41) 9.184654768935492 10-19

(%i42) lterra:mterra*r1terra^2*wterra;
(%o42) 9.72612623016604 1049

(%i43) avanco:6*pi^4*G*muplanetaterra*musol*mterra/(r1terra*(lterra)^2)
*100*206265, numer;
(%o43) 8.878349517915039 10-16
Terra com FL

(%i44) deltaphi0:6*pi^4*G*musol*mterra/(3*c*lterra*r1terra)
*100*206265, numer;
(%o44) 8.140593695262191 10-7
Cálculo para Marte

(%i45) mmarte:6.42e26;
(%o45) 6.42 1026

(%i46) raiodemarte:3.3972e8;
(%o46) 3.3972 108

(%i47) rlmarte:2.2794e13;
(%o47) 2.2794 1013

(%i48) Tmarte:24.6229*60*60;
(%o48) 88642.44

```

```

(%i49) wmarte:2*pi/Tmarte, numer;
(%o49) 7.088235959185674 10-5

(%i50) muplanetamarte:mmarte*wmarte*raiodemarte^2/(5*c);
(%o50) 3.503682289750089 1028

(%i51) B:-G*msol/(rmarte^3);
(%o51) 9.678557978411774 10-10

(%i52) F:12*G*msol*muplanetamarte/rmarte^4;
(%o52) 1.785237808859214 107

(%i53) Frazao:F/(G*M*mmarte/rmarte^2);
(%o53) 1.093984356072496 10-19

(%i54) lmarte:mmarte*rmarte^2*wmarte;
(%o54) 2.364363695688013 1049

(%i55) avanço:6*pi*4*G*muplanetamarte*msol*mmarte/(rmarte*(lmarte)^2)
*Tterra/Tmarte*100*206265, numer;
(%o55) 3.06719665099438 10-17

Marte com FL

(%i56) deltaphi0:6*pi*4*G*msol*mmarte/(3*c*lmarte*rmarte)
*Tterra/Tmarte*100*206265, numer;
(%o56) 2.301384734454364 10-7

Cálculo para Júpiter

(%i57) mjupiter:1.9e30;
(%o57) 1.9 1030

(%i58) raiodejupiter:7.1492e9;
(%o58) 7.1492 109

(%i59) rljupiter:7.7833e13;
(%o59) 7.7833 1013

```

```

(%i60) Tjupiter:0.41354*24*60*60;
(%o60) 35729.856

(%i61) wjupiter:2*pi/Tjupiter, numer;
(%o61) 1.758525225284867 10-4

(%i62) muplanetajupiter:mjupiter*wjupiter*raiodejupiter^2/(5*c);
(%o62) 1.139269286823476 1035

(%i63) B:-G*musol/(r1jupiter^3);
(%o63) 2.430977711844666 10-11

(%i64) F:12*G*musol*muplanetajupiter/r1jupiter^4;
(%o64) 4.269970183429198 1011

(%i65) Frazao:F/(G*M*mjupiter/r1jupiter^2);
(%o65) 1.030879154440443 10-17

(%i66) ljupiter:mjupiter*r1jupiter^2*wjupiter;
(%o66) 2.024089648845063 1054

(%i67) avanco:6*pi*4*G*muplanetajupiter*musol*mjupiter/(r1jupiter*(ljupiter)^2)
*Tterra/Tjupiter*100*206265, numer;
(%o67) 2.926160559666326 10-17

Jupter com FL

(%i68) deltaphi0:6*pi*4*G*musol*mjupiter/(3*c*ljupiter*r1jupiter)
*Tterra/Tjupiter*100*206265, numer;
(%o68) 5.780422050802426 10-9

Cálculo para Saturno

(%i69) msaturno:5.688e29;
(%o69) 5.688 1029

(%i70) raioesaturno:60268e5;
(%o70) 6.0268 109

```

(%i71) r1saturno:14294e10;

(%o71) 1.4294 10¹⁴

(%i72) Tsaturno:10.233*60*60;

(%o72) 36838.8

(%i73) wsaturno:2*pi/Tsaturno,numer;

(%o73) 1.705589027650082 10⁻⁴

(%i74) muplanetasaturno:msaturno*wsaturno*raiodesaturno^2/(5*c);

(%o74) 2.350806230686935 10³⁴

(%i75) B:-G*msol/(r1saturno^3);

(%o75) 3.924740568813818 10⁻¹²

(%i76) F:12*G*msol*muplanetasaturno/r1saturno^4;

(%o76) 7.74560339974589 10⁹

(%i77) Frazao:F/(G*M*msaturno/r1saturno^2);

(%o77) 2.106746104466044 10⁻¹⁸

(%i78) lsaturno:msaturno*r1saturno^2*wsaturno;

(%o78) 1.982172911361827 10⁵⁴

(%i79) avanco:6*pi*4*G*muplanetasaturno*msol*msaturno/(r1saturno*(lsaturno)^2)
*Tterra/Tsaturno*100*206265,numer;

(%o79) 9.954209585890405 10⁻¹⁹

Saturno com FL

(%i80) deltaphi0:6*pi*4*G*msol*msaturno/(3*c*lsaturno*r1saturno)
*Tterra/Tsaturno*100*206265,numer;

(%o80) 9.332317946442727 10⁻¹⁰

Cálculo para Urano

(%i81) murano:8.686e28;

(%o81) 8.686 10²⁸

(%i82) $raiodeurano:2.5559e9;$
 (%o82) $2.5559 \cdot 10^9$

(%i83) $rIurano:2.87099e14;$
 (%o83) $2.87099 \cdot 10^{14}$

(%i84) $Turano:17.9*60*60;$
 (%o84) 64440.0

(%i85) $wurano:2*\%pi/Turano,numer;$
 (%o85) $9.750442748571673 \cdot 10^{-5}$

(%i86) $muplanetaurano:murano*wurano*raiodeurano^2/(5*c);$
 (%o86) $3.69097556703034 \cdot 10^{32}$

(%i87) $B:-G*musol/(rIurano^3);$
 (%o87) $4.843700129686422 \cdot 10^{-13}$

(%i88) $F:12*G*musol*muplanetaurano/rIurano^4;$
 (%o88) 7472535.466592754

(%i89) $Fraza0:F/(G*M*murano/rIurano^2);$
 (%o89) $5.369334930307327 \cdot 10^{-20}$

(%i90) $lurano:murano*rIurano^2*wurano;$
 (%o90) $6.980837381431401 \cdot 10^{53}$

(%i91) $avanco:6*\%pi*4*G*muplanetaurano*musol*murano/(rIurano*(lurano)^2)*Tterra/Turano*100*206265,numer;$
 (%o91) $5.476857320985456 \cdot 10^{-21}$

Urano com FL

(%i92) $deltaphi0:6*\%pi*4*G*musol*murano/(3*c*lurano*rIurano)*Tterra/Turano*100*206265,numer;$
 (%o92) $1.151743633875941 \cdot 10^{-10}$

Cálculo para Netuno

```

(%i93) mnetuno:1.024e29;
(%o93) 1.024 1029

(%i94) raiodenetuno:2.4746e9;
(%o94) 2.4746 109

(%i95) r1netuno:4.5043e14;
(%o95) 4.5043 1014

(%i96) Tnetuno:16.11*60*60;
(%o96) 57995.99999999999

(%i97) wnetuno:2*pi/Tnetuno, numer;
(%o97) 1.083382527619074 10-4

(%i98) muplanetanetuno:mnetuno*wnetuno*raiodenetuno^2/(5*c);
(%o98) 4.532116799151438 1032

(%i99) B:-G*musol/(r1netuno^3);
(%o99) 1.254268060975921 10-13

(%i100) F:12*G*musol*muplanetanetuno/r1netuno^4;
(%o100) 1514416.717302508

(%i101) Frazao:F/(G*M*mnetuno/r1netuno^2);
(%o101) 2.272003680177881 10-20

(%i102) lnetuno:mnetuno*r1netuno^2*wnetuno;
(%o102) 2.250797375472441 1054

(%i103) avanco:6*pi*4*G*muplanetanetuno*musol*mnetuno/(r1netuno*(lnetuno)^2)
          *Tterra/Tnetuno*100*206265, numer;
(%o103) 5.401017528207676 10-22

```

Netuno com FL


```
(%i104)deltaphi0:6*pi*4*G*musol*mnetuno/(3*c*lnetuno*rinetuno)
      *Tterra/Tnetuno*100*206265, numer;
```

```
(%o104)2.982420909067424 10-11
```

Anexo A - Fórmulas Vetoriais

A.1 RELAÇÕES VETORIAIS

Este apêndice tem como objetivo apresentar um resumo da análise vetorial, contendo fórmulas que foram úteis nesse trabalho nas aplicações em eletrodinâmica. Vamos considerar que \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} são campos vetoriais arbitrários. Teremos as seguintes relações:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (\text{A.6})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (\text{A.7})$$

A.2 RELAÇÕES DIFERENCIAIS

A.2.1 Coordenadas Cartezianas

$$\nabla \phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{e}}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{e}}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{e}}_z \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (\text{A.11})$$

A.2.2 Coordenadas esféricas

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r \text{sen} \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (\text{A.12})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \text{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\text{sen} \theta A_\theta) + \frac{1}{r \text{sen} \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \text{sen} \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\text{sen} \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{e}}_r + \left[\frac{1}{r \text{sen} \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\mathbf{e}}_\phi. \quad (\text{A.14})$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen} \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \quad (\text{A.15})$$

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

^{1.} CLASSIFICAÇÃO/TIPO <p style="text-align: center;">DM</p>	^{2.} DATA <p style="text-align: center;">09 de agosto de 2016</p>	^{3.} REGISTRO N° <p style="text-align: center;">DCTA/ITA/DM-053/2016</p>	^{4.} N° DE PÁGINAS <p style="text-align: center;">67</p>
^{5.} TÍTULO E SUBTÍTULO: <p>Gravitomagnetismo no sistema solar.</p>			
^{6.} AUTOR(ES): <p>Flavia Pereira da Rocha</p>			
^{7.} INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): <p>Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA/IEF</p>			
^{8.} PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: <p>Relatividade Geral, Gravitomagnetismo, Efeito Lense-Thirring.</p>			
^{9.} PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: <p>Campos gravitacionais; Eletromagnetismo; Mercúrio (planeta); Leis de Kepler; Teoria da relatividade; Sistema solar; Astrofísica; Física.</p>			
^{10.} APRESENTAÇÃO: <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 5px;"> <input checked="" type="checkbox"/> Nacional <input type="checkbox"/> Internacional </div> <p>ITA, São José dos Campos. Curso de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Física. Área de Física Nuclear. Orientador: Prof. Dr. Manuel Máximo Bastos Malheiro de Oliveira. Defesa em 08/08/2016. Publicada em 2016.</p>			
^{11.} RESUMO: <p>Em 1918, Josef Lense e Hans Thirring descobriram o efeito gravitomagnético (GM) quando estudavam soluções para as equações de campo de Einstein usando aproximação de campo fraco. Eles perceberam que na aproximação de campo fraco as equações de Einstein podem ser escritas numa forma similar às equações de Maxwell, então o gravitomagnetismo pode ser aplicado para sistemas astrofísicos com a massa assumindo o papel de carga, quando o campo é fraco. Nesse trabalho, apresentamos a dedução das equações gravitoeletromagnéticas e do análogo à força de Lorentz no eletromagnetismo e apresentamos o experimento Gravity Probe B, desenvolvido pela NASA e a universidade de Stanford, para testar a relatividade geral, em particular o efeito de precessão Lense-Thirring. Analisamos os efeitos gravitomagnéticos no Sistema Solar, e em especial o avanço do periélio da órbita de Mercúrio. Dois modelos para essa análise são propostos: um usando a interação de dipolo-dipolo e outro a força de Lorentz entre o Sol e o planeta. Concluímos, como esperado pelas Leis de Kepler, que os efeitos gravitomagnéticos são desprezíveis em relação à força gravitacional Newtoniana entre o Sol e o planeta e como consequência não consegue explicar o avanço do periélio da órbita de Mercúrio, que é um efeito não linear das equações de Einstein.</p>			
^{12.} GRAU DE SIGILO: <p style="text-align: center;"> <input checked="" type="checkbox"/> OSTENSIVO <input type="checkbox"/> RESERVADO <input type="checkbox"/> SECRETO </p>			